www.riazisara.ir سایت ویژه ریاضیات

درسنامه ها و جزوه های دروس ریاضیات

دانلود نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نمونه سوالات و پاسخنامه کنکور

دانلود نرم افزارهای ریاضیات

و...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

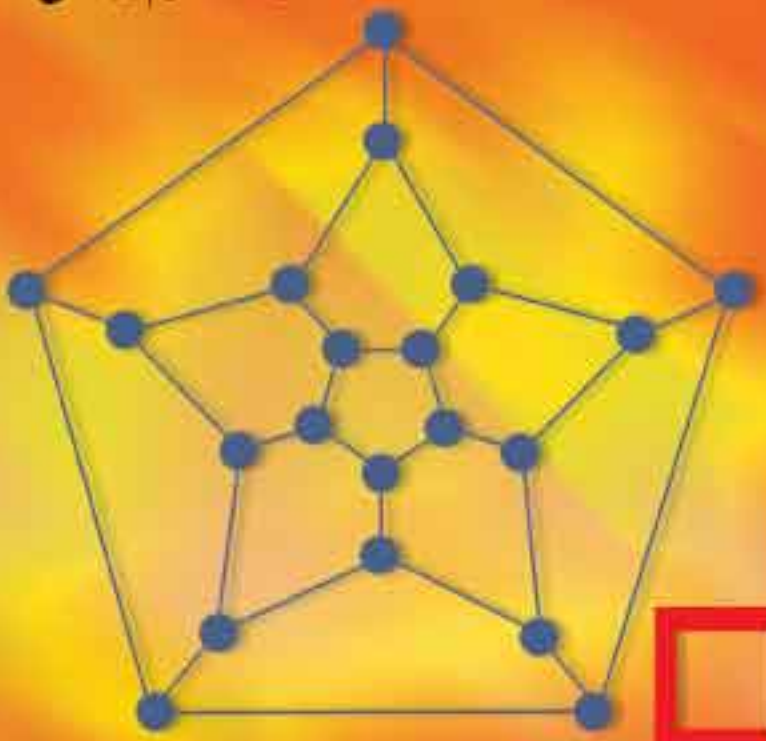
https://telegram.me/riazisara (@riazisara)

جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش
تعلیم و تربیت اسلامی

ریاضیات گسسته

دورهٔ پیش‌دانشگاهی

رشتهٔ علوم ریاضی



۲۹۶/۱

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

ریاضیات گسسته

فصل ۱ آشنایی با گراف ها

تمرین (صفحه‌ی ۱۸)

۱ـ در مثال ۳ اگر علاوه بر شرایط داده شده، B_5 قادر به انجام کار A_4 نیز باشد، شرکت به چند طریق می‌تواند پست‌های خالی را پر کند؟ با توجه به مثال ۳ داریم:

B_1 می‌تواند سه شغل A_1 ، A_2 و A_3 را اداره کند.

B_2 می‌تواند دو شغل A_3 و A_4 را بپذیرد.

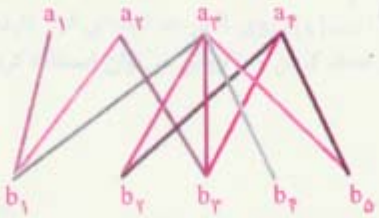
B_3 می‌تواند هر یک از شغل‌های A_2 ، A_3 و A_4 را انجام دهد.

B_4 می‌تواند تنها متصدی شغل A_3 باشد.

B_5 می‌تواند دو شغل A_3 و A_4 را انجام دهد.

حال می‌خواهیم بدانیم که شرکت به چند طریق می‌تواندپست‌های خالی را پر کند.

برای بررسی این وضعیت یک مدل می‌سازیم به این صورت که، چهار نقطه متناظر با چهار شغل مورد نظر و پنج نقطه متناظر با پنج داوطلب مذکور در نظر می‌گیریم و مطابق شکل هر نقطه b_i ، به‌طوری که $1 \le i \le 5$ ، را با پاره‌خط یا پاره‌خط‌هایی به نقاطی چون a_j ، به‌طوری‌که $1 \le j \le 5$ ، در صورتی وصل می‌کنیم که داوطلب B_i که با نقطه b_i در تناظر است صلاحیت انجام شغل A_j را که با نقاط a_j در تناظر است داشته باشد.



با توجه به شکل بالا شغل A_1 تنها یک داوطلب دارد پس این شغل به B_1 تخصیص داده می‌شود. حال تنها داوطلب B_4 برای شغل A_2 باقی می‌ماند. چون B_2 ، B_3 و B_5 داوطلبان شغل A_3 هستند و چون B_4 مثلاً به کار گماشته شده، پس B_2 و B_5 داوطلبان شغل A۴ هستند پس دو حالت درنظرمی‌گیریم.

الف) شغل A_4 به B_2 واگذار شود.

ب) شغل A_4 به B_5 واگذار شود.

اگر حالت (الف) اتفاق بیفتد آن‌گاه B_4 و B_5 داوطلبان شغل A_3 هستند که باز دو حالت پیش می‌آید:

۱) شغل A_3 به داوطلب B_4 واگذار شود.

۲) شغل A_3 به داوطلب B_5 واگذار شود.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

حال فرض می‌کنیم حالت (ب) اتفاق بیفتد، آن‌گاه B_2 و B_4 داوطلبان شغل A_3 هستند که باز دو حالت پیش می‌آید:

۱) شغل A_3 به داوطلب B_2 واگذار شود.

۲) شغل A_3 به داوطلب B_4 واگذار شود. پس این مسأله چهار جواب دارد.

جواب‌های مسأله به صورت زیر است:

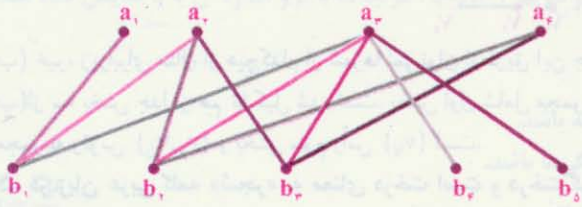
۱) $(a_1 , b_1) , (a_2 , b_3) , (a_3 , b_2) , (a_4 , b_5)$

۲) $(a_1 , b_1) , (a_2 , b_3) , (a_3 , b_4) , (a_4 , b_2)$

۳) $(a_1 , b_1) , (a_2 , b_3) , (a_3 , b_5) , (a_4 , b_2)$

۴) $(a_1 , b_1) , (a_2 , b_3) , (a_3 , b_4) , (a_4 , b_5)$

۲ـ در مثال ۳ اگر علاوه بر شرایط داده شده، B_2 قادر به انجام کار A_2 نیز می‌باشد. شرکت به چند طریق می‌تواند پست‌های خالی را پر کند. همانند تمرین ۱ ، با توجه به شرایط بیان شده، مدل زیر را می‌سازیم:



تنها B_1 داوطلب شغل A_1 است پس شغل A_1 به B_1 واگذار می‌شود. B_2 و B_3 تنها داوطلبان شغل A_4 هستند پس دو حالت اتفاق می‌افتد:

الف) شغل A_4 به B_2 واگذار شود.

