یک مسئله و چند راه حل

علی زمانی
کارشناس ارشد ریاضی محض، دامغان

اشاره

به دلیل اهمیت نقش معلم، برنامه‌های آموزش معلمان از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. مجلهٔ رشد آموزش ریاضی در نظر دارد که این مهم را به‌عنوان یکی از وظایف اصلی خویش بداند. به‌همین منظور، ستونی در مجله با عنوان روایت‌های معلمان ریاضی باز شده است تا از طریق آن، بتوانیم رابطهٔ نزدیک‌تری با معلمان ریاضی برقرار کنیم. این روایت‌ها برای محققان و معلمان محقق فرصت ارزنده‌ای به‌وجود می‌آورد تا به تبیین نظریه‌های آموزشی و تدریس که از دل کلاس درس و عمل معلم می‌جوشد، بپردازند. آن‌گاه نظریه‌ها به عمل درمی‌آیند و مجدداً عمل به نظریه کشانده می‌شود و این فرآیند هم‌چنان ادامه پیدا می‌کند.

از همکاران گرامی انتظار می‌رود که روایت‌های خود را برای ما بفرستند. علم زمانی ارزشمند است که در اختیار عموم قرار گیرد، زیرا که زکات علم نشر آن است. معلمان عزیز باید به اهمیت تجربه‌های خود واقف شوند و با پویایی به غنی‌تر کردن آن‌ها بپردازند.

رشد آموزش ریاضی

مقدمه

تجربه کار و شرکت در کلاس‌های درس و ضمن خدمت حسابان جدیدالتألیف، این نتیجه سودمند را برایم به ارمغان آورد که دریافتم نگاه دانش‌آموزان از یک‌سو و دبیران ریاضی از سوی دیگر، به این کتاب متفاوت است. هر چند که دیدگاه‌های دبیران ریاضی نسبت به این کتاب بسیار قابل احترام است، اما دانش‌آموزان راحت‌تر و زودتر خود را با این کتاب وفق داده‌اند. (شاید علت این باشد که این کتاب تجربه اول آموزشی هر دو گروه است) البته نامگذاری این کتاب با نام حسابان از آنجا که بحث انتگرال در آن مطرح نشده است جای سؤال دارد.

حقیقت این است که در کتاب جدیدالتألیف حسابان[1]، مطالب و مفاهیم به گونه‌ای بیان شده است که دانش‌آموزان را بیشتر و بهتر درگیر مسائل می‌کند و همین امر شاید برای دبیران ریاضی در کلاس‌های درس خوشایند نباشد چرا که از یک‌سو، نگرانی کمبود وقت وجود دارد و از سوی دیگر ما دبیران معمولاً عادت کرده و دوست داریم خود، مستقیماً گوینده و ارائه‌دهنده مفاهیم و قضایای ریاضی باشیم تا اینکه دانش‌آموزان را به سمتی هدایت کنیم که خود به درک مفاهیم و قضایا برسند.

به جرأت می‌توان گفت یکی از تفاوت‌های عمده کتاب حسابان قدیم و جدید نوع و چیدمان فعالیت‌ها، تمرین‌ها و وجود **مسائل باز ـ پاسخ** آن است که بررسی، تفکر و تجزیه و تحلیل آنها از سوی دبیران و دانش‌آموزان می‌تواند آثار پربار و گرانبهایی را به همراه داشته باشد. البته این مهم، خود یکی از اهداف تغییر کتب درسی ریاضیات دبیرستانی است که سنگ‌بنای آن از سال‌های قبل با تألیف کتابهایی از جمله هندسه ۱ و ۲ گذاشته شده است.

همان‌طور که می‌دانیم مسئله‌ها قلب ریاضیات و حل مسئله قلب یادگیری ریاضی می‌باشد. حل یک مسئله با روش‌ها و ابزارهای متفاوت و استفاده از استراتژی «تغییر دیدگاه»، ذهن را پویا نموده و سبب بروز ابتکار و خلاقیت در بین دبیران و دانش‌آموزان می‌شود.

در ادامه مسئله‌ای از کتاب حسابان جدیدالتألیف مطرح می‌شود که با روش‌های مختلف حل شده است. بکوشید مزایا و معایب هر روش را یافته و خودتان به روش یا روش‌های دیگر آن‌را حل کنید.

