



درسنامه ها و جزوه های دروس ریاضیات

دانلود نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نمونه سوالات و پاسخنامه کنکور

دانلود نرم افزارهای ریاضیات

...

www.riazisara.ir

سایت ویژه ریاضیات

با توجه به جوابگویی سریع احتمال خطا وجود دارد، از دوستان خواهشمند است هر اشتباهی را با اینجانب در میان بگذارید.

پاسخ سوالات ریاضی ۲ - حسابان - دیفرانسیل

۱۰۱- جملات دنباله‌ی ... ۲/۳۹, ۲/۳۹۹, ۲/۳۹۹۹, ... به یک عدد ثابت و گویا بسیار نزدیک می‌شود. جمله‌ی دهم دنباله‌ی تفاضل آن‌ها از این عدد ثابت کدام است؟

$$(1) 10^{-11} \quad (2) 10^{-10} \quad (3) 10^{-9} \quad (4) 2 \times 10^{-10}$$

۱۰۱- گزینه ۱ کاملاً مشخص است که جملات به ۲/۴ نزدیک می‌شوند، داریم:

$$10^{-11} = \underbrace{2/4 - 2/39 \dots 9}_{\text{تا } 10}$$

۱۰۲- تابع $f(x) = \log_3(ax+b)$ فقط برای مقادیر $x \in (-\frac{1}{3}, +\infty)$ با معنی است. اگر $f(4) = 2$ باشد، آن‌گاه $f(-\frac{4}{9})$ کدام است؟

$$(1) -2 \quad (2) -1 \quad (3) \frac{1}{2} \quad (4) 1$$

۱۰۲- گزینه ۱ $ax+b > 0 \rightarrow x > -\frac{b}{a} \xrightarrow{x > -\frac{1}{3}} -\frac{b}{a} = -\frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{a=2b}$ دامنه

$$f(4) = 2 \Rightarrow \log_3 2b(4) + b = 2 \Rightarrow 9b = 9 \Rightarrow \boxed{b=1} \Rightarrow \boxed{a=2} ; \quad f(-\frac{4}{9}) = \log_3 \left(2(-\frac{4}{9}) + 1 \right) = \log_3 \frac{1}{9} = -2$$

۱۰۳- مساحت مثلثی با دو ضلع ۱۶ و ۹ واحد، برابر $24\sqrt{5}$ واحد مربع است. بزرگ‌ترین ضلع این مثلث کدام است؟

$$(1) 21 \quad (2) 22 \quad (3) 23 \quad (4) 24$$

۱۰۳- گزینه ۳ چون بزرگترین ضلع را می‌خواهد پس زاویه را منفرجه و کسینوس را منفی در نظر می‌گیریم.

$$S = \frac{1}{2} ab \sin \alpha \Rightarrow 24\sqrt{5} = \frac{1}{2} (9)(16) \sin \alpha \Rightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3} \quad \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \Rightarrow \boxed{\cos \alpha = \pm \frac{2}{3}}$$

$$c^2 = 16^2 + 9^2 - 2(16)(9)\left(-\frac{2}{3}\right) \Rightarrow c = 23$$

۱۰۴- با ارقام ۱، ۲، ۳، ...، ۹ به چند طریق می‌توان یک عدد پنج رقمی ساخت، به طوری که درست ۲ رقم آن زوج باشد؟

$$(1) 6400 \quad (2) 7200 \quad (3) 8400 \quad (4) 9600$$

$$\binom{4}{2} \binom{5}{3} \times 5! = 6 \times 10 \times 120 = 7200$$

۱۰۴- گزینه ۲

۱۰۵- تعداد جملات یک دنباله‌ی هندسی عدد زوج است. اگر مجموع تمام جملات آن ۳ برابر مجموع جملات با ردیف فرد باشد، قدر نسبت آن کدام است؟

$$(1) \frac{1}{3} \quad (2) \frac{1}{2} \quad (3) 2 \quad (4) 3$$

۱۰۵- گزینه ۳ اگر $n = 2k$ و در جملات فرد $q^k = q'$ و $n' = k$ فرض شود، داریم:

$$3 \times (\text{مجموع جملات فرد}) = (\text{مجموع کل جملات}) \Rightarrow 3 \times \frac{a_1(1-q'^{n'})}{1-q'} = \frac{a_1(1-q^{2k})}{1-q} \Rightarrow 3 \times \frac{(1-q^{2k})}{1-q^2} = \frac{(1-q^{2k})}{1-q} \rightarrow \frac{3}{1+q} = 1 \Rightarrow \boxed{q=2}$$

۱۰۶- به ازای مقداری از a چند جمله‌ای $f(x) = x^3 + ax^2 - 8x$ بر $x+2$ بخش پذیر است. کوچک ترین ریشه‌ی معادله‌ی $f(x) = 0$ کدام است؟

- (۱) $1 - \sqrt{3}$ (۲) $1 - \sqrt{5}$ (۳) $-1 - \sqrt{3}$ (۴) $-1 - \sqrt{5}$

۱۰۶- گزینه ۲ $f(x) = x^3 + ax^2 - 8x \Rightarrow f(-2) = 0 \Rightarrow 16 - 8a + 16 = 0 \Rightarrow a = 4$

از عبارت فاکتور گرفته، و سپس آن را بر $x+2$ تقسیم می‌کنیم، داریم: $x^3 + 4x^2 - 8x = x(x^2 + 4x - 8) = x(x+2)(x^2 + 2x - 4)$ که با حل معادله درجه دوم $(x^2 + 2x - 2)$ از روش دلتا به جواب $-1 - \sqrt{5}$ می‌رسیم.

