



سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

و...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

<https://t.me/riazisara>



(@riazisara)

گزینه ۴ ←

۱) برای اینکه زیرادکمل نامنظم باشد، در حالت رخ داده
 $x+1 \geq 0$ و $f(x) \geq 0$
 $x \geq -1$ و $[-2, +\infty) \cup [-3, -1]$ $\rightarrow [-2, +\infty) \cup \{-1, -3\}$

۲) در صورتی که جوابها ۸ می باشد
 $x+1 < 0$ و $f(x) < 0$
 $x < -1$ و $(-\infty, -3) \cup (-1, 2)$ $\rightarrow (-\infty, -3)$

$12 - (-3, 2)$

۳) جوابهای معادله ۵ می باشد.

$a_n, \frac{99}{100}a_n, \dots$

گزینه ۲ ←

۱) فرض می کنیم قیمت در ابتدا a_n باشد، قیمت در یک سال بعد طبق رابطه $a_n - \frac{1}{100}a_n = \frac{99}{100}a_n$ معادله می شود.

$t_n = a_n \left(\frac{99}{100}\right)^n$ می باشد.

۲) جمله ی عمومی دنباله به صورت

$a_n \left(\frac{99}{100}\right)^n = \frac{1}{2} a_n$ $\rightarrow \log \left(\frac{99}{100}\right)^n = \log \frac{1}{2}$
 $\log \frac{99}{100} = \log \frac{1}{2}$

۳) معادله را تشکیل می دهیم:

$\rightarrow n = \log_{\frac{99}{100}} \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{تغییر صفت}} n = \frac{\log \frac{1}{2}}{\log \frac{99}{100}} = \frac{-\log 2}{\log 99 - \log 100} = \frac{-\frac{1}{3}}{1.995 - 2} = \frac{-\frac{1}{3}}{-\frac{1}{200}} = 60$

$n = 60$

$\log(2n-5) + \log(n+1) = \log(4n-1)$

گزینه ۴ ←

$\log(2n-5)(n+1) = \log(4n-1) \rightarrow (2n-5)(n+1) = (4n-1)$

$\rightarrow 2n^2 + 2n - 5n - 5 = 4n - 1 \rightarrow 2n^2 - 7n - 4 = 0 \rightarrow \Delta = 49 - 4(2)(-4) = 49 + 32 = 81$

$\rightarrow n = \frac{7 \pm 9}{4} \rightarrow \begin{cases} \frac{7+9}{4} = \frac{16}{4} = 4 \checkmark \\ \frac{7-9}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \times \end{cases} \rightarrow \log_3 2n+1 = \log_3 9 = \log_3 3^2 = 2$

گزینه ۳ ←

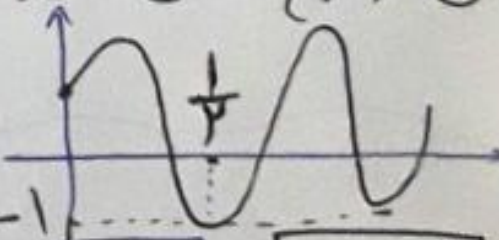
$\frac{y}{b} = \frac{2}{3} \leftarrow \frac{2\pi}{b\pi} = \frac{2}{3} \rightarrow b = 3$

۱) بلتوجه به شکل دوره ی متناوب یکبار $\frac{2}{3}$ است.

$y = 1 + a \sin 3\pi x$

۲) از یک مشتق می گیریم:

$y' = +3\pi a \cos 3\pi x = 0 \rightarrow \cos 3\pi x = 0 \rightarrow 3\pi x = \frac{3\pi}{2} \rightarrow x = \frac{1}{2}$



$f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + a \sin 3\pi \times \frac{1}{2} \rightarrow 1 + a \sin \frac{3\pi}{2} = -1$ $\rightarrow 1 - a = -1 \rightarrow -a = -2 \rightarrow a = 2 \rightarrow a+b = 5$

گزینه ۱ ← [۱]

① $x-2=0 \rightarrow x=+2 \rightarrow P(2)=1$

② $x+3=0 \rightarrow x=-3 \rightarrow P(-3)=-4$

③ $P(x) = (x^2 + x - 2) Q(x) + ax + b$

رابطه شماره ۳ اصل تقسیم است و چون مقسوم علیه از درجه ۲ است، لذا باقی مانده از درجه ۱ خواهد بود.