مسئله (تمرین ۱۲ صفحه ۲۴ کتاب حسابان) کمترین مقدار تابع $f(x) = x + \frac{۲}{x}$ را به ازای مقادیر مثبت x پیدا کنید؟

حل: در همه روش‌ها چون $x > ۰$ بنابراین $y = f(x) > ۰$

روش اول: روش جبری (سهمی)

$$y = x + \frac{۲}{x} \Rightarrow \underbrace{x^{۲} - yx + ۲ = ۰}_{\text{سهمی دهانه به بالا}} \Rightarrow x_{min} = \frac{y}{۲}$$

$$\Rightarrow y = \frac{y}{۲} + \frac{۲}{\frac{y}{۲}}$$

$$\Rightarrow y^{۲} = ۸ \Rightarrow y_{min} = ۲\sqrt{۲}$$

روش دوم: روش جبری (اتحاد مربع دو جمله‌ای)

$$f(x) = x + \frac{۲}{x} = (\sqrt{x} - \sqrt{\frac{۲}{x}})^{۲} + ۲\sqrt{x} \times \sqrt{\frac{۲}{x}}$$

$$= \underbrace{(\sqrt{x} - \sqrt{\frac{۲}{x}})^{۲}}_{\text{همواره مثبت}} + ۲\sqrt{۲}$$

کمترین مقدار f(x) زمانی رخ می‌دهد که $(\sqrt{x} - \sqrt{\frac{۲}{x}})^{۲} = ۰$ لذا $x_{min} = \sqrt{۲}$ و $y_{min} = ۲\sqrt{۲}$

روش سوم: روش جبری (مربع کامل‌کردن)

$$y = x + \frac{۲}{x} \Rightarrow x^{۲} - yx + ۲ = ۰ \Rightarrow (x - \frac{y}{۲})^{۲} - \frac{y^{۲}}{٤} + ۲ = ۰$$

$$\Rightarrow (x - \frac{y}{۲})^{۲} = \frac{y^{۲}}{٤} - ۲$$

کمترین مقدار سمت چپ تساوی فوق برابر صفر است لذا $\frac{y_{min}^{۲}}{٤} - ۲ = ۰$ بنابراین $y_{min} = ۲\sqrt{۲}$ همچنین $x_{min} - \frac{y_{min}}{۲} = ۰$ پس $x_{min} = \sqrt{۲}$.

روش چهارم: روش جبری (دلتا)

چون به دنبال کمترین مقدار $y = x + \frac{۲}{x}$ به ازای مقادیر مثبت x هستیم بنابراین معادله درجه دوم حاصل یعنی $x^{۲} - yx + ۲ = ۰$ باید دلتای نامنفی باشد اما

$$\Delta = (-y)^{۲} - ٤(۱)(۲) \Rightarrow y^{۲} - ۸ \geq ۰ \Rightarrow y \geq ۲\sqrt{۲}$$

بنابراین $y_{min} = ۲\sqrt{۲}$

روش پنجم: روش جبری (بازگشتی)

فرض کنیم k کمترین مقدار f(x) باشد لذا باید برای هر $x > ۰$ داشته باشیم $f(x) \geq k$ اما

$$f(x) \geq k \Leftrightarrow x + \frac{۲}{x} \geq k \Leftrightarrow x^{۲} - k + ۲x \geq ۰$$

چون k کمترین مقدار f می‌باشد و نامساوی فوق می‌خواهد برای هر $x > ۰$ همواره برقرار باشد باید به فرم $(x - a)^{۲} \geq ۰$ باشد. بنابراین

$$x^{۲} - kx + ۲ = (x - a)^{۲} \Leftrightarrow x^{۲} - kx + ۲ = x^{۲} - ۲ax + a^{۲}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ۲ = a^{۲} \\ -k = -۲a \end{cases} \Rightarrow k = ۲\sqrt{۲}$$

روش ششم: روش زیر مسئله‌ها (مسئله‌های کمکی)