۱۰۷- حاصل ضرب ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $x^2 + 4x + 3 = \sqrt{x^2 + 4x + 5}$ کدام است؟

- (۱) -2 (۲) 1 (۳) 2 (۴) 4

۱۰۷- گزینه ۲

غ ق ق $x^2 + 4x = a \Rightarrow a + 3 = \sqrt{a+5} \Rightarrow a^2 + 6a + 9 = a + 5 \Rightarrow a^2 + 5a + 4 = 0 \Rightarrow a = -1, a = -4$

$x^2 + 4x = -1 \Rightarrow x^2 + 4x + 1 = 0 \Rightarrow \frac{c}{a} = 1$

۱۰۸- نمودار تابع $y = |2x - 6| - |x + 4| + x$ در یک بازه اکیداً نزولی است. ضابطه معکوس آن در این بازه کدام است؟

- (۱) $-x + 6; x < -4$ (۲) $-x + 5; x > 2$ (۳) $-\frac{1}{2}x + 1; -4 < x < 3$ (۴) $-\frac{1}{2}x + 1; -4 < x < 10$

۱۰۸- گزینه ۴ ریشه درون قدرمطلق اول ۳، و برای دومی -4 است. این تابع در هر بازه مشخص یک خط است. از این رو کافی است که

فقط شیب بررسی کنیم: $x < -4 \rightarrow (-2) + 1 + 1 = 0 \rightarrow$ تابع ثابت

نزولی اکید $-4 < x < 3 \rightarrow (-2) + (-1) + 1 = -2 \rightarrow$ صعودی اکید $3 < x \rightarrow (2) + (-1) + 1 = 2 \rightarrow$ صعودی اکید

پس برای بازه $-4 < x < 3$ داریم: $-4 < x < 3 \Rightarrow y = -2x + 6 - x - 4 + x = -2x + 2$

چون برد تابع، دامنه‌ی تابع وارون است داریم: $-4 < y < 10 \rightarrow -2x + 2 > 4 \rightarrow -2x > 2 \rightarrow x < -1$ و $-4 < y < 10 \rightarrow -2x + 2 < 4 \rightarrow -2x < 2 \rightarrow x > -1$

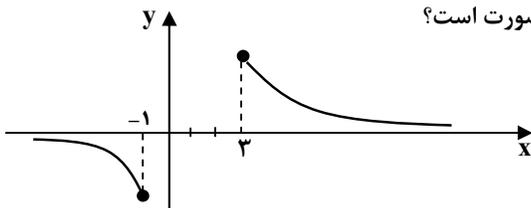
۱۰۹- جواب کلی معادله مثلثاتی $\frac{\sin x + \sin 2x}{\cos x + \cos 2x} = \cot x$ ، کدام است؟

- (۱) $\frac{k\pi}{5}$ (۲) $\frac{2k\pi}{5}$ (۳) $\frac{2k\pi}{5}$ (۴) $\frac{1}{5}(2k+1)\pi$

۱۰۹- گزینه ۴

$$\frac{\sin x + \sin 2x}{\cos x + \cos 2x} = \cot x \Rightarrow \frac{2 \sin \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2}}{2 \cos \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \cot x \Rightarrow \tan \frac{3x}{2} = \tan \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \Rightarrow \frac{3x}{2} = k\pi + \frac{\pi}{2} - x \rightarrow x = \frac{1}{5}(2k+1)\pi$$

۱۱۰- شکل روبه رو، نمودار $y = \sin^{-1}(U(x))$ تابع است. ضابطه‌ی $U(x)$ ، به کدام صورت است؟



- (۱) $\frac{2}{x-1}$ (۲) $\frac{2}{1-x}$ (۳) $\frac{1}{x-2}$ (۴) $\frac{1}{2-x}$

۱۱۰- گزینه ۱

طبق شکل تابع نزولی است، و اگر $y = \sin^{-1}(U(x))$ نزولی باشد باید $U(x)$ نزولی باشد. در نتیجه گزینه‌های ۲ و ۴ حذف می‌شوند.

اگر در گزینه ۳، عدد ۱ را قرار دهیم عدد -1 را می‌دهد که در دامنه قرار دارد، در حالی که در نمودار نقطه ۱ تعریف نشده است، پس

گزینه ۱ صحیح است.

۱۱۱- حاصل عبارت $\sin^{-1}\left(-\frac{5}{13}\right)$ کدام است؟

- (۱) -120 (۲) 60 (۳) -60 (۴) 120

۱۱۱- گزینه ۱

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - \sqrt{\cos x}}{x^2}$$

$$169 \sin\left(\underbrace{\sin^{-1}\left(-\frac{5}{13}\right)}_{\alpha}\right) \rightarrow \cos \alpha = -\frac{5}{13} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{12}{13}; \quad 169 \sin 2\alpha = 169(2 \sin \alpha \times \cos \alpha) = 169 \times 2 \times \frac{12}{13} \times -\frac{5}{13} = -120$$

۱۱۲- به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} a(1 + \sqrt[3]{1-x}) & ; x > 2 \\ x^2 - 2x & ; x \leq 2 \end{cases}$ همواره پیوسته است؟

- (۱) $1/2$ (۲) $1/6$ (۳) $2/4$ (۴) $3/2$

۱۱۲- گزینه ۳

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{a(1 + \sqrt[3]{1-x})}{x^2 - 2x} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{a \times \frac{-1}{3\sqrt[3]{(1-x)^2}}}{2x - 2} = \frac{-a}{2} = \frac{-a}{6}; \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2 - a$$

$$f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \Rightarrow 2 - a = -\frac{a}{6} \Rightarrow a = \frac{12}{5} = 2/4$$

۱۱۳ حد دنباله $a_n = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{2n+2}$ وقتی $n \rightarrow \infty$ کدام است؟

- (۱) $2e$ (۲) e^2 (۳) $2e$ (۴) $3e^2$

۱۱۳- گزینه ۲

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{(a_n - 1)b_n} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2) - (n+1)}{n+1} (2n+2)} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+2}{n+1}} = e^2$$

