

۱۲۶- اگر $\frac{3\pi}{2} < x < \pi$ باشد، حاصل $(2\sin^2 \frac{\pi}{4} - \sin^2 x) \sqrt{1 + \tan^2 x}$ ، کدام است؟

- (۱) $\sin x$ (۲) $\cos x$ (۳) $-\sin x$ (۴) $-\cos x$

پاسخ گزینه ۴

$$\sqrt{1 + \tan^2 x} (2\sin^2 \frac{\pi}{4} - \sin^2 x) = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x} (2(\frac{\sqrt{2}}{2})^2 - \sin^2 x)}$$

$$\xrightarrow{\text{ناحیه سوم}} \frac{-1}{\cos x} (1 - \sin^2 x) = \frac{-1}{\cos x} (\cos^2 x) = -\cos x$$

۱۲۷- سرعت یک قایق موتوری، در آب راکد ۱۰۰ متر در دقیقه است. این قایق فاصله ۱۲۰۰ متری در رودخانه را رفته و برگشته است. اختلاف زمان رفت و برگشت ۵ دقیقه است. سرعت آب رودخانه، چند متر در دقیقه است؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۱۵ (۳) ۲۰ (۴) ۲۵

پاسخ گزینه ۳

$$x = vt \rightarrow t = \frac{x}{v}$$

$$\left. \begin{aligned} t_1 &= \frac{1200}{100-v} \\ t_2 &= \frac{1200}{100+v} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{t_1 - t_2 = 5} \frac{1200}{100-v} - \frac{1200}{100+v} = 5 \rightarrow 1200 \left(\frac{1}{100-v} - \frac{1}{100+v} \right) = 5$$

$$\rightarrow 1200 \left(\frac{2v}{10000 - v^2} \right) = 5 \rightarrow 2400v = 5(10000 - v^2) \xrightarrow{+5} 4800v = 10000 - v^2 \rightarrow \begin{cases} v = -500 \text{ ق ق} \\ v = +20 \text{ ق ق} \end{cases}$$

توضیح: در رابطه $\frac{1200}{100-v} - \frac{1200}{100+v} = 5$ بدون تشکیل معادله، با جایگذاری گزینه‌ها می‌توان به عدد ۲۰ رسید.

۱۲۸- مجموعه جواب نامعادله $3 < \frac{2x-3}{x-1} < 1$ ، به کدام صورت است؟

- (۱) $R - [-6, 4]$ (۲) $R - [-4, 6]$ (۳) $x > 4$ (۴) $x < -6$

پاسخ گزینه ۱

روش اول:

$$1 < \frac{2x-3}{x+1} < 3 \Rightarrow \begin{cases} \frac{2x-3}{x+1} < 3 \Rightarrow \frac{2x-3-3x-3}{x+1} < 0 \Rightarrow \frac{-x-6}{x+1} < 0 \Rightarrow \\ 1 < \frac{2x-3}{x+1} \Rightarrow 0 < \frac{2x-3-x-1}{x+1} \Rightarrow 0 < \frac{-x-4}{x+1} \Rightarrow \end{cases}$$

x	-6	-1	$\rightarrow x \in \mathbb{R} - [-6, -1]$
$\frac{-x-6}{x+1}$	$-$	0	$+$
x	-1	$+4$	$\rightarrow x \in \mathbb{R} - [-1, 4]$
$\frac{-x-4}{x+1}$	$+$	0	$-$

}

$\cap \rightarrow x \in \mathbb{R} - [-6, 4]$

روش دوم: جایگذاری و حذف گزینه

۱۲۹- گل فروشی از ۸ نوع گل مختلف، به چند طریق، می تواند دسته گل های متمایز درست کند، به طوری که در هر دسته ۴ یا ۵ یا ۶ شاخه مختلف، موجود باشد؟

۱۶۸ (۴)

۱۵۴ (۳)

۱۴۰ (۲)

۱۲۶ (۱)

پاسخ گزینه ۳

$$\binom{8}{4} + \binom{8}{5} + \binom{8}{6} = 70 + 56 + 28 = 154$$

۱۳۰- اگر $3a + \sqrt{2a^2 + 4a} = 2$ باشد، عدد $\frac{a+1}{a}$ ، کدام است؟

۴/۵ (۴)

