

حل تشریحی سوالات ریاضی

کنکور سراسری دیماه ۱۴۰۱

رشته ریاضی فیزیک

تھیه و تنظیم: عزیز اسدی

دانلود از سایت ریاضی سرا

سوال ۱:

با ضرب سه جمله متولی یک دنباله هندسی به ترتیب در ۴، ۸ و ۱۶، یک دنباله حسابی به دست می‌آید. اگر مجموع مربعات سه جمله هندسی برابر مجموع جملات حسابی باشد، جمله اول دنباله هندسی کدام است؟

$$\frac{48}{5} (4)$$

$$\frac{24}{5} (3)$$

$$\frac{64}{7} (2)$$

$$\frac{32}{7} (1)$$

حل:

$$a, ar, ar^2 \Rightarrow 4a, 8ar, 16ar^2 \quad \text{دنباله حسابی}$$

$$4(8ar) = 4a + 16ar^2 \rightarrow 16ar^2 - 16ar + 4a = 0$$

$$\div 4a \rightarrow 4r^2 - 4r + 1 = 0 \rightarrow r = \frac{1}{2}$$

$$a + (ar)^2 + (ar^2)^2 = 4a + 8ar + 16ar^2 \quad \text{مجموع جملات دنباله حسابی} : \quad \text{مجموع جملات دنباله هندسی}$$

$$r = \frac{1}{2} \rightarrow a + \frac{a}{4} + \frac{a}{16} = 4a + 8a + 16a \rightarrow \frac{21a}{16} = 12a$$

$$\times \frac{16}{16a} \rightarrow 16 = 48 \rightarrow a = \frac{48}{16} \quad \text{گزینه ۲}$$

سوال ۲:

رأس سهمی $y = kx^2 - 4x - 6$ روی خط $y = -4x$ قرار دارد. عرض رأس سهمی کدام است؟

-۸ (۴)

-۴ (۳)

۶ (۲)

۲ (۱)

حل:

$$K_S = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{2K} = \frac{2}{K}$$

$$y_S = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(16+24K)}{4K} = \frac{-4-6K}{K}$$

$$\frac{-4-6K}{K} = \frac{-8}{K} - 4 \longrightarrow -4-6K = -8-4K \longrightarrow K=2$$

$$y_S = \frac{-4-12}{2} = -8$$

گزینه ۴

سوال ۳:

اگر A، B و C سه مجموعه ناتھی از مجموعه مرجع U باشند، مجموعه ((A - B)' - (B - C)) - C با کدام مجموعه برابر است؟

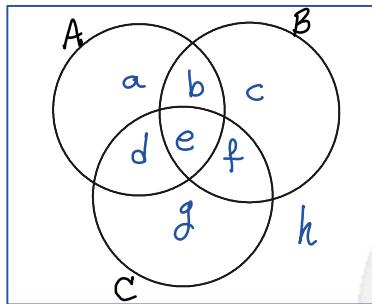
$$B - (A \cup C) \quad (۲)$$

$$A' - (B \cup C) \quad (۱)$$

$$(A' \cup B') - C \quad (۴)$$

$$C - (A \cup B) \quad (۳)$$

حل:



$$A - B = \{a, d\} \rightarrow (A - B)' = \{b, c, e, f, g, h\}$$

$$B - C = \{b, c\}$$

$$(A - B)' - (B - C) = \{e, f, g, h\}$$

$$((A - B)' - (B - C)) - C = \{h\}$$

بررسی گزینه ها:

گزینه ۱: $\{c, f, g, h\} - \{b, c, e, f, d, g\} = \{h\}$

گزینه ۲: $\{b, c, e, f\} - \{a, b, d, e, g, f\} = \{c\}$

گزینه ۳: $\{d, e, f, g\} - \{a, b, c, d, e, f\} = \{g\}$

گزینه ۴: $\{a, d, c, f, g, h\} - \{d, e, f, g\} = \{a, c, h\}$

بنابراین گزینه ۱ صحیح است.

RIAZISARA

سوال ۴:

کدام گزاره زیر، همارز منطقی گزاره $\sim p \wedge (\sim q \wedge r) \vee (q \wedge r) \vee (p \wedge r)$ است؟

$p \vee q$ (۴)

$r \vee p$ (۳)

r (۲)

q (۱)

حل:

$$\equiv [(\sim p \wedge \sim q) \wedge r] \vee [(q \vee p) \wedge r]$$

$$\equiv [\sim(p \vee q) \wedge r] \vee [(p \vee q) \wedge r]$$

$$\equiv [\underbrace{\sim(p \vee q) \vee (p \vee q)}_{T} \wedge r] \equiv r$$

گزینه ۲

سوال ۵

معادله‌های $x^2 + 2x - 3m = 0$ و $x^2 + 6x + m = 0$ یک ریشه مشترک غیرصفر دارند.
اختلاف ریشه‌های غیر مشترک کدام است؟

۷ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

حل:

$$x^2 + 2x - 3m = x^2 + 4x + m \rightarrow 4x = -4m \rightarrow x = -m \quad : \text{ریشه مشترک}$$

در معادله اول: (ریشه‌ها m و $-m$ هستند)

$$P = m \rightarrow \alpha(-m) = m \xrightarrow{m \neq 0} \alpha = -1$$

در معادله دوم: (ریشه‌ها m و α' هستند)

$$P = -m \rightarrow \alpha'(-m) = -m \xrightarrow{m \neq 0} \alpha' = 3$$

$$\alpha' - \alpha = 3 - (-1) = 4$$

گزینه ۳

سوال ۶

نمودار تابع $y = \frac{2}{x^2 - 3x + 2}$ به ازای چند مقدار صحیح بین دو خط افقی $y = 0$ و $y = 2$ واقع می‌شود؟