طبق قضیه صفحه ۲۳ کتاب جبر و احتمال اگر $a > ۰$ و $b > ۰$ آنگاه $\frac{a+b}{۲} \geq \sqrt{ab}$ بنابراین

$$f(x) = x + \frac{۲}{x} = ۲ \times \frac{x + \frac{۲}{x}}{۲} \geq ۲ \times \sqrt{x \times \frac{۲}{x}} = ۲\sqrt{۲} \Rightarrow y_{min} = ۲\sqrt{۲}$$

روش هفتم: روش زیر مسئله‌ها (مسئله‌های کمکی)

بنابر تمرینی در جبر و احتمال اگر $a > ۰$ آنگاه $a + \frac{۱}{a} \geq ۲$ بنابراین

$$f(x) = x + \frac{۲}{x} = \sqrt{۲}(\frac{x}{\sqrt{۲}} + \frac{\sqrt{۲}}{x}) \geq \sqrt{۲} \times ۲ = ۲\sqrt{۲} \Rightarrow y_{min} = ۲\sqrt{۲}$$

روش هشتم: روش زیر مسئله‌ها (مسئله‌های کمکی)

می‌دانیم که اگر $\vec{u}$ و $\vec{v}$ دو برابر و θ زاویه بین آنها باشد آنگاه

$$\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta \xrightarrow{|\cos\theta| \leq ۱} |\vec{u}.\vec{v}| \leq |\vec{u}||\vec{v}|$$

(نامساوی کوشی ـ شوارتز)

اکنون قرار می‌دهیم $\vec{u} = (\sqrt{x}, \sqrt{\frac{۲}{x}})$ و $\vec{v} = (\sqrt{\frac{۲}{x}}, \sqrt{x})$ بنابراین

$$\left.\begin{aligned} &\vec{u}.\vec{v} = \sqrt{x} \times \sqrt{\frac{۲}{x}} + \sqrt{\frac{۲}{x}} \times \sqrt{x} = ۲\sqrt{۲} \\ &|\vec{u}| = |\vec{v}| = \sqrt{x + \frac{۲}{x}} \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow ۲\sqrt{۲} \leq \sqrt{x + \frac{۲}{x}} \times \sqrt{x + \frac{۲}{x}} \Rightarrow ۲\sqrt{۲} \leq x + \frac{۲}{x} \Rightarrow y_{min} = ۲\sqrt{۲}$$

روش نهم: روش تنظیم جدول (حذف حالت‌های نامطلوب)

مستطیل‌هایی که طول و عرض آنها x و $\frac{۲}{x}$ است را در نظر می‌گیریم. واضح است که مساحت آنها مقدار ثابت ۲ است چرا که $۲ = x \times \frac{۲}{x}$ = عرض × طول = مساحت

اما $f(x) = x + \frac{۲}{x}$ نصف محیط چنین مستطیل‌هایی است.

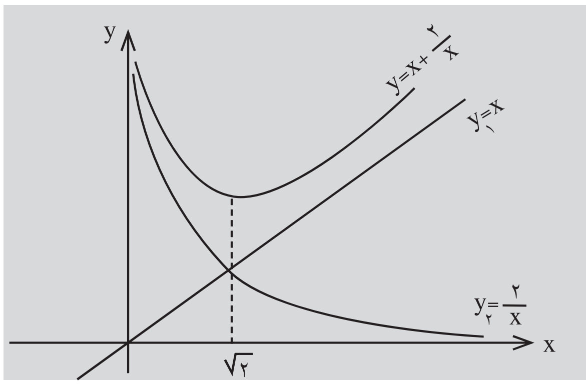
نصف محیط	مساحت	عرض	طول
۴/۵	۲	$\frac{۱}{۲}$	۴
$\frac{۷}{۵}\sqrt{۵} \simeq ۳/۱۳$	۲	$\frac{۲}{\sqrt{۵}}$	$\sqrt{۵}$
۳	۲	۱	۲
$\frac{۵}{۳}\sqrt{۳} \simeq ۲/۸۸$	۲	$\frac{۲}{\sqrt{۳}}$	$\sqrt{۳}$
$\frac{۱۷}{۶} \simeq ۲/۸۳$	۲	$\frac{۴}{۳}$	۱/۵
$۲\sqrt{۲} \simeq ۲/۸۲$	۲	$\sqrt{۲}$	$\sqrt{۲}$