④ $x=2 \rightarrow P(2) = 2a + b = 1$

⑤ $x=-3 \rightarrow P(-3) = -3a + b = -4$

$$\begin{cases} 2a + b = 1 \\ -3a + b = -4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2a - b = -1 \\ -3a + b = -4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -5a = -5 \\ a = 1 \end{cases}$$

$\rightarrow 2a + b = 1 \rightarrow 2(1) + b = 1 \rightarrow 2 + b = 1 \rightarrow b = -1$

باقی مانده = $ax + b \rightarrow x - 1$

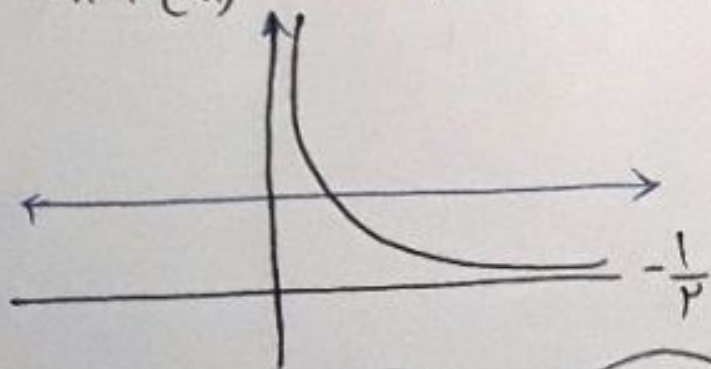
گزینه ۳ ← [۳]

$$\frac{f}{g} = \frac{2-|x+1|}{x+|x|}$$

① x نمی تواند $(x \leq 0)$ باشد، زیرا در این صورت مخرج کسر منفی شده و تعریف نشده می شود، پس $x > 0$ است.

② تابع همگرا نیست، از رسم می بینیم.

$x > 0 \rightarrow \frac{f}{g} = \frac{2-(x+1)}{x+(x)} = \frac{2-x-1}{2x} = \frac{-x+1}{2x}$



$\rightarrow R = (-\frac{1}{2} + \infty)$

گزینه ۳ ← [۳]

نکته: تابعی که نه زوج و نه فرد است را می توان به صورت جمع دو تابع زوج و یک تابع فرد نوشت:

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

$f(x) = \frac{1}{x-2}$

$h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} \rightarrow h(x) = \frac{\frac{1}{x-2} - \frac{1}{-x-2}}{2} \rightarrow h(4) = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{-6}}{2}$

$\rightarrow h(4) = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{6}}{2} = \frac{\frac{2}{3}}{2} = \frac{2}{12} = \frac{1}{3}$

گزینہ ۱۰۸ ← ۲

۱) طبق رابطہ $\sin P - \sin Q = 2 \cos \frac{P+Q}{2} \sin \frac{P-Q}{2}$ متواند بہتر تبدیل کنند.

$$\sin 2\alpha - \sin \alpha + 2 \sin^2 \alpha = 2$$

$$2 \cos 2\alpha \sin \alpha + 2(1 - \cos^2 \alpha) = 2 \rightarrow 2 \cos 2\alpha \sin \alpha + 2 - 2 \cos^2 \alpha = 2$$

$$\rightarrow 2 \cos 2\alpha \sin \alpha - 2 \cos^2 \alpha = 0 \rightarrow 2 \cos 2\alpha (\sin \alpha - \cos \alpha) = 0$$

$$\rightarrow \boxed{\alpha = (2K+1) \frac{\pi}{4}} \quad \text{یا} \quad \boxed{\alpha = 2K\pi + \frac{\pi}{4}}$$

گزینہ ۱۰۹ ← ۱۱

۱) ابتدا عبارت داخل پرانتز را محاسبہ می کنیم:

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \frac{1}{\sqrt{3}} \tan \frac{4\pi}{3} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \tan \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \tan \left(2\pi + \pi - \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \tan \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) = -\frac{1}{\sqrt{3}} \tan \frac{\pi}{3} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{3}} \times \sqrt{3} = -1 \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} \quad \sin^{-1} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -\sin^{-1} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \boxed{-\frac{\pi}{3}}$$

گزینہ ۱۱۰ ← ۴

$$\textcircled{1} \quad \sqrt{2 + 2 \cos \alpha} = \sqrt{2(1 + \cos \alpha)} = \sqrt{2 \left(2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \right)} = \sqrt{4 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}$$

$$= 2 \left| \cos \frac{\alpha}{2} \right| = -2 \cos \frac{\alpha}{2}$$

$$\left[\alpha > \pi \rightarrow \frac{\alpha}{2} > \frac{\pi}{2} \rightarrow \text{عبارت داخل قدر مطلق} \ominus \text{ است.} \right]$$

۲) عبارت را تسکیل می دهیم:

$$\lim_{\alpha \rightarrow \pi^+} \frac{\sin \alpha - \sin^3 \alpha}{-2 \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{\alpha \rightarrow \pi^+} \frac{\cos \alpha - 3 \cos^3 \alpha}{-\sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{\cos \pi - 3 \cos^3 \pi}{-\sin \frac{\pi}{2}} = \frac{-1 + 3}{-1} = \boxed{2}$$

$\alpha \rightarrow \pi^+$

$\alpha \rightarrow \pi^+$

گزینہ ۱۱۱ ← سؤال غلط است.

$$\textcircled{1} \quad \text{عبارت} \quad \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} \quad \text{برابر} \quad f'(3) \quad \text{می باشد. برای اینکه} \quad f'(3) \quad \text{معنی} \quad f(3) \quad \text{مشتق} \quad \text{در} \quad x=3$$