۳/۵ (۳)

۲/۵ (۲)

۱/۵ (۱)

پاسخ گزینه ۴

$$3a + \sqrt{2a^2 + 4a} = 2 \Rightarrow \sqrt{2a^2 + 4a} = 2 - 3a \longrightarrow 2a^2 + 4a = 4 + 9a^2 - 12a$$

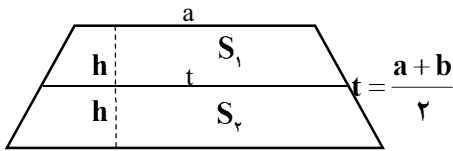
$$\Rightarrow 7a^2 - 16a + 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 & \text{غ ق ق} \\ a = \frac{2}{7} & \text{ق ق} \end{cases}$$

$$\frac{a+1}{a} = \frac{\frac{2}{7} + 1}{\frac{2}{7}} = \frac{\frac{9}{7}}{\frac{2}{7}} = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}$$

۱۳۱- در یک ذوزنقه، پاره‌خطی که وسط‌های دو ساق را به هم وصل کند، مساحت آن را به نسبت‌های ۱ و ۲ تقسیم می‌کند. نسبت قاعده‌های آن ذوزنقه، کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{6}$ (۲) $\frac{1}{5}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{2}{5}$

پاسخ گزینه ۲

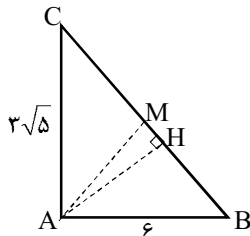


$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{h}{2} (a+t)}{\frac{1}{2} \cdot \frac{h}{2} (b+t)} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2a + 2t = b + t \Rightarrow 2a + t = b \Rightarrow 2a + \left(\frac{a+b}{2}\right) = b \xrightarrow{\times 2} 4a + a + b = 2b \Rightarrow 5a = b \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{1}{5}$$

۱۳۲- در مثلث قائم‌الزاویه ABC ، اضلاع قائم $AB = 3\sqrt{5}$ و $AC = 6$ ارتفاع AH و میانه AM رسم شده است. مساحت مثلث ABC ، چند برابر مساحت AMH است؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۲ (۳) ۱۵ (۴) ۱۸

پاسخ گزینه ۴



$$BC = \sqrt{(6^2) + (3\sqrt{5})^2} = \sqrt{36 + 45} = 9$$

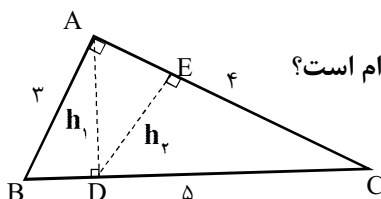
$$MB = \frac{BC}{2} = \frac{9}{2} = 4.5$$

$$AH \cdot BC = AB \cdot AC \Rightarrow AH(9) = 6(3\sqrt{5}) \Rightarrow AH = 2\sqrt{5}$$

$$(AB)^2 = BH \cdot BC \Rightarrow 36 = BH(9) \Rightarrow BH = 4 \xrightarrow{MH=MB-BH} MH = 4.5 - 0.5 = 0.5$$

$$\begin{cases} S_{ABC} = \frac{6(3\sqrt{5})}{2} = 9\sqrt{5} \\ S_{AMH} = \frac{(0.5)(2\sqrt{5})}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{AMH}} = \frac{9\sqrt{5}}{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)} = 18$$

۱۳۳- در شکل زیر، h_1 و h_2 ارتفاع‌های دو مثلث قائم‌الزاویه هستند. نسبت $\frac{h_2}{h_1}$ ، کدام است؟



$$\frac{3}{4} \quad (4) \qquad \frac{2}{3} \quad (3) \qquad \frac{4}{5} \quad (2) \qquad \frac{3}{5} \quad (1)$$

پاسخ گزینه ۲

$$BC = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{C} = \widehat{C} \\ \widehat{E} = \widehat{A} = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ADC \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{h_2}{h_1} = \frac{AC}{BC} = \frac{4}{5}$$