با توجه به جدول بالا مشاهده می‌شود که کمترین نصف محیط وقتی رخ می‌دهد که مستطیل، مربع باشد لذا

عرض= طول $\Rightarrow x_{min} = \frac{۲}{x_{min}} \Rightarrow x_{min} = \sqrt{۲}$

بنابراین $\sqrt{۲} + \sqrt{۲} = ۲\sqrt{۲}$ = نصف کمترین محیط $= y_{min}$

روش دهم: راهبرد رسم شکل



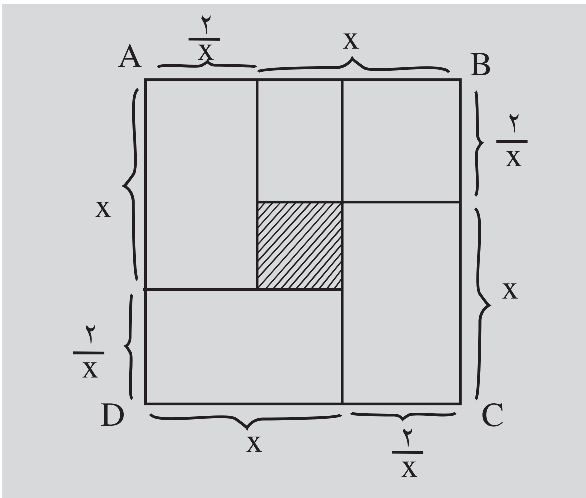
با رسم نمودارهای $y_۱=x$ و $y_۲ = \frac{۲}{x}$ و جمع کردن $y_۱$ و $y_۲$ مشاهده می‌شود که کمترین مقدار تابع $f(x) = y_۱ + y_۲ = x + \frac{۲}{x}$ در محل تلاقی دو نمودار $y_۱$ و $y_۲$ رخ می‌دهد لذا

$$\left.\begin{array}{l} y_۱ = x \\ y_۲ = \frac{۲}{x} \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{قطع}} x_{min} = \frac{۲}{x_{min}} \Rightarrow x_{min} = \sqrt{۲}$$

$$\Rightarrow y_{min} = \sqrt{۲} + \frac{۲}{\sqrt{۲}} = ۲\sqrt{۲}$$

روش یازدهم: روش هندسی (مربع)

مربع به ضلع $x + \frac{۲}{x}$ را مطابق شکل روبه‌رو تقسیم‌بندی می‌کنیم.



مساحت ۴ مستطیل تولید شده برابر ۲ است و واضح است که به خاطر وجود مستطیل کوچکی در مرکز مربع داریم:

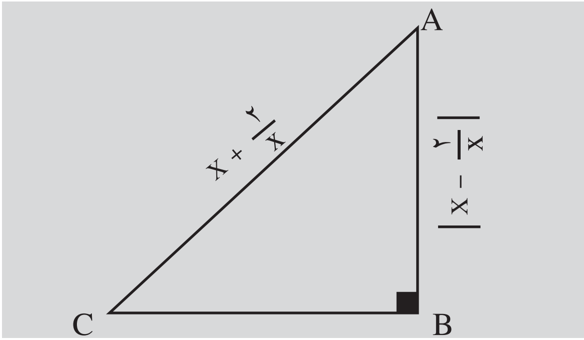
مجموع ۴ مساحت مستطیل تولید شده $\geq$ مساحت مربع ABCD

$$\Rightarrow (x + \frac{۲}{x})^۲ \geq ۴ \times ۲ = ۸ \Rightarrow x + \frac{۲}{x} \geq ۲\sqrt{۲} \Rightarrow y_{min} = ۲\sqrt{۲}$$

توجه داریم که کمترین مقدار f(x) زمانی رخ می‌دهد که مساحت مستطیل کوچک که در مرکز قرار دارد برابر صفر باشد و آنوقتی است که $x = \frac{۲}{x}$ یعنی $x_{min} = \sqrt{۲}$.

