



حل تشریحی سوالات ریاضی

کنکور سراسری **تیرماه** ۱۴۰۲

رشته ریاضی فیزیک

تهیه و تنظیم: عزیز اسدی

دانلود از سایت ریاضی سرا

سوال ۱:

اگر جملات یک دنباله هندسی با قدرنسبت r را نصف کنید، دنباله‌ای حسابی با قدرنسبت d خواهید داشت. مقدار $r + d$ کدام است؟

(۴) $\frac{1}{2}$

(۳) $\sqrt{2}$

(۲) ۱

(۱) صفر

حل:

روش اول:

دنباله هندسی: $a, ar, ar^2, \dots$

$$\Rightarrow \text{دنباله حسابی: } \frac{a}{2}, \frac{ar}{2}, \frac{ar^2}{2}, \dots \Rightarrow 2\left(\frac{ar}{2}\right) = \frac{a}{2} + \frac{ar^2}{2} \Rightarrow 2r = 1 + r^2 \Rightarrow r = 1$$

$$\Rightarrow \text{دنباله حسابی: } \frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \dots \Rightarrow d = 0 \Rightarrow r + d = 1 + 0 = 1 \quad (\text{گزینه ۲})$$

روش دوم:

با نصف کردن جملات هر دنباله هندسی، دنباله هندسی دیگری به دست می‌آید.

در سوال عنوان شده که دنباله به دست آمده حسابی است.

دنباله‌ای که هم حسابی و هم هندسی باشد، دنباله ثابت است؛ بنابراین

$$d = 0, r = 1 \Rightarrow r + d = 1 \quad (\text{گزینه ۲})$$

RIAZISARA

سوال ۲:

نقاط $A(3, y)$ و $B(-5, y)$ روی یک سهمی واقع شده‌اند و عرض رأس سهمی برابر ۱ است. اگر این سهمی، محور x ها را در نقاطی با طول‌های α و β قطع کند و $\alpha^2 + \beta^2 = 5$ باشد، این سهمی محور y ها را در نقطه‌ای با کدام عرض قطع می‌کند؟

$$\frac{2}{3} \quad (4)$$

$$\frac{1}{3} \quad (3)$$

$$-\frac{2}{3} \quad (2)$$

$$-\frac{1}{3} \quad (1)$$

حل:

$$O \text{ طول } = \frac{-5+3}{2} = -1 \Rightarrow \frac{\alpha+\beta}{2} = -1 \Rightarrow \alpha+\beta = -2$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = 5 \Rightarrow 5 - 2P = 5 \Rightarrow 4 - 2P = 5 \Rightarrow P = -\frac{1}{2}$$

$$f(x) = a(x^2 - 5x + P) \Rightarrow f(x) = a(x^2 + 2x - \frac{1}{2}) \xrightarrow{f(-1)=1} a(1 - 2 - \frac{1}{2}) = 1 \Rightarrow a = -\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{2}{3}(x^2 + 2x - \frac{1}{2}) \Rightarrow f(0) = \frac{1}{3}$$

گزینه ۳

سوال ۳:

برای مجموعه‌های $A = \{a-2, 6, 2b+1, c\}$ و $B = \{\sqrt{d}, 5, -1\}$ ، فرض کنید $A \times B = B \times A$ باشد، در چند حالت مقدار $a+b+c = 9$ است؟

(۴) صفر

(۳) ۳

(۲) ۲

(۱) ۱

حل:

$$A \times B = B \times A \Rightarrow A = B \Rightarrow \sqrt{d} = 2 \Rightarrow d = 4 \Rightarrow A = \{2, 5, -1\}$$

$$\left. \begin{array}{l} a-2 = 2 \\ 2b+1 = 5 \\ c = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow a = 4, b = 2, c = -1 \quad a+b+c = 9 \quad \checkmark \quad \text{حالت I:}$$

$$\left. \begin{array}{l} a-2 = 4 \\ 2b+1 = -1 \\ c = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow a = 6, b = -1, c = 5 \quad a+b+c \neq 9 \quad \text{حالت II:}$$

$$\left. \begin{array}{l} a-2 = 5 \\ 2b+1 = 2 \\ c = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow a = 7, b = 0.5, c = -1 \quad a+b+c \neq 9 \quad \text{حالت III:}$$

$$\left. \begin{array}{l} a-2 = 5 \\ 2b+1 = -1 \\ c = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow a = 7, b = -1, c = 2 \quad a+b+c \neq 9 \quad \text{حالت IV:}$$

$$\left. \begin{array}{l} a-2 = -1 \\ 2b+1 = 2 \\ c = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow a = 1, b = 0.5, c = 5 \quad a+b+c \neq 9 \quad \text{حالت V:}$$

$$\left. \begin{array}{l} a-2 = -1 \\ 2b+1 = 5 \\ c = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow a = 1, b = 2, c = 2 \quad a+b+c \neq 9 \quad \text{حالت VI:}$$

سوال ۴:

مطابق با جدول ارزش درستی گزاره‌های زیر، کدام گزاره مرکب می‌تواند هم‌ارز منطقی گزاره X باشد؟

p	q	r	X
د	د	د	ن
د	د	ن	ن
د	ن	د	د
د	ن	ن	ن
ن	د	د	ن
ن	د	ن	د
ن	ن	د	د
ن	ن	ن	ن

$$(1) (q \Rightarrow (p \vee r)) \Rightarrow ((p \vee \sim p) \wedge (\sim q \wedge r))$$

$$(2) (r \Rightarrow (p \vee q)) \Rightarrow ((p \vee \sim p) \wedge (q \wedge \sim r))$$

$$(3) [p \Rightarrow ((q \vee r) \Rightarrow (q \wedge r))] \Rightarrow (\sim (p \vee r) \wedge q)$$

$$(4) (r \Rightarrow (p \vee q)) \Rightarrow [((p \Rightarrow r) \Rightarrow (\sim p \wedge r)) \wedge q]$$

حل:

$$(p = د, q = ن, r = د)$$

گزینه‌ها ۱، ۲ و ۴ با سطر دوم جدول مطابقت ندارند.

بنابراین گزینه ۳ صحیح است.

RIAZISARA

سوال ۵:

اگر α و β ریشه‌های متمایز معادله $ax^2 - ax - b = 0$ و $40\beta^2 + 20\alpha^2 - 20\beta = 17$ باشد، اختلاف ریشه‌های این معادله کدام است؟

$$\frac{2}{\sqrt{5}} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \quad (۳)$$

$$\frac{2}{5} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{5} \quad (۱)$$

حل:

$$S = 1 \quad P = \frac{-b}{a}$$

$$ax^2 - ax - b = 0 \Rightarrow ax(x-1) = b \Rightarrow x(x-1) = \frac{b}{a}$$

$$40\beta^2 + 20\alpha^2 - 20\beta = 17 \Rightarrow 20(\beta^2 + \alpha^2) + 20\beta(\beta-1) = 17 \quad \text{از طرفی}$$

$$\Rightarrow 20(S^2 - 2P) + 20\left(\frac{b}{a}\right) = 17 \Rightarrow 20\left(1 + \frac{2b}{a}\right) + 20\frac{b}{a} = 17 \Rightarrow 40\frac{b}{a} = -3 \Rightarrow \frac{b}{a} = -\frac{3}{40} \Rightarrow P = \frac{1}{40}$$

$$|\alpha - \beta| = \sqrt{S^2 - 4P} = \sqrt{1 - 4\left(\frac{1}{40}\right)} = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

گزینه ۴

RIAZISARA

سوال ۶:

مجموع ریشه‌های معادله $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{16}{9}$ کدام است؟

۲/۲۵ (۴)

۲ (۳)

۱/۷۵ (۲)