۱۱۴- حاصل $\lim_{n \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{1 - \sqrt{1+x^2}}$ کدام است؟ (نماد $[\]$ به مفهوم جزء صحیح است)

- (۱) -3 (۲) 3 (۳) صفر (۴) حد ندارد

۱۱۴- گزینه ۱

$$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{1 - \sqrt{1+x^2}} = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\frac{3x^2}{2}(1 + \sqrt{1+x^2})}{1 - (1+x^2)} = -3$$

۱۱۵- یکی از ریشه‌های حقیقی معادله $x^3 + 2x^2 - 4x - 3 = 0$ کدام بازه است؟

- (۱) $(-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2})$ (۲) $(-1, -\frac{3}{4})$ (۳) $(-\frac{1}{2}, 0)$ (۴) $(0, \frac{1}{2})$

۱۱۵- گزینه ۱

با استفاده از قضیه بولتزانو داریم: $f(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{8} + \frac{1}{2} + 2 - 3 < 0$, $f(-\frac{3}{4}) = -\frac{27}{64} + \frac{18}{16} + 3 - 3 > 0 \Rightarrow f(-\frac{1}{2}) \times f(-\frac{3}{4}) < 0$

۱۱۶- امتداد مجانب‌های نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 2x}$ ، نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم را در دو نقطه A و B قطع می‌کند. اندازه AB کدام است؟

$$4\sqrt{2} \quad (4)$$

$$2\sqrt{5} \quad (3)$$

$$4 \quad (2)$$

$$2\sqrt{2} \quad (1)$$

۱۱۶- گزینه ۴

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 2x} \xrightarrow{\text{هم‌ارزی}} |x+1| - |x-1| = \begin{cases} x \rightarrow +\infty \rightarrow x+1-x+1=2 \rightarrow A \begin{vmatrix} 2 \\ 2 \end{vmatrix} \\ x \rightarrow -\infty \rightarrow -x-1+x-1=-2 \rightarrow B \begin{vmatrix} -2 \\ -2 \end{vmatrix} \end{cases}$$

$$AB = \sqrt{(2-(-2))^2 + (2-(-2))^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

۱۱۷- اگر θ زاویه‌ی بین مماس چپ و مماس راست، نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = [x + \frac{1}{x}]x + x^2$ ، در نقطه‌ی $x = \frac{1}{3}$ باشد، $\tan \theta$ کدام است؟

$$\frac{3}{4} \quad (4)$$

$$\frac{2}{3} \quad (3)$$

$$\frac{1}{3} \quad (2)$$

$$\frac{1}{4} \quad (1)$$

۱۱۷- گزینه ۲ بیوستگی چپ برای تابع در نقطه‌ی $x = \frac{1}{3}$ برقرار نیست، پس مشتق پذیر نیست. ولی با فرض فقط محاسبه خطوط نیم مماس

$$f_+(\frac{1}{3}) = x + x^2 \Rightarrow f'_+(\frac{1}{3}) = 1 + 2x = 2 = m \quad ; \quad f_-(\frac{1}{3}) = x^2 \Rightarrow f'_-(\frac{1}{3}) = 2x = 1 = m'$$

داریم:

$$\tan \theta = \frac{m - m'}{1 + mm'} = \frac{2 - 1}{1 + 2} = \frac{1}{3}$$

۱۱۸- از رابطه‌ی $x^2y - y^2 - 2\sqrt{x} + 4 = 0$ ، مقدار $\frac{d^2y}{dx^2}$ در نقطه‌ی (۱, ۲) کدام است؟ مشتق

$$\frac{13}{6} \quad (4)$$

$$\frac{11}{6} \quad (3)$$

$$\frac{8}{6} \quad (2)$$

$$\frac{7}{6} \quad (1)$$

$$x^2y - y^2 - 2\sqrt{x} + 4 \stackrel{\text{مشتق}}{=} 0 \rightarrow 2xy + x^2y' - 2yy' - \frac{1}{\sqrt{x}} = 0 \xrightarrow{(1,2)} 4 + y' - 4y' - 1 = 0 \rightarrow y' = 1$$

۱۱۸- گزینه ۴

$$2xy + x^2y' - 2yy' - \frac{1}{\sqrt{x}} = 0 \rightarrow 2(y + y'x) + 2xy' + x^2y'' - 2(y'y' + y''y') + \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} = 0 \xrightarrow{(1,2)} 2(2+1) + 2 + y'' - 2(1+2y'') - \frac{1}{2} = 0 \rightarrow y'' = \frac{13}{6}$$

$$2(2+1) + 2 + y'' - 2(1+2y'') - \frac{1}{2} = 0 \rightarrow y'' = \frac{13}{6}$$

۱۱۹- اگر $f(x) = x^3 - x^2 + 2x$ باشد، معادله‌ی خط قائم بر منحنی تابع f^{-1} ، در نقطه‌ی $x = 2$ واقع بر آن کدام است؟

$$3y - x = 1 \quad (4)$$

$$3y + x = 5 \quad (3)$$

$$y - 3x = -5 \quad (2)$$

$$y + 3x = 7 \quad (1)$$

۱۱۹- گزینه ۱

$$\left. \begin{matrix} 2 \\ a \end{matrix} \right\} \in f^{-1} \Rightarrow \left. \begin{matrix} a \\ 2 \end{matrix} \right\} \in f \quad ; \quad a^2 - a^2 + 2a = 2 \Rightarrow a = 1 \rightarrow \left. \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \right\} \in f \quad ; \quad f' = 3x^2 - 2x + 2 \rightarrow f'(1) = 3$$

$$(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{3} = m \rightarrow m' = -3 \quad , \quad \left. \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \right\} \in f^{-1} \Rightarrow \left. \begin{matrix} y \\ 1 \end{matrix} \right\} \in f \Rightarrow y = -3x + 7 \rightarrow y + 3x = 7$$