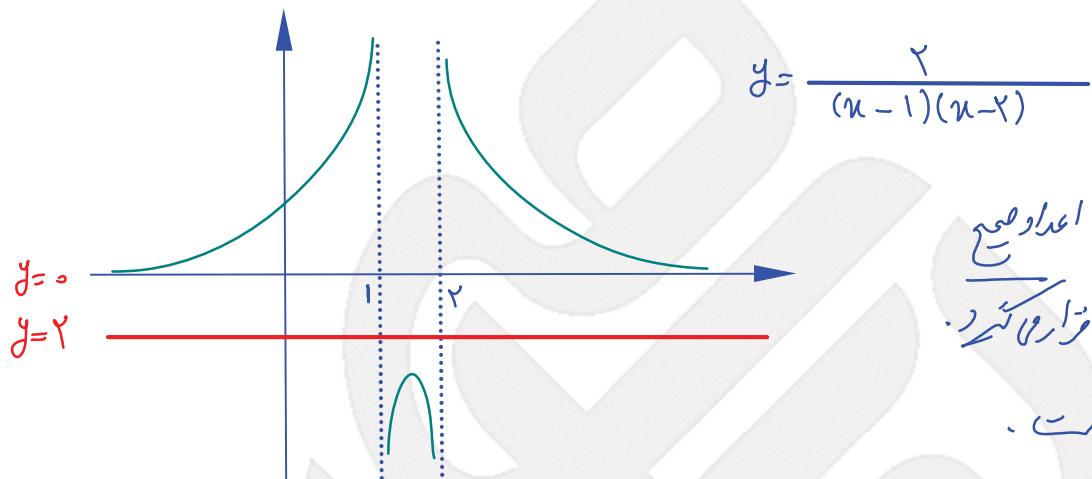
۴) صفر

۴) ۳

۳) ۲

۱) ۱

حل:



با کوچه به نمودار، بجزای ۴ اعداد صحیح
نمودار بالا خط $y = 2$ چهار مرتبه
بنابرین خوب صحیح است.

سوال ۷

نقاط $A(1, 0)$ و $B(-2, -4)$ دو رأس مجاور مربع $ABCD$ هستند. طول مختصات نقطه D در ربع سوم، کدام است؟

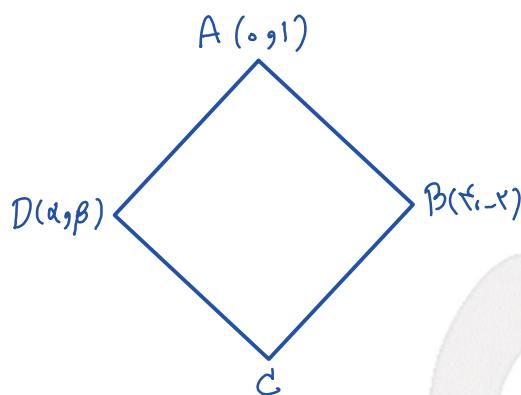
-۴ (۴)

-۳ (۳)

-۲ (۲)

-۱ (۱)

حل:



$$m_{AB} = \frac{-4-0}{-2-1} = -\frac{4}{3} \rightarrow m_{AD} = \frac{\epsilon}{\alpha}$$

$$AD: y = \frac{\epsilon}{\alpha}x + 1$$

$$D \in AD \rightarrow \beta = \frac{\epsilon}{\alpha}\alpha + 1 \rightarrow \beta - 1 = \frac{\epsilon}{\alpha}\alpha$$

لزوماً

$$AD = \sqrt{\alpha^2 + (\beta - 1)^2} = AB = \sqrt{14 + 9} = \delta$$

$$\frac{\beta - 1 = \frac{\epsilon}{\alpha}\alpha}{\alpha^2 + (\frac{\epsilon}{\alpha}\alpha)^2 = \delta^2} \rightarrow \frac{\frac{\epsilon}{\alpha}\alpha - 1}{\alpha^2} = \frac{\delta^2}{\alpha^2} \rightarrow \frac{\epsilon - \frac{1}{\alpha}}{1} = \frac{\delta^2}{\alpha} \rightarrow \epsilon - \frac{1}{\alpha} = \frac{\delta^2}{\alpha} \rightarrow \epsilon = \frac{\delta^2 + 1}{\alpha}$$

گزینه ۳

سوال ۸

توابع $g(x) = x + \sqrt{2x - 4}$ و $f(x) = \log(2x - 5)$ را در نظر بگیرید. اگر نمودار $y = g^{-1} \circ f^{-1}(x)$ محور y را در مقدار α قطع کند، مقدار α کدام است؟

- $4 + \sqrt{3}$ (۴) $4 + \sqrt{2}$ (۳) $4 - \sqrt{3}$ (۲) $4 - \sqrt{2}$ (۱)

حل:

$$(0, \alpha) \in (f \circ g)^{-1} \rightarrow (\alpha, 0) \in f \circ g \rightarrow (f \circ g)(\alpha) = 0$$

$$\rightarrow \log(2(\alpha + \sqrt{2\alpha - 4}) - 5) = 0 \rightarrow 2(\alpha + \sqrt{2\alpha - 4}) - 5 = 1$$

$$\rightarrow \alpha + \sqrt{2\alpha - 4} = 3 \rightarrow \sqrt{2\alpha - 4} = 3 - \alpha \quad \frac{\alpha < 3}{2\alpha - 4 = 9 - 6\alpha + \alpha^2}$$

$$\rightarrow \alpha^2 - 8\alpha + 13 = 0 \rightarrow \alpha = \frac{8 \pm \sqrt{12}}{2} = 4 \pm \sqrt{3} \quad \frac{\alpha < 3}{\alpha = 4 - \sqrt{3}}$$

گزینه ۲

سوال ۹:

نمودار $f(x) = 2 + 2^{b-ax}$ را در نقطه‌ای به طول ۱ قطع

می‌کند. اگر $f^{-1}(10) = -1$ باشد، مقدار $2b - a$ کدام است؟

-۲ (۴)

-۳ (۳)

۲ (۲)

۳ (۱)

حل:

$$\begin{aligned} f(1) = g(1) &\rightarrow 2 + 2^{b-a} = -1 - 3 + 1 \rightarrow 2^{b-a} = 2 \rightarrow -a = 1 \\ f(-1) = 10 &\rightarrow 2 + 2^{b+a} = 10 \rightarrow 2^{b+a} = 8 \quad \left. \begin{array}{l} b-a = 2 \\ +a = 3 \end{array} \right\} \rightarrow b = 3, a = 1 \\ 2b - a &= 4 - 1 = 3 \end{aligned}$$

گزینه ۱

سوال ۱۰:

$$\text{معادله } \frac{1}{x+2} - \frac{x^3 - 9x - 2}{x^3 + 8} = \frac{6x}{x^3 - 2x + 4} \text{ دارای چند جواب مثبت است؟}$$