ب) شغل A_4 به B_3 واگذار شود.

اگر حالت (الف) پیش آید آن‌گاه تنها داوطلب شغل A_4 ، B_3 است و B_4 و B_5 داوطلبان شغل A_3 هستند پس دو حالت پیش می‌آید:

۱) شغل A_3 به داوطلب B_4 واگذار می‌شود.

۲) شغل A_3 به داوطلب B_5 واگذار شود.

حال فرض می‌کنیم حالت (ب) پیش آید آن‌گاه تنها B_2 داوطلب شغل A_4 است و B_4 و B_5 داوطلبان شغل A_3 هستند پس باز هم دو حالت پیش می‌آید:

۱) شغل A_3 به B_4 واگذار شود.

۲) شغل A_3 به B_5 واگذار شود.

پس این مسأله چهار جواب دارد. جواب‌های مسأله به صورت زیر است:

۱) $(a_1 , b_1) , (a_2 , b_2) , (a_3 , b_4) , (a_4 , b_3)$

۲) $(a_1 , b_1) , (a_2 , b_2) , (a_3 , b_5) , (a_4 , b_3)$

۳) $(a_1 , b_1) , (a_2 , b_3) , (a_3 , b_4) , (a_4 , b_2)$

۴) $(a_1 , b_1) , (a_2 , b_3) , (a_3 , b_5) , (a_4 , b_2)$

۳ـ مسلماً دبیرستان شما در مسابقه‌های بهاری شرکت می‌کند. یکی از مسابقه‌ها را در نظر بگیرید و در پایان گراف یا گراف جهت‌دار مربوط به آن رامشخص کنید. به عهده دانش‌آموز

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

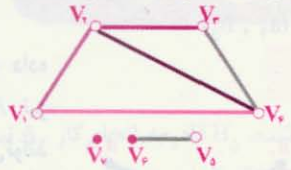
۴ـ گراف $G=(v, E)$ با $V=\{v_1 , v_2 , ... , v_7\}$ و $E=\{v_1v_2,v_1v_4,v_2v_3,v_2v_4,v_3v_4,v_5v_6\}$ را درنظر بگیرید.

الف) نمودار این گراف را رسم کنید.

ب) اگر این رأس‌ها هفت شهر و این یال‌ها جاده‌های موجود بین این شهرها را نمایش دهند، آیا تنها با عبور از این جاده‌ها می‌توان از هر شهری به شهر دیگر سفر کرد؟

پ) این گراف از چند «بخش جدا از هم» تشکیل شده است؟

الف) برای رسم نمودار، به ازای هر رأس G نقطه دلخواهی در صفحه در نظر می‌گیریم و دو نقطه متمایز را با پاره‌خط بهم وصل می‌کنیم به شرطی که مجموعه متشکل از دو رأس متناظر با آن دونقطه عضوی ار E باشد.



ب) خیر، زیرابرای مثال از هیچ‌کدام از شهرها نمی‌توان ازطریق این جاده‌ها به شهر v_7 رفت.

پ)از سه بخش جدا از هم تشکیل شده است. بخش اول شامل مجموعه رئوس $\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ و بخش دوم شامل مجموعه رئوس $\{v_6,v_5\}$ و بخش سوم رأس $\{v_7\}$ است.

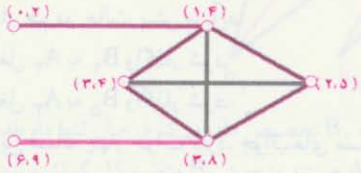
۵ـ در زبان عربی کلمه «شجر» به معنای درخت است و درخت گراف خاصی است که بعداً در فصل ۳ بررسی خواهد شد. دربارهٔ ارتباط بین «شجره‌نامه خانوادگی» و گراف‌ها چه می‌دانید؟ شجره‌نامهٔ خانوادگی خود را رسم کنید. به عهده دانش‌آموز

۶ـ شش بازهٔ باز (۹ , ۶) ، (۸ , ۳) ، (۴ , ۳) ، (۵ , ۲) ، (۴ , ۱) و (۲ , ۰) از اعداد حقیقی داده شده‌اند. با این بازه‌ها گرافی چون G می‌سازیم که رأس‌هایش متناظر بااین بازه‌ها باشند و دو رأس G با این شرط مجاور باشند که بازه‌های مربوط متمایز باشند و اشتراک آنها تهی نباشد. مثلاً چون اشتراک بازه‌های (۲ , ۰) و (۴ , ۱) تهی نیست رأس‌های مربوط باید مجاور باشند. اما چون اشتراک بازه‌های (۲ , ۰) و (۵ , ۲) تهی است رأس‌های مربوط به این دو بازه نباید مجاور باشند (چنین گرافی را گراف بازه‌ها می‌نامیم.)

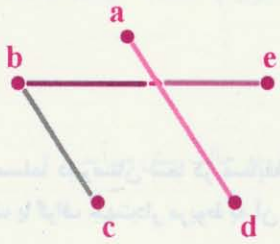
الف) نمودار گراف بازه‌های داده شده را رسم کنید.

ب) با معرفی پنج بازهٔ مناسب نشان دهید گراف شکل ۳ را می‌توان گراف بازه‌ها دانست.

پ) نشان دهید گراف شکل ۲ نمی‌تواند گراف بازه‌ها باشد؛ یعنی، پنج بازه باز نمی‌توان یافت که گراف مربوط به آنها، طبق تعریف، «همان» گراف شکل ۲ باشد.



الف) رئوس متناظر با بازه‌هایی که اشتراک آن‌ها ناتهی است را با پاره‌خط بهم وصل می‌کنیم در این صورت نمودار گراف بازه‌های داده شده به صورت مقابل است.

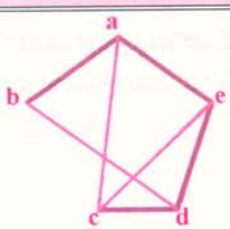


ب) با معرفی پنج بازهٔ زیر، گراف شکل ۳ یک گراف بازه‌هاست.

$b=(۵ , ۸)$ ، $a=(۱ , ۳)$

$e=(۵ , ۶)$ ، $d=(۲ , ۳)$ ، $c=(۷ , ۸)$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا



پ) با استفاده از برهان خلف داریم، اگر گراف بازه‌ای باشد آن‌گاه بازه‌های مربوط به دو رأس b و c اشتراک ندارند و بازه‌های مربوط به دو رأس a و d هر دو با بازه‌های مربوط به دو رأس c و b اشتراک دارند پس حتماً هر دو فاصله بین دو بازه مربوط به دو رأس b و c را شامل می‌شوند. بنابراین بازه‌های مربوط به دو رأس a و d اشتراک دارند که این با گراف داده شده در تناقض است بنابراین این گراف، گراف بازه‌ای نیست.