۱۲۰- نمودار تابع $y = |x|e^{-x}$ ، در کدام بازه نزولی و تقعر آن رو به پایین است؟

- (۱) $(-\infty, 2)$ (۲) $(0, 1)$ (۳) $(1, 2)$ (۴) $(2, +\infty)$

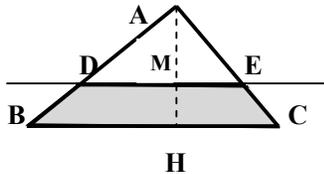
۱۲۰- گزینه ۳

$$y = |x|e^{-x} = \begin{cases} xe^{-x} & ; x \geq 0 \\ -xe^{-x} & ; x < 0 \end{cases} \rightarrow y' = \begin{cases} (1-x)e^{-x} & ; x > 0 \\ (-1+x)e^{-x} & ; x < 0 \end{cases} \rightarrow R - (0,1) \Leftrightarrow \text{نزولی (1)}$$

$$y'' = \begin{cases} (-1-1+x)e^{-x} & ; x > 0 \\ (2-x)e^{-x} & ; x < 0 \end{cases} \Rightarrow 0 < x < 2 \Leftrightarrow \text{تقعر رو به پایین (2)} : \text{(1) و (2)} \Rightarrow (1,2)$$

۱۲۱- در مثلث ABC ضلع $BC = 20$ و ارتفاع $AH = 12$ واحد است. خط Δ موازی BC با سرعت ثابت $2/5$ واحد در ثانیه از آن دور می شود.

سرعت افزایش مساحت دوزنقه در لحظه ای که فاصله دو خط موازی ۹ واحد باشد کدام است؟



- (۱) $0/8$ (۲) $0/9$

- (۳) 1 (۴) $1/2$

۱۲۱- گزینه ۳

$$\frac{AM}{AH} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{(AM)'}{12} = \frac{(DE)'}{20} \Rightarrow \frac{-0/8}{3} = \frac{(DE)'}{5} \Rightarrow (DE)' = -\frac{1}{3}$$

از رابطه تالس مشتق می گیریم:

$$S = \frac{(DE + BC)}{2} \times MH = (10 + \frac{DE}{2}) \times MH \rightarrow S' = \frac{(DE)'}{2} \times MH + (MH)' \times \frac{DE}{2} \Rightarrow S' = (\frac{-1}{6})(9) + \frac{2}{10}(10 + \frac{5}{2}) = 1$$

۱۲۲- شکل روبه رو، نمودار تابع با ضابطه $f(x) = -x^4 + 8x^3 + ax^2 + b$ است. کدام است a؟

- (۱) -18 (۲) -15

- (۳) -12 (۴) -9

۱۲۲- گزینه ۱

$$\text{عطف } f'(0) = 0, f'(a) = 0, x = a$$

چون در عطف شیب صفر است، پس تابع مشتق ریشه مضاعف دارد $f'(x) = -4x^3 + 24x^2 + 2ax = -2x(x^2 - 12x - 2a)$

$$x^2 - 12x - 2a = (x - 6)^2 \rightarrow -2a = 36 \Rightarrow \boxed{a = -18}$$

۱۲۳- اگر $G(x) = x^2 \int_2^{\sqrt{x}} \frac{\ln(t+2)}{t^2} dx$ باشد، $G'(4)$ چند برابر $\ln 2$ است؟

- (۱) 1 (۲) $1/5$ (۳) 2 (۴) 3

$$G'(x) = x^2 \left(\frac{\ln \sqrt{x} + 2}{x} \right) \frac{1}{2\sqrt{x}} = 16 \frac{\ln 4}{4} \times \frac{1}{4} = 2 \ln 2$$

۱۲۳- گزینه ۳ فقط از عامل انتگرال دار مشتق می گیریم:

۱۲۴- حاصل انتگرال $\int_0^4 \left[\frac{x}{2} \right] \frac{\sqrt{x}-1}{x} dx$ کدام است

- (۱) $4 - 2\sqrt{2} - \ln 2$ (۲) $4 - 2\sqrt{2} + \ln 2$ (۳) $2 + \sqrt{2} - \ln 2$ (۴) $2 - \sqrt{2} + \ln 2$

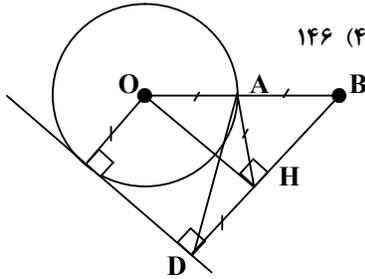
۱۲۴- گزینه ۱

$$\int_0^4 \left[\frac{x}{2} \right] \frac{\sqrt{x}-1}{x} dx = \int_0^2 0 dx + \int_2^4 \frac{\sqrt{x}-1}{x} dx = \int_2^4 \left(x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{x} \right) dx = (2\sqrt{x} - \ln x) \Big|_2^4 = 4 - \ln 4 - (2\sqrt{2} - \ln 2) = 4 - 2\sqrt{2} - \ln 2$$

پاسخ سوالات هندسه ۱ - هندسه ۲ - هندسه تحلیلی

۱۲۵- در یک دایره به مرکز O، شعاع OA را به اندازه‌ی خود تا نقطه B امتداد می‌دهیم. از نقطه B بر مماس دل خواه دایره عمود BD را فرود

می‌آوریم. اگر $\widehat{ADB} = 34^\circ$ باشد، زاویه‌ی OAD چند درجه است؟



$$\begin{aligned} DH = AH &\Rightarrow \widehat{ADB} = 34^\circ = \widehat{DAH} \rightarrow \widehat{AHD} = 112^\circ \rightarrow \widehat{OHA} = 22^\circ \\ OA = AH &\Rightarrow \widehat{OHA} = \widehat{AOH} = 22^\circ \Rightarrow \widehat{OAH} = 136^\circ \\ \widehat{OAD} &= \widehat{OAH} - \widehat{DAH} = 136^\circ - 34^\circ = 102^\circ \end{aligned}$$

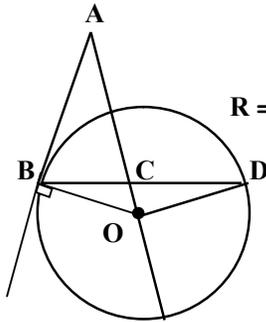
۱۲۵- گزینه ۳

۱۲۶- در مثلث متساوی‌الساقین $(AB = AC)ABC$ ، نقطه‌ی O در امتداد AC مرکز دایره‌ای است که در نقطه‌ی B بر ضلع AB مماس است.