۱) ۴

۲) ۳

۳) ۲

۱) صفر

حل:

طرفین معادله را در $x+1$ ضرب می‌کنیم: (عطفاً)

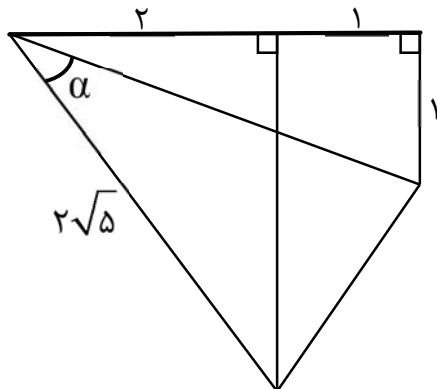
$$(x^3 + 1) = (x+1)(x^2 - 2x + 4) - (x^3 - 9x - 2) = 4x(x+2)$$

$$\rightarrow 4x + 4 = 4x^2 + 12x \rightarrow 4x^2 + 8x - 4 = 0 \rightarrow x = \frac{-8 \pm \sqrt{144}}{12} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{-4}{3} \\ x = -2 \end{cases}$$

بنابراین معادله دارای یک ریشه مثبت است.

گزنه ۳

سوال ۱۱:



در شکل زیر، مقدار $\cos \alpha$ چقدر است؟

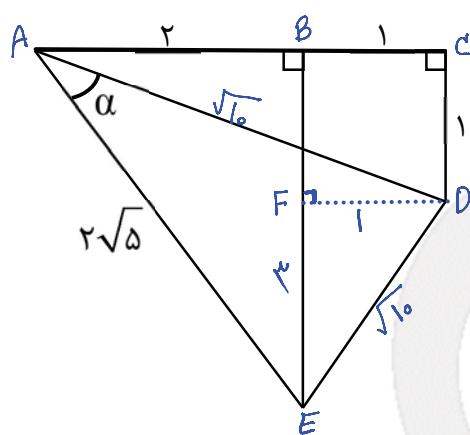
$$\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (2)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (1)$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{10} \quad (4)$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{10} \quad (3)$$

حل:



$BF = FD = 1$ بمعنی است، بنابراین $BCDF$

از طرف

$$BE = \sqrt{10 - 4} = \sqrt{6} \rightarrow FE = \sqrt{6}$$

$$DE = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$$

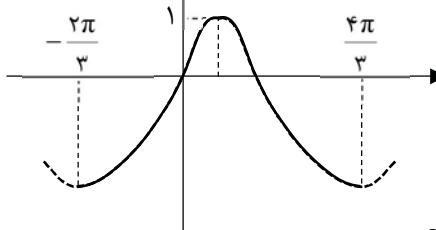
$$AD = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$$

مثلث ADE ، ماقوم ازدواجی متساوی اس معنی است

فرزنه ۲

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ و لذا } \alpha = 45^\circ$$

سوال ۱۲:



شکل زیر، قسمتی از نمودار $y = a + b \cos(cx - \frac{\pi}{3})$ را نشان می‌دهد. مقدار $b(c - a)$ کدام است؟

۶ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

حل:

$$f(0) = 0 \rightarrow a + \frac{b}{2} = 0 \rightarrow 2a + b = 0 \quad \textcircled{I}$$

$$T = \frac{2\pi}{|c|} \rightarrow \frac{4\pi}{3} - (-\frac{2\pi}{3}) = \frac{4\pi}{|c|} \rightarrow 2\pi = \frac{4\pi}{|c|} \rightarrow |c| = 2 \rightarrow c = \pm 1$$

$$\text{Max} = 1 \rightarrow a + |b| = 1 \xrightarrow{b > 0} a + b = 1 \quad \textcircled{II}$$

$$\textcircled{I}, \textcircled{II} \rightarrow a = -1, b = 2$$

$$c = -1 \rightarrow b(c - a) = 2(-1 + 1) = 0 \times$$

$$c = 1 \rightarrow b(c - a) = 2(+1 + 1) = 4 \checkmark$$

کسر نه
۳

سوال ۱۳:

مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی $\cos\left(\frac{17\pi}{\lambda} + x\right)\cos\left(\frac{3\pi}{\lambda} - x\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)$ در بازه

کدام است؟ $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$\frac{\pi}{4}$ (۴)

$\frac{2\pi}{3}$ (۳)

$\frac{\pi}{3}$ (۲)

$\frac{\pi}{2}$ (۱)

حل:

$$\cos\left(\frac{\pi}{\lambda} + x\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{\lambda} - \left(\frac{3\pi}{\lambda} - x\right)\right) = \frac{1}{4}$$

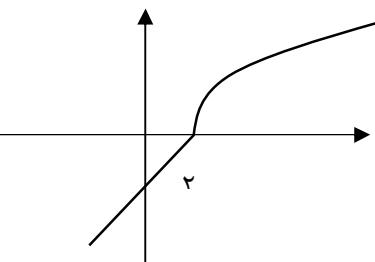
$$\cos\left(\frac{\pi}{\lambda} + x\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{\lambda} + x\right) = \frac{1}{4} \rightarrow \sin 2\left(\frac{\pi}{\lambda} + x\right) = \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{\lambda} + 2x\right) = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{4} \rightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{\lambda} + 2x = 2K\pi + \frac{\pi}{4} \\ \frac{\pi}{\lambda} + 2x = 2K\pi + \frac{5\pi}{4} \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = K\pi - \frac{\pi}{4\lambda} \\ x = K\pi + \frac{v\pi}{4\lambda} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \longrightarrow K=0 : x = -\frac{\pi}{4\lambda} \\ \longrightarrow K=1 : x = \frac{v\pi}{4\lambda} \end{array} \quad \begin{array}{l} + \\ \longrightarrow \end{array} \frac{4\pi}{4\lambda} = \frac{\pi}{\lambda}$$

چونه ۲

سوال ۱۴:



اگر $f(x) = \left| \frac{1}{2}x - 1 \right|$ و شکل زیر نمودار تابع $g(x)$ باشد، معادله $g(f(g(x+2))) = 0$ چند ریشه دارد؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