۱۳۴ - حاصل عبارت $\sin\left(\frac{17\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{-17\pi}{6}\right) + \tan\left(\frac{19\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{-11\pi}{6}\right)$ کدام است؟

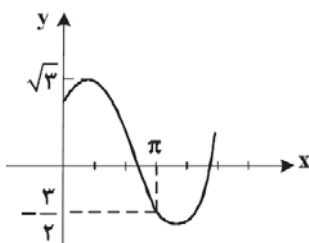
$$\frac{1}{2} \quad (4) \qquad \frac{1}{4} \quad (3) \qquad -\frac{1}{2} \quad (2) \qquad -\frac{1}{4} \quad (1)$$

پاسخ گزینه ۳

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin\left(\frac{17\pi}{3}\right) = \sin\left(-6\pi + \frac{17\pi}{3}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos\left(\frac{-17\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{17\pi}{6}\right) = \cos\left(\cancel{2\pi} + \frac{5\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \tan\left(\frac{19\pi}{4}\right) = \tan\left(+\cancel{4\pi} + \frac{3\pi}{4}\right) = \tan\frac{3\pi}{4} = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\tan\frac{\pi}{4} = -1 \\ \sin\left(\frac{-11\pi}{6}\right) = \sin\left(-\cancel{2\pi} + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + (-1)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

۱۳۵ - شکل روبه‌رو، به قسمتی از نمودار تابع $y = a + b\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ است. b کدام است؟



$$2 \quad (4) \qquad \sqrt{3} \quad (3) \qquad \frac{3}{2} \quad (2) \qquad \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (1)$$

پاسخ گزینه ۳

$$f(\pi) = -\frac{3}{2} \Rightarrow a + b\sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{3}{2} \Rightarrow a + b(-\sin\frac{\pi}{3}) = -\frac{3}{2} \Rightarrow a - \frac{\sqrt{3}}{2}b = -\frac{3}{2}$$

$$y_{\max} = \sqrt{3} \Rightarrow a + b = \sqrt{3}$$

$$\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)b = \sqrt{3} + \frac{3}{2} \rightarrow b = \frac{\sqrt{3} + \frac{3}{2}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{3} + 3}{2 + \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3} + 3}{2 + \sqrt{3}} \times \frac{2 - \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3} - 6 + 6 - 3\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

۱۳۶- اگر $\left(\frac{125}{8}\right)^{x^2} = \left(\frac{5}{4}\right)^{2x-1}$ باشد، $\log_8(9x+1)$ ، کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{4}{3}$ (۴) $\frac{3}{2}$

پاسخ گزینه ۱

$$\left(\frac{5}{4}\right)^{2x-1} = \left(\frac{125}{8}\right)^{x^2} \Rightarrow \left(\frac{5}{4}\right)^{2x-1} = \left(\left(\frac{5}{2}\right)^3\right)^{x^2} \Rightarrow \left(\frac{5}{4}\right)^{1-2x} = \left(\frac{5}{2}\right)^{3x^2} \Rightarrow 3x^2 = 1-2x \Rightarrow 3x^2 + 2x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{1}{3} \end{cases}$$

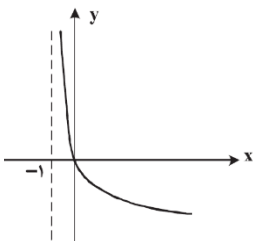
لگاریتم تعریف نشده $x = -1$

$$x = \frac{1}{3} \Rightarrow \log_8 \left(9\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 1\right) = \log_8 4 = \log_8 2^2 = \log_8 2^2 = \frac{2}{3}$$

۱۳۷- شکل روبه‌رو، نمودار تابع $y = \log_r U(x)$ است. $U(x)$ کدام است؟

- (۱) $x+1$ (۲) $(x+1)^{-1}$ (۳) $x-1$ (۴) $1-x$

پاسخ گزینه ۲



با توجه به اینکه مبنای لگاریتم بزرگتر از ۱ است، نمودار تابع $y = \log_r^{x \pm a}$ به صورت $\left(\begin{array}{l} \text{است.} \end{array}\right)$

بنابراین گزینه‌های ۱ و ۳ نادرست هستند. همچنین نمودار تابع $y = \log_r^{-x \pm a}$ به صورت $\left(\begin{array}{l} \text{است.} \end{array}\right)$ بنابراین گزینه ۴ نیز نادرست است و لذا تنها گزینه صحیح، گزینه ۲ است.