داشته باشد باید در $x=3$ پیوستگی چپ داشته باشد. در ادامه به بررسی پیوستگی چپ و راست $f(x)$ در $x=3$ می پردازیم:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 3^-} f(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow 3^-} \frac{\alpha^2}{|1-\alpha|} = \frac{9}{2} \times [3] = \frac{9}{2} \times 2 = \boxed{9}, \quad f(3) = \frac{9}{2} \times 3 = \frac{27}{2}$$

$\alpha \rightarrow 3^-$

$\alpha \rightarrow 3^-$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{\alpha \rightarrow 3^-} f(\alpha) \neq f(3)}$$

۱۱۲) خزائن سے ۱

② $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2} \rightarrow x^2$

۱۱۳) گزینی سے ۲

(2) $\left| \frac{q_{n-2} - q_{n-10}}{(r)(r_{n+10})} \right| < \frac{1}{100} \rightarrow \left| \frac{-14}{r_{n+10}} \right| < \frac{1}{100} \rightarrow \frac{14}{r_{n+10}} < \frac{1}{100} \rightarrow$ طرفه وسطيني

۱۱۴ خزائن — ۱

(۲) به صورت کسر + و - را اضافه می‌کنیم:

$$\frac{n+1-1}{n+1} = \frac{n+1}{n+1} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

(۳)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n^r} = e$$

(۴)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{-n^r}{(n+1)^r} \times h^r}{\Gamma n} = e$$

(۵)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-n^r}{\Gamma n (n+1)^r} = e$$

(۶)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-n^r}{\Gamma n^n} = e$$

(۷)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-n}{r} = -\infty$$

(۸)

$$= e = \boxed{0}$$

۱۱۵ خزینہ ← ۲

① باید از بیع در نقطه‌ای منفرد بگیهیم و چون منفرد کسریه ازای منفرد $\frac{0}{0}$ شد و رفع ابهام نکند:

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n+a} - b}{n} \xRightarrow{H \cdot O} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt[n]{(n+a)^n}}}{1} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^n}} = \frac{1}{1^n} \rightarrow \sqrt[n]{a^n} = 1^n$

$\rightarrow \sqrt[n]{a^n} = 1 \xrightarrow{\text{potenza } n} a^n = 1^n \rightarrow a = \pm 1$

$\sqrt[n]{a} = b \rightarrow \sqrt[n]{1} = 1 \rightarrow b = 1$

$\sqrt[n]{a} = b \rightarrow \sqrt[n]{-1} = -1 \rightarrow b = -1$

لازمه ۲

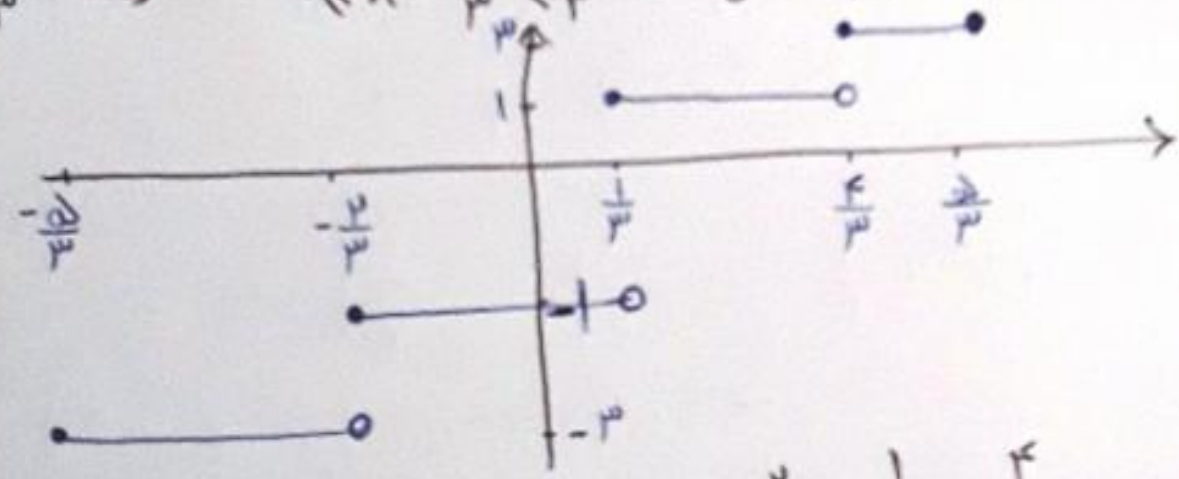
$$f(x) = \left[x - \frac{1}{3} \right] + \left[x + \frac{2}{3} \right]$$

۱) نمودار تابع $f(x)$ را رسم می‌کنیم:

$$f(x) = \left[x - \frac{1}{3} \right] + \left[x + 1 - \frac{1}{3} \right] = \left[x - \frac{1}{3} \right] + \left[x - \frac{1}{3} \right] + 1$$

$$f(x) = 2 \left[x - \frac{1}{3} \right] + 1 \quad -\frac{2}{3} \leq x \leq \frac{4}{3}$$