فصل ۲ چند ویژگی ساده و چند رده ی خاص گراف ها

تمرین (صفحه‌ی ۱۴)

۱ـ فرض کنید که گراف G ، ۳ـ منتظم است و داریم q=۲p-۳ ، مرتبه G با p و اندازه آن با q نمایش داده شده است.

الف) ویژگی‌های گراف G رامشخص کنید.

ب) گرافی رسم کنید که این ویژگی‌ها را داشته باشد.

پ) گراف دیگری رسم کنید که واجد این ویژگی‌ها باشد.

الف) چون گراف G ، ۳ـ منتظم است، داریم:

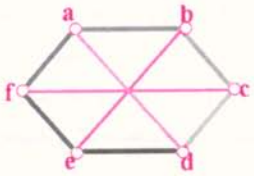
$$q=\frac{۳p}{۲}$$

با قرار دادن در تساوی q=۲p-۳ داریم:

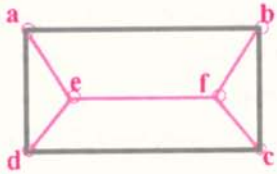
$$\frac{۳p}{۲}=۲p-۳\Rightarrow ۳p=۴p-۶\Rightarrow p=۶$$

$$\Rightarrow q=۹$$

یعنی گراف G دارای ۶ رأس و ۹ یال است.



(ب)



(پ)

۲ـ الف) گراف شکل ۶ از فصل ۱ را در نظر بگیرید و پارامترهای p ، q ، Δ و δ را بیابید.

ب) درجه‌های تمام رأس‌های این گراف را به صورت دنباله‌ای چون $S:d_۱ , d_۲ , ... , d_۹$ بنویسید که به ازای هر $۱\le i\le ۸$ داشته باشیم $d_{i+۱}\le d_i$ (دنباله حاصل را دنباله درجه‌های رأس‌های گراف می‌نامیم.)

پ) چرا گرافی وجود ندارد که ۰ و ۱ و ۳ و ۳ و ۵ :S دنباله درجه‌های رأس‌های آن باشد.

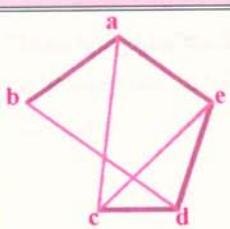
الف) این گراف دارای ۹ رأس و ۱۰ یال است یعنی p=۹ و q=۱۰

درجه رأس $a_۳$ ، ۵ است که بیشترین درجه است و درجه رئوس $a_۱$ ، $b_۴$ و $b_۵$ مساوی ۱ است که کمترین درجه است پس δ=۱ و Δ=۵

ب) ۱ و ۱ و ۱ و ۲ و ۲ و ۲ و ۳ و ۳ و ۵ :S

پ) گرافی که پنج رأس دارد. حداکثر درجه هر رأس گراف می‌تواند ۴ باشد در حالی‌که در اینجا درجه یک رأس، مساوی ۵ است.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا



پ) با استفاده از برهان خلف داریم، اگر گراف بازه‌ای باشد آن‌گاه بازه‌های مربوط به دو رأس b و c اشتراک ندارند و بازه‌های مربوط به دو رأس a و d هر دو با بازه‌های مربوط به دو رأس c و b اشتراک دارند پس حتماً هر دو فاصله بین دو بازه مربوط به دو رأس b و c را شامل می‌شوند. بنابراین بازه‌های مربوط به دو رأس a و d اشتراک دارند که این با گراف داده شده در تناقض است بنابراین این گراف، گراف بازه‌ای نیست.

فصل ۲ چند ویژگی ساده و چند رده ی خاص گراف ها

تمرین (صفحه‌ی ۱۴)

۱ـ فرض کنید که گراف G ، ۳ـ منتظم است و داریم q=۲p-۳ ، مرتبه G با p و اندازه آن با q نمایش داده شده است.

الف) ویژگی‌های گراف G رامشخص کنید.

ب) گرافی رسم کنید که این ویژگی‌ها را داشته باشد.

پ) گراف دیگری رسم کنید که واجد این ویژگی‌ها باشد.

الف) چون گراف G ، ۳ـ منتظم است، داریم:

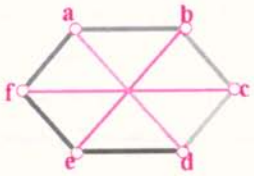
$$q=\frac{۳p}{۲}$$

با قرار دادن در تساوی q=۲p-۳ داریم:

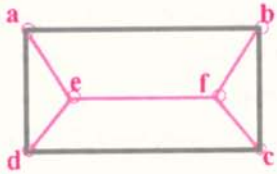
$$\frac{۳p}{۲}=۲p-۳\Rightarrow ۳p=۴p-۶\Rightarrow p=۶$$

$$\Rightarrow q=۹$$

یعنی گراف G دارای ۶ رأس و ۹ یال است.



(ب)



(پ)

۲ـ الف) گراف شکل ۶ از فصل ۱ را در نظر بگیرید و پارامترهای p ، q ، Δ و δ را بیابید.

ب) درجه‌های تمام رأس‌های این گراف را به صورت دنباله‌ای چون $S:d_۱ , d_۲ , ... , d_۹$ بنویسید که به ازای هر $۱\le i\le ۸$ داشته باشیم $d_{i+۱}\le d_i$ (دنباله حاصل را دنباله درجه‌های رأس‌های گراف می‌نامیم.)

پ) چرا گرافی وجود ندارد که ۰ و ۱ و ۳ و ۳ و ۵ :S دنباله درجه‌های رأس‌های آن باشد.

الف) این گراف دارای ۹ رأس و ۱۰ یال است یعنی p=۹ و q=۱۰

درجه رأس $a_۳$ ، ۵ است که بیشترین درجه است و درجه رئوس $a_۱$ ، $b_۴$ و $b_۵$ مساوی ۱ است که کمترین درجه است پس δ=۱ و Δ=۵

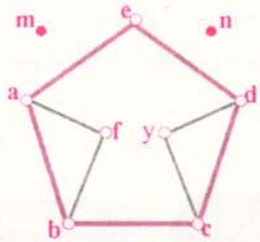
ب) ۱ و ۱ و ۱ و ۲ و ۲ و ۲ و ۳ و ۳ و ۵ :S

پ) گرافی که پنج رأس دارد. حداکثر درجه هر رأس گراف می‌تواند ۴ باشد در حالی‌که در اینجا درجه یک رأس، مساوی ۵ است.

