



www.riazisara.ir سایت ویژه ریاضیات

درسنامه ها و جزوه های ریاضی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

و...و

کanal سایت ریاضی سرا در تلگرام:

<https://t.me/riazisara>



(@riazisara)

۱۲۶ - گزینه ۱

$$3y - 2x = 4 \xrightarrow{y=x} 2x = 3y - 4 \longrightarrow x = \frac{3}{2}y - 2 \longrightarrow f^{-1}(x) = \frac{3}{2}x - 2 \longrightarrow h = -2$$

۱۲۷ - گزینه ۳

$$f(x) > g(x) \longrightarrow -x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{9}{2} > 2x + |x| \xrightarrow{x(-2)} 2x^2 + x - 9 < -4x - 2|x|$$

$$2x^2 + 5x + 2|x| - 9 < 0$$

$$\text{if } x \geq 0 \longrightarrow 2x^2 + 5x + 2x - 9 < 0 \longrightarrow 2x^2 + 7x - 9 < 0 \xrightarrow{a+b+c=0} -\frac{9}{2} < x < 1$$

$$\cap \rightarrow 0 \leq x < 1 \quad (\text{I})$$

$$\text{if } x < 0 \longrightarrow 2x^2 + 5x - 2x - 9 < 0 \longrightarrow 2x^2 + 3x - 9 < 0 \longrightarrow (2x - 3)(x + 3) < 0$$

$$-\frac{3}{2} < x < \frac{3}{2} \cap \rightarrow -3 < x < 0 \quad (\text{II})$$

$$(\text{I}), (\text{II}) \xrightarrow{\cup} -3 < x < 1 \quad \frac{-3+1}{2} = -1$$

(قانون کسینوس ها)

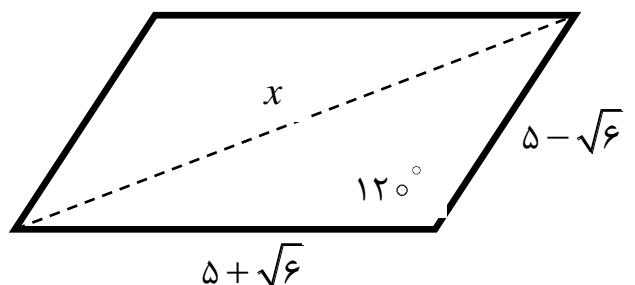
۱۲۸ - گزینه ۳

$$x^2 = (5 + \sqrt{6})^2 + (5 - \sqrt{6})^2 - 2(5 + \sqrt{6})(5 - \sqrt{6}) \cos 120^\circ$$

$$\cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$x^2 = 25 + 6 + 10\sqrt{6} + 25 + 6 - 10\sqrt{6} - 2(25 - 6)(-\frac{1}{2})$$

$$x^2 = 25 + 6 + 25 + 6 + 12 = 84 \longrightarrow x = 9$$



۱۲۹ - گزینه ۴

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow A \times A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+6 & -2+8 \\ -3+12 & 6+16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 9 & 22 \end{bmatrix}$$

$$S = 7 + 6 + 9 + 22 = 44$$

گزینه ۲ - ۱۳۰

x_i	۷	۱۲	۱۷	۲۲	۲۷
f_i	۲	۵	۸	a	۴
$y_i = x_i - 17$	-۱۰	-۵	۰	۵	۱۰

$$\text{میانگین فرضی} = ۱۷$$

نکته: ابتدا k واحد از هر داده کم کرده و میانگین داده‌های جدید را به دست می‌آوریم و در آخر k واحد به میانگین جدید به دست آمده اضافه می‌کنیم تا میانگین واقعی حاصل شود.

$$\bar{x} = 17 + \frac{-20 - 25 + 0 + 5a + 40}{19+a} \rightarrow 18 = 17 + \frac{5a - 5}{19+a} \rightarrow \frac{5a - 5}{19+a} = 1$$

$$5a - 5 = 19 + a \rightarrow a = 6 \quad P_i = \frac{f_i}{N} \times 100 = \frac{6}{25} \times 100 = 24$$