- ① $-\frac{2}{3} \leq x < -\frac{1}{3} \xrightarrow{+(-\frac{1}{3})} -2 \leq x - \frac{1}{3} < -1 \rightarrow \left[x - \frac{1}{3} \right] = -2 \rightarrow f(x) = 2x - 2 + 1 = -3$
- ② $-\frac{1}{3} \leq x < \frac{1}{3} \xrightarrow{+(-\frac{1}{3})} -1 \leq x - \frac{1}{3} < 0 \rightarrow \left[x - \frac{1}{3} \right] = -1 \rightarrow f(x) = 2x - 1 + 1 = -1$
- ③ $\frac{1}{3} \leq x < \frac{2}{3} \xrightarrow{+(-\frac{1}{3})} 0 \leq x - \frac{1}{3} < 1 \rightarrow \left[x - \frac{1}{3} \right] = 0 \rightarrow f(x) = 2x + 1 = 1$
- ④ $\frac{2}{3} \leq x \leq \frac{4}{3} \xrightarrow{+(-\frac{1}{3})} 1 \leq x - \frac{1}{3} \leq \frac{4}{3} \rightarrow \left[x - \frac{1}{3} \right] = 1 \rightarrow f(x) = 2x + 1 = 3$



باتوجه به شکل تابع در نقاط $x = -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3}$ متناهی بوده می‌باشد.

۱۱۷) گزینه ۴

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - x$$

$$y' = -x^2 + 4x - 1$$

۱) بیشترین شیب مماس یعنی $\max y'$ به y' باتوجه به اینکه y'

منواریک سهمی و $(a < 0)$ می‌باشد، پس y' که $\max$ دارد و می‌توانه با قرار دادن $-\frac{b}{2a}$ در آن مقدار $\max$ را محاسبه کرد.

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2 \times -1} = \frac{-4}{-2} = +2 \quad \text{و} \quad y'(2) = -(2)^2 + 4(2) - 1 = -4 + 8 - 1 = 3$$

$$f(2) = -\frac{1}{3}(2)^3 + 2(2)^2 - 2$$

۲) $x = 2$ را در $f(x)$ قرار می‌دهیم و عرض نقطه را بیابیم.

$$f(2) = -\frac{1}{3} + \frac{4}{1} - \frac{2}{1} = \frac{-1 + 4 - 2}{3} = \frac{1}{3} \rightarrow A\left(2, \frac{1}{3}\right) \quad m = 3$$

۳) معادله خط را می‌نویسیم.

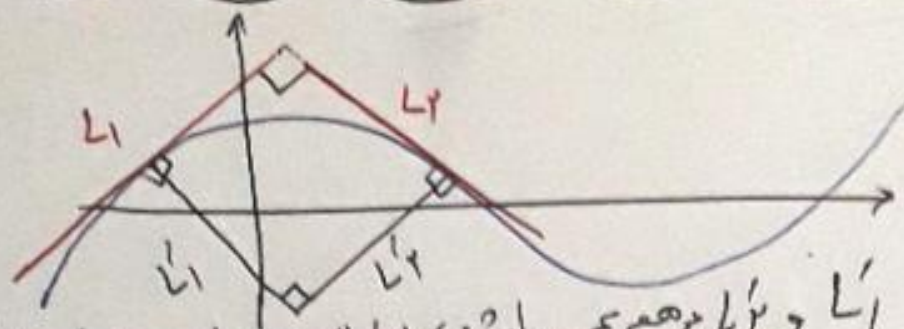
$$y - \frac{1}{3} = 3(x - 2) \rightarrow y = 3x - 6 + \frac{1}{3} \rightarrow y = 3x - \frac{17}{3}$$

$$y = -\frac{1}{3}$$

۴) $x = 0$ را در معادله خط جایگذاری می‌کنیم.

۱۱۸ گزینی ← ۳

به مثال زیر دقت کنید:



دو خط L_1 و L_2 به هم مماس هستند، فرض کنید خطوط قائم L'_1 و L'_2 برهم عمود باشند، لذا با مقدار دادن L_1 و L_2 ، آنها نیز برهم عمود می شود. می دانیم در دو خط عمود برهم عمود است شیب ها (-1) می شود. لذا باید یکی از خطوط مماس دارای شیب مثبت و دیگری دارای شیب منفی باشد. لذا از توابع داده شده مشتق می گیریم و این موضوع را بررسی می کنیم:

$$① y = x\sqrt{x^2+1} \rightarrow y' = \sqrt{x^2+1} + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \times x = \sqrt{x^2+1} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x^2+1+x^2}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$y' > 0$ است، لذا در تمامی نقاط شیب خط مماس مثبت بوده و این گزینی نمی باشد.

$$② y = x + \sqrt{x^2+1} \rightarrow y' = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{\sqrt{x^2+1} + x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$y' > 0$ است، پس این گزینی هم نمی باشد.