امتداد BC این دایره را در D قطع کرده است. مثل OCD چگونه است؟

(۱) متساوی‌الساقین (۲) قائم‌الزاویه

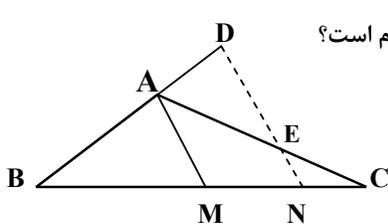
(۳) قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین (۴) غیر مشخص



$$R = R \rightarrow \widehat{ODC} = \widehat{OBC}, \widehat{OBC} + \widehat{B} = 90^\circ \rightarrow \widehat{ODC} + \widehat{C} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{DOC} = 90^\circ$$

۱۲۶- گزینه ۲

دانلود سوالات کنکور با پاسخ تشریحی از سایت ریاضی سرا



۱۲۷- در مثلث $(AB = \frac{2}{3}AC)ABC$ ، پاره خط ND موازی میانه AM است. نسبت $\frac{AD}{AE}$ کدام است؟

(۲) $\frac{5}{9}$
(۴) $\frac{4}{5}$

(۱) $\frac{4}{9}$
(۳) $\frac{2}{3}$

$$AM \parallel DN \Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{BM}{MN} \xrightarrow{BM=MC} \frac{\frac{2}{3}AC}{AD} = \frac{MC}{MN} \quad (1) ; \quad EN \parallel AM \Rightarrow \frac{EC}{AE} = \frac{NC}{MN} \quad (2)$$

۱۲۷- گزینه ۳

$$EN \parallel AM \Rightarrow \frac{EC}{AC} = \frac{NC}{MC} ; \quad (2) \rightarrow \frac{EC}{AE} = \frac{MN}{MC} \Rightarrow \frac{AD}{AE} \times \frac{2}{3} \times \frac{EC}{AC} = \frac{NC}{MC} \rightarrow \frac{AD}{AE} = \frac{2}{3}$$

۱۲۸- در مثلث ABC، میانه‌ی AM و نیمساز داخلی AD رسم شده است. کدام نامساوی همواره درست است؟

(۴) $AD < AM$

(۳) $AD < AB$

(۲) $AM < AB$

(۱) $AM < BC$

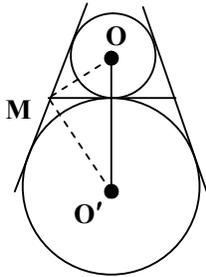
۱۲۸- گزینه ۴

در هر مثلث نامشخص همواره برای ارتفاع، نیمساز و میانه وارد از یک رأس داریم: میانه \leq نیمساز \leq ارتفاع

۱۲۹- دو دایره نامساوی به مرکزهای O و O' مماس خارج اند. دایره‌ای به قطر OO' ، با مماس مشترک خارجی این دو دایره، کدام وضعیت را دارد؟

- (۱) متقاطع (۲) مماس (۳) متخارج (۴) نامشخص

۱۲۹- گزینه ۲



چون $\widehat{OMO'} = 90^\circ$ است، پس M روی دایره‌ای به قطر OO' قرار دارد.

۱۳۰- در مثلث ABC نقطه‌ی M وسط ضلع BC و AD نیمساز زاویه‌ی A است. دایره‌ی محیطی مثلث

ADM رسم شده است. نسبت $\frac{BB'}{CC'}$ برابر کدام است؟

(۱) $\frac{AB}{AC}$ (۲)

(۳) $\frac{AB'}{AC'}$ (۴) $\frac{DB}{DM}$

۱۳۰- گزینه ۱

AD نیمساز $\Rightarrow \frac{CA}{BA} = \frac{CD}{BD}$

$$\begin{cases} CC' \times CA = CM \times CD \\ BB' \times BA = BD \times BM \end{cases} \xrightarrow{BM=CM} \frac{CC'}{BB'} \times \frac{CA}{BA} = \frac{CD}{BD} \Rightarrow \frac{CC'}{BB'} = 1$$

۱۳۱- با استفاده از کدام تبدیل هندسی، داخل مثلث مفروض می‌توان مرتب‌ی محاط کرد، که یک ضلع آن بر روی ضلع مثلث و دو رأس دیگر بر روی دو ضلع این مثلث قرار گیرد؟

- (۱) دوران (۲) بازتاب (۳) انتقال (۴) تجانس

۱۳۱- گزینه ۴

۱۳۲- نقطه A در خارج صفحه مثلث BCD است. صفحه گذرا بر A را طوری تعیین کنید، که نقاط D و C و B از آن به یک فاصله باشند. تعداد این نوع صفحات کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۳۲- گزینه ۴ صفحه‌ای که موازی صفحه BCD است، و سه صفحه‌ای که از A و وسط اضلاع بگذرد جواب می‌باشند.