۱ (۱)

حل:

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{16}{9}$$

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{x(1-x)}\right) = \frac{16}{9} \Rightarrow \underbrace{\left(\frac{1}{x(1-x)}\right)^2}_{t^2} - 2\underbrace{\left(\frac{1}{x(1-x)}\right)}_t = \frac{16}{9}$$

$$t^2 - 2t = \frac{16}{9} \Rightarrow t^2 - 2t + 1 = \frac{16}{9} + 1 \Rightarrow (t-1)^2 = \frac{25}{9} \Rightarrow \begin{cases} t-1 = \frac{5}{3} \Rightarrow t = \frac{8}{3} \\ t-1 = -\frac{5}{3} \Rightarrow t = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x(1-x)} = \frac{8}{3} \Rightarrow -x^2 + x = \frac{8}{3} \xrightarrow{\text{جمع ریشه‌ها}} S_1 = 1 \\ \frac{1}{x(1-x)} = -\frac{2}{3} \Rightarrow -x^2 + x = -\frac{2}{3} \xrightarrow{\text{جمع ریشه‌ها}} S_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow S = S_1 + S_2 = 1 + 1 = 2$$

گزینه ۴

RIAZISARA

سوال ۷:

نقطه $(\frac{4}{5}, 2)$ رأس یک مستطیل است که دو ضلع آن منطبق بر خطوط $4x + y = 3$ و $x - 4y = 5$ هستند. بیشترین فاصله وسط قطر از اضلاع کدام است؟

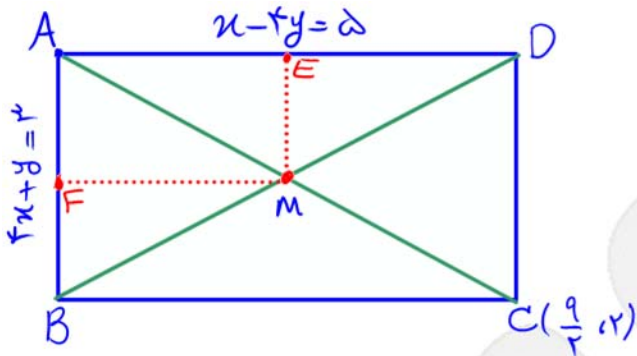
$\sqrt{17}$ (۴)

$2\sqrt{17}$ (۳)

$\frac{\sqrt{17}}{4}$ (۲)

$\frac{\sqrt{17}}{2}$ (۱)

حل:



نقطه $(\frac{4}{5}, 2)$ روی هیچ کدام از دو ضلع قرار ندارد.
بنابراین مطابق شکل این نقطه، نقطه C است.
از طرفی فاصله نقطه M (وسط قطرها) از دو ضلع نصف اندازه‌ها
در ضلع (نصف فاصله C از دو ضلع) است.

$$ME = \frac{1}{2} CD = \frac{1}{2} \frac{|\frac{9}{4} - 1 - 5|}{\sqrt{1+16}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{17}{4}}{\sqrt{17}} \right) = \frac{17}{4\sqrt{17}} = \frac{\sqrt{17}}{4}$$

$$MF = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} \frac{|4(\frac{9}{4}) + 2 - 3|}{\sqrt{16+1}} = \frac{1}{2} \left(\frac{17}{\sqrt{17}} \right) = \frac{\sqrt{17}}{2} \quad \checkmark$$

گزینه ۱

سوال ۸:

وارون تابع $f(x) = \sqrt{x - 2\sqrt{mx - 1}}$ در دامنه محدود، خط $y = 12 - x$ را در نقطه‌ای به عرض ۱۰ قطع می‌کند.
مقدار $f(m + 4)$ کدام است؟

۱ (۴)

۲ (۳)

$\frac{1}{4}$ (۲)

$\frac{1}{2}$ (۱)

حل:

$$y = 12 - x \quad y = 10 \rightarrow x = 2 \Rightarrow (2, 10) \in f^{-1}$$

$$f^{-1}(2) = 10 \Rightarrow f(10) = 2 \Rightarrow \sqrt{10 - 2\sqrt{10m - 1}} = 2 \Rightarrow 10 - 2\sqrt{10m - 1} = 4$$

$$\rightarrow 2\sqrt{10m - 1} = 6 \Rightarrow 10m - 1 = 9 \Rightarrow m = 1$$

$$f(m + 4) = f(5) = \sqrt{5 - 2\sqrt{5 - 1}} = 1 \quad \text{گزینه ۴}$$

سوال ۹:

مقداری از یک عنصر موجود است. اگر عنصر در هر ساعت $\frac{1}{9}$ از جرم باقیمانده را از دست بدهد، پس از چند دقیقه

$\frac{1}{6}$ از جرم عنصر باقی خواهد ماند؟ ($\log_3^5 = 1/4$ و $\log_2^5 = 2/4$)

۴۲۰ (۴)

۴۴۰ (۳)

۳۶۰ (۲)

۳۸۰ (۱)

$$A_n = A(1 - \frac{1}{9})^{\frac{t}{40}} \Rightarrow \frac{1}{6}A = A(\frac{8}{9})^{\frac{t}{40}} \Rightarrow \frac{t}{40} \cdot \log_2 \frac{1}{6} = \log_2 \frac{1}{9}$$

حل:

$$\Rightarrow \frac{t}{40}(-\log_2 6) = \log_2 \frac{1}{9} \Rightarrow \frac{t}{40} = \frac{-\log_2 6}{\log_2 \frac{1}{9}} = - \frac{\log_2^2 3 + \log_2^2 2}{\log_2^2 3 - \log_2^2 2} = - \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}{3(\frac{1}{4}) - 2(\frac{1}{4})}$$

$$\Rightarrow \frac{t}{40} = - \frac{\frac{10}{36} + \frac{10}{16}}{3(\frac{10}{36}) - 2(\frac{10}{16})} \Rightarrow \frac{t}{40} = + \frac{19}{3} \Rightarrow t = 380$$

گزینه ۱

RIAZISARA

سوال ۱۰:

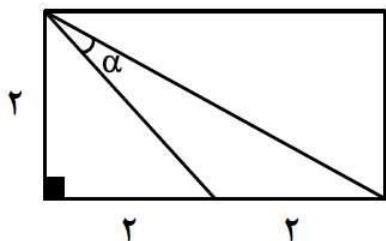
در شکل زیر، مقدار $\cot \alpha$ کدام است؟

۱ (۱)

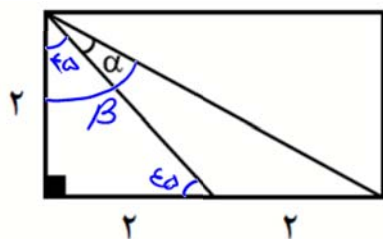
۳ (۲)

$\frac{1}{2}$ (۳)

$\frac{1}{3}$ (۴)



حل:



$$\beta = \alpha + \alpha \rightarrow \alpha = \beta - \alpha$$

$$\tan \beta = \frac{4}{2} = 2$$

$$\tan \alpha = \tan(\beta - \alpha) = \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{1 + \tan \beta \cdot \tan \alpha} = \frac{2 - 1}{1 + 2(1)} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \cot \alpha = 3$$

گزینه ۲

RIAZISARA

سوال ۱۱:

مثلث ABC ، با اضلاع $\sqrt{3}$ و 6 و α (زاویه بین آنها) قابل رسم است. اگر مساحت این مثلث $4/5$ باشد، بیشترین مقدار α چند برابر کمترین مقدار α است؟

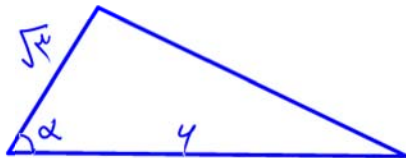
۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