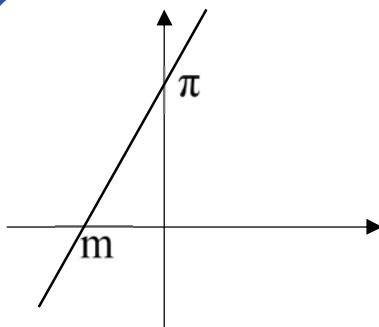
حل:

$$g(f(g(x+2))) = 0 \quad \underline{g(2) = 0} \rightarrow f(g(x+2)) = 2$$

$$\rightarrow \left| \frac{g(x+2)}{2} - 1 \right| = 2 \quad \rightarrow \begin{cases} \frac{g(x+2)}{2} = 3 \rightarrow g(x+2) = 6 & \checkmark \\ \frac{g(x+2)}{2} = -1 \rightarrow g(x+2) = -2 & \checkmark \end{cases}$$

خوب ۲

سوال ۱۵:



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^{-1}(x)}{f(x)} = \pi$$

شکل زیر، نمودار تابع f^{-1} را نشان می‌دهد. اگر باشد، مقدار m کدام است؟

$-\pi\sqrt{\pi}$ (۴)

$-\frac{1}{\pi}$ (۳)

$-\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ (۲)

$-\sqrt{\pi}$ (۱)

حل:

$$\begin{cases} (0, \pi) \in f^{-1} \\ (m, 0) \in f^{-1} \end{cases} \rightarrow f^{-1}(x) = -\frac{\pi}{m}x + \pi$$

$$\begin{cases} (\pi, 0) \in f \\ (0, m) \in f \end{cases} \rightarrow f(x) = -\frac{m}{\pi}x + m$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{\pi}{m}n + \pi}{-\frac{m}{\pi}n + m} = \pi \rightarrow \frac{-\frac{\pi}{m}}{-\frac{m}{\pi}} = \pi \rightarrow \frac{\pi}{m'} = \pi \rightarrow m' = \pi$$

$$\rightarrow m = \pm\sqrt{\pi} \xrightarrow{m < 0} m = -\sqrt{\pi}$$

کسر نباشد

سوال ۱۶:

اگر تابع $f(x) = \begin{cases} |x - [x]| & \text{زوج } [x] \\ |x - [x-a]| & \text{فرد } [x] \end{cases}$ شامل پیوسته باشد، مجموعه مقادیر $[a]$ شامل چند عضو است؟ ($-1 < a < 1$)

۳) ۴

۱) ۳

۲) ۲

۱) صفر

حل:

تابع در \mathbb{R} پیوسته است؛ دیوستگی را در نقطه ای دلخواه ($n=0$) بررسی کنیم :

$$\lim_{n \rightarrow 0^+} f(n) = \lim_{n \rightarrow 0^+} |n - [n]| = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow 0^-} f(n) = \lim_{n \rightarrow 0^-} |n - [n-a]|$$

$$\rightarrow \lim_{n \rightarrow 0^-} |n - [n-a]| = 0 \rightarrow \lim_{n \rightarrow 0^-} (n - [n-a]) = 0 \rightarrow \lim_{n \rightarrow 0^-} n = \lim_{n \rightarrow 0^-} [n-a] \rightarrow$$

$$[-a] = 0 \rightarrow 0 < -a < 1 \rightarrow -1 < a < 0.$$

با توجه به اینکه $-1 < a < 0$ ؛ بنابراین برای a همچند داری وجود ندارد. گزینه ۱

سوال ۱۷:

تابع $f(x) = \frac{x}{1-x|x|}$ چند نقطه بحرانی دارد؟

-۱ (۴)

-۲ (۳)

-۳ (۲)

-۴ (۱)

حل:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+x} & x < 0 \\ \frac{x}{1-x^2} & 0 \leq x, x \neq 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-x^2+1}{(1+x)^2} & x < 0 \\ \frac{x^2+1}{(1-x^2)^2} & 0 \leq x, x \neq 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow -x^2+1=0 \rightarrow x = \pm 1 \xrightarrow{x \neq 1} x = -1$$

هزینه ۲

نها نقطه بحرانی باشد، نقطه ای به طول $|x=1|$ است.

سوال ۱۸:

به ازای کدام مقدار a ، اختلاف شیب نیمخطهای مماس چپ و راست بر منحنی تابع

$$x = \frac{3}{4} \sqrt{6} \text{ است؟}$$

$\frac{1}{8}(4)$

$\frac{1}{2}(3)$

۸ (۲)

۲ (۱)

حل:

$$f(u) = \begin{cases} (4u - 3)\sqrt{ax} & u > \frac{3}{4} \\ (u - 4u)\sqrt{ax} & u < \frac{3}{4} \end{cases} \rightarrow f'(u) = \begin{cases} 4\sqrt{ax} + \frac{a}{\sqrt{ax}}(4u - 3) & u > \frac{3}{4} \\ -4\sqrt{ax} + \frac{a}{\sqrt{ax}}(u - 4u) & u < \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$f'_+(\frac{3}{4}) - f'_-(\frac{3}{4}) = 4\sqrt{4} \rightarrow 4\sqrt{\frac{3}{4}a} + 4\sqrt{\frac{3}{4}a} = 8\sqrt{4} \rightarrow 8\sqrt{\frac{3}{4}a} = 8\sqrt{4}$$

$$\rightarrow 8\sqrt{a} = 8 \rightarrow a = \frac{1}{4}$$

کسر نباشد

سوال ۱۹:

نمودار تابع $f(x) = (m^r - 1)x^r + (2 - m)x$ را در α و β قطع می‌کند.

اگر مجموع α و β بیشترین مقدار باشد، m کدام است؟

$$2 - \sqrt{3} \quad (4)$$

$$2 - \sqrt{5} \quad (3)$$

$$2 + \sqrt{3} \quad (2)$$

$$2 + \sqrt{5} \quad (1)$$

حل:

$$S = \alpha + \beta = \frac{m - 2}{m^r - 1} \rightarrow S' = \frac{m^r - 1 - r(m(m - 2))}{(m^r - 1)^2} = \frac{-m^r + rm - 1}{(m^r - 1)^2} = 0$$

$$\rightarrow m = \frac{-4 \pm \sqrt{12}}{-2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{3}}{2} \rightarrow \begin{cases} m = 2 - \sqrt{3} \\ m = 2 + \sqrt{3} \end{cases}$$

به ازای مقادیر بزرگتر آنده، Δ متن حواهد شد. لذا $\alpha + \beta$ کدام از گزینه‌ها بین نیست.