۱۳۳- نقاط $A(5, -4, 1)$ و $B(-1, 2, 4)$ و $O(0, 0, 0)$ مفروض هستند و $\overline{AM} = \frac{2}{3}\overline{AB}$ ، مقدار $|\overline{OM}|$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{10}$ (۲) $\sqrt{11}$ (۳) $\sqrt{13}$ (۴) $\sqrt{14}$

۱۳۳- گزینه ۱ $\overline{AM} = \frac{2}{3}\overline{AB} \rightarrow (x_M - 5, y_M + 4, z_M - 1) = \frac{2}{3}(-6, 6, 3) \Rightarrow M = (1, 0, 3) \Rightarrow |\overline{OM}| = \sqrt{10}$

دانلود سوالات کنکور با پاسخ تشریحی از سایت ریاضی سرا

۱۳۴- فاصله‌ی دو خط به معادلات $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{-1}$ و $(x=2y+1, z=-y+2)$ کدام است؟

(۱) $\sqrt{6}$ (۲) $2\sqrt{2}$ (۳) $2\sqrt{3}$ (۴) $3\sqrt{2}$

۱۳۴- گزینه ۲
 $D: (x=2y+1, z=-y+2) \Rightarrow \frac{x-1}{2} = y = \frac{z-2}{-1} \Rightarrow \vec{u} = (2, 1, -1)$, $A(1, 0, 2) \in D$

$D': \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{-1}$, $B(1, -2, 0) \in D'$, $D \parallel D'$, $\overline{AB} = (0, -2, -2)$

$$\overline{AB} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (4, -4, 4) ; \quad HH' = \frac{|\overline{AB} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|} = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = 2\sqrt{2}$$

۱۳۵- صفحه‌ی گذرنده بر خط به معادله‌ی $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{-1}$ و نقطه $(0, 3, 0)$ ، محور Z ها را با کدام از تقاطع قطع می‌کند؟

(۱) -2 (۲) -3 (۳) 2 (۴) 3

۱۳۵- گزینه ۴
 $A(-1, 0, 2)$; $B(0, 3, 0)$, $\overline{AB} = (1, 3, -2)$; $\vec{n} = \overline{AB} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = (3, 3, -3)$

$$P: 3x + 3y + 3z = 9 \rightarrow x + y + z = 3 \xrightarrow[\substack{x=0 \\ y=0}]{z=3}$$

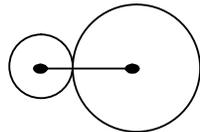
۱۳۶- دو دایره C و C' در نقطه $(0, 1)$ مماس برون‌ی هم هستند. اگر قائم‌های بر دایره C همواره از نقطه‌ی $(2, -3)$ بگذرد، مرکز دایره C' با شعاع $\sqrt{5}$ کدام است؟

(۱) $(-1, 3)$ (۲) $(-1, 2)$ (۳) $(1, -2)$ (۴) $(1, -1)$

۱۳۶- گزینه ۱
 نقطه‌ی $O(2, -3)$ مرکز دایره‌ی C است. فاصله‌ی $A(0, 1)$ تا برابر شعاع C است.

$$OA = R = \sqrt{2^2 + (-4)^2} = 2\sqrt{5} \quad OO' = \sqrt{5} + 2\sqrt{5} = 3\sqrt{5}$$

در گزینه‌ها فقط گزینه ۱ است که $OO' = 3\sqrt{5}$ را می‌دهد.



۱۳۷- سهمی به کانون $F(3, 2)$ و خط هادی به معادله‌ی $x = -1$ ، محور x ها را در نقطه‌ی A قطع می‌کند. فاصله‌ی نقطه‌ی A تا کانون سهمی کدام است؟

(۱) $2/25$ (۲) $2/5$ (۳) $2/75$ (۴) 3

۱۳۷- گزینه ۲
 چون خط هادی $x = -1$ است، پس سهمی افقی است پس: $F(\alpha, 2) = F(\alpha + p, \beta) \Rightarrow \alpha + p = 3, \beta = 2$

$$x = -1 = \alpha - p, \alpha + p = 3 \rightarrow \alpha = 1, p = 2 \Rightarrow (y-2)^2 = 4(2)(x-1) \xrightarrow{y=0} x_A = \frac{3}{2} \Rightarrow AF = \sqrt{\frac{9}{4} + 4} = 2/5$$

۱۳۸- ماتریس دوران A ، با رابطه $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ معادله‌ی مقطع مخروطی $12 = 24xy - 2y^2 + 5x^2$ را به صورت استاندارد بر حسب x' و y' تبدیل می‌کند. تانژانت زاویه دوران کدام است؟

(۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{4}{3}$ (۴) $\frac{3}{2}$

$$\tan 2\theta = \frac{B}{A-C} = \frac{24}{5 - (-2)} = \frac{24}{7}, \quad \tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} = \frac{24}{7} \rightarrow 12 \tan^2 \theta + 7 \tan \theta - 12 = 0 \rightarrow \tan \theta = \frac{3}{4} \quad 138- \text{گزینه ۲}$$

۱۳۹- اگر $A = [a_{ij}]_{2 \times 3}$ و $B = [b_{ij}]_{4 \times 3}$ باشند، کدام ضرب ماتریس‌ها تعریف شده است؟

AB^t (۴)

$B^t A^t$ (۳)

$A^t B$ (۲)

AB (۱)

۱۳۹- گزینه ۴ باید تعداد ستون ماتریس اول با تعداد سطر ماتریس دوم برابر باشد، که فقط در گزینه ۴ امکان پذیر است.

$$(A \rightarrow 2 \times 3 ; B^t \rightarrow 3 \times 4) \Rightarrow AB^t \rightarrow 2 \times 4$$

۱۴۰- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های ستون دوم ماتریس A^{-1} کدام است؟

صفر (۴)

۱ (۳)

 $\frac{2}{3}$ (۲) $-\frac{1}{3}$ (۱)