$$③ y = \sin^2 x \rightarrow y' = 2 \cos^2 x \rightarrow y'(0) = 2 \rightarrow m_1 = 2 \rightarrow m_2 = -\frac{1}{2}$$

$$2 \cos^2 x = -\frac{1}{2} \rightarrow \cos^2 x = -\frac{1}{4}$$

معادله جواب دارد و لذا در این سطح می توان دو خط مماس عمود برهم پیدا کرد.

$$④ y = \cos \frac{x}{2} \rightarrow y' = -\frac{1}{2} \sin \frac{x}{2} \rightarrow y'(\pi) = -\frac{1}{2} \rightarrow m_1 = -\frac{1}{2} \rightarrow m_2 = 2$$

$$-\frac{1}{2} \sin \frac{x}{2} = 2 \rightarrow \sin \frac{x}{2} = -4$$

معادله جواب ندارد. لذا گزینی ۴ هم نمی باشد.

$$[-1 \leq \sin x \leq 1]$$

$$xy^2 + x^3 = 10$$

۱۱۹ گزینی ← ۳

$$y^3 + 3y^2y'x + 3x^2y' = 0$$

$$9 + 9y' + 3 = 0 \rightarrow 9y' = -12 \rightarrow y' = -\frac{4}{3}$$

① از یک به معنی داده شده مشتق بگیریم و $\left[\begin{matrix} x=1 \\ y=3 \end{matrix} \right]$ جایگذاری کنید.

② از یک به دوباره مشتق بگیریم و $\left[\begin{matrix} x=1 \\ y=3 \end{matrix} \right]$ جایگذاری کنید.

$$2y'y' + 2y''yx + (y'x + y)(2y') + 6x = 0$$

$$-12 + 4y'' + (-2+3)(-4) + 6 = 0 \rightarrow -12 + 4y'' - 4 + 6 = 0 \rightarrow 4y'' = 10 \rightarrow y'' = \frac{5}{2}$$

$$(\omega, \alpha) \in f^{-1} \Rightarrow (\alpha, \omega) \in f \Rightarrow f(\alpha) = \omega$$

۱۲۰ گزینی ← ۱

$$(f^{-1})'(\omega) = \frac{1}{f'(\alpha)} = \frac{1}{\sqrt{1+3f(\alpha)}} = \frac{1}{\sqrt{1+3 \times 5}} = \frac{1}{\sqrt{1+15}} = \frac{1}{\sqrt{16}} = \frac{1}{4}$$

$$M(x, y) \rightarrow M(x, \sqrt{20x - x^2})$$

$$y = \sqrt{20x - x^2} \rightarrow O(0,0)$$

$$d = \sqrt{x^2 + 20x - x^2} = \sqrt{20x}$$

$$d' = \frac{10 \times x'}{\sqrt{20x}} = \frac{10x'}{\sqrt{20x}} \rightarrow \frac{1}{10} = \frac{10x'}{\sqrt{20 \times 5}} \rightarrow x' = \frac{1}{10} = \frac{1}{5}$$

۱۲۱ گزینی ← ۴

۱۲۲) گزینه ۳

۱) محور دامنه ی تابع $f = [-1, 3]$ می باشد پس $a = -1$ و $a = 3$ ریشه های داخل را داریم هستند

$$① - (-1)^2 + a(-1) + b = 0 \rightarrow -1 - a + b = 0 \rightarrow \boxed{-a + b = 1}$$

$$② - (3)^2 + a(3) + b = 0 \rightarrow -9 + 3a + b = 0 \rightarrow \boxed{3a + b = 9}$$

۲) داخل دستگاه معادله a و b را معادله می کنیم:

$$(-1) \times \begin{cases} -a + b = 1 \\ 3a + b = 9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a - b = -1 \\ 3a + b = 9 \end{cases} \rightarrow 4a = 8 \rightarrow \boxed{a = 2} \rightarrow -a + b = 1 \rightarrow -2 + b = 1 \rightarrow \boxed{b = 3}$$

۳) از جمع مشتق می گیریم و نقطه ی man مطلق را می یابیم.

$$y = x + \sqrt{-x^2 + 2x + 3}$$

$$y' = 1 + \frac{-2x + 2}{2\sqrt{-x^2 + 2x + 3}} \rightarrow y' = 1 + \frac{-x + 1}{\sqrt{-x^2 + 2x + 3}} = 0$$

$$\sqrt{-x^2 + 2x + 3} - x + 1 = 0 \rightarrow \sqrt{-x^2 + 2x + 3} = x - 1$$

بخواهیم $-x^2 + 2x + 3 = x^2 - 2x + 1$

[جلوی را در یک پایه با هم] $\boxed{x \geq 1}$ پس

$$\rightarrow 2x^2 - 4x - 2 = 0 \div 2 \rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \rightarrow \Delta = (-2)^2 - 4(1)(-1) \rightarrow \Delta = 4 + 4 = 8$$

$$\rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} \rightarrow \begin{cases} \frac{2 + 2\sqrt{2}}{2} = \frac{2(1 + \sqrt{2})}{2} = 1 + \sqrt{2} \checkmark \\ \frac{2 - 2\sqrt{2}}{2} = \frac{2(1 - \sqrt{2})}{2} = 1 - \sqrt{2} \times \end{cases}$$