سوال ۲۰:

۵ نفر قرار است در یک جلسه سخنرانی کنند. در چند حالت، دو نفر خاص پشت سر هم سخنرانی می‌کنند؟

۹۶ (۴)

۷۲ (۳)

۴۸ (۲)

۲۴ (۱)

حل:

$\boxed{AB} C D E$

$$\Sigma ! \times 2! = 2 \Sigma x 2 = \Sigma 8$$

جزئی ۲

RIAZISARA

سوال ۲۱:

در پرتاب همزمان دو تاس، اعداد رو شده m و n هستند. با کدام احتمال، معادله $x^2 - mx + n = 0$ دارای دو ریشه حقیقی و متمایز است؟

$$\frac{4}{9} (۴)$$

$$\frac{5}{6} (۳)$$

$$\frac{1}{4} (۲)$$

$$\frac{1}{3} (۱)$$

حل:

$$\Delta > 0 \rightarrow m^2 - 4n > 0 \rightarrow m^2 > 4n$$

حالات مورد نظر به شکل جدول زیر است:

m	n
۱	—
۲	—
۳	۱، ۲
۴	۱، ۲، ۳
۵	۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶
۶	۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶

حالات مذکور که ملاحظه می شود در ۱۷ حالت مختلف را دارای $m^2 > 4n$ ($\Delta > 0$) برقرار است؛ لذا احتمال مورد نظر برقرار است با $\frac{17}{36}$.

بنابراین حیچ کدام از گزینه های صحیح نستند.

سوال ۲۲:

پیشامدهای ناسازگار A و B از فضای نمونه‌ای S هستند. اگر $P(B) = \frac{1}{4}$ و $P(A) = \frac{1}{6}$ باشد، مقدار $P(B' | A')$ کدام است؟

۰ / ۷۵ (۴)

۰ / ۵۵ (۳)

۰ / ۵ (۲)

۰ / ۲ (۱)

حل:

$$\begin{aligned}
 P(B' | A') &= \frac{P(A' \cap B')}{P(A')} = \frac{P(A \cup B)'}{P(A')} = \frac{1 - P(A \cup B)}{P(A')} \\
 &= \frac{1 - (\frac{1}{4} + \frac{1}{6})}{\frac{5}{6}} = \frac{1 - \frac{10}{24}}{\frac{20}{24}} = \frac{14}{24} = \frac{7}{12} = 0,58 \quad \text{جزء ۱}
 \end{aligned}$$

سوال ۲۳:

در یک دسته از اعداد، چهار عدد فرد یک رقمی در اختیار داریم. دو تای آنها را با کوچکترین عدد زوج بعد از خود و دو تای دیگر را با بزرگترین عدد زوج قبل از خود جایگزین می‌کنیم به طوری که اعداد در دسته دوم (دسته جدید) تکرقمی و غیرتکراری باشند. نسبت ضریب تغییرات دسته اول به دسته دوم کدام است؟

(۴) $1/25$

(۳) $\sqrt{2}$

(۲) $0/\sqrt{10}$

(۱) $0/2\sqrt{5}$

حل:

$$\text{دسته اول: } \{1, 3, 7, 9\} \rightarrow \bar{x} = 5 \quad \sigma^2 = \frac{14+4+4+16}{4} = 10 \quad \rightarrow CV_1 = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

$$\text{دسته دوم: } \{2, 4, 6, 8\} \rightarrow \bar{x} = 5 \quad \sigma^2 = \frac{9+1+1+9}{4} = 5 \quad \rightarrow CV_2 = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\frac{CV_1}{CV_2} = \frac{\frac{\sqrt{10}}{5}}{\frac{\sqrt{5}}{5}} = \sqrt{2}$$

جزئیه ۳

سوال ۲۴:

سه کیسه یکسان، هر کدام شامل ۱۰ گوی در اختیار داریم. کیسه اول دارای گوی‌های سبز، کیسه دوم دارای گوی‌های قرمز و کیسه سوم دارای ۲ گوی قرمز و ۸ گوی سبز است. کیسه‌ای به تصادف انتخاب کرده، یک گوی خارج می‌کنیم و می‌بینیم که قرمز است. با کدام احتمال همه گوی‌های آن کیسه قرمز است؟

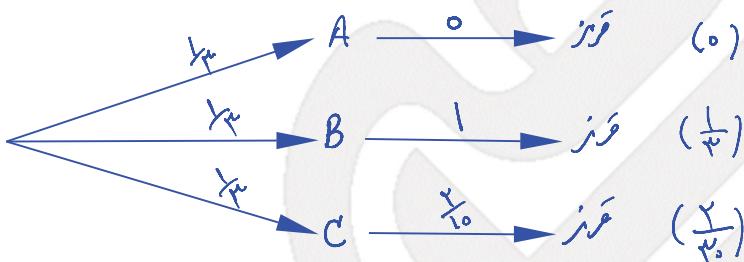
$$\frac{5}{6} (۴)$$

$$\frac{1}{6} (۳)$$

$$\frac{2}{3} (۲)$$

$$\frac{1}{3} (۱)$$

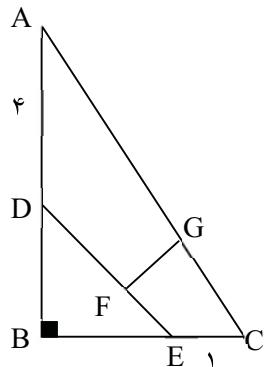
حل:



$$P(\text{آویز} | \text{همه قرمز}) = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{3}{3}} = \frac{1}{1} = \frac{5}{5}$$

کسر نهاده

سوال ۲۵:



در شکل زیر، باشد، اندازه FG کدام است؟ $\frac{AC}{CG} = \frac{DE}{EF} = 4$

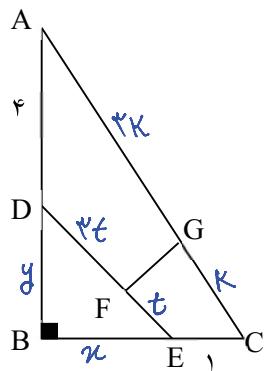
۱/۷۵ (۴)