توجه: $y = \log_r^{(x+1)^{-1}} = -\log_r^{x+1}$ که نمودار آن قرینه نمودار $y = \log_r^{x+a}$ نسبت به محور x هاست که به صورت $\left(\begin{array}{l} \text{است.} \end{array}\right)$

۱۳۸- به ازای کدام مقدار a ، تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{8+x^2}{x+2} & x \neq -2 \\ a & x = -2 \end{cases}$ در نقطه $x = -2$ ، فقط از چپ پیوسته است؟

- (۱) -12 (۲) -6 (۳) 6 (۴) 12

پاسخ گزینه ۴

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda + x^2}{-(x+2)} & x < -2 \\ a & x = -2 \\ \frac{\lambda + x^2}{(x+2)} & x > -2 \end{cases}$$

روش اول:

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{\lambda + x^2}{-(x+2)} = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{\cancel{(x+2)}(x^2 - 2x + 4)}{\cancel{-(x+2)}} = -(4 + 4 + 4) = -12$$

$$f(-2) = a \quad \left. \vphantom{\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)} \right\} \Rightarrow a = -12$$

روش دوم:

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{\lambda + x^2}{-(x+2)} \stackrel{HOP}{=} \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{2x}{-1} = -12$$

$$f(-2) = a \quad \left. \vphantom{\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)} \right\} a = -12$$

۱۳۹ - احتمال موفقیت فردی، در آزمون اول ۰/۷ و در آزمون دوم ۰/۶ است. اگر این فرد در آزمون اول موفق شود، احتمال موفقیت وی در آزمون دوم ۰/۸ است. با کدام احتمال، لافل در یکی از این دو آزمون، موفق می‌شود؟

۰/۸۴ (۴)

۰/۸۲ (۳)

۰/۷۶ (۲)

۰/۷۴ (۱)

پاسخ گزینه ۱

A : موفقیت در آزمون اول

B : موفقیت در آزمون دوم

$$\left. \begin{aligned} P(A) &= 0/7 \\ P(B) &= 0/6 \\ P(B|A) &= 0/8 \end{aligned} \right\} P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B|A)$$

$$= (0/7) + (0/6) - (0/7)(0/8) = 0/74$$

۱۴۰ - در یک کارگاه، دو گروه مشغول کار هستند، میانگین نمرات مسئولیت‌پذیری و واریانس در گروه اول به ترتیب ۸۰ و ۲۵ و در گروه دوم ۷۲ و ۱۶ می‌باشد. کدام گروه بهتر است؟

۴) اظهار نظر نمی‌توان کرد.

۳) یکسان

۲) گروه دوم

۱) گروه اول

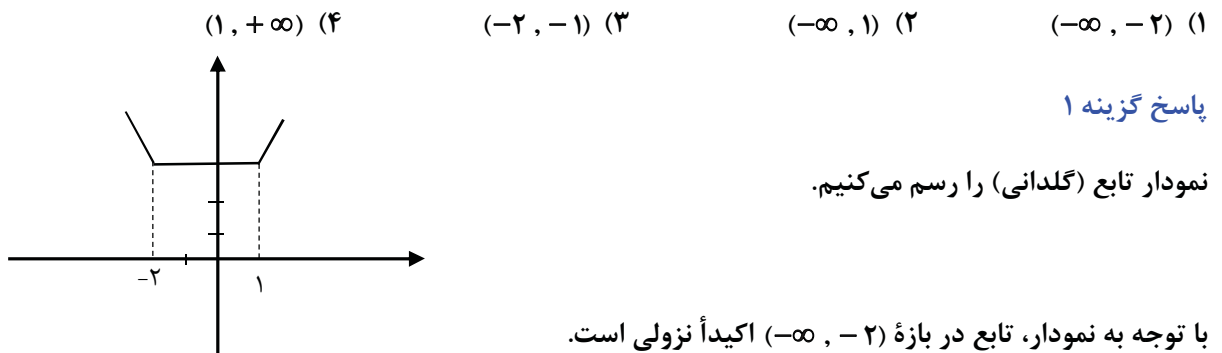
پاسخ گزینه ۲

$$\left. \begin{array}{l} \bar{x}_1 = 80 \\ \sigma_1^2 = 25 \rightarrow \sigma_1 = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow cv_1 = \frac{\sigma_1}{\bar{x}_1} = \frac{5}{80} = \frac{1}{16}$$