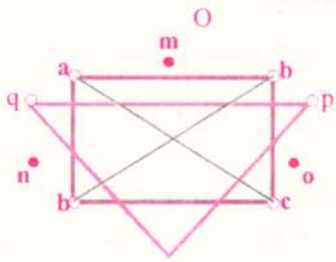
www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۳) الف) گرافی ارائه کنید که دنباله درجه‌های رأس‌هایش ۰ و ۰ و ۰ و ۲ و ۲ و ۲ و ۳ و ۳ و ۳ و ۳ :S باشد.
ب) آیا پاسخ یکتاست؟ چرا؟

الف)



ب) خیر، زیرا می‌توان گراف دیگری به صورت مقابل رسم کرد:
درگراف قسمت الف بین رئوس درجه ۲ و رئوس درجه ۳ مسیر وجود دارد در حالی‌که در این گراف، بین رئوس درجه ۲ و رئوس درجه ۳ مسیری وجود ندارد.

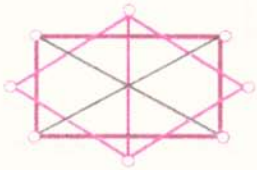


۴ـ چند گراف ۳ـ منتظم از مرتبه ۱۵ وجود دارند؟ چرا؟ گراف ۳ منتظم از مرتبه ۱۵ وجودندارد چون تعداد رئوس فرد باید زوج باشد.

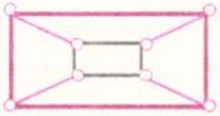
۵ـ با استقراء بر q قضیه ۱ را اثبات کنید.

اگر q=۱ آن‌گاه مجموع درجات رئوس برابر ۲ است. زیرا یک یال بین دو رأس وجود دارد که درجه هر یک برابر یک است و درجه بقیه دو رأس برابر صفر است پس مجموع درجات رئوس برابر ۲ است پس تساوی بقرار است. حال فرض می‌کنیم تساوی به ازاء q یال برقرار باشددر صورتی که تعداد یال‌ها مساوی q+۱ باشد یعنی یک یال بین دو رأس اضافه شده است پس درجه دو رأس یک واحد اضافه شده بنابراین مجموع درجات رئوس مساوی ۲q+۲ یا ۲(q+۱) است پس تساوی برای q+۱ یال نیز درست است یعنی تساوی برای هر گراف برقرار است.

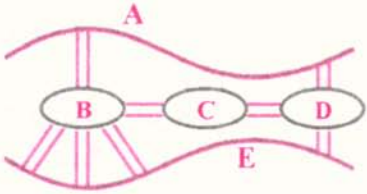
۶ـ گرافی ناهمبند و ۳ـ منتظم مثال بزنید که ۸ رأس و ۱۲ یال داشته باشد.



۷ـ گرافی همبند و ۳ـ منتظم مثال بزنید که ۸ رأس و ۱۲ یال داشته باشد.



۸ـ فرض کنید طبق شکل، شهری از یک رودخانه و پنج منطقه A ، B ، C، D و E تشکیل شده است واین منطقه‌ها با هشت پل به هم راه دارند.
الف) گراف چندگانه‌ی مربوط به این شهر را رسم کنید.

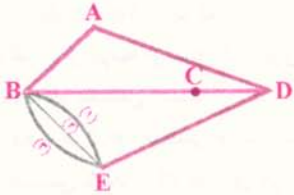


www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

ب) آیا با آغاز از یکی از منطقه‌های پنجگانه و با عبور از پل‌ها می‌توان از هر پل دقیقاً یک بار گذشت و به منطقه آغاز برگشت؟

پ) آیا با آغاز از یکی از منطقه‌های پنجگانه می‌توان از هر پل دقیقاً یک بار گذشت؟ در این حالت لازم نیست منطقه آغاز گشت با منطقه پایان آن یکی باشد.

الف)



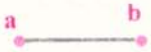
ب) خیر، زیرا درجه رأس D فرد است و گراف اویلری نیست.

پ) بله، می‌توان از D به A و از آن‌جا به B و سپس از مسیر (۱) به E و سپس به D و از آن‌جا به C و سپس به B و از مسیر (۲) به E و از آنجا از مسیر (۳) به B بازگشت.

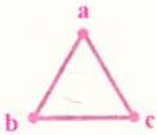
۹ـ در گراف کامل K_p ، $۲\le p\le ۴$ ، تعداد مسیرهای «متفاوت» از یک رأس u به یک رأس v ، $u\neq v$ را بیابید.

یک مسیر از a به b به صورت b و a وجود دارد.

p=۲ :

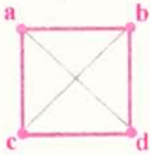


p=۳ :



دو مسیر از a به b وجوددارد. یکی مسیری به طول یک به صورت b و a و دیگری مسیری به طول ۲ به صورت b ، c و a است.

p=۴ :

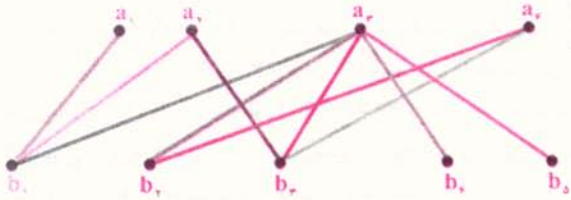


مسیرهای از a به b عبارتند از b و a و b و c و a و b و d و a و b و c و d و a و b و d و c و a پس پنج مسیر به طول‌های ۱ و ۲ و ۲ و ۳ و ۳

۱۰ـ الف) گراف شکل ۶ از فصل ۱ «چند» دور دارد؟

ب) هر یک از دورها را به صورت دنباله‌ای ازرأس‌ها نمایش دهید که رأس اول و آخر دنباله مثل هم و بقیه همراه با این رأس مشترک روبدو و متفاوت باشند؛ به علاوه، هر دو رأس متوالی این دنباله در G مجاور باشند.

الف) گراف شکل ۶ به صورت مقابل است: که شامل دو دور از مرتبه چهار و یک دور ازمرتبه شش است.



ب) دو دور از مرتبه ۴ یکی به صورت a_2 ، b_3 ، a_3 ، b_1 و دیگری به صورت a_3 ، b_3 ، a_4 ، b_2 و یک دور از مرتبه ۶: a_2 ، b_1 ، a_3 ، b_2 ، a_4 ، b_3 ، a_2

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

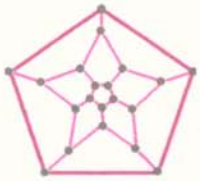
۱۱ـ هفده نفر به سفر می‌روند و قبل ازسفر قرار می‌گذارند هر کس به پنج نفر دیگر نامه بفرستد. آیا امکان دارد هر کس به آن پنج نفری نامه بفرستد که از آنهانامه دریافت می‌کند؟ چرا؟ خیر. زیرا در غیر این صورت باید بتوان گرافی ۵ـمنتظم از مرتبه ۱۷ رسم کرد که رسم چنین گرافی غیر ممکن است زیرا تعداد رئوس فرد باید زوج دارد و همچنین از رابطه $2q=pr$ داریم که $2q=17\times5=85$ که غلط است.