روش دوازدهم: روش هندسی (مثلث قائم‌الزاویه)

مثلث قائم‌الزاویه‌ای با وتر $x+\frac{۲}{x}$ و طول یک ضلع $\left|x-\frac{۲}{x}\right|$ را در نظر بگیرید بنابر رابطهٔ فیثاغورس داریم:



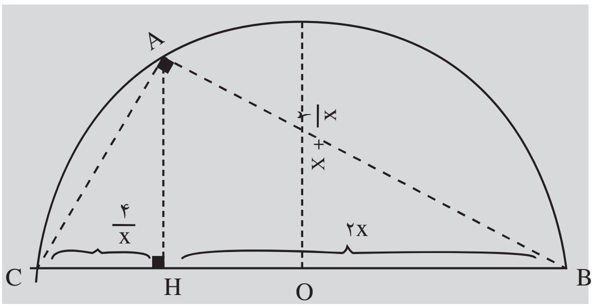
$$BC^۲=AC^۲-AB^۲=(x^۲+\frac{۴}{x^۲}+۴)-(x^۲+\frac{۴}{x^۲}-۴)=۸$$

$$\Rightarrow BC=۲\sqrt{۲}$$

واضح است که $AC\geq BC$ بنابراین $x+\frac{۲}{x}\geq ۲\sqrt{۲}$ لذا $y_{min}=۲\sqrt{۲}$.

روش سیزدهم: روش هندسی (دایره)

نیم‌دایره‌ای به قطر $۲(x+\frac{۲}{x})=۲x+\frac{۴}{x}$ را در نظر بگیرید.



اگر از هر نقطهٔ دلخواه A روی محیط نیمدایره به دو سر قطر وصل کنیم آنگاه $\hat{A}=۹۰^\circ$. اندازهٔ ارتفاع AH برابر است با:

$$AH^۲=BH\times CH=۲x\times\frac{۴}{x}=۸\Rightarrow AH=۲\sqrt{۲}$$

واضح است که به ازای هر نقطهٔ دلخواه A، AH کمتر از یا

مسئله‌ها قلب ریاضیات و حل مسئله قلب یادگیری ریاضی می‌باشد. حل یک مسئله با روش‌ها و ابزارهای متفاوت و استفاده از استراتژی «تغییر دیدگاه»، ذهن را پویا نموده و سبب بروز ابتکار و خلاقیت در بین دبیران و دانش‌آموزان می‌شود

مساوی با شعاع نیم‌دایره است. بنابراین

$$x+\frac{۲}{x}\geq ۲\sqrt{۲}\Rightarrow y_{min}=۲\sqrt{۲}$$

روش چهاردهم: روش مشتق (اکسترمم تابع)

می‌دانیم که $f(x)=x+\frac{۲}{x}$ روی $(۰,+\infty)$ پیوسته و مشتق‌پذیر است و داریم: $f'(x)=۱-\frac{۲}{x^۲}=۰\Rightarrow x=\sqrt{۲}$. اما

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x)=+\infty\\ f(\sqrt{۲})=\sqrt{۲}+\frac{۲}{\sqrt{۲}}=۲\sqrt{۲}\\ \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty\end{cases}$$

بنابراین $y_{min}=۲\sqrt{۲}$.

پی‌نوشت

۱. به گفتهٔ دکتر ریحانی (از مؤلفین کتاب) در کارگاه آموزشی حسابان شاهرود (آبان ماه ۸۹) یکی از اهداف تغییر در کتاب حسابان، استفاده بیشتر از مسائل باز ـ پاسخ است.

منابع

۱. ریحانی، ابراهیم؛ عالمیان، وحید؛ طاهری، محمدتقی؛ اصلاح‌پذیر، بهمن. (۱۳۸۹). حسابان. شرکت چاپ و نشر کتب درسی.

۲. تابش، یحیی؛ رستگار، آرش؛ حاجی‌بابایی، جواد. (۱۳۸۳) آموزش هنر حل مسئله. شرکت چاپ و نشر کتب درسی.

۳. زنگنه، بیژن؛ گویا، زهرا؛ تابش، یحیی؛ ایلخانی‌پور، یدالله. (۱۳۸۸) جبر و احتمال. شرکت چاپ و نشر کتب درسی.

۴. پولیا، جرج. (۱۳۶۹) چگونه مسئله را حل کنیم. ترجمه: آرام؛ احمد. انتشارات کیهان.