۴) با توجه به شکل $f(1 + \sqrt{2})$ مقدار man مطلق می باشد.

$$f(1 + \sqrt{2}) = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{-(1 + \sqrt{2})^2 + 2(1 + \sqrt{2}) + 3}$$

$$= 1 + \sqrt{2} + \sqrt{-1 - 2\sqrt{2} - 2 + 2 + 2\sqrt{2} + 3} = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{2} = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{2}$$

$$= \boxed{1 + 2\sqrt{2}}$$

۱۲۳) گزینه ۱

$$\bar{f} = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b - a} \rightarrow \bar{f} = \frac{\int_1^3 \frac{x^2 - 1}{x} dx}{3 - 1}$$

۱) ابتدا انتگرال نامعین را معادله می کنیم.

$$① \int \frac{x^2 - 1}{x} dx = \int (x - \frac{1}{x}) dx = \frac{x^2}{2} - \ln x \Big|_1^3 = (\frac{9}{2} - \ln 3) - (\frac{1}{2} - \ln 1)$$

$$= \frac{9}{2} - \ln 3 - \frac{1}{2} = \frac{8}{2} - \ln 3 = 4 - \ln 3$$

۲) در فرمول $\bar{f}$ قرار می دهیم:

$$② \bar{f} = \frac{4 - \ln 3}{2} = \frac{4}{2} - \frac{\ln 3}{2} = 2 - \frac{1}{2} \ln 3 = \boxed{2 - \ln \sqrt{3}}$$

✓

$$F(u) = (3u-2) \int_4^{2u} e^{-u^2} du$$

(۱۲۴) گزینی ← [۲]

$$\left(\int_{g(u)}^{h(u)} f(t) dt \right)' = h'(u) f(h(u)) - g'(u) f(g(u))$$

نکته:

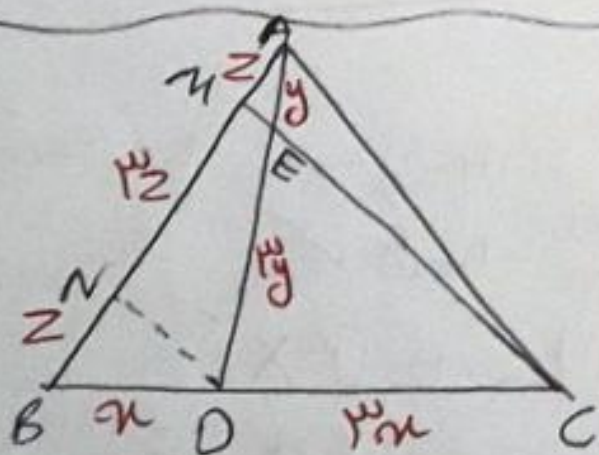
$$F'(u) = 3 \int_4^{2u} e^{-u^2} du + (3u-2) e^{-4u^2}$$

$$F'(2) = 3 \int_4^0 e^{-u^2} du + 2e^{-16} \times 4$$

$$F'(2) = 8e^{-16}$$

(۱۲۵) گزینی ← [۴]

از برخورد خطها زوای داخلی یک مستطیل، مربع و متوازی السطوبه



(۱۲۶) گزینی ← [۳]

$$BD = \frac{1}{4} BC \rightarrow (BD \parallel AC \text{ فرض می کنیم}) \quad (1)$$

$$x = \frac{1}{4} BC \rightarrow BC = 4x$$

$$BC = BD + DC$$

$$4x = x + DC \rightarrow DC = 3x$$

$$AE = \frac{1}{4} AD \quad (AE \parallel BD \text{ فرض می کنیم}) \quad (2)$$

$$y = \frac{1}{4} AD \rightarrow AD = 4y$$

$$AD = AE + ED$$

$$4y = y + ED \rightarrow ED = 3y$$

$$\Delta AND \quad (ME \parallel ND) \Rightarrow$$

$$\frac{AM}{MN} = \frac{AE}{ED} \rightarrow \frac{AM}{MN} = \frac{y}{3y} \rightarrow \frac{AM}{MN} = \frac{1}{3} \quad (3)$$