۱۲ـ اگر گراف G از مرتبه p ، $P\geq3$ ، دوری ازمرتبه p داشته باشد، آن‌گاه G را گراف همیلتنی می‌نامیم. مثلاً هر K_p ، $p\geq3$ ، گراف همیلتنی است.

الف) نشان دهید هر گراف همیلتنی همبند است.

ب) اگر G همیلتنی باشد آن‌گاه به ازای هر $v\in V(G)$ داریم $\deg_G^v\geq2$

پ) آیا گراف زیر گراف همیلتنی است؟ چرا؟

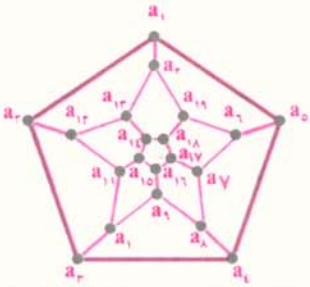


الف) چون گراف همیلتنی از مرتبه p ، $p\geq3$ ، دوری از مرتبه p دارد یعنی دارای دوری است که هر رأس را دقیقاً یکبار شامل می‌شود پس بین هر دو رأس مسیری وجود دارد پس گراف همبند است.

ب) چون درگراف همیلتنی هر رأس روی یک دور قرار دارد پس هر رأس حداقل به دو رأس دیگر متصل است پس درجه هر رأس حداقل مساوی ۱۲ است.

پ) بله، زیرا شامل دوری به طول ۲۰ به صورت زیر است که از همه رئوس می‌گذرد:

دور: $a_1a_2a_3...a_{20}a_1$



۱۳ـ الف) گراف G داده شده است. فرض کنید $u,v\in V(G)$ نشان دهید «وجود یک مسیر از u به v» یک رابطه هم‌ارزی بر مجموعه $V(G)$ است.

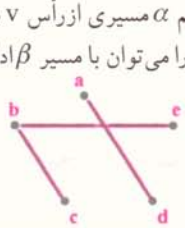
ب) اگر G گراف شکل ۳ از فصل ۱ باشد، افرازهای حاصل ازرابطه هم‌ارزی مذکور در بند (الف) را بیابید.

پ) پاسخ بند (ب) را با فرض این‌که G گراف شکل ۶ یا گراف شکل ۱۰ باشد بیابید.

الف) اگر v رأس از گراف G باشد بین رأس v و خودش مسیری به طول صفر وجود دارد پس این رابطه انعکاسی است.

دو رأس v_1 و v_n $(v_1\neq v_n)$ رادر نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم $v_1v_2...v_n$ یک مسیر از رأس v_1 به رأس v_n باشد پس $v_n...v_1$ یک مسیر از رأس v_n به رأس v_1 باشد پس رابطه تقارنی است.

حال سه رأس v ، u و w ، به‌طوری‌که $v\neq u\neq w$ ، را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم α مسیری ازرأس v به رأس u و β مسیری از u به w باشد پس انتهای مسیر α=u= ابتدای مسیر β، بنابراین مسیر α را می‌توان با مسیر β ادامه داد پس مسیری از v به w به دست می‌آید پس رابطه تعدی است.



ب) منظور از یک کلاس هم‌ارزی مجموعه رئوس است که بین هر دو رأس متمایز آن مسیری وجود دارد. برای نشان دادن هر کلاس یک عضو

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

را به عنوان نماینده داخل کروشه قرار می‌دهیم.

$\{a , b\}=[a]=[d]$

$\{b , c , e\}=[b]=[c]=[e]$

پس افراز حاصل به صورت مقابل است: $E=\{\{a , d\},\{b , c , e\}\}$

پ) در گراف شکل ۶ چون بین هر دو رأس حداقل یک مسیر وجود دارد پس یک کلاس هم‌ارزی به صورت زیر داریم:

$[a_1]=\{a_1,a_2,a_3,a_4,b_1,b_2,b_3,b_4,b_5\}$

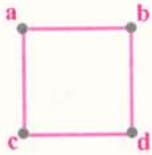
در گراف شکل (۱۰) سه کلاس هم‌ارزی به صورت زیر وجود دارد:

$[v_1]=\{v_1,v_2,v_3\},[v_4]=\{v_4\},[v_5]=\{v_5\}$

پس افراز حاصل به صورت زیر است: $E=\{\{v_1,v_2,v_3\},\{v_4\},\{v_5\}\}$

فصل ۳ درخت و ماتریس

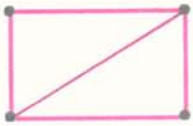
تمرین (صفحه‌ی ۲۱)



۱ـ گراف همبندی معرفی کنید که مجموع مرتبه واندازهٔ آن ۸ باشد.

$p=4 , q=4$

$p+q=8$



۲ـ گراف همبندی معرفی کنید که حاصلضرب مرتبه واندازهٔ آن ۲۰ باشد.

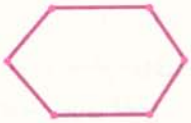
$p=4 , q=5$

$p.q=20$

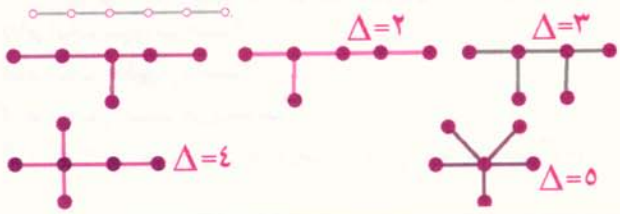
۳ـ فرض کنید ماکسیمم درجه یک درخت T برابر با k باشد. ثابت کنید که T دست کم k رأس از درجهٔ یک دارد.

فرض میکنیم رأس v از درخت T از درجه k باشد پس k یال از این رأس عبور می‌کند. حال با شروع از رأس v و انتخاب یالی از درخت T که از v می‌گذرد مسیری چون p را می‌پیماییم که هر بار پس از رسیدن به رأس جدید، یالی از T را در پیش می‌گیریم‌که از آن رأس بگذرد، قبلاً مورد استفاده قرار نگرفته باشد و انتهای دیگر آن رأسی جدید باشد این روند حتماً در یک رأس از درجه یک متوقف می‌شود. زیرا در غیر این صورت دوری در T بوجود می‌آید که با درخت بودن T در تناقض است. این عمل را می‌توان k بار وهر بار از یکی از یال‌های رأس v شروع می‌کنیم. پس حداقل به k رأس از درجه یک می‌رسیم پس درخت T حداقل k رأس از درجه یک دارد.

۴ـ گرافی از مرتبه ۶ و اندازه ۶ معرفی کنید که ۲- منتظم باشد.



۵ـ تمام درخت‌های ازمرتبه ۶ را رسم کنید.



www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

را به عنوان نماینده داخل کروشه قرار می‌دهیم.