گزینه ۲ - ۱۳۱

نکته: واریانس برابر است با تفاضل میانگین مساحت مربع‌ها با میانگین طول اضلاع مربع‌ها

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} \rightarrow \frac{6}{100} = \frac{\sigma}{25} \rightarrow \frac{6}{4} = \frac{\sigma}{1} \rightarrow \sigma = \frac{3}{2} = 1.5 \rightarrow \sigma^2 = 2/25$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - (\bar{x})^2 \rightarrow 2/25 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{25} - (25)^2 \rightarrow \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{25} = 625 + 2/25 = 627/25$$

گزینه ۱ - ۱۳۲

$$n(S) = 6 \times 6 = 36$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

$$A = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1), (2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2), (6, 6)\} \rightarrow n(A) = 9$$

گزینه ۴ - ۱۳۳

$$(m-6)x^2 - 2mx - 3 = 0 \xrightarrow[a=m-6, b=-2m, c=-3]{1) \Delta > 0, 2) S < 0, 3) P > 0} b' = \frac{b}{2} = -m$$

$$1) \Delta > 0 \text{ or } \Delta' > 0 \rightarrow (-m)^2 - (m-6)(-3) > 0 \rightarrow m^2 + 3m - 18 > 0$$

$$(m-3)(m+6) > 0 \rightarrow \begin{cases} m < -6 \\ \text{or} \\ m > 3 \end{cases} \quad (I)$$

$$\begin{aligned} \text{۱) } S < 0 &\longrightarrow -\frac{b}{a} < 0 \longrightarrow -\frac{-2m}{m-6} < 0 \longrightarrow \frac{2m}{m-6} < 0 \longrightarrow 0 < m < 6 & \text{(II)} \\ \text{۲) } P > 0 &\longrightarrow \frac{c}{a} > 0 \longrightarrow \frac{-3}{m-6} > 0 \longrightarrow m-6 < 0 \longrightarrow m < 6 & \text{(III)} \\ \text{(I),(II),(III)} &\xrightarrow{\cap} 3 < m < 6 \end{aligned}$$

۱۳۴ - گزینه ۱

روش اول :

$$\begin{aligned} \sin(x - \frac{\pi}{4}) &= \sin x \cdot \cos \frac{\pi}{4} - \cos x \cdot \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin x - \cos x) \\ \sin(x + \frac{\pi}{4}) &= \sin x \cdot \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \cdot \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin x + \cos x) \\ \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} &= 2 \xrightarrow{\div \cos} \frac{\tan x - 1}{\tan x + 1} = 2 \longrightarrow 2 \tan x + 2 = \tan x - 1 \longrightarrow \tan x = -3 \end{aligned}$$

روش دوم :

$$\begin{aligned} \frac{\sin(x - \frac{\pi}{4})}{\sin(x + \frac{\pi}{4})} &= 2 \longrightarrow \frac{\sin(x - \frac{\pi}{4})}{\cos(x - \frac{\pi}{4})} = 2 \longrightarrow \tan(x - \frac{\pi}{4}) = 2 \longrightarrow \frac{\tan x - \tan \frac{\pi}{4}}{1 + \tan x \tan \frac{\pi}{4}} = 2 \\ \frac{\tan x - 1}{1 + \tan x} &= 2 \longrightarrow 2 + 2 \tan x = \tan x - 1 \longrightarrow \tan x = -3 \end{aligned}$$