حل:



$$S = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin \alpha$$

$$\frac{4}{2} = \frac{1}{2} (\sqrt{3})(4) \sin \alpha \Rightarrow \sin \alpha = \frac{4}{2\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{18} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 40^\circ \\ \alpha_2 = 140^\circ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = 4$$

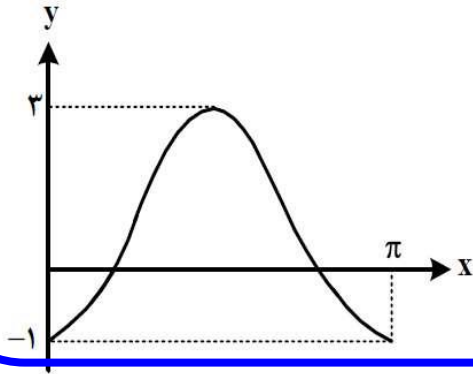
گزینه ۱

RIAZISARA

سوال ۱۲:

اگر شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a + b \sin\left(cx - \frac{3\pi}{4}\right) \cos\left(cx - \frac{3\pi}{4}\right)$ باشد، اختلاف صفرهای تابع f

در بازه $[0, \pi]$ ، کدام است؟



(۴) $\frac{2\pi}{3}$

(۳) $\frac{\pi}{2}$

(۲) $\frac{\pi}{4}$

(۱) $\frac{\pi}{6}$

حل:

$$f(x) = a + b \sin\left(cx - \frac{3\pi}{4}\right) \cos\left(cx - \frac{3\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow f(x) = a + \frac{b}{2} \sin\left(2cx - \frac{3\pi}{2}\right) = a + \frac{b}{2} \cos(2cx)$$

$$\left|\frac{b}{2}\right| = \frac{3 - (-1)}{2} = 2 \xrightarrow{b < 0} b = -4$$

$$a = \frac{3 + (-1)}{2} = 1$$

$$T = \frac{2\pi}{2|c|} \Rightarrow \pi = \frac{\pi}{|c|} \Rightarrow |c| = 1 \Rightarrow c = \pm 1$$

$$f(x) = 1 - 2 \cos(2x) = 0 \rightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} \\ 2x = \frac{5\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

$$\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{4\pi}{6}$$

گزینه ۴

RIAZISARA

سوال ۱۳:

در معادله مثلثاتی $m(\cos x - \sin x) - 3\sqrt{6} \sin(2x) = \sqrt{6}$ اگر $\cos(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ باشد، مقدار m کدام است؟

۳ (۴)

۶ (۳)

-۳ (۲)

-۶ (۱)

حل: $\cos(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos x - \sin x) = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \cos x - \sin x = \frac{2}{\sqrt{6}} \quad (I)$

$\Rightarrow (\cos x - \sin x)^2 = \frac{4}{6} \Rightarrow 1 - \sin^2 x = \frac{4}{6} \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow m(\frac{2}{\sqrt{6}}) - 3\sqrt{6}(\frac{1}{3}) = \sqrt{6} \xrightarrow{\times \sqrt{6}} 2m - 6 = 6 \Rightarrow m = 6$

گزینه ۳



RIAZISARA

سوال ۱۴:

تابع f اکیداً نزولی و دامنه آن مجموعه‌ای از مقادیر منفی است. اگر $f(m^2 - m - 5) < f(-3 + 2m - m^2)$ باشد، m دارای چند مقدار صحیح است؟

(۴) صفر

(۳) ۳

(۲) ۲

(۱) ۱

حل:

$$m^2 - m - 5 < 0 \Rightarrow m \in \left(\frac{1 - \sqrt{21}}{2}, \frac{1 + \sqrt{21}}{2} \right) \quad \textcircled{I}$$

$$-3 + 2m - m^2 < 0 \xrightarrow{\Delta < 0} m \in \mathbb{R} \quad \textcircled{II}$$

$$f \text{ اکیداً نزولی: } -3 + 2m - m^2 < m^2 - m - 5 \Rightarrow 0 < 2m^2 - 3m - 2 \Rightarrow m \in \left(-\infty, -\frac{1}{2} \right) \cup (2, +\infty) \quad \textcircled{III}$$

$$\textcircled{I} \cap \textcircled{II} \cap \textcircled{III} = \{-1\} \quad (m \in \mathbb{Z})$$

گزینه ۱

سوال ۱۵:

f تابع هموگرافیک، $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g^{-1}(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g^{-1}(x)}{g(x)}$ است، کدام عدد می‌تواند حاصل

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f^{-1}(x)$ باشد؟

۲ (۴)

۱ (۳)

$\frac{1}{2}$ (۲)

صفر (۱)

حل:

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a}$$

$$g(x) = \frac{cx+d}{ax+b} \Rightarrow g^{-1}(x) = \frac{-bx+d}{ax-c}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g^{-1}(x)} = \frac{\frac{a}{c}}{-\frac{b}{a}} = -\frac{a^2}{bc}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g^{-1}(x)}{g(x)} = \frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = -\frac{b}{c}$$

$$-\frac{a^2}{bc} = -\frac{b}{c} \Rightarrow a^2 = b \Rightarrow |a| = |b| \Rightarrow \left|\frac{b}{a}\right| = 1 \Rightarrow \frac{b}{a} = \pm 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f^{-1}(x) = -\frac{b}{a} = \pm 1$$

گزینه ۳

RIAZISARA

سوال ۱۶:

برای مقدار مشخص k ، تابع $f(x) = \begin{cases} |x - [-x]| & \text{زوج } [x] \\ x - [x] + k & \text{فرد } [x] \end{cases}$ در $x = n$ و $x = -n$ پیوسته است. کدام مورد در خصوص n صحیح است؟ ($k, n \in \mathbb{N}$)

(۲) n فرد

(۱) n زوج

(۴) برای هیچ مقداری از n پیوسته نیست.

(۳) برای جميع مقادیر n پیوسته است.

حل:

با مثال عددی با یک عدد فرد و یک عدد زوج، سه راه را محسوس کنیم.

$$n=1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$n=1 \Rightarrow f(1)=k \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = k \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2 \end{cases}$$

به ازای $k=2$ تابع در $x=1$ پیوسته است.

$$n=-1 \Rightarrow f(-1)=k \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = k \end{cases}$$

به ازای $k=2$ تابع در $x=-1$ پیوسته است.

$$n=2 \Rightarrow x = \pm 2$$

$$n=2 \rightarrow f(2)=4 ; \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \infty ; \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1+k$$

تابع به ازای هیچ مقدار k در $x=2$ پیوسته نیست.