$\{a , b\}=[a]=[d]$

$\{b , c , e\}=[b]=[c]=[e]$

پس افراز حاصل به صورت مقابل است: $E=\{\{a , d\},\{b , c , e\}\}$

پ) در گراف شکل ۶ چون بین هر دو رأس حداقل یک مسیر وجود دارد پس یک کلاس هم‌ارزی به صورت زیر داریم:

$[a_1]=\{a_1,a_2,a_3,a_4,b_1,b_2,b_3,b_4,b_5\}$

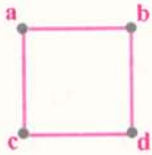
در گراف شکل (۱۰) سه کلاس هم‌ارزی به صورت زیر وجود دارد:

$[v_1]=\{v_1,v_2,v_3\},[v_4]=\{v_4\},[v_5]=\{v_5\}$

پس افراز حاصل به صورت زیر است: $E=\{\{v_1,v_2,v_3\},\{v_4\},\{v_5\}\}$

فصل ۳ درخت و ماتریس

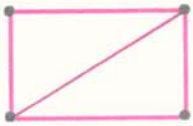
تمرین (صفحه‌ی ۲۱)



۱ـ گراف همبندی معرفی کنید که مجموع مرتبه واندازهٔ آن ۸ باشد.

$p=4 , q=4$

$p+q=8$



۲ـ گراف همبندی معرفی کنید که حاصلضرب مرتبه واندازهٔ آن ۲۰ باشد.

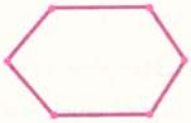
$p=4 , q=5$

$p.q=20$

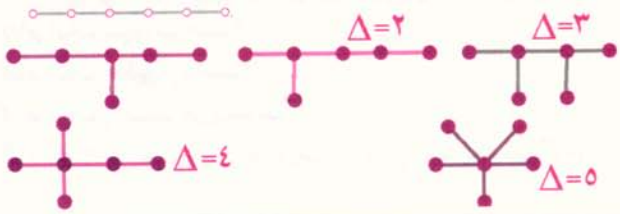
۳ـ فرض کنید ماکسیمم درجه یک درخت T برابر با k باشد. ثابت کنید که T دست کم k رأس از درجهٔ یک دارد.

فرض میکنیم رأس v از درخت T از درجه k باشد پس k یال از این رأس عبور می‌کند. حال با شروع از رأس v و انتخاب یالی از درخت T که از v می‌گذرد مسیری چون p را می‌پیماییم که هر بار پس از رسیدن به رأس جدید، یالی از T را در پیش می‌گیریم‌که از آن رأس بگذرد، قبلاً مورد استفاده قرار نگرفته باشد و انتهای دیگر آن رأسی جدید باشد این روند حتماً در یک رأس از درجه یک متوقف می‌شود. زیرا در غیر این صورت دوری در T بوجود می‌آید که با درخت بودن T در تناقض است. این عمل را می‌توان k بار وهر بار از یکی از یال‌های رأس v شروع می‌کنیم. پس حداقل به k رأس از درجه یک می‌رسیم پس درخت T حداقل k رأس از درجه یک دارد.

۴ـ گرافی از مرتبه ۶ و اندازه ۶ معرفی کنید که ۲- منتظم باشد.



۵ـ تمام درخت‌های ازمرتبه ۶ را رسم کنید.

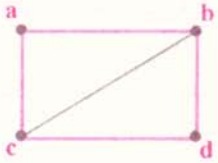


www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۶ـ دو ماتریس M_1 و M_2 به صورت زیر داده شده‌اند.

$$M_2=\begin{bmatrix}0&1&1&0\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\0&1&1&0\end{bmatrix},M_1=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}$$

آن را که معرف یک گراف است مشخص کنید و نمودار آن را بکشید.



ماتریس M_1 چون متقارن نیست پس معرف یک گراف نیست ولی ماتریس M_2 معرف یک گراف است و نمودار آن به صورت زیر است:

۷ـ اگر ماتریس مجاورت گراف K_p ، $p\in N$ ، را با M نمایش دهیم نشان دهید هر درایه واقع بر روی قطر اصلی ماتریس M^2 برابر با $p-1$ است. چون K_p گراف کامل است پس تمام رئوس بهم متصل‌اند. ماتریس مجاورت گراف K_p را با M نمایش می‌دهیم. M یک ماتریس متقارن $p\times p$ است که درایه‌های روی قطر اصلی صفر و بقیه درایه‌ها برابر یک هستند.

حال ماتریس M^2 راتشکیل می‌دهیم. برای به دست آوردن درایه a_{ii} از ماتریس M^2 باید سطر i ام ماتریس M رادر ستون i ام ماتریس M ضرب کنیم. چون ماتریس M متقارن است پس ستون i ام همان سطر i ام است. پس درایه a_{ii} مساوی جمع مربعات درایه‌های سطر i ام است و چون یکی از درایه‌های که روی قطر اصلی قرار دارد صفر و بقیه مساوی یک هستند پس حاصل برابر $(p-1)$ است. به طور مختصر داریم:

سطر i ام ماتریس A را $(v_{i1},v_{i2},\dots,v_{ip})$ و ستون i ام ماتریس A را $\begin{bmatrix}v_{1i}\\v_{2i}\\\vdots\\v_{pi}\end{bmatrix}$ قرار داده داریم:

$$a_{ii}=\left[v_{i1},v_{i2},\dots,v_{ip}\right]\times\begin{bmatrix}v_{1i}\\v_{2i}\\\vdots\\v_{pi}\end{bmatrix}=\left[v_{i1},v_{i2},\dots,v_{ip}\right]\times\begin{bmatrix}v_{i1}\\v_{i2}\\\vdots\\v_{ip}\end{bmatrix}=v_{i1}^2+v_{i2}^2+\dots+v_{ip}^2$$

$$=1+1+\dots+1+0+1+1\dots+1=p-1$$

۸ـ الف) قضیه یک را با استقراء روی مرتبه یک درخت وبا به کار بردن قضیه ۲ ثابت کنید.

ب) اثباتی را که درمتن برای قضیه ۱ ارائه شده است با اثباتی که طبق بند «الف»، این تمرین به دست می‌آید مقایسه کنید وبا ذکر دلیل به پرسش‌های زیر پاسخ دهید:

ـ کدام اثبات شهودیتر است؟

ـ کدام اثبات «دقیق‌تر» است؟

ـ کدام اثبات را بیشتر می‌پسندید؟

قضیه ۱: بین هر دو رأس هر درخت مفروض دقیقاً یک مسیر وجود دارد.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

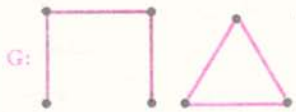
فرض می‌کنیم مرتبه درخت برابر است با $p=1$. دراین صورت تنهادارای یک رأس مانند v است و بین رأس v و خودش یک مسیر به طول صفر وجود دارد پس حکم به ازای $p=1$ برقرار است.