۱/۵ (۳)

۱/۲۵ (۲)

۱ (۱)

حل:



$$B(0,0)$$

$$E(x,0)$$

$$D(0,y)$$

$$C(x+1,0)$$

$$A(0,y+t)$$

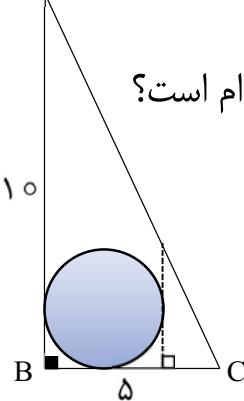
$$F\left(\frac{x}{2}, \frac{1}{2}y\right)$$

$$G\left(\frac{x}{2}(x+1), \frac{1}{2}(y+t)\right)$$

$$\rightarrow FG = \sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{5}{4} = 1,25$$

گزینه ۲

A



سوال ۲۶:

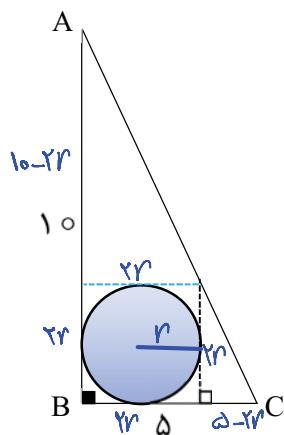
اگر اندازه اضلاع قائمہ مثلث ABC، ۵ و ۱۰ باشد، مساحت ناحیه هاشور خورده، کدام است؟

$$\frac{16}{9}\pi \quad (2)$$

$$\frac{25}{9}\pi \quad (1)$$

$$\frac{5}{4}\pi \quad (3)$$

$$\frac{9}{4}\pi \quad (4)$$



حل:

$$\frac{2r}{10} = \frac{5-2r}{5} \rightarrow 10r = 50 - 20r$$

$$\rightarrow 30r = 50 \rightarrow r = \frac{5}{3}$$

$$S = \pi \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{9}\pi$$

محزنہ ۱

RIAZISARA

سوال ۲۷:

در یک n ضلعی، با کم شدن یک ضلع، ۱۶ قطر از تعداد قطرهای آن کم می‌شود. اگر دو ضلع کم شود، چند قطر از تعداد قطرها کم می‌شود؟

۳۳ (۴)

۳۲ (۳)

۳۱ (۲)

۳۰ (۱)

حل:

تعداد قطرهای n ضلعی:

$$\frac{n(n-3)}{2}$$

$$\frac{n(n-3)}{2} = \frac{(n-1)(n-4)}{2} + 16 \rightarrow n^2 - 3n = n^2 - 5n + 4 + 32 \rightarrow 2n = 36 \rightarrow n = 18$$

$$\frac{n(n-4)}{2} - \frac{(n-2)(n-5)}{2} = \frac{18 \times 15}{2} - \frac{16 \times 11}{2} = 135 - 88 = 47$$

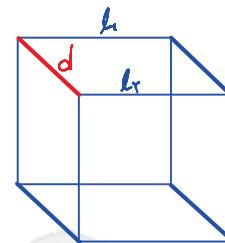
گزینه I

سوال ۲۸:

در فضای دو خط l_1 و l_2 موازی هستند. اگر خط d خط l_1 را در یک نقطه قطع کند، کدام مورد در خصوص وضعیت d و l_2 همواره درست است؟

- (۱) متنافرند.
(۲) موازی‌اند.
(۳) غیرمتقاطع‌اند.
(۴) غیرموازی‌اند.

حل:



با توجه به رسم بالا l_1 و l_2 نادرست و l_2 ~~گزینه ۴~~ صحیح است.

سوال ۲۹:

یک دایره به شعاع ۲، داخل ذوزنقه متساوی الساقینی محاط شده است. اگر یکی از زوایه‌ها 60° درجه باشد، مساحت این ذوزنقه کدام است؟

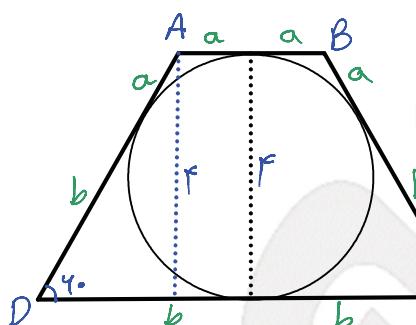
$$\frac{32}{\sqrt{3}} (۴)$$

$$\frac{24}{\sqrt{3}} (۳)$$

$$\frac{16}{\sqrt{3}} (۲)$$

$$\frac{12}{\sqrt{3}} (۱)$$

حل:

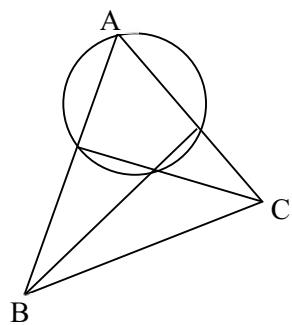


$$\sin 60^\circ = \frac{r}{AD} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{AD} \rightarrow AD = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

اندازه های کم رسم شده که یک نعله بر دایره بحجم برابرند.

$$S = \frac{(2a + 2b) \times r}{2} = r(a+b) = r(AD) = r\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right) = \frac{32}{\sqrt{3}}$$

کسری ۴



سوال ۳۰:

در شکل زیر، نیمسازهای زاویه‌های B و C در مثلث ABC رسم شده‌اند. اگر چهارضلعی داخل دایره محاطی باشد، زاویه A چند درجه است؟

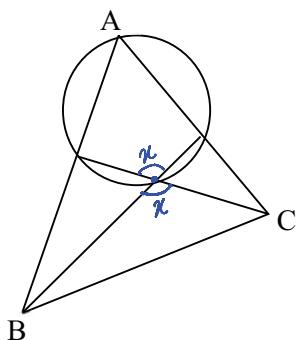
۴۵ (۴)

۶۰ (۳)

۷۵ (۲)

۹۰ (۱)

حل:



$\alpha = 180^\circ - A$: چهارضلعی محاط

$$\triangle ABC: \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \rightarrow \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ - \hat{A} \quad (I)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \triangle DBC: \hat{\alpha} + \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{C}}{2} = 180^\circ \rightarrow 180^\circ - \hat{A} + \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{C}}{2} = 180^\circ \rightarrow -\hat{A} + \frac{\hat{B} + \hat{C}}{2} = 0 \rightarrow \hat{B} + \hat{C} = 2\hat{A} \quad (II) \end{array} \right.$$

$$(I) \text{ و } (II) \rightarrow 180^\circ - \hat{A} = 2\hat{A} \rightarrow \hat{A} = 60^\circ$$

گزینه ۳

سوال ۳۱:

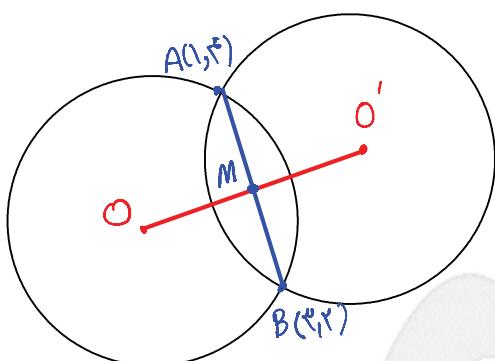
دو دایره با شعاع یکسان در نقاط $(1, 4)$ و $(3, 2)$ همدیگر را قطع می‌کنند. اگر فاصله بین مراکز دو دایره، دو برابر فاصله بین نقاط تقاطع باشد، فاصله بین نقاط برخورد یکی از دایره‌ها با محور x است؟

$4\sqrt{2}$ (۴)

$2\sqrt{2}$ (۳)

۶ (۲)

۸ (۱)



حل: AB : معادلت وسط

$$m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -1 \quad \text{since } AB \perp OO' \Rightarrow m_{OO'} = 1$$

$$M \in OO' \rightarrow y = x + 1 \quad \text{معادله خط اکسین}$$

مرکز دایره‌ها (α, β) و $(\alpha+1, \alpha+2)$ بین‌بازین وصفت مرکز دایره‌ها به محور x است.

لزومی

$$AB = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} = 2\sqrt{2} \rightarrow OO' = 4\sqrt{2} \rightarrow \begin{cases} AM = \sqrt{2} \\ MO = MO' = 2\sqrt{2} \end{cases} \xrightarrow{\text{میانه‌ی محور}} r = \sqrt{2 + 2} = \sqrt{4} = 2$$

$$OM = \sqrt{(\alpha-2)^2 + (\alpha+1-3)^2} = \sqrt{2(\alpha-2)^2} = 2\sqrt{2} \rightarrow 2(\alpha-2)^2 = 4$$

$$(\alpha-2)^2 = 4 \rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \rightarrow \beta = 1 \rightarrow (x-0)^2 + (y-1)^2 = 4 \rightarrow x^2 + (y-1)^2 = 4 \rightarrow x^2 + 1 = 4 \rightarrow x^2 = 3 \rightarrow x = \sqrt{3} \\ \alpha = 4 \rightarrow \beta = 3 \rightarrow (x-4)^2 + (y-3)^2 = 4 \rightarrow (x-4)^2 + 2^2 = 4 \end{cases}$$

با محور x ممکن است

$$x_1 - x_2 = \sqrt{3} - (-3) = 4$$

خرنده ۲

(دایره محور x را اقطع نمی‌کند)

RIAZISARA

سوال ۳۲:

اندازه تصویر قائم بردار $(1, -a, a)$ بر امتداد بردار $(2, 0, 1)$ برابر $\frac{5}{\sqrt{2}}$ است. اختلاف مقادیر a کدام است؟

$\frac{1}{\sqrt{2}} (4)$

$\frac{3}{2} (3)$

۱ (۲)

۲ (۱)

حل:

$$d = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{b}|} = \frac{|2+0+a^2|}{\sqrt{1+0+a^2}} = \frac{\omega}{\sqrt{2}} \xrightarrow{\text{بجزور}} \frac{4+12a+9a^2}{1+a^2} = \frac{4a}{2}$$

$$4a+9a^2 = 18a^2 + 12a + 1 \rightarrow 18a^2 - 12a + 1 = 0 \xrightarrow{\text{مجموع جوابین محفوظ}} \begin{cases} a=1 \\ a=\frac{1}{18} \end{cases}$$

مجموع جوابین محفوظ

گزینه ۴

که از خواسته شده باشد

سوال ۳۳:

از کانون سهمی $y^2 - x - 4y + 2 = 0$ خطی عمود بر محور تقارن آن رسم می‌شود تا سهمی را در نقاط A و B قطع کند. مساحت مثلث با رئوس A و B و رأس سهمی، چقدر است؟

$\frac{1}{12}$

$\frac{1}{8}$

$\frac{1}{4}$

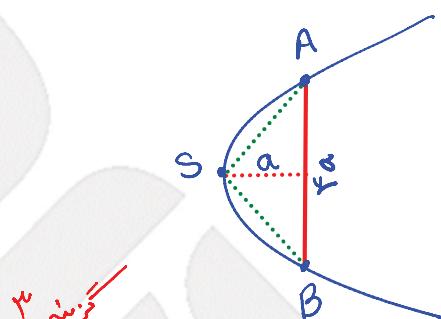
$\frac{1}{3}$

حل:

$$y^2 - 4y + 4 = x + 2 \rightarrow (y-2)^2 = 1(x+2)$$

$$AB = 2a = 1 \rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$S = \frac{(\frac{1}{2})(1)}{2} = \frac{1}{8}$$



سوال ۳۴:

$$D = ABC \text{ و } C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & x & -1 \\ 1 & 1 & x \\ x & 1 & -1 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \text{ اگر}$$

باشد. به ازای کدام مقدار x ، مجموع درایه‌های قطر اصلی و فرعی ماتریس D برابر هستند؟

۶ (۴)

۵ (۳)

-۳ (۲)

-۴ (۱)

حل:

$$\begin{aligned} ABC &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & x & -1 \\ 1 & 1 & x \\ x & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot C = \begin{bmatrix} 2 & x+1 & x-1 \\ x & -x+1 & x \\ -x-x & -x-x+1 & -x+x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x+2 & 2x & x+1 \\ x+1 & 0 & -x+1 \\ -x-x & x-1 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$x+2 - 1 = -x - x + x + 1 \rightarrow 2x = -1 \rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