گزینه ۲

RIAZISARA

سوال ۱۷:

اگر $f(x) = \left(\frac{-1 + \sin x}{1 + \sin x} \right)^2$ و $f(x) = xg(x) + 1$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ کدام است؟

۲ (۴)

۴ (۳)

۲ (۲)

۴ (۱)

حل:

$$f(x) = \frac{1 + \sin^2 x - 2 \sin x}{1 + \sin^2 x + 2 \sin x}$$

$$f(x) = x \cdot g(x) + 1 \Rightarrow g(x) = \frac{f(x) - 1}{x} = \frac{\frac{-4 \sin x}{1 + \sin^2 x + 2 \sin x}}{x} = \frac{\frac{-4 \sin x}{x}}{1 + \sin^2 x + 2 \sin x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-4 \sin x}{x}}{\lim_{x \rightarrow 0} 1 + \sin^2 x + 2 \sin x} = \frac{-4}{1 + 0 + 0} = -4$$

گزینه ۳

RIAZISARA

سوال ۱۸:

خط d موازی محور x ها، قرینه سهمی $y = x^2 + 1$ نسبت به محور x ها را در دو نقطه قطع می کند و مماس های رسم شده در این نقاط بر هم عمودند. فاصله خط d از مبدأ مختصات کدام است؟

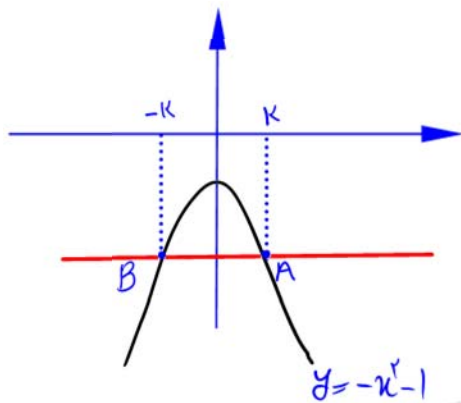
(۴) $۲/۷۵$

(۳) $۰/۷۵$

(۲) $۳/۲۵$

(۱) $۱/۲۵$

حل:



$$y = -x^2 - 1 \Rightarrow y' = -2x$$

$$M = -2k \text{ : شیب مماس بر منتهی در نقطه ای به طول } k$$

$$M = 2k \text{ : شیب مماس بر منتهی در نقطه ای به طول } -k$$

$$\Rightarrow (-2k)(2k) = -1$$

$$\Rightarrow 2k^2 = 1 \Rightarrow k^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow k = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$y = -\frac{1}{2} - 1 \rightarrow y = -\frac{3}{2} \Rightarrow d = \left| -\frac{3}{2} \right| = 1.5$$

گزینه ۱

RIAZISARA

سوال ۱۹:

به ازای چند مقدار صحیح و منفی k ، نقطه عطف منحنی $y = kx^3 + (k+1)x^2$ در ناحیه دوم محورهای مختصات قرار دارد؟

(۴) صفر

(۳) بیش از ۲

(۲) ۲

(۱) ۱

حل:

$$y' = 3kx^2 + 2(k+1)x \rightarrow y'' = 6kx + 2(k+1) = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{-(k+1)}{3k} < 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty) \quad \textcircled{I}$$

$$y = k \left(\frac{-(k+1)}{3k} \right)^3 + (k+1) \left(\frac{-(k+1)}{3k} \right)^2 > 0 \Rightarrow \frac{-(k+1)^3}{27k^2} + \frac{(k+1)^2}{9k^2} > 0$$

$$\Rightarrow 2(k+1)^2 > 0 \Rightarrow k+1 > 0 \Rightarrow k > -1 \quad \textcircled{II}$$

$$\textcircled{I} \cap \textcircled{II} \cap \mathbb{Z}^- = \emptyset$$

گزینه ۴

RIAZISARA

سوال ۲۰:

کمترین فاصله نقاط واقع بر منحنی $y = \sqrt{x - [x]^2}$ از خط $2x - y + 2 = 0$ کدام است؟

(۴) $\frac{3\sqrt{5}}{10}$

(۳) $\frac{\sqrt{5}}{10}$

(۲) $\frac{3\sqrt{5}}{8}$

(۱) $\frac{\sqrt{5}}{5}$

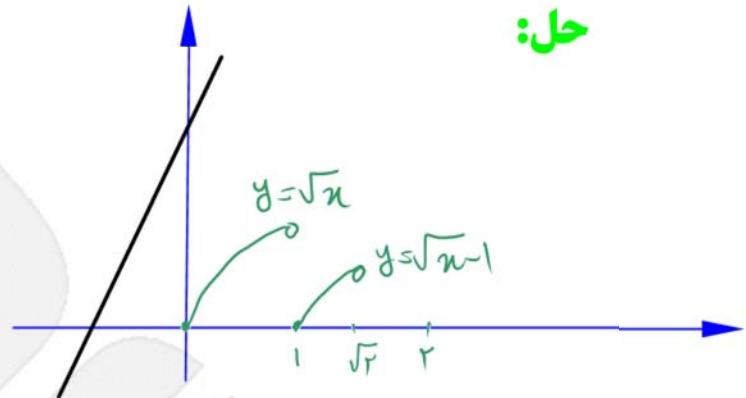
حل:

$$x - [x]^2 \geq 0 \Rightarrow x \geq [x]^2 \geq 0$$

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow [x] = 0 \rightarrow y = \sqrt{x}$$

$$1 \leq x < 2 \Rightarrow [x] = 1 \rightarrow y = \sqrt{x-1}$$

باتوجه به نمودار، واضح است که $y = \sqrt{x}$ فاصله کمتر
با خط دارد. شده دارد.



فاصله نقاط روی منحنی $y = \sqrt{x}$ از خط داریم:

$$d = \frac{|2x - \sqrt{x} + 2|}{\sqrt{5}} = \frac{2x - \sqrt{x} + 2}{\sqrt{5}} \Rightarrow d' = 2 - \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0$$

$$\Rightarrow 2 - \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \frac{1}{16}$$

$$\Rightarrow d = \frac{2(\frac{1}{16}) - \frac{1}{4} + 2}{\sqrt{5}} = \frac{\frac{15}{8}}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{8}$$

گزینه ۲

RIAZISARA

سوال ۲۱:

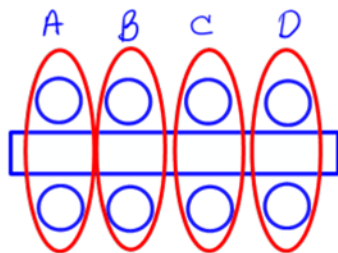
۴ وزیر هر کدام با یک معاون به چند طریق می توانند روی ۸ صندلی در دو ردیف روبه روی هم بنشینند به طوری که هر وزیر دقیقاً روبه روی معاونش قرار بگیرد؟

۶۴ (۴)

۴۸ (۳)

۳۲ (۲)

۲۴ (۱)



مشابه تمرین ۱ صفحه ۱۷ کتاب درسی

حل:

روش اول:

تعداد حالات جابجایی گروه‌ها: $4!$

تعداد حالات جابجایی در هر گروه: $2! = 2$

تعداد حالات مورد نظر: $4! \times 2^4 = 384$

روش دوم: کافی است فقط جایگاه وزیران را مشخص کنیم؛ در این حالت برای تعیین جایگاه معاونین فقط یک راه وجود دارد.

$$1 \times 2 \times 4 \times 2 = 384$$

بنابراین هیچ کدام از گزینه‌ها صحیح نیست!!

RIAZISARA

سوال ۲۲:

در یک گروه ۱۵۰ نفری دانش آموزی، ۴۰ نفر فقط بلیت فیلم «الف» و ۷۵ نفر فقط بلیت فیلم «ب» را خریداری کرده‌اند. اگر $P(A)$ و $P(B)$ به ترتیب احتمال خرید بلیت فیلم‌های «الف» و «ب» باشند، بیشترین مقدار $\frac{P(A)}{P(B)}$ کدام است؟

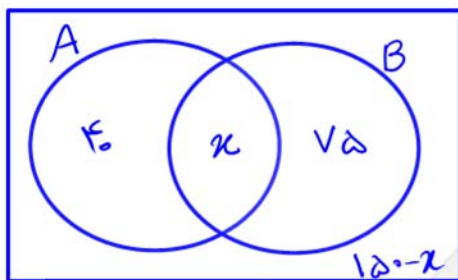
$\frac{15}{22}$ (۴)

$\frac{8}{15}$ (۳)

$\frac{38}{45}$ (۲)

$\frac{15}{29}$ (۱)