حال فرض می‌کنیم در درختی با مرتبه $p=k$ بین هر دو رأس آن دقیقاً یک مسیر وجود داشته باشد سپس ثابت می‌کنیم که بین هر دو رأس درختی بامرتبه $p=k+1$ نیز دقیقاً یک مسیر وجود دارد.

طبق قضیه ۲ داریم که درخت T با مرتبه $p=k+1$ حداقل دو رأس از درجه یک دارد فرض می‌کنیم یکی از رأس‌های درجه یک v باشد حال این رأس و یال مربوط به آن را حذف می‌کنیم دراین صورت درخت T' با $p=k$ رأس به دست می‌آید که طبق فرض استقراء بین هر دو رأس آن دقیقاً یک مسیر وجود دارد حال رأس v و یال مربوط به آن را به T' اضافه می‌کنیم به‌طوری‌که رأس v به رأس u وصل باشد واضح است که بین رأس v و هر رأس دیگر درخت T' مسیری وجود دارد که از رأس u عبور می‌کند و بلافاصله به رأس v وصل می‌شود و اگر بین رئوس درخت T' و رأس v بیش از یک مسیر وجود داشته باشد آن‌گاه بین آن رئوس و رأس u نیز بیش از یک مسیر وجود دارد که با این فرض استقراء در تناقض است پس بین هر دو رأس درخت با $p=k+1$ رأس دقیقاً یک مسیر وجود دارد پس با استقراء ثابت شدکه بین هر دو رأس یک درخت دقیقاً یک مسیر وجود دارد.

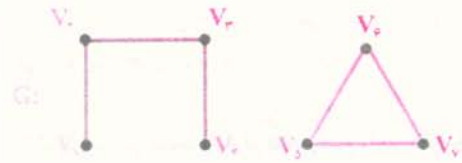
ب) اثبات کتاب شهودی‌تر است ولی این اثبات دقیق‌تر است.

۹ـ الف) در شکل زیر یک گراف ناهمبند G رسم شده است. رأس‌های G را با v_1 ، v_2 ، v_3 ، v_4 ، v_5 ، v_6 و v_7 چنان برچسب بزنید که ناهمبند بودن G در ماتریس مجاورت آن آشکار باشد.



ب) اگر این فکر را در مورد یک گراف ناهمبند دلخواه G به کار بریم ماتریس مجاورتش چه صورتی خواهد داشت؟

الف)



$$\begin{array}{c|ccccccc} & V_1 & V_2 & V_3 & V_4 & V_5 & V_6 & V_7 \\ \hline V_1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ V_2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ V_3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ V_4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ V_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ V_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ V_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

ب) ماتریس مجاورت گراف ناهمبند دلخواه G به صورت زیر است:

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$$

به طوری که A_{11} و A_{21} زیر ماتریس‌های، ماتریس مجاورت A است.

در واقع به تعداد بخش‌های گراف یعنی تعداد مؤلفه‌های ناهمبندی در گراف G بلوک‌های صفر در ماتریس مجاورت آن دیده می‌شود.

۱۰ـ الف) با توجه به تعریف ماتریس مجاورت گراف (ساده) ماتریس مجاورت گراف جهت‌دار را تعریف کنید.

ب) ماتریس مجاورت گراف جهت‌دار شکل ۴ از فصل ۱ را بنویسید.

ماتریس مجاورت گراف جهت‌دار را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A=(a_{ij})_{n\times n}: a_{ij}=\begin{cases} 1 & \text{جهت یال از رأس } v_i \text{ به رأس } v_j \text{ باشد} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

ویژگی‌های ماتریس مجاورت گراف جهت‌دار:

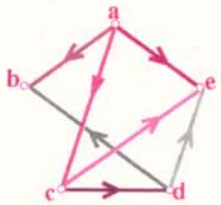
www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱ـ لزوماً ماتریس A متقارن نیست.

۲ـ مجموع درایه‌های هر ستون مانند j برابر است با تعداد یال‌هایی که جهت آن‌ها به طرف رأس v_j است.

۳ـ مجموع درایه‌های هر سطر مانند i برابر است با تعداد یال‌هایی که جهت آن‌ها از طرف رأس v_i به خارج است.

ب)



$$\begin{array}{c|ccccc} & a & b & c & d & e \\ \hline a & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ d & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ e & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

۱۱ـ گراف همبند G داده شده است. اگر $u,v\in V(G)$ ، فاصله u از v در G که با $d(u , v)$ نمایش داده شده است برابر است با طول کوتاه‌ترین مسیر از u به v در G . نشان دهید:

الف) $d(u , v)=0$ **اگر وتنها اگر** $u=v$

ب) به ازای هر $u,v\in V(G)$ **داریم** $d(u , v)=d(v , u)$

پ) به ازای هر $u, v,w\in V(G)$ **داریم** $d(u , w)\le d(u,v)+d(v,w)$

الف) بین هر رأس و خودش مسیری به طول صفر وجود دارد پس اگر $u=v$ آن‌گاه $d(u , v)=0$ و بالعکس اگر $d(u , v)=0$ در این صورت در مسیر u به v یالی وجود ندارد پس رأس u بر رأس v منطبق است.

ب) فرض می‌کنیم طول کوتاه‌ترین مسیر، از رأس u به v برابر با k باشد در این صورت طول کوتاه‌ترین مسیر از v به u نیز برابر با k است و نمی‌توان مسیری به طول کمتر از k از رأس v به u یافت زیرا در این صورت از همان مسیر می‌توان از رأس u به v رسید که این با فرض در تناقض است پس $d(u , v)=d(v , u)$

پ) فرض می‌کنیم $d(u , v)=k$ و $d(v , w)=l$ ، اگر از رأس u به رأس v مسیری به طول k را طی کنیم و سپس از رأس v به رأس w مسیری به طول l را طی کنیم و این دو مسیر یال مشترک نداشته باشند طول مسیر طی شده برابر با $k+k'$ می‌باشد پس طول کوتاه‌ترین مسیر از رأس u به رأس v بیشتر از $k+k'$ نمی‌تواند باشد. پس:

$d(u,w)\le d(u,v)+d(v,w)$

۱۲ـ گراف زیر موسوم به گراف پترسن را در نظر بگیرید.

الف) در این گراف دوری مشخص کنید که طول آن هر یک از اعداد ۵ و ۶ و ۸ و ۹ باشد.