$$\left. \begin{array}{l} \bar{x}_2 = 72 \\ \sigma_2^2 = 16 \rightarrow \sigma_2 = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow cv_2 = \frac{\sigma_2}{\bar{x}_2} = \frac{4}{72} = \frac{1}{18}$$

ضریب تغییرات در گروه دوم کمتر است بنابراین گروه دوم بهتر است.

۱۴۱- تابع با ضابطه $f(x) = |x+2| + |x-1|$ در کدام بازه اکیداً نزولی است؟



۱۴۲- مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی $4 \sin x \sin(\frac{3\pi}{2} - x) = 1$ ، در بازه $[0, 2\pi]$ ، کدام است؟

(۱) $\frac{5\pi}{2}$ (۲) 3π (۳) 4π (۴) 5π

پاسخ گزینه ۴

$$4 \sin x \sin(\frac{3\pi}{2} - x) = 1 \Rightarrow 4 \sin x (-\cos x) = 1 \rightarrow -2 \sin 2x = 1 \rightarrow \sin 2x = \frac{-1}{2} = \sin(-\frac{\pi}{6})$$

$$\rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + (-\frac{\pi}{6}) \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{12} \rightarrow x = \pi - \frac{\pi}{12}, x = 2\pi - \frac{\pi}{12} \\ 2x = 2k\pi + \pi - (-\frac{\pi}{6}) \Rightarrow x = k\pi + \frac{7\pi}{12} \rightarrow x = \frac{7\pi}{12}, x = \pi + \frac{7\pi}{12} \end{cases}$$

\Rightarrow مجموع جواب‌ها 5π

۱۴۳- حد عبارت $\frac{x^2 + 10x + 16}{12 + 6\sqrt{x}}$ وقتی $x \rightarrow -8$ ، کدام است؟

(۱) -24 (۲) -18 (۳) -12 (۴) -6

پاسخ گزینه ۳

$$\lim_{x \rightarrow -8} \frac{x^2 + 10x + 16}{12 + 6\sqrt{x}} \stackrel{HOP}{=} \lim_{x \rightarrow -8} \frac{2x + 10}{6} = \lim_{x \rightarrow -8} \frac{(2x + 10)(3\sqrt{x^2})}{6 \cdot 3\sqrt{x^2}} = -12$$

۱۴۴ - در مورد تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + |x|}$ ، کدام بیان، درست است؟

(۲) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$

(۱) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$

(۴) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$

(۳) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$

پاسخ گزینه ۴

تابع در همسایگی چپ صفر تعریف نمی‌شود (زیرا مخرج کسر صفر مطلق خواهد شد) بنابراین گزینه‌های ۱ و ۲ نادرست هستند.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 1}{x + x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 1}{2x} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

۱۴۵ - اگر $f(x) = 2x + \sqrt{4x^2 + x}$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ، کدام است؟

(۴) صفر

(۳) $-\frac{1}{4}$

(۲) $-\frac{1}{2}$

(۱) -۱

پاسخ گزینه ۳

روش اول:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x + \sqrt{4x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x + 2\sqrt{x^2 + \frac{x}{4}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x + 2\sqrt{\left(x + \frac{1}{8}\right)^2 - \frac{1}{64}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x + 2\sqrt{\left(x + \frac{1}{8}\right)^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x + 2\sqrt{\left(x + \frac{1}{8}\right)^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \cancel{2x} - \cancel{2x} - \frac{2}{8} = -\frac{1}{4}$$

روش دوم: استفاده از هم ارزی نیوتن $\left(\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt[n]{ax^n + bx^{n-1} + \dots} \sim \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[n]{a} \left| x + \frac{b}{na} \right| \right)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x + \sqrt{4x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x + 2\sqrt{\left(x + \frac{1}{8}\right)^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \cancel{2x} - \cancel{2x} - \frac{2}{8} = -\frac{1}{4}$$