کوچکتر

سوال ۳۵:

اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ باشد، مقدار $||A|A|$ کدام است؟

۱۶ (۴)

-۱۶ (۳)

۱ (۲)

-۱ (۱)

حل:

$$|A| = 1(8-4) + 3(-3-4) = 2 - 21 = -19$$

$$||A|A| = |A|^2 \cdot |A| = |A|^3 = (-1)^3 = -1$$

کوتاه ۲

RIAZISARA

سوال ۳۶:

باقیمانده تقسیم عدد $24^{23} - 21^{23}$ بر عدد ۵۶ چقدر است؟

۱ (۴)

۳ (۳)

۵ (۲)

۷ (۱)

حل:

$$(24^{23} - 21^{23}) \times 9 \stackrel{\text{جزب}}{\equiv} (24^{23}) \times 2 \stackrel{\vee}{\equiv} (24^{23})^V \times 2^V \stackrel{\vee}{\equiv} (-1)^V \times 18 \stackrel{\vee}{\equiv} -18 \stackrel{\vee}{\equiv} 3 \quad \textcircled{I}$$

$$1 \stackrel{\text{جزب}}{\equiv} (24^{23} - 21^{23}) \times 9 \stackrel{\wedge}{\equiv} -21 \times 1 \stackrel{\wedge}{\equiv} -(21^2)^{11} \stackrel{\wedge}{\equiv} -(-1)^{11} \times 3 \stackrel{\wedge}{\equiv} 3 \quad \textcircled{II}$$

$$\textcircled{I}, \textcircled{II} \rightarrow (24^{23} - 21^{23}) \times 9 \stackrel{\text{جزب}}{\equiv} 3$$

سوال ۳۷:

معادله سیاله $17x + 18y = 987$ در مجموعه اعداد طبیعی، چند دسته جواب دارد؟

۳ (۴)

۴ (۳)

۵ (۲)

۶ (۱)

حل:

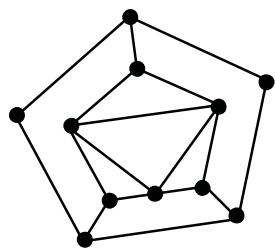
$$17x + 18y \stackrel{V}{=} 987 \rightarrow 18y \stackrel{V}{=} 987 - 17x \rightarrow y \stackrel{V}{=} 1 \rightarrow y = 17K + 1$$

$$\rightarrow 17x + 18(17K + 1) = 987 \rightarrow 17x + 18(17K) = 949 \stackrel{\div 17}{\rightarrow} x + 18K = 57 \rightarrow x = 57 - 18K$$

$$\begin{cases} 17K + 1 > 0 \\ 57 - 18K > 0 \end{cases} \rightarrow K > 0 \quad 57 > 18K \rightarrow K \leq 3$$

$$\rightarrow K \in \{0, 1, 2, 3\}$$

گزینه ۳



سوال ۳۸:

شکل زیر، گراف G را نشان می‌دهد. مقدار $\gamma(G)$ کدام است؟

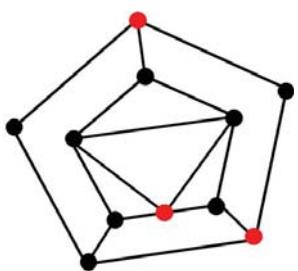
۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

حل:



$$P = 11 \quad , \quad \Delta = 4$$

$$\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{P}{\Delta+1} \right\rceil = \left\lceil \frac{11}{5} \right\rceil = 3$$

بنابراین حداقل متدار G ۳ می‌تواند باشد که با انتخاب سه رأس مسُفِّر شده، همه

رئوس دیگر احتماله می‌شود. کخننه ۲

سوال ۳۹:

هر زیرمجموعه n عضوی از مجموعه $\{12, 13, 14, \dots, m\}$, حداقل دو عضو دارد که مجموع آنها ۴۷ است. اگر حداقل مقدار n برابر ۲۰ باشد، بیشترین مقدار m کدام است؟

۴۲ (۴)

۴۰ (۳)

۳۶ (۲)

۳۲ (۱)

حل:

دوفای این که مجموع ۲۰ است، عبارتند از

$$\{12, 35\}, \{13, 34\}, \{14, 33\}, \dots, \{23, 24\}$$

۱۲

مجموع حداقل مقدار n برابر ۲۰ است، طبق اصل لامپکوکری تعداد رسانه‌ها (لانه‌ها) برابر ۱۹ است.

بنابراین باید $19 - 12 = 7$ عضو دیگر (یعنی اعداد $12, 13, \dots, 35$) در مجموع باشد که عبارتند از

$$34, 37, 38, 39, 40, 41, 42$$

بنابراین بیشترین مقدار m برابر ۴۲ است. گزینه ۴

سوال ۴۰:

اگر در گراف ساده G ، $\Delta(G) = 8$ و $|V(G)| = 18$ باشند، اختلاف بیشترین و کمترین مقدار ممکن برای اندازه گراف G کدام است؟

۳۷ (۴)

۳۹ (۳)

۳۸ (۲)

۴۰ (۱)

حل:

$$\text{بیشترین درجات ممکن} : ۳, ۷, ۸, ۸, \dots, ۸ \xrightarrow{\text{بار ۱۲}} \text{مجموع درجات} : ۲۹ = ۳ + ۷ + (۱۴ \times ۸) = ۱۴۷ \rightarrow q_{\max} = ۴۹$$

$$\text{کمترین درجات ممکن} : ۳, ۳, \dots, ۳, ۴, ۸ \xrightarrow{\text{بار ۱۲}} \text{مجموع درجات} : ۲۹ = ۱۴ \times ۳ + ۴ + ۸ = ۴۰ \rightarrow q_{\min} = ۴۰$$

$$q_{\max} - q_{\min} = 49 - 40 = 9$$

کجزینه ۳

حل تشریحی سوالات ریاضی کنکور سراسری گروه آزمایشی ریاضی و فنی

تهیه و تنظیم: عزیز اسدی (ریاضی سرا) ۰۹۲۲۰۶۳۳۰۶۲

با آرزوی موفقیت و سریلندی شما عزیزان

عزیز اسدی

RIAZISARA