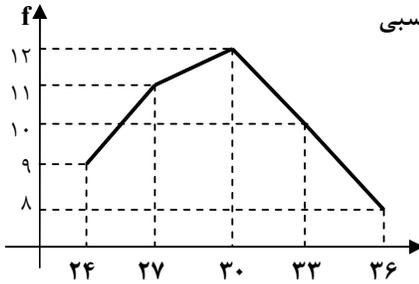
۱۴۰- گزینه ۳

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-(-1)}{1 \times 2} & \frac{1-4}{1 \times 2 \times 3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{-(-1)}{2 \times 3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 0 = 1$$

دانلود سوالات کنکور با پاسخ تشریحی از سایت ریاضی سرا



پاسخ سوالات آمار - جبر و احتمال - ریاضیات گسسته



۱۴۱- به داده‌های آماری با نمودار چندبر، رو به رو، دو داده ۲۹ و ۳۲ افزوده شود، درصد فراوانی نسبی

در دسته وسط جدید کدام است؟

۲۳ (۱) ۲۴ (۲)

۲۵ (۳) ۲۶ (۴)

۱۴۱- گزینه ۳ تعداد داده‌ها ۵۰ است.

طول دسته‌ها برابر ۳ است. پس ۲۹ در دسته وسط قرار می‌گیرد و یک عضو به فراوانی آن اضافه می‌شود. داریم:

$$\frac{12+1}{50+2} \times 100 = \frac{13}{52} \times 100 = 25$$

(حدود دسته وسط: $(28/5, 31/5)$)

۱۴۲- اگر میانگین داده‌های دسته‌بندی شده، برابر ۱۶ باشد، با تعیین فراوانی دسته‌ی چهارم مقدار واریانس کدام است؟

نمایند دسته	۱۲	۱۴	۱۶	۱۸	۲۰
فراوانی	۵	۷	۱۰	a	۳

۴/۹۲ (۲)

۴/۸۵ (۱)

۵/۷۴ (۴)

۵/۵۵ (۳)

۱۴۲- گزینه ۳

$$\bar{x} - 16 = 16 - 16 = \frac{(-4) \times 5 + (-2) \times 7 + 0 + (2) \times a + (4) \times 3}{25 + a} \Rightarrow a = 11$$

$$\sigma^2 = \frac{(-4-0)^2 \times 5 + (-2-0)^2 \times 7 + 0 + (2-0)^2 \times 11 + (4-0)^2 \times 3}{25 + 11} = \frac{200}{36} = 5/55$$

$$\sigma^2_A = \frac{1+4+1+0+1+9}{6} = \frac{8}{3}, \sigma^2_B = \frac{0+4+1+4+1+4}{6} = \frac{7}{3}$$

واریانس B کمتر است، پس دقیق‌تر است.

۱۴۳- در اثبات نامساوی $n! > 2^{n+1}$ ، به روش استقرای تعمیم یافته، عدد مناسب، و رابطه‌ی بدیهی در گام بعدی حکم، برای $k \geq m$ کدام است؟

$k+1 > 2$ و $m = 6$ (۲)

$k+1 > 2$ و $m = 5$ (۱)

$(2k+1) > 4$ و $m = 6$ (۴)

$(2k+1) > 4$ و $m = 5$ (۳)

۱۴۳- گزینه ۱ به ازای $m = 5$ درست است: $n! > 2^{n+1} \xrightarrow{n=5} 120 > 64$

طرفین فرض را $(k+1)$ در ضرب می‌کنیم: $P(k) : k! > 2^{k+1} \xrightarrow{\times(k+1)} (k+1)! > (k+1) \times 2^{k+1}$

حال باید ثابت کنیم: $(k+1) \times 2^{k+1} > 2^{k+2}$ که داریم: $(k+1) > 2$

۱۴۴- اگر S یک زیرمجموعه ۱۱۵ عضوی از اعداد طبیعی باشد، در تقسیم عضوهای S بر ۲۷، به طور یقین، حداقل چند عضو دارای یک باقی‌مانده هستند؟

۷ (۴)

۶ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)

۱۴۴- گزینه ۲

با توجه به اصل لانه کبوتری، اگر ۱۲۷ را تعداد کبوترها، و ۲۷ را تعداد لانه‌ها فرض کنیم، داریم $115 = 27 \times 4 + 7$ ، که بنابراین حداقل $4+1$ عضو، یعنی ۵ عضو دارای باقی‌مانده یکسان در تقسیم بر ۲۷ می‌باشند.

۱۴۵- اگر $n \in \mathbb{N}$ و $A_n = \{m \in \mathbb{Z} : |m| \leq n, 2^m \leq 2n\}$ ، آنگاه مجموعه $A_6 - A_4$ چند عضو دارد؟

۷ (۴)

۶ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)

۱۴۵- گزینه ۲

$$A_1 = \{-1, 0, 1\}; A_6 = \{-6, -5, \dots, 2, 3\}; A_4 = \{-4, -3, \dots, 2, 3\} \Rightarrow A_6 - A_4 = \{-6, -5\}$$

$$(A_6 - A_4) \cup A_1 = \{-6, -5, -1, 0, 1\}$$

۱۴۶- رابطه‌ی $\{(x, y) : -x \geq |y|\}$ بر روی مجموعه $A = \{x : |x| \leq 3\}$ تعریف شده است. تعداد عضوهای این رابطه با مختص‌های صحیح

کدام است؟

۲۰ (۴)

۱۶ (۳)

۱۵ (۲)

۱۲ (۱)

۱۴۶- گزینه ۳

$$R = \left\{ \underbrace{(-3, -3), (-3, -2), \dots, (-3, 3)}_7, \underbrace{(-2, -2), \dots, (-2, 2)}_5, \underbrace{(-1, -1), (-1, 0), (-1, 1)}_3, \underbrace{(0, 0)}_1 \right\}$$

۱۴۷- هر یک از اعداد ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ بر روی شش گوی یکسان نوشته شده است. به طور تصادف متوالی هم یک گوی از جعبه خارج

می‌کنیم. با کدام احتمال اعداد فرد یا زوج یک در میان خارج می‌شوند؟

۰/۲ (۴)