حل:



$$\frac{P(A)}{P(B)} = \frac{40+x}{75+x}$$

نکته: در اعداد کسری مثبت به صورت $1 < \frac{a}{b} < \infty$

اگر عدد ثابت مثبتی را به صورت $\frac{a}{b}$ درج کنیم، کسر بزرگتر می‌شود. (به ۱ نزدیک نمی‌شود)
بیشترین مقداری که می‌توان به محسوسه‌های A و B اضافه کرد $150 - (40 + 75) = 35$ است.

$$\frac{P(A)}{P(B)} = \frac{40+35}{75+35} = \frac{75}{110} = \frac{25}{22} \quad \text{بنابراین}$$

سوال ۲۳:

اعداد ۹ تا ۱۹ در اختیار است. دو عدد دلخواه از بین این اعداد را حذف نموده و با مقدار اختلاف آن دو عدد جایگزین می‌شود. این روند تا جایی ادامه می‌یابد که همه اعداد زوج، غیر تکراری و با بیشترین میانگین ممکن باشند، انحراف معیار داده‌های جدید کدام است؟

$$\sqrt{28} \quad (۴)$$

$$\sqrt{21} \quad (۳)$$

$$\sqrt{11} \quad (۲)$$

$$\sqrt{10} \quad (۱)$$

حل:

$$۹, ۱۰, ۱۱, ۱۲, ۱۳, ۱۴, ۱۵, ۱۶, ۱۷, ۱۸, ۱۹$$

باید اختلاف دو عدد انتخابی بیشترین مقدار باشد؛

با توجه به آنکه بیشترین مقدار میانگین مدنظر است، اعداد زوج را تغییر نمی‌دهیم تا از جابجی داده‌ها عددی کم نشود. بنابراین از میان اعداد فرد، طوری دو عدد را انتخاب می‌کنیم که اختلاف آنها بیشترین مقدار باشد و ضمناً عدد زوج تکراری هم نداشته باشیم.

$$\left. \begin{array}{l} ۱۹-۹=۱۰ \text{ (تکراری)} \rightarrow ۱۹-۱۱=۸ \\ ۱۷-۹=۸ \text{ (تکراری)} \rightarrow ۱۷-۱۳=۴ \\ ۱۵-۹=۶ \end{array} \right\} \Rightarrow ۴, ۶, ۸$$

اعداد جدید:

$$۴, ۶, ۸, ۱۰, ۱۲, ۱۴, ۱۶, ۱۸$$

دارد؛

$$\bar{x} = 11 \quad s^2 = \frac{۴۹+۲۵+۹+۱+۱+۹+۲۵+۴۹}{۸} = \frac{۱۶۸}{۸} = ۲۱ \Rightarrow s = \sqrt{21}$$

گزینه ۳

RIAZISARA

سوال ۲۴:

یک دستگاه طوری طراحی شده که به تصادف یکی از دو حرف A یا B را از ورودی می گیرد و پس از طی سه مرحله حرفی را در خروجی چاپ می کند. در هر مرحله حرف ورودی با احتمال $\frac{1}{4}$ بدون تغییر به مرحله بعد می رود یا به شکل حرف دیگری درآمده و به مرحله بعدی وارد می شود. اگر احتمال انتخاب حرف A، ۲ برابر حرف B باشد، با کدام احتمال، حرف «A» چاپ شده توسط دستگاه با حرف ورودی یکسان است؟

$$\frac{17}{41} \quad (4)$$

$$\frac{9}{41} \quad (3)$$

$$\frac{21}{23} \quad (2)$$

$$\frac{14}{23} \quad (1)$$

حل:

$$\left. \begin{array}{l} P(A) = 2P(B) \\ P(A) + P(B) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow P(A) = \frac{2}{3}, \quad P(B) = \frac{1}{3}$$

احتمال انتخاب ورودی ها:

$$P(A \text{ خروجی} | A \text{ ورودی}) = \frac{P(A \text{ ورودی} \cap A \text{ خروجی})}{P(A \text{ خروجی})} = \frac{P(A \text{ ورودی} \cap A \text{ خروجی})}{P(A \text{ ورودی} \cap A \text{ خروجی}) + P(B \text{ ورودی} \cap A \text{ خروجی})}$$

$$\begin{aligned} P(A \text{ ورودی} \cap A \text{ خروجی}) &= P(AAAA) + P(ABAA) + P(AABA) + P(ABBA) \\ &= \frac{2}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{1}{4}\right) + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{4}\right) \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{4}\right) \left(\frac{1}{4}\right) \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{2+18+18+18}{192} = \frac{56}{192} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(B \text{ ورودی} \cap A \text{ خروجی}) &= P(BAAA) + P(BBAA) + P(BABA) + P(BBBA) \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4}\right) \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4}\right) \left(\frac{1}{4}\right) \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1+3+17+3}{192} = \frac{24}{192} \end{aligned}$$

$$P(A \text{ خروجی} | A \text{ ورودی}) = \frac{\frac{56}{192}}{\frac{56}{192} + \frac{24}{192}} = \frac{56}{80} = \frac{14}{20} = \frac{7}{10}$$

گزینه ۱

RIAZISARA

سوال ۲۵:

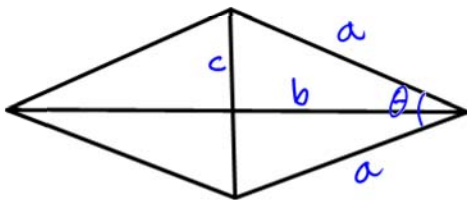
در یک لوزی هر ضلع واسطه هندسی دو قطر لوزی است. اندازه زاویه کوچک تر در هر مثلث حاصل از رسم قطرهای این لوزی چند درجه است؟

۴۵ (۴)

۳۰ (۳)

۱۵ (۲)

۱۰ (۱)



حل:

فرض کنید لوزی در دو قطره صورت شکل مقابل است که
در آن اندازه دو قطر b و c است و $b > c$.

واسطه هندسی: $a^2 = (2b)(2c) = 4bc$

مساحت لوزی: $S = \frac{1}{2}(2b)(2c) = 2bc = \frac{a^2}{2}$

مساحت لوزی: $S = 2\left(\frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \sin \theta\right) = a^2 \cdot \sin \theta$

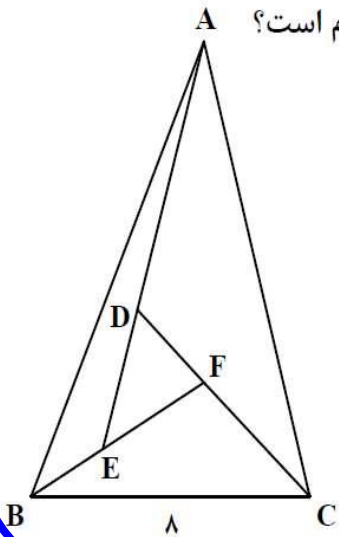
$\frac{a^2}{2} = a^2 \sin \theta \Rightarrow \sin \theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 30^\circ \Rightarrow \frac{\theta}{2} = 15^\circ$

گزینه ۲

RIAZISARA

سوال ۲۶:

در شکل زیر، $\hat{A}BF = \hat{C}AE = \hat{B}CD$ ، $DF = \frac{2}{5}$ و $EF = 3$ است. طول AB کدام است؟



(۱) $\frac{8}{6}$

(۲) $\frac{7}{5}$

(۳) $\frac{10}{5}$

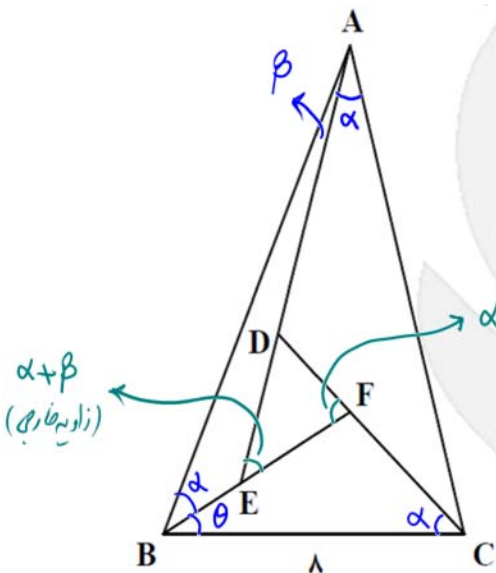
(۴) $\frac{9}{6}$

حل:

در مثلث ABC و EFD به حالت (زر) مشابه اند.

$$\frac{DF}{BC} = \frac{EF}{AB} \Rightarrow \frac{\frac{2}{5}}{8} = \frac{3}{AB} \Rightarrow AB = \frac{24}{\frac{2}{5}} = 60$$

گزینه ۴



RIAZISARA

سوال ۲۷:

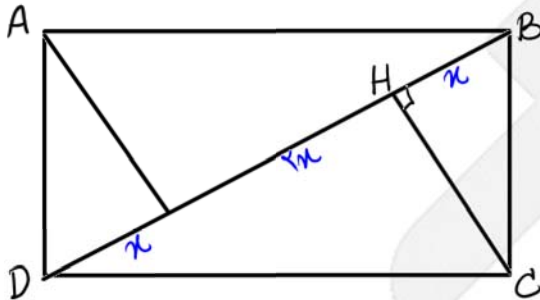
در یک مستطیل، خط‌هایی از دو رأس مقابل بر یک قطر عمود می‌شوند و آن قطر به سه قسمت طوری تقسیم می‌شود که قسمت وسط دو برابر هریک از قسمت‌های کناری است. مساحت این مستطیل چند برابر مساحت کوچک‌ترین مثلث ایجاد شده در مستطیل است؟

۸ (۴)

۱۲ (۳)

۱۶ (۲)

۲۴ (۱)



حل:
ارتفاع CH

$$\frac{S_{BCD}}{S_{BHC}} = \frac{\frac{1}{2}(CH) \cdot 4x}{\frac{1}{2}(CH) \cdot x} = 4$$

$$S_{ABCD} = 2S_{BCD} = 8S_{BHC}$$

گزینه ۴

سوال ۲۸:

در مثلث ABC ، میانه‌های رسم شده از رأس‌های B و C بر هم عمودند. اگر طول میانه رسم شده از رأس C برابر $۴/۵$ و مساحت این مثلث برابر ۱۸ باشد، نسبت طول میانه‌های رسم شده از دو رأس B و C کدام است؟

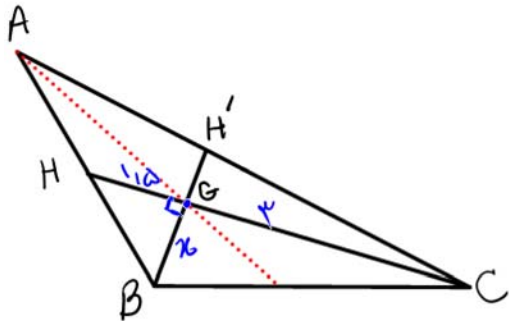
$$\frac{۴}{۳} \quad (۴)$$

$$\frac{۵}{۳} \quad (۳)$$

$$\frac{۱۹}{۹} \quad (۲)$$

$$\frac{۱۷}{۹} \quad (۱)$$

حل:



نقطه: میانه‌ها در مثلث یکدیگر را به نسبت ۱ و ۲ قطع می‌کنند.
نقطه: سه میانه هر مثلث، آن را به ۶ مثلث با مساحت‌های برابر تقسیم می‌کنند.

$$S_{ABC} = 18 \Rightarrow S_{BGC} = \frac{18}{3} = 6 \Rightarrow \frac{1}{2}(11.5)(BG) = 6 \Rightarrow BG = 4 \Rightarrow BH' = 2$$

$$\frac{BH'}{CH} = \frac{2}{4.5} = \frac{4}{9}$$

گزینه ۴

RIAZISARA

سوال ۲۹:

یک پنج ضلعی در یک دایره محاط شده است. هر ضلع این پنج ضلعی، وتر رو به یک زاویه محاطی است. مجموع این زوایای محاطی کدام است؟

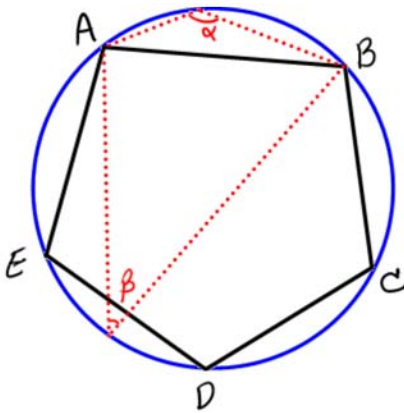
۳۶۰ (۴)

۷۲۰ (۳)

۱۸۰ (۲)

۵۴۰ (۱)

حل:



هر کدام از اضلاع پنج ضلعی محاطی $ABCDE$ در شکل مقابل، روبه رو به دوازده محاطی نابرابر مانند α و β است که $\alpha + \beta = 180^\circ$. بنابراین در حالت کلی سؤال ایراد دارد.

حالت اول: مجموع زاویه های محاطی کوچکتر از 90° (مانند β):

در این حالت مجموع کمان های روبه روبه پنج زاویه محاطی برابری با کمانی به طول محیط دایره، بنابراین

$$\text{مجموع زاویه های محاطی} = \frac{360}{2} = 180$$

گزینه ۲

حالت دوم: مجموع زاویه های محاطی بزرگتر از 90° (مانند α):

در این حالت مجموع کمان های روبه روبه پنج زاویه محاطی برابری با طول ۴ برابر محیط دایره، بنابراین

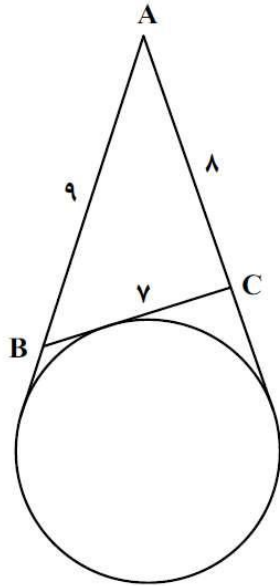
$$\text{مجموع زاویه های محاطی} = \frac{4 \times 360}{2} = 720$$

گزینه ۳

حالت های دیگر: ترکیبی از زاویه های محاطی بزرگتر از 90° و کوچکتر از 90° که در این حالات مجموع زاویه های محاطی

عددی بین 180° و 720° است! گزینه های ۱ و ۴

سوال ۳۰:



در شکل زیر، از نقطه A دو مماس رسم شده است. شعاع دایره کدام است؟

(۱) $7/2\sqrt{2}$

(۲) $4/8\sqrt{5}$

(۳) $3/6\sqrt{2}$

(۴) $2/4\sqrt{5}$

حل:

محیط ABC: $2P = 24 \Rightarrow P = 12$

مساحت ABC (هرون): $S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)} = \sqrt{12(5)(4)(3)} = 12\sqrt{5}$

$r_a = \frac{S}{P-a} = \frac{12\sqrt{5}}{12-7} = \frac{12\sqrt{5}}{5} = 2,4\sqrt{5}$

گزینه ۴

RIAZISARA

سوال ۳۱:

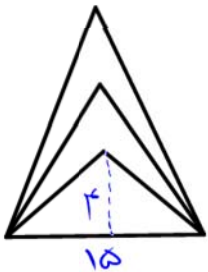
در بین مثلث‌هایی با مساحت 30 واحد مربع که در ضلعی به اندازه 15 واحد مشترک هستند، کمترین مقدار محیط کدام است؟