۱۳۵ - گزینه ۴

روش اول : تغییر متغیر

$$f(2x - 3) = 4x^2 - 14x + 13 \quad 2x - 3 = t \longrightarrow x = \frac{t+3}{2}$$

$$f(t) = 4(\frac{t+3}{2})^2 - 14(\frac{t+3}{2}) + 13 = t^2 + 6t + 9 - 7t - 21 + 13 = t^2 - t + 1$$

$$f(x) = x^2 - x + 1$$

روش دوم : عدد گذاری

$$f(2x - 3) = 4x^2 - 14x + 13$$

$$x = 1 \rightarrow f(-1) = 4 - 14 + 13 = 3 \rightarrow f(-1) = 3 \quad -1 \xrightarrow{f} 3$$

$$x = 2 \rightarrow f(1) = 16 - 28 + 13 = 1 \rightarrow f(1) = 1 \quad 1 \xrightarrow{f} 1$$

۱۳۶ - گزینه ۱

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x^2 - 10x - 8}{\sqrt{3} - \sqrt{x} - 1} = \frac{\circ}{\circ} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{6x - 10}{\frac{-1}{2\sqrt{x}}} = \frac{14}{\frac{-1}{4}} = \frac{14}{-\frac{1}{4}} = -112$$

$$u = 3 - \sqrt{x} \rightarrow u' = \frac{-1}{2\sqrt{x}}$$

۱۳۷ - گزینه ۲

$$f(3) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$$

$$f(3) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = a \log_2 4 = 2a \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = a(3) + 2^0 = 3a + 1$$

$$3a + 1 = 2a \rightarrow a = -1$$

$$f(x) = \begin{cases} -x + 2^{x-3} & , \quad x < 3 \\ -\log_2(1+x) & , \quad x \geq 3 \end{cases} \rightarrow f(2) = -2 + 2^{-1} = -2 + \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} = -1.5$$

۱۳۸ - گزینه ۱

روش اول :

$$y = \sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x = 1 - 2(\sin x \cos x)^2$$

$$\frac{\sin 2x = 2 \sin x \cos x}{\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x} \rightarrow y = 1 - 2 \left(\frac{1}{2} \sin 2x \right)^2 \rightarrow y = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x$$

$$y' = -\frac{1}{2} (2)(2) \cos 2x \cdot \sin 2x = -2 \sin 2x \cos 2x \rightarrow y' = -\sin 4x$$

$$y' \left(\frac{\pi}{8} \right) = -\sin 4 \left(\frac{\pi}{8} \right) = -\sin \frac{\pi}{2} = -1$$

روش دوم:

$$y = \sin^4 x + \cos^4 x \longrightarrow y' = 4(1)\cos x \cdot \sin^3 x + 4(1)(-\sin x) \cos^3 x$$

$$y' = 4\sin x \cdot \cos x (\sin^3 x - \cos^3 x) = \frac{\sin 2x = 4\sin x \cdot \cos x}{\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x} \rightarrow y' = 2\sin 2x (-\cos 2x)$$

$$y' = -2\sin 2x \cdot \cos 2x \longrightarrow y' = -\sin 4x$$

$$y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\sin 4\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\sin \frac{\pi}{2} = -1$$

۱۳۹ - گزینه ۳ (توزیع دو جمله‌ای)

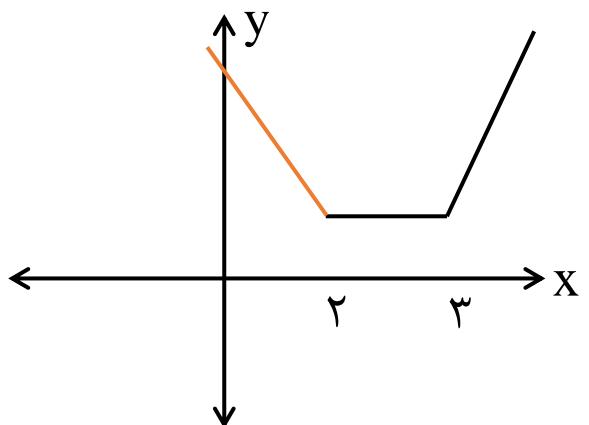
$$n = 5, p = \frac{3}{4}, 1-p = \frac{1}{4}$$