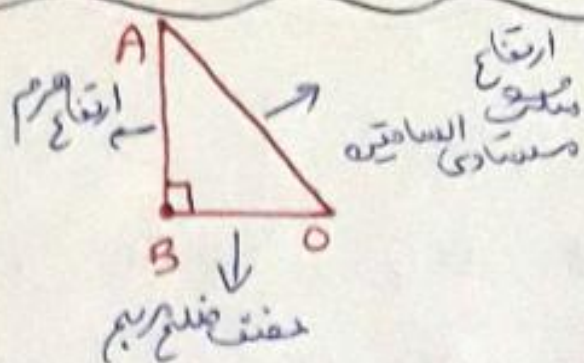
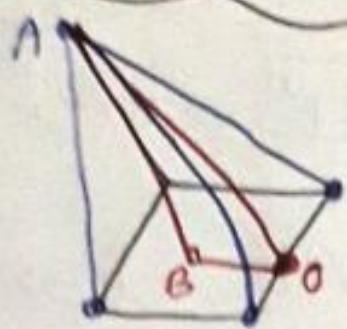
$$\rightarrow \frac{AM}{MN} = \frac{1}{3} \rightarrow MN = 3AM$$

$$\Delta MBC \quad (ND \parallel CM) \Rightarrow$$

$$\frac{BN}{MN} = \frac{BD}{DC} \rightarrow \frac{BN}{3AM} = \frac{x}{3x}$$

$$\rightarrow \frac{BN}{3AM} = \frac{1}{3} \rightarrow BN = AM$$

(۸)



گزینی ۱۲۷ ← ۴

۱) به کمک میناکورت طول منتهای مربع را معادل می کنیم.

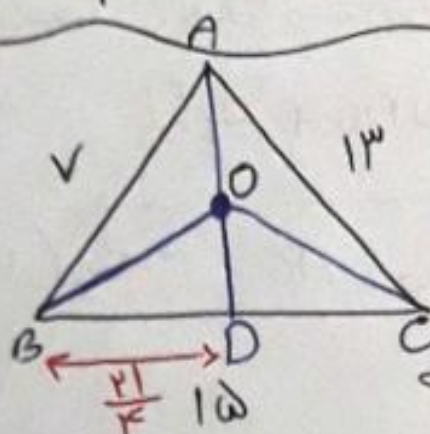
$$OA^2 = OB^2 + AB^2$$

$$(2\sqrt{5})^2 = OB^2 + 4^2 \rightarrow 20 = OB^2 + 16 \rightarrow OB^2 = 20 - 16 \rightarrow OB^2 = 4 \rightarrow OB = 2$$

$$\rightarrow \text{طول منتهای مربع} = 2OB = 2 \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

$$V = \frac{1}{3} Sh \rightarrow V = \frac{1}{3} \times (4\sqrt{3})^2 \times 4 = \frac{1}{3} \times 16 \times 3 \times 4 = 64$$

گزینی ۱۲۸ ← ۳

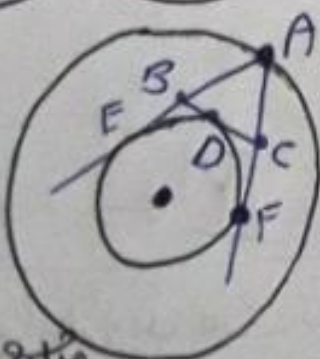


۱) با توجه به اینکه BC بزرگترین منتهای منتهای است، پس A بزرگترین زاویه منتهای است.

$$OA \text{ منتهای } A \text{ است} \rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} \rightarrow \frac{V}{13} = \frac{BD}{DC}$$

$$\rightarrow \frac{V}{V+13} = \frac{BD}{BD+DC} \rightarrow \frac{V}{20} = \frac{BD}{15} \rightarrow BD = \frac{V \times 15}{20} = \frac{3V}{4}$$

$$BO \text{ منتهای } B \text{ است} \rightarrow \frac{BD}{AB} = \frac{DO}{AO} \rightarrow \frac{\frac{3V}{4}}{V} = \frac{DO}{AO} \rightarrow \frac{DO}{AO} = \frac{3}{4}$$



$$AE = AF$$

۱) از نقطه A دو مماس AE و AF رسم شده اند پس

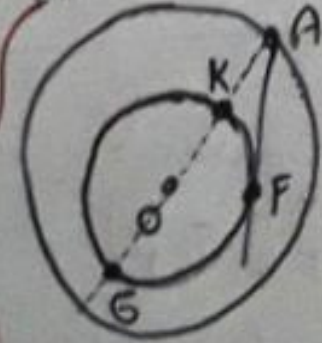
$$BE = BD$$

۲) از نقطه B دو مماس BE و BD رسم شده اند پس

$$CD = CF$$

۳) از نقطه C دو مماس CF و CD رسم شده اند پس

$$\rightarrow \text{محیط } ABC = AB + BD + DC + AC = \frac{AB + BE}{AE} + \frac{CF + AC}{AF} = \frac{AE}{AF} + AF = 2AF$$



۴) با توجه به شکل زیر AF بر دایره کوچک مماس و AG قاطع است.

$$\rightarrow AF^2 = AK \times AG \quad [R' = \text{شعاع دایره کوچک}, R = \text{شعاع دایره بزرگ}]$$