۳۶ (۴)

۳۴ (۳)

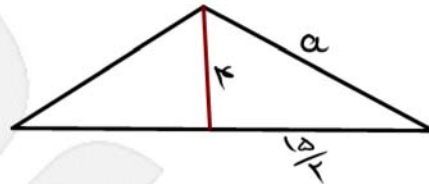
۳۲ (۲)

۳۰ (۱)



نقته: در بین مثلث‌های با قاعده و ارتفاع ثابت، مثلثی کمترین محیط را دارد که متساوی الساقین باشد.

$$S = \frac{15h}{2} = 30 \Rightarrow h = 4$$



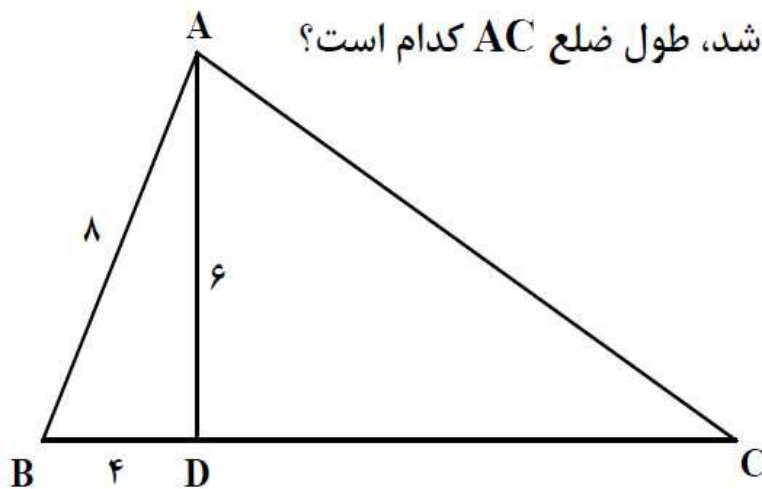
$$a^2 = \left(\frac{15}{2}\right)^2 + 4^2 = \frac{289}{4} \Rightarrow a = \frac{17}{2}$$

$$\text{محیط} = 2\left(\frac{17}{2}\right) + 15 = 32$$

گزینه ۲

RIAZISARA

سوال ۳۲:



در شکل زیر، اگر $\hat{D}AC = 3\hat{B}AD$ باشد، طول ضلع AC کدام است؟

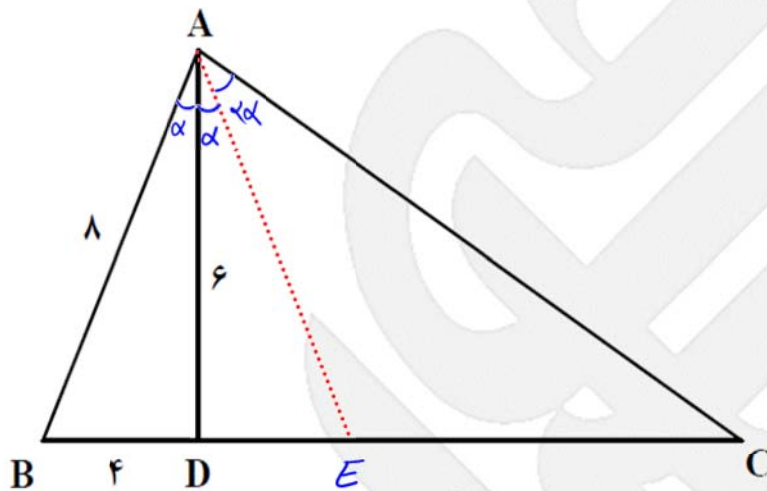
(۱) ۱۹/۲

(۲) ۱۶/۸

(۳) ۱۸/۶

(۴) ۱۵/۴

حل:



$$\hat{B}AD = \alpha \Rightarrow \hat{D}AC = 3\alpha$$

مطابق شکل زاویه $\hat{D}AC$ را به دو زاویه α و 2α تقسیم می‌کنیم؛ AD نیز از زاویه $\hat{B}AE$ است.

$$\frac{AB}{AE} = \frac{BD}{DE} \Rightarrow AE = 2DE$$

$$AD^2 = AB \cdot AE - BD \cdot DE \Rightarrow 36 = 8(2DE) - 4(DE) \Rightarrow DE = 3 \text{ و } AE = 6$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow EC = \frac{8}{6} AC$$

ضمناً AE نیز از زاویه A در مثلث ABC است؛

$$AE^2 = AB \cdot AC - BE \cdot EC \Rightarrow 36 = 8AC - 6\left(\frac{8}{6}AC\right) \Rightarrow 36 = \frac{15}{8}AC \Rightarrow AC = 19\frac{1}{2}$$

گزینه ۴

سوال ۳۳:

اگر $A = \begin{bmatrix} \log_6^2 & \log_6^2 \\ \log_6^2 & \log_6^2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 6|A| & 2|A| \\ 3|A| & 36|A| \end{bmatrix}$ باشد، مقدار دترمینان B ، کدام است؟

$\frac{15}{8}$ (۴)

$\frac{9}{8}$ (۳)

$\frac{15}{4}$ (۲)

$\frac{9}{4}$ (۱)

حل:

$$|A| = (\log_6^2)^2 - (\log_6^2)^2 = (\log_6^2 + \log_6^2)(\log_6^2 - \log_6^2) = \log_6^4$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 6|A| & 2|A| \\ 3|A| & 36|A| \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6\log_6^4 & 2\log_6^4 \\ 3\log_6^4 & 36\log_6^4 \end{vmatrix} = (6\log_6^4)^2 - (2\log_6^4)^2 = 36\log_6^8 - 4\log_6^8 = 32\log_6^8 = 32 \left(\frac{1}{6}\right)^8 = \frac{32}{6^8} = \frac{32}{1679616} = \frac{1}{52176}$$

گزینه ۴

سوال ۳۴:

نمودار سهمی با مختصات رأس $(-1, -1)$ ، از نقطه $(1, 1)$ می‌گذرد. اگر از دو سر وترى که از کانون بر محور سهمی عمود است، دو خط موازی با محور سهمی بر خط هادی عمود کنیم، یک مستطیل رسم می‌شود. قطر مستطیل حاصل کدام است؟

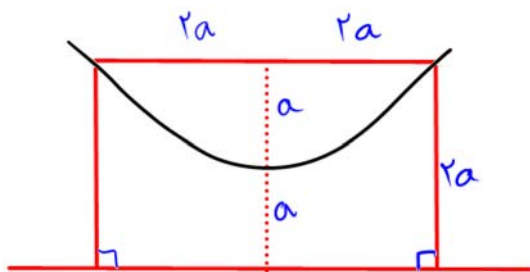
$\sqrt{3}$ (۴)

$3\sqrt{2}$ (۳)

$\sqrt{5}$ (۲)

$5\sqrt{2}$ (۱)

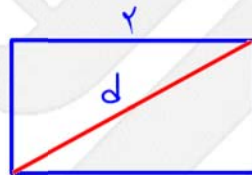
حل:



چون دو نقطه داده شده از نمودار سهمی

روی خط $y = x$ قرار دارد، بکمی می‌تواند افقی یا قائم باشد.

$$(x+1)^2 = 4a(y+1) \xrightarrow{(1,1)} 4 = 4a(2) \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$



$$d^2 = 4 + 1 \Rightarrow d = \sqrt{5}$$

گزینه ۲

سوال ۳۵:

فرض کنید $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بردارهای ناصفری هستند که ضرب داخلی آنها، $-\frac{3}{5}$ حاصل ضرب اندازه‌های دو بردار است.