$$P(x \geq 4) = P(x = 4) + P(x = 5)$$

$$P(x \geq 4) = \binom{5}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^4 \times \left(\frac{1}{4}\right)^1 + \binom{5}{5} \times \left(\frac{3}{4}\right)^5 \times \left(\frac{1}{4}\right)^0$$

$$= 5 \times \frac{3^4}{4^5} + \frac{3^5}{4^5} = \frac{405}{4^5} + \frac{243}{4^5} = \frac{648}{4^5} = \frac{2^3 \times 3^4}{2^{10}} = \frac{3^4}{2^7} = \frac{81}{128}$$

۱۴۰ - گزینه ۱



$$f(x) = |x - 2| + |x - 3|$$

$$1) \quad x < 2 \longrightarrow f(x) = -x + 2 - x + 3 = -2x + 5$$

$$2) \quad 2 < x < 3 \longrightarrow f(x) = x - 2 - x + 3 = 1$$

$$3) \quad x > 3 \longrightarrow f(x) = x - 2 + x - 3 = 2x - 5$$

$$x < 2 \longrightarrow -2x + 5 = 2x^2 - x - 10$$

$$2x^2 + x - 10 = 0 \longrightarrow (2x - 5)(x + 2) = 0 \longrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} \longrightarrow \text{unacceptable} \\ x = -2 \longrightarrow \text{acceptable} \end{cases}$$

گزینه ۲ - ۱۴۱

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + n}{3n^2 - 1} \xrightarrow{\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{3n^2} = \frac{1}{3}, \quad u_1 = \frac{2}{2} = 1$$

$$1 \downarrow \frac{6}{11} \downarrow \frac{12}{26} \downarrow \frac{20}{47} \downarrow \dots \dots \downarrow \frac{1}{3} \quad 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

نکته: در هر دنباله نزولی و همگرا، جمله اول کوچکترین کران بالا و حد دنباله بزرگترین کران پائین محسوب می شود.

گزینه ۳ - ۱۴۲

$$f(t) = 60 - 50 e^{-0/25t} \longrightarrow 40 = 60 - 50 e^{-0/25t} \longrightarrow 50 e^{-0/25t} = 20$$

$$e^{-0/25t} = \frac{2}{5} \xrightarrow{\ln} \ln e^{-0/25t} = \ln \frac{2}{5} \longrightarrow -0/25t \ln e = \ln \left(\frac{2}{5}\right)^{-1}$$

$$-0/25t = -\ln \left(\frac{2}{5}\right) \longrightarrow 0/25t = \ln 2/5 \longrightarrow t = \frac{0/91}{0/25} = 3/64$$

$$\frac{1}{0/64} \quad \frac{30}{x} \longrightarrow x = 19/2 \approx 19$$

توجه داشته باشیم که t بر حسب ماه به دست می آید که بایستی $64/0$ را به روز تبدیل کنیم.

گزینه ۴ - ۱۴۳

روش اول:

$$\tan x \cdot \tan 3x = 1 \longrightarrow \tan 3x = \frac{1}{\tan x} = \cot x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$3x = k\pi + \frac{\pi}{2} - x \longrightarrow 4x = k\pi + \frac{\pi}{2} \longrightarrow x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}$$

روش دوم:

$$\tan x \cdot \tan 3x = 1 \longrightarrow \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\sin 3x}{\cos 3x} = 1 \longrightarrow \sin x \cdot \sin 3x = \cos x \cdot \cos 3x$$

$$\cos x \cdot \cos 3x - \sin x \cdot \sin 3x = 0 \longrightarrow \cos(x + 3x) = 0 \longrightarrow \cos 4x = 0$$

$$4x = k\pi + \frac{\pi}{2} \longrightarrow x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}$$