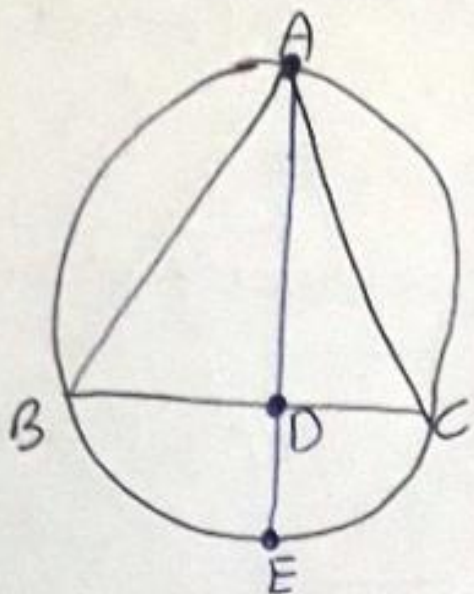
$$[AK = R - R'] [AG = R + R']$$

$$\rightarrow AF^2 = (R - R')(R + R') \rightarrow AF^2 = R^2 - R'^2 \rightarrow AF = \sqrt{R^2 - R'^2}$$

۵) با تغییر نقاط A و D شعاع دایره ها تغییر می کنند و لذا محیط ABC ثابت می ماند.

$$\rightarrow \text{محیط } ABC = 2AF = 2\sqrt{R^2 - R'^2} \quad S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A$$

(۱۳۰) گزینه‌ی ← [۳]



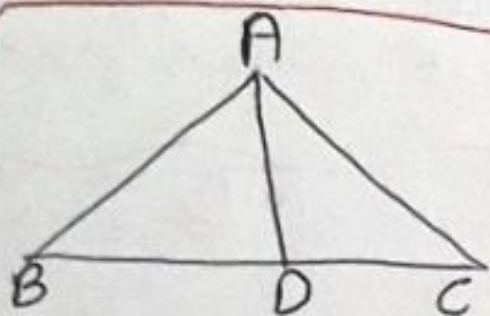
(۱) دو وتر AE و BC همدگر را در D قطع کرده اند پس داریم:

$$AD \times DE = BD \times DC$$

(۲) عبارت گفته شده را تشکیل می دهیم:

$$AD \times AE = AD \times (AD + DE) = AD^2 + AD \times DE$$

$$\Rightarrow AD^2 + BD \times DC$$



(۳) متنی گفته شده استوار است و هر مثلث به صورت زیر است:

$$BD \times AC^2 + DC \times AB^2 = BC (BD \times DC + AD^2)$$

پس نتیجه افکیه مثلث ABC برای سوال مسأله‌ی الساقیه است داریم:

$$\rightarrow BD \times AC^2 + DC \times AC^2 = BC (BD \times DC + AD^2)$$

$$\rightarrow AC^2 (BD + DC) = BC (BD \times DC + AD^2) \rightarrow AC^2 \times BC = BC (BD \times DC + AD^2)$$

$$\rightarrow AC^2 = BD \times DC + AD^2$$

(۴) از روابط (۲) و (۳) نتیجه می گیریم که:

$$\textcircled{۲} \leftarrow AD \times AE = AD^2 + BD \times DC \Rightarrow AD \times AE = AC^2$$

$$\textcircled{۳} \leftarrow AC^2 = AD^2 + BD \times DC$$

(۱۳۱) گزینه‌ی ← [۲]

نکته: ضابطه‌ی نگاشت تجانس با نسبت K و مرکز O (α, β) به صورت زیر است:

$$T(x, y) = (Kx + (1-K)\alpha, Ky + (1-K)\beta)$$

$$O(2, 1) \quad K = \frac{3}{2}$$

(۱) ابتدا ضابطه‌ی نگاشت تجانس را بدست می آوریم.

$$T(x, y) = \left(\frac{3}{2}x + (1 - \frac{3}{2}) \times 2, \frac{3}{2}y + (1 - \frac{3}{2}) \times 1 \right) = \left(\frac{3}{2}x - 1, \frac{3}{2}y - \frac{1}{2} \right)$$

$$x=0 \rightarrow 2y+0=4 \rightarrow y=2 \rightarrow A(0, 2)$$

$$x=2 \rightarrow 2y+2=4 \rightarrow 2y=2 \rightarrow y=1 \rightarrow B(2, 1)$$

(۲) دو نقطه از خط داده شده را بدست می آوریم:

(۳) مجانش نقاط A و B را تحت T(x, y) معکوس می کنیم:

$$T(0, 2) = (-1, 4) \rightarrow A'(-1, 4)$$

$$T(2, 1) = (2, \frac{5}{2}) \rightarrow B'(2, \frac{5}{2})$$

(۴) معادله‌ی خطی که از A' و B' می گذرد را می نویسیم:

$$m = \frac{4 - \frac{5}{2}}{-1 - 2} = \frac{\frac{3}{2}}{-3} = -\frac{1}{2} \rightarrow y - 4 = -\frac{1}{2}(x + 1) \rightarrow y - 4 = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$$

$$\rightarrow 2y + x = 7$$