۰/۱۵ (۳)

۰/۱۲ (۲)

۰/۱ (۱)

۱۴۷- گزینه ۱

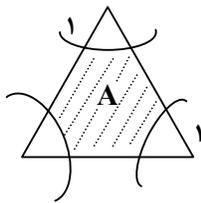
$$n(S) = 6! \quad , \quad n(A) = 2 \times 3! \times 3! \quad ; \quad P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{10} = 0/1$$

۱۴۸- یک نقطه به طور تصادفی، درون مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع $\sqrt{2\pi\sqrt{3}}$ انتخاب می‌شود. با کدام احتمال، فاصله‌ی این نقطه تا رأس مثلث

بیش‌تر از ۱ واحد است؟

 $\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۱)

۱۴۸- گزینه ۳



$$A \text{ مساحت ناحیه } = \text{مساحت متساوی‌الاضلاع} - \text{مساحت نیم‌دایره} = \frac{\sqrt{3}}{4} (\sqrt{2\pi\sqrt{3}})^2 - \frac{1}{2} \pi (1)^2 = \pi$$

$$P(A) = \frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{4} (\sqrt{2\pi\sqrt{3}})^2} = \frac{\pi}{\frac{3\pi}{2}} = \frac{2}{3}$$

۱۴۹- در یک گراف کامل از مرتبه ۵، چند دور با طول ۵، وجود دارد؟

۲۴ (۴)

۱۶ (۳)

۱۵ (۲)

۱۲ (۱)

۱۴۹- گزینه ۱

$$K_p \text{ در گراف کامل } m \text{ در دور به طول } = \binom{P}{m} \frac{(m-1)!}{2} \Rightarrow \binom{5}{5} \frac{(5-1)!}{2} = 12$$

۱۵۰- چند عدد سه رقمی وجود دارد که مضرب ۱۱ بوده و باقی مانده‌ی تقسیم آن بر دو عدد ۴ و ۵، برابر ۱ باشد؟

۶ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

۱۵۰- گزینه ۲

$$x \equiv 0 \pmod{11}, \begin{cases} x \equiv 1 \pmod{4} \\ x \equiv 1 \pmod{5} \end{cases} \Rightarrow x \equiv 1 \pmod{20}; \begin{cases} x \equiv 1 \pmod{4} \\ x \equiv 0 \pmod{11} \end{cases} \Rightarrow x \equiv 121 \pmod{44} \rightarrow x \equiv 121 \pmod{44} \Rightarrow x = 121, 341, 561, 781$$

$$abc = 11 \times 13 \times 2^2 = 572 \Rightarrow 5 + 7 + 2 = 14$$

۱۵۱- مجموع دو عدد ۲۷۷۲ و بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک آن‌ها ۲۳۱ و مخالف عدد کوچک‌تر است. تفاضل این دو عدد کدام است؟

۹۲۴ (۴)

۶۹۳ (۳)

۴۶۲ (۲)

۲۳۱ (۱)

۱۵۱- گزینه ۲

$$a + b = 2772 \rightarrow a'd + b'd = 2772 \xrightarrow{(a', b')=1} a' + b' = 12 \Rightarrow \begin{cases} a' = 7 \\ b' = 5 \end{cases}$$

$$a - b = a'd - b'd = (7 - 5) \times 231 = 462$$

۱۵۲- اگر عدد $2x^2 - x - 6$ مضرب ۵۳ باشد، رقم یکان بزرگ‌ترین عدد سه رقمی کدام است؟

۹ (۴)

۸ (۳)

۷ (۲)

۶ (۱)

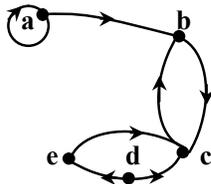
۱۵۲- گزینه ۴

تجزیه این عدد به شکل $2x^2 - x - 6 = (2x + 3)(x - 2) = 53k$ است. که چون ۵۳ عددی اول است، پس بهتر است هر عاملی را برابر مضارب

$$(x - 2) = 53q \xrightarrow{q=18} x - 2 = 954 \rightarrow x = 956$$

۵۳ قرار دهیم. پس داریم:

$$2x + 3 = 53q' \xrightarrow{q'=37} 2x + 3 = 1961 \rightarrow x = 979$$



۱۵۳- شکل زیر گراف مربوط به رابطه‌ی R است. ماتریس متناظر RoR چند درایه یک دارد؟

۸ (۲)

۷ (۱)

۱۰ (۴)

۹ (۳)

۱۵۳- گزینه ۴

$$M(\text{RoR}) = [M(R)]^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

۱۵۴- تعداد جواب‌های صحیح و غیرمنفی نامساوی $x_1 + x_2 + x_3 \leq 4$ کدام است؟

۳۵ (۴)

۳۳ (۳)

۳۲ (۲)

۳۰ (۱)

۱۵۴- گزینه ۴

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 4 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + y = 4 \rightarrow \begin{pmatrix} 4+4-1 \\ 4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} = 35$$

۱۵۵- در دو ظرف به ترتیب ۲۴ و ۱۸ مهره یکسان موجود است. در ظرف اول ۶ مهره سفید و در ظرف دوم ۳ مهره سفید است. از اولی ۷ مهره و از دومی ۵ مهره به تصادف برداشته و در ظرف دیگری می‌ریزیم. سپس از ظرف آخر یک مهره بیرون می‌آوریم، با کدام احتمال این مهره سفید است؟

(۱) $\frac{13}{72}$

(۲) $\frac{7}{36}$

(۳) $\frac{15}{72}$

(۴) $\frac{31}{144}$

۱۵۵- گزینه ۴

$$\frac{7}{12} \times \frac{6}{24} + \frac{5}{12} \times \frac{3}{18} = \frac{21+10}{144} = \frac{31}{144}$$