گزینه ۲ - ۱۴۴

$$\text{I) } f(-2) = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x)$$

$$f(-2) = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = 4a - 2b + 4$$

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = -8 + 2 = -6 \quad 4a - 2b + 4 = -6 \longrightarrow 2a - b = -5 \quad (1)$$

$$\text{II) } f'_+(-2) = f'_-(-2) \longrightarrow f'(x) = \begin{cases} 2ax + b & , \quad x > -2 \longrightarrow f'_+(-2) = -4a + b \\ 3x^2 - 1 & , \quad x < -2 \longrightarrow f'_-(-2) = 12 - 1 = 11 \end{cases}$$

$$-4a + b = 11 \quad (2) \quad \begin{cases} 2a - b = -5 \\ -4a + b = 11 \end{cases} \longrightarrow a = -3, b = -1 \longrightarrow$$

$$f(x) = \begin{cases} -3x^2 - x + 4 & , \quad x \geq -2 \\ 3x^2 - x & , \quad x < -2 \end{cases} \longrightarrow f(1) = -3 - 1 + 4 = 0$$

گزینه ۱ - ۱۴۵

$$\sqrt{7x^2 - 2y} + y^2 - 10 = 0 \quad f'(x, y) = -\frac{\frac{\partial}{\partial x}}{\frac{\partial}{\partial y}} = -\frac{\frac{14x}{2\sqrt{7x^2 - 2y}}}{\frac{-2y}{2\sqrt{7x^2 - 2y}}} = -\frac{7x}{\sqrt{7x^2 - 2y}}$$

$$m = f'(1, 3) = -\frac{\frac{7}{\sqrt{7-6}}}{-\frac{1}{\sqrt{7-6}} + 6} = -\frac{1}{1+6} = -\frac{1}{7} \longrightarrow m' = +\frac{5}{7}$$

گزینه ۳ - ۱۴۶

$$y = \sqrt[n]{x^4} - 4\sqrt[n]{x} = x\sqrt[n]{x} - 4\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x}(x - 4)$$

$$x = \frac{3-1}{3+1} \times \left(\frac{-4}{1}\right) = -2 \longrightarrow (-2, 0)$$

$$y = \sqrt[m]{x^n} (ax + b)$$

$$x = \frac{m-n}{m+n} \times \frac{b}{a}$$

۱۴۷ - گزینه ۴

منظور سوال این بوده است که به ازای چه مقادیری، خط $y = m$ نمودار تابع درجه سوم را در یک نقطه قطع می‌کند.

$$\begin{cases} y = x^3 - 6x^2 + 9x + 2 \\ y = m \end{cases} \longrightarrow m < 2 \text{ or } m > 6$$

$$y' = 3x^2 - 12x + 9 \xrightarrow{y'=0} x^2 - 4x + 3 = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$f(1) = 1 - 6 + 9 + 2 = 6 \longrightarrow \max = 6$$

$$f(3) = 27 - 54 + 27 + 2 = 2 \longrightarrow \min = 2$$

۱۴۸ - گزینه ۴

$$MA = 2OM \longrightarrow \sqrt{(x-3)^2 + (y-6)^2} = 2\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$(x-3)^2 + (y-6)^2 = 4x^2 + 4y^2 \longrightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 - 12y + 36 = 4x^2 + 4y^2$$

$$3x^2 + 3y^2 + 6x + 12y - 45 = 0 \longrightarrow x^2 + y^2 + 2x + 4y - 15 = 0$$

$$O \left| \begin{array}{c} -\frac{a}{2} \\ \frac{b}{2} \end{array} \right. \longrightarrow O \left| \begin{array}{c} -\frac{2}{2} \\ -\frac{4}{2} \end{array} \right. \longrightarrow O \left| \begin{array}{c} -1 \\ -2 \end{array} \right.$$