مساحت مثلثی را که توسط بردارهای $(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} - \frac{2\vec{b}}{|\vec{b}|})$ و $(\frac{3\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{2\vec{b}}{|\vec{b}|})$ ساخته می‌شود، کدام است؟

۱/۶ (۴)

۳/۲ (۳)

۴/۸ (۲)

۶/۴ (۱)

حل:

بردارهای $\vec{c} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ و $\vec{d} = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ بردارهای یکپوشه هستند. بنابراین اندازه آنها ۱ است.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha = -\frac{3}{5} |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{3}{5} \Rightarrow \sin \alpha = +\frac{4}{5}$$

$$S = \frac{1}{2} |(3\vec{c} + 2\vec{d}) \times (\vec{c} - 2\vec{d})| = \frac{1}{2} | -2(\vec{c} \times \vec{d}) + 2(\vec{d} \times \vec{c}) | = \frac{1}{2} | -4(\vec{c} \times \vec{d}) | = 2 |\vec{c} \times \vec{d}|$$

$$\Rightarrow S = 4 |\vec{c}| \cdot |\vec{d}| \cdot \sin \alpha = 4(1)(1)(\frac{4}{5}) = \frac{16}{5}$$

گزینه ۳

سوال ۳۶:

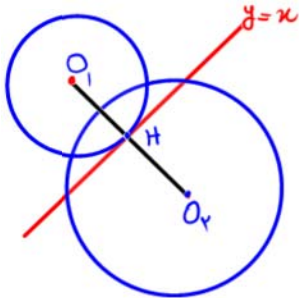
خط d به معادله $y - x = 0$ ، عمود منصف خط‌المركزین دو دایره است که شعاع یکی ۲ برابر دیگری است. اگر خط d بر دایره کوچک‌تر به معادله $x^2 + y^2 + 6x - 2y = r$ مماس باشد، حاصل ضرب طول نقاط برخورد دو دایره کدام است؟

$$\frac{65}{64} \quad (4)$$

$$\frac{65}{32} \quad (3)$$

$$\frac{5}{4} \quad (2)$$

$$\frac{5}{2} \quad (1)$$



حل:

مرکز دایره کوچک $O_1(-3, 1) \Rightarrow x^2 + y^2 + 6x - 2y = r$

شعاع دایره بزرگ $r_2 = 4\sqrt{2} \Rightarrow r_1 = O_1H = \frac{|-3-1|}{\sqrt{1+1}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$

از طرف $r_1 = \frac{1}{r} \sqrt{4^2 + 4^2 + 4r} = \frac{1}{r} \sqrt{40 + 4r} = \sqrt{10 + r} = 2\sqrt{2} \Rightarrow r = -2$

خط $y = x$ عمود منصف خط‌المركزین است، یعنی O_1 قرینه O_2 نسبت به خط $y = x$ است، پس

مرکز دایره بزرگ $O_2(1, -3)$

$$\begin{cases} C_1: (x+3)^2 + (y-1)^2 = 8 \\ C_2: (x-1)^2 + (y+3)^2 = 32 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 + 6x + y^2 - 2y = -2 \\ x^2 - 2x + y^2 + 6y = 22 \end{cases}$$

تقاطع $\rightarrow 8x - 8y = -24 \xrightarrow{\div 4} y = x + 3 \xrightarrow{\text{جایگذاری در یکی از معادلات}} (x+3)^2 + (x+2)^2 = 8$

$\rightarrow 2x^2 + 10x + 5 = 0 \rightarrow \text{ضرب بر ۲} \rightarrow P = \frac{c}{a} = \frac{5}{2}$ گزینه ۱

RIAZISARA

سوال ۳۷:

با قرار دادن عدد سه رقمی $\overline{a \circ a}$ بین دو رقم مشابه a ، عدد جدید ساخته می شود. حداکثر چند عدد اول می تواند a را بشمارد؟

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

(۱) صفر

حل:

$$\begin{array}{llll} a=1 & \rightarrow & 101 & \rightarrow P|1 \quad \text{مربوب ندارد.} \\ a=2 & \rightarrow & 202 & \rightarrow P|2 \rightarrow P=2 \\ a=3 & \rightarrow & 303 & \rightarrow P|3 \rightarrow P=3 \end{array}$$

معنی برای هر $a \in \{1, 2, 3\}$ حداکثر یک عدد اول می تواند a را عا رکند **گزینه ۲**



RIAZISARA

سوال ۳۸:

مجموع ارقام کوچک ترین عدد طبیعی سه رقمی x که در معادله $۶۳x + ۷۷y = ۲۷۳$ صدق می کند، کدام است؟

۹ (۴)

۸ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)

حل: $\xrightarrow{\div 7} 9x + 11y = 39 \Rightarrow 9x \equiv 39 \Rightarrow -2x \equiv 4$

$\Rightarrow x \equiv -3 \Rightarrow x \equiv 11K - 3 \rightarrow x = 107$ *کوچکترین عدد سه رقمی*

گزینه ۳ $= ۸ = \text{مجموع ارقام}$



RIAZISARA

سوال ۳۹:

حداقل چند زوج مرتب با مؤلفه‌هایی از اعداد طبیعی انتخاب کنیم تا به‌طور قطع، لااقل در دو جفت انتخاب‌شده، هر کدام از مجموع مؤلفه‌های اول و مجموع مؤلفه‌های دوم، مضرب ۵ باشند؟

۲۶ (۴)

۲۵ (۳)

۱۴ (۲)

۱۳ (۱)

حل:

مسئله ایراد دارد!

اگر از اصل لانه کبوتری استفاده شود، بی‌شمار لانه داریم.

مثلاً اگر $K, K' \in \mathbb{N}$ باشند، بی‌شمار زوج مرتب به صورت $A(10K+1, 2)$ و $B(10K'+1, 2)$

می‌توان نوشت که مجموع جیب‌کدام از مؤلفه‌های اول یا دوم مضرب ۵ نیست؛ یعنی عددی به عنوان حداقل

تعداد را نمی‌توان تعیین کرد.

RIAZISARA

سوال ۴۰:

حاصل ضرب درجه رأس‌های گراف G ، ۴۸ است. اگر تعداد رأس‌ها با درجه رأس یک حداقل باشد، حاصل $\Delta(\bar{G}) + q(\bar{G})$ کدام است؟

۱۳ (۴)

۱۹ (۳)

۱۱ (۲)

۱۷ (۱)

حل:

$48 = 3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \rightarrow$ (یک رأس با درجه ۳ و ۴ رأس با درجه ۲)

حالت اول: $48 = 4 \times 3 \times 2 \times 2 \times 1 \rightarrow \begin{cases} P=5, \delta(G)=1 \\ q(G)=\frac{12}{2}=6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \Delta(\bar{G})=3 \\ q(\bar{G})=10-6=4 \end{cases} \xrightarrow{+} 3+4=7$ **گزینه حاکمیت!**

حالت دوم: $48 = 3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 1 \rightarrow \begin{cases} P=6, \delta(G)=1 \\ q(G)=\frac{12}{2}=6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \Delta(\bar{G})=4 \\ q(\bar{G})=15-6=9 \end{cases} \xrightarrow{+} 4+9=13$ **گزینه ۴**

مسئله ایراد دارد. باید در صورت سؤال به جای "کدام است؟"، "کدام می‌تواند باشد" نوشته می‌شد. یا اینکه مثلاً عنوان می‌شد که تعداد رأس‌ها زوج است، یا ...

حل تشریحی سوالات ریاضی کنکور سراسری گروه آزمایشی ریاضی و فنی
تهیه و تنظیم: عزیز اسدی (ریاضی سرا) ۰۹۲۲۰۶۳۳۰۶۲

با آرزوی موفقیت و سربلندی شما عزیزان

عزیز اسدی

RIAZISARA