۱۴۶- در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{1+\sqrt{x}}{5-2x}$ ، حاصل $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4}$ ، کدام است؟

- (۱) $\frac{4}{9}$ (۲) $\frac{5}{12}$ (۳) $\frac{7}{12}$ (۴) $\frac{5}{6}$

پاسخ گزینه ۳

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = f'(4)$$

بنابراین کفایت مشتق تابع $f(x) = \frac{1+\sqrt{x}}{5-2x}$ را در نقطه $x = 4$ حساب کنیم.

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(5-2x) - (-2)(1+\sqrt{x})}{(5-2x)^2} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(5-8) + 2(1+2)}{(5-8)^2} = \frac{-\frac{3}{2} + 6}{9} = \frac{7}{12}$$

۱۴۷- تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & ; x \geq 2 \\ -x^2 + ax + b & ; x < 2 \end{cases}$ ، روی مجموعه اعداد حقیقی مشتق پذیر است. b کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۲

پاسخ گزینه ۲

پیوستگی در $x = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} (-x^2 + ax + b) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-1} \Rightarrow -4 + 2a + b = 1 \Rightarrow \boxed{2a + b = 5}$$

مشتق پذیری در $x = 2$

$$f'_-(x) = f'_+(x) \Rightarrow -2x + a = \frac{-1}{(x-1)^2} \Big|_{x=2} \Rightarrow -4 + a = -1 \Rightarrow \boxed{a = 3}$$

$$2(3) + b = 5 \Rightarrow \boxed{b = -1}$$

۱۴۸- اگر $g(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ و $(f \circ g)'(2) = 6$ باشد، $f'(5)$ کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۲ (۴) ۳

پاسخ گزینه ۱

$$g(x) = \frac{2x+1}{x-1} \Rightarrow g'(x) = \frac{-3}{(x-1)^2}$$

$$(fog)'(2) = 6 \Rightarrow g'(2) \cdot \underbrace{f'(g(2))}_6 = 6 \Rightarrow (-3)f'(5) = 6 \Rightarrow f'(5) = -2$$

۱۴۹- در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{x}$ ، اختلاف آهنگ تغییر لحظه‌ای در $x = 2$ ، از آهنگ تغییر متوسط در بازه $[1, 4]$ ، کدام است؟

۰/۷۵ (۴)

۰/۴۵ (۳)

۰/۵ (۲)

۰/۲۵ (۱)

پاسخ گزینه ۲

$$f'(x) = x + \frac{1}{x^2}$$

$$\text{آهنگ تغییر لحظه‌ای: } f'(2) = 2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$$

$$\text{آهنگ تغییر متوسط: } \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{(8 - \frac{1}{4}) - (\frac{1}{2} - 1)}{3} = \frac{9 - \frac{3}{4}}{3} = \frac{\frac{33}{4}}{3} = \frac{11}{4}$$

$$\frac{11}{4} - \frac{9}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0/5$$

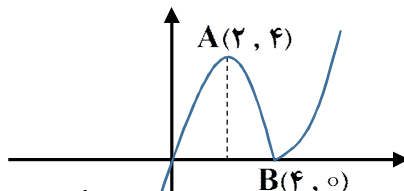
۱۵۰- در تابع با ضابطه $f(x) = x|x-4|$ ، فاصله دو نقطه ماکسیمم نسبی و می‌نیمم نسبی آن، کدام است؟

$2\sqrt{5}$ (۴)

$3\sqrt{2}$ (۳)

$2\sqrt{2}$ (۲)

$\sqrt{5}$ (۱)



پاسخ گزینه ۴

$$f(x) = x|x-4| = \begin{cases} x^2 - 4x & x \geq 4 \\ -x^2 + 4x & x < 4 \end{cases}$$

$$AB = \sqrt{(2-4)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

۱۵۱- بیشترین مساحت مستطیلی که دو ضلع آن بر روی محورهای مختصات و رأس چهارم آن، بر روی منحنی به معادله $y = \sqrt{12-x}$ ، در ناحیه اول واقع شود، کدام است؟