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{(2)^2 + (4)^2 - 4(-15)} = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 16 + 60} = \frac{1}{2} \sqrt{80} = \frac{1}{2} \sqrt{16 \times 5} = 2\sqrt{5}$$

$$2R = 4\sqrt{5}$$

۱۴۹ - گزینه ۱

چون طول های F و F' با هم مساوی اند پس هذلولی افقی است. می‌دانیم مجانب‌های هذلولی از مرکز آن می‌گذرند و شیب مجانب‌ها در هذلولی افقی برابر $\pm \frac{b}{a}$ است.

$$F \left| \begin{array}{c} 1+\sqrt{5} \\ 2 \end{array} \right. \quad F' \left| \begin{array}{c} 1-\sqrt{5} \\ 2 \end{array} \right. \longrightarrow O \left| \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \right. \quad FF' = 2c \longrightarrow |x_F - x_{F'}| = 2c$$

$$|1+\sqrt{5} - 1-\sqrt{5}| = 2c \longrightarrow 2c = 2\sqrt{5} \longrightarrow c = \sqrt{5}$$

$$OA = a \longrightarrow |x_A - x_O| = a \longrightarrow a = 1$$

$$c^r = a^r + b^r \longrightarrow 5 = 1 + b^r \longrightarrow b = 2$$

$$m = \pm \frac{b}{a} \longrightarrow m = \pm \frac{2}{1} = \pm 2 \longrightarrow m = 2 \quad y - 2 = 2(x - 1) \longrightarrow y = 2x$$

- گزینه ۲ - ۱۵۰

$$\int_{-1}^{\Delta} f(x)dx = \int_{-1}^{\circ} f(x)dx + \int_{\circ}^{\circ} f(x)dx + \int_{\circ}^{\Delta} f(x)dx = 4 \times 3 = 12$$

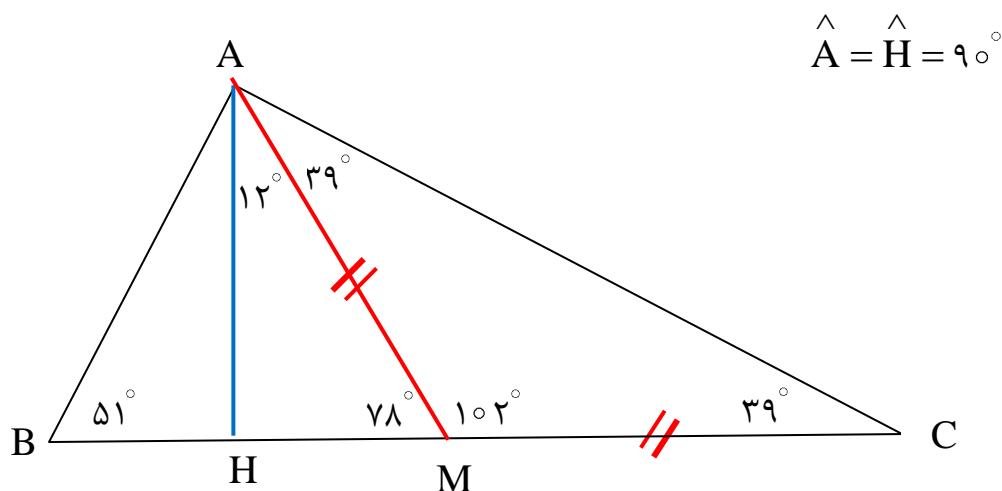
- گزینه ۳ - ۱۵۱

$$\int_1^4 \left(\frac{2x^r - \sqrt{x}}{x^r} \right) dx = \int_1^4 \left(\frac{2x^r}{x^r} - \frac{\sqrt{x}}{x^r} \right) dx = \int_1^4 (2x - x^{-\frac{1}{r}}) dx = \left(x^r + \frac{2}{\sqrt{x}} \right) \Big|_1^4$$

$$= (16 + 1) - (1 + 2) = 17 - 3 = 14$$

- گزینه ۴ - ۱۵۲

نکته : در هر مثلث قائم الزاویه ، میانه وارد بر وتر ، نصف وتر است .



۱۵۳ - گزینه ۳

$$\hat{A} = \hat{C} = 120^\circ \quad \hat{B} = \hat{D} = 60^\circ \longrightarrow \hat{E} = 90^\circ$$

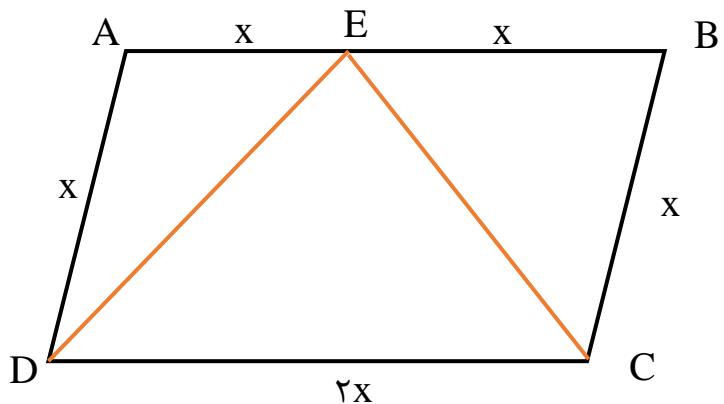
$$P = 6x \longrightarrow 12\sqrt{3} = 6x$$

$$x = 2\sqrt{3}$$

$$S = AB \times BC \times \sin \hat{B}$$

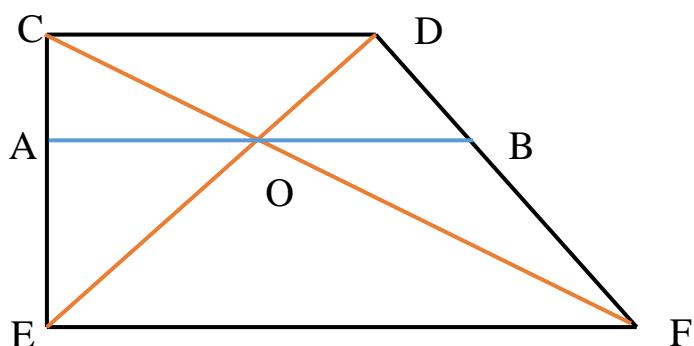
$$S = 4\sqrt{3} \times 2\sqrt{3} \times \sin 60^\circ$$

$$S = 8 \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$$



۱۵۴ - گزینه ۲

به کمک قضیه تالس، مساله را حل می کنیم.

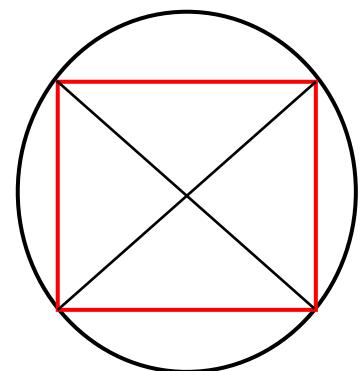


$$\left. \begin{array}{l} \frac{OA}{CD} = \frac{EA}{EC} \\ \frac{OB}{CD} = \frac{FB}{FD} \end{array} \right\} \div \frac{OA}{OB} = \frac{EA}{FB} = \frac{EA}{EC} \times \frac{FD}{FB} = 1 \longrightarrow OA = OB$$

گزینه ۳ - ۱۵۵

$$d = a\sqrt{2} \longrightarrow \lambda = a\sqrt{2} \longrightarrow a = \frac{\lambda}{\sqrt{2}} = \frac{\lambda\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$$

$$V = (4\sqrt{2})^2 \times 6 = 32 \times 6 = 192$$



(سید علی موسوی ۰۹۱۵۳۲۱۵۶۱۴)

(دکتر کریمی ۰۹۱۵۵۰۸۲۷۷۳)