۱۸ (۴)

۱۶ (۳)

$۸\sqrt{۳}$ (۲)

$۸\sqrt{۲}$ (۱)

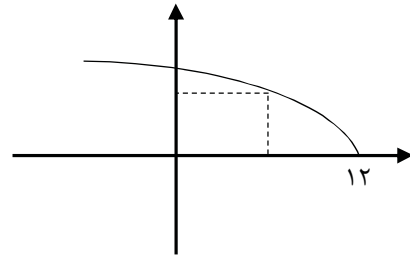
پاسخ گزینه ۳

$$S(x) = xy = x\sqrt{12-x}$$

$$S'(x) = \sqrt{12-x} + \frac{-x}{2\sqrt{12-x}} = 0 \Rightarrow \frac{2(12-x) - x}{2\sqrt{12-x}} = 0$$

$$\Rightarrow 24 - 3x = 0 \rightarrow \boxed{x=8} \rightarrow \boxed{y=\sqrt{12-8}=2}$$

$$S = 8(2) = 16$$



۱۵۲- در یک بیضی به کانون‌های $(2, -1)$ و $(2, 7)$ ، اندازه قطر کوچک ۶ واحد است. خروج از مرکز این بیضی، کدام است؟

$0/8$ (۴)

$0/75$ (۳)

$0/64$ (۲)

$0/6$ (۱)

پاسخ گزینه ۴

طول کانون‌ها برابر است بنابراین بیضی قائم است.

$$\left. \begin{aligned} FF' = 2c &\Rightarrow (7 - (-1)) = 2c \Rightarrow c = 4 \\ 2b = 6 &\Rightarrow b = 3 \\ a = \sqrt{b^2 + c^2} &= \sqrt{9 + 16} = 5 \end{aligned} \right\} \Rightarrow e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5} = 0/8$$

۱۵۳- در الگوی زیر، تعداد نقطه‌ها، در شکل نهم، کدام است؟



۱۲۵ (۴)

۱۲۳ (۳)

۱۲۰ (۲)

۱۱۷ (۱)

پاسخ گزینه ۱

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 2^2 + 1$$

$$a_3 = 3^2 + (2+1)$$

$$a_4 = 4^2 + (3+2+1)$$

.

.

.

$$a_n = 9^2 + (8+7+\dots+1) = 81 + \frac{8 \times 7}{2} = 81 + 28 = 117$$

۱۵۴- اگر $x \geq 1$ ؛ $f(x) = x^2 - 2x - 3$ باشد، نمودارهای دو تابع f^{-1} و $g(x) = \frac{x-9}{2}$ با کدام طول، متقاطع هستند؟

۲۱ (۴)

۱۸ (۳)

۱۵ (۲)

۱۲ (۱)

پاسخ گزینه ۴

$$f(x) = x^2 - 2x - 3 \quad x \geq 1$$

$$\Rightarrow f(x) = (x-1)^2 - 4 \quad x \geq 1$$

$$\Rightarrow y+4 = (x-1)^2 \Rightarrow |x-1| = \sqrt{y+4} \xrightarrow{x \geq 1} x-1 = \sqrt{y+4} \Rightarrow x = \sqrt{y+4} + 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x+4} + 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{x+4} + 1 = \frac{x-9}{2} \Rightarrow 2\sqrt{x+4} = x-11 \Rightarrow 4(x+4) = x^2 - 22x + 121 \Rightarrow x^2 - 26x + 105 = 0$$

$$\Rightarrow (x-21)(x-5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=5 \\ x=21 \end{cases}$$

۱۵۵- در جعبه‌ای ۵ مهره سفید و ۶ مهره سیاه است. ابتدا یک مهره را بدون رویت خارج می‌کنیم. سپس از بین بقیه مهره‌ها، ۲ مهره بیرون می‌کشیم. با کدام احتمال هر دو مهره اخیر، سفید است؟

$\frac{5}{11}$ (۴)

$\frac{4}{11}$ (۳)

$\frac{2}{11}$ (۲)

$\frac{1}{11}$ (۱)

پاسخ گزینه ۲

چون از رنگ مهره‌های خارج شده اول اطلاعی نداریم، انگار هیچ مهره‌ای خارج نشده است.

۵ سفید

۶ سیاه

$$P(\text{دو سفید}) = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{11}{2}} = \frac{10}{55} = \frac{2}{11}$$

۱۵۳ - (نظام قدیم) نقطه A به طول ۳-، بر منحنی به معادله $y = \frac{x^2}{x-1}$ واقع است. فاصله این نقطه از خط مجانب مایل

آن، چند برابر $\sqrt{2}$ است؟

- (۱) $\frac{1}{8}$ (۲) $\frac{1}{6}$ (۳) $\frac{1}{5}$ (۴) $\frac{1}{4}$

پاسخ گزینه ۱

$$f(-3) = \frac{9}{-4} \Rightarrow A(-3, -\frac{9}{4})$$

$$x^2 \left| \begin{array}{c} x-1 \\ x+1 \end{array} \right.$$

$$\frac{x^2 - x}{x}$$

$$x$$

$$\frac{x-1}{1}$$

$$1$$

مجانب مایل: $y = x + 1 \rightarrow x - y + 1 = 0$

$$d = \frac{|(-3) - (-\frac{9}{4}) + 1|}{\sqrt{1+1}} = \frac{\frac{1}{4}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{(\frac{\sqrt{2}}{8})}{\frac{\sqrt{2}}{8}} = \frac{1}{8}$$

۱۵۴ - (نظام قدیم) در سهمی به معادله $5y^2 - 10y + 4x - 3 = 0$ فاصله کانون تا نقطه تلاقی سهمی با محور xها، کدام

است؟

- (۱) $1/2$ (۲) $1/25$ (۳) $1/3$ (۴) $1/45$

پاسخ گزینه ۴

$$5y^2 - 10y = -4x + 3$$

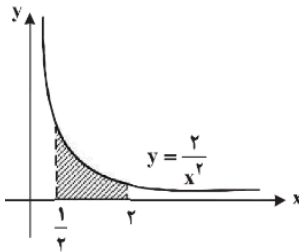
$$\Rightarrow 5(y^2 - 2y + 1) = -4x + 3 + 5$$

$$\Rightarrow 5(y-1)^2 = -4x + 8$$

$$\Rightarrow 5(y-1)^2 = -4(x-2) \Rightarrow (y-1)^2 = \frac{-4}{5}(x-2) \Rightarrow \begin{cases} 4P = \frac{-4}{5} \Rightarrow p = \frac{-1}{5} \\ S(2, 1) \Rightarrow F(2 - \frac{1}{5}, 1) \Rightarrow F(\frac{11}{5}, 1) \end{cases}$$

$$y=0 \rightarrow (0-1)^2 = \frac{-4}{5}(x-2) \Rightarrow x-2 = \frac{-5}{4} \Rightarrow x = \frac{3}{4} \Rightarrow A(\frac{3}{4}, 0)$$

$$AF = \sqrt{\left(\frac{11}{5} - \frac{3}{4}\right)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{\frac{845}{400}} = 1/45$$



۱۵۵ - (نظام قدیم) در شکل روبه‌رو، مساحت ناحیه سایه‌زده کدام است؟

۴ (۴)

۳/۵ (۳)

۳ (۲)

۲/۵ (۱)

پاسخ گزینه ۲

$$\int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{2}{x^2} dx = \int_{\frac{1}{2}}^2 2x^{-2} dx = -2(x^{-1}) \Big|_{\frac{1}{2}}^2 = -2\left(\frac{1}{x}\right) \Big|_{\frac{1}{2}}^2 = -2\left(\frac{1}{2} - 2\right) = -2\left(\frac{-3}{2}\right) = 3$$

همچون سال گذشته، روال طراحی سوالات بر اساس تکیه بر مطالب کتاب‌های درسی بوده و سوالات طوری طراحی شده که بدون نیاز به فرمول‌ها و قواعد خارج از کتاب درسی، به راحتی قابل حل هستند. بنابراین بازهم توصیه می‌شود که دانش‌آموزان عزیز فقط به مطالب کتاب‌های درسی تکیه داشته باشند.

با آرزوی موفقیت و سربلندی شما عزیزان

عزیز اسدی - سایت ریاضی سرا