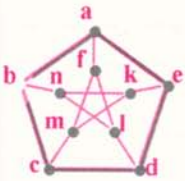
ب) آیا این گراف همیلتنی است؟ چرا؟

الف) دور به طول (۵) : a , b , c , d , e

دور به طول (۶) : b , n , k , e , d , c , b

دور به طول (۸) : a , e , d , c , b , n , l , f , a

دور به طول (۹) : a , e , d , c , b , n , k , m , f , a



ب) خیر، زیرا در این گراف ۱۰ رأس وجود دارد در صورتی که فاقد دوری به طول ۱۰ است.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

فصل ۴ کلیّات و تقسیم‌پذیری

تمرین (صفحه‌ی ۳۵)

۱ـ کوچکترین و بزرگترین عضو مجموعه‌های زیر را در صورت وجود پیدا کنید:

الف) $A=\{x\in \mathbb{Z} : 0\le x<5\}$

ب) $C=\{x\in \mathbb{Z} : 0<x\le 1\}$

پ) $E=\{x\in \mathbb{Z} : 0\le x<1\}$

(بزرگترین عضو مجموعه S عبارت است از $s_1\in S$ که برای هر $s\in S$ داشته باشیم $s\le s_1$)

الف) بزرگترین عضو =۴ ، کوچکترین عضو =۰

ب) بزرگترین عضو =۱ ، کوچکترین عضو =۱

پ) بزرگترین عضو =۰ ، کوچکترین عضو =۰

۲ـ زیرمجموعه‌ای از اعدادصحیح مثال بزنید که کوچکترنی عضو نداشته باشد.

$A=\{x\in \mathbb{Z} : x<2\}$

۳ـ ثابت کنید که هر مجموعه ناتهی از اعداد صحیح و ازپایین کراندار، دارای کوچکترین عضو و هر مجموعه ناتهی از اعداد صحیح و از بالا کراندار دارای بزرگترین عضو است.

(یادآوری می‌کنیم که $A\subset \mathbb{Z}$ از بالا کراندار است اگر عددی مانند $n\in \mathbb{Z}$ یافت شود که به ازای هر $a\in A$ ، $a\le n$ و همچنین $A\subset \mathbb{Z}$ از پایین کراندار است اگر عددی مانند $n\in \mathbb{Z}$ یافت شود که برای هر $a\in A$ ، $n\le a$)

فرض کنید A یک مجموعه ناتهی از اعداد صحیح و a یک کران پایین صحیح برای A باشد. پس به ازای هر x متعلق به A داریم: $a\le x\Rightarrow a<x+1\Rightarrow (x+1)-a>0$

حال مجموعه روبرو را در نظر می‌گیریم: $B=\{y:y=(x+1)-a, x\in A\}$

پس B زیرمجموعه‌ای ناتهی از اعداد طبیعی بوده پس طبق اصل خوش ترتیبی دارای عضو ابتدایی مانند $y_0=(x_0+1)-a$ است. پس به ازاء هر $y=(x+1)-a$ متعلق به مجموعه B داریم:

پس x_0 عضو ابتدای مجموعه A است. $y_0\le y\Rightarrow (x_0+1)-a\le (x+1)-a\Rightarrow x_0\le x$

ب) فرض کنید A یک مجموعه ناتهی از اعداد صحیح و b یک کران بالای صحیح برای A باشد. پس به ازای هر x متعلق به مجموعه A داریم: $x\le b\Rightarrow x<b+1\Rightarrow b+1-x>0$

حال مجموعه روبرو را درنظر می‌گیریم: $B:\{y:y=b+1-x; x\in A\}$

پس B زیرمجموعه‌ای ناتهی از اعداد طبیعی بوده پس طبق اصل خوش ترتیبی دارای عضو ابتدایی مانند $y_0=b+1-x_0$ است. پس به ازاء هر $y=b+1-x$ متعلق به مجموعه B داریم:

پس x_0 عضو انتهای مجموعه A است. $y_0\le y\Rightarrow b+1-x_0\le b+1-x\Rightarrow x\le x_0$

۴ـ خاصیت ارشمیدسی:

ثابت کنید اگر a و b دوعدد طبیعی باشند، آن‌گاه یک عدد طبیعی n وجود دارد به طوری که $na\ge b$

فرض خلف: فرض می‌کنیم دو عدد طبیعی a و b یافت شوند به طوری که به ازاء هر عدد طبیعی n داشته باشیم $na<b$ پس $b-na>0$. حال مجموعه زیر را در نظر می‌گیریم: $A=\{b-na : n\in N\}$

A زیرمجموعه ناتهی از اعداد طبیعی است پس طبق اصل خوش ترتیبی دارای عضو ابتدا است. حال فرض می‌کنیم

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$b-n_{\circ}a$ عضو ابتدای A باشد. پس به ازاء هر $b-na$ متعلق به A داریم: $b-n_{\circ}a<b-na \Rightarrow na\le n_{\circ}a \Rightarrow n\le n_{\circ}$

پس $n_{\circ}$ باید عضو انتهای مجموعه اعداد طبیعی باشد زیرا به ازاء هر عدد طبیعی n داریم $n\le n_{\circ}$

در حالی که مجموعه اعدادطبیعی دارای عضو انتها نیست، پس به تناقض رسیدیم و حکم ثابت شد. یعنی به ازاء هر دو عدد طبیعی a و b ، عدد طبیعی n یافت می‌شود که $na\ge b$

راه دوم: چون a عددی طبیعی است پس $a\ge ۱$ و چون b هم متعلق به اعداد طبیعی است پس عددی مثبت است پس با ضرب طرفین نامساوی $a\ge ۱$ در b داریم: $ab\ge b$

حال اگر قرار دهیم $n=b$ داریم $na\ge b$ پس یک n می‌تواند خود b باشد.

۵ـ ثابت کنید $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ برای اعداد طبیعی n و $\circ\le k\le n$ ، همیشه عددی طبیعی است.

با استفاده از استقرای ریاضی داریم:

$$p(۱):\begin{bmatrix} ۱ \\ k \end{bmatrix}=\begin{cases}\begin{bmatrix} ۱ \\ \circ \end{bmatrix}=۱\in \\ \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}=۱\in\end{cases} \Rightarrow$$ حکم برای $p(۱)$ درست است.

$p(n):\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}\in$: فرض استقراء: $\circ\le k\le n$

$p(n+۱):\begin{bmatrix} n+۱ \\ k \end{bmatrix}\in$: حکم استقراء: $\circ\le k\le n+۱$

براساس قانون پاسکال $\begin{bmatrix} n+۱ \\ k \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} n \\ k-۱ \end{bmatrix}$ ، طبق فرض استقراءد داریم که $\begin{bmatrix} n \\ k-۱ \end{bmatrix}\in$ و $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ پس $\begin{bmatrix} n+۱ \\ k \end{bmatrix}\in$ پس طبق فرض استقراء، $p(n)$ به ازای هر عدد طبیعی n درست است.

۶ـ الف) برای $n\ge ۲$ ، ثابت کنید: $\begin{bmatrix} ۲ \\ ۲ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \end{bmatrix}+...+\begin{bmatrix} n \\ ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} n+۱ \\ ۳ \end{bmatrix}$

با استفاده از قسمت الف و این که برای هر عدد طبیعی $m\ge ۲$ ، $۲\begin{bmatrix} m \\ ۲ \end{bmatrix}+m=m^{۲}$

ثابت کنید که $۱^{۲}+۲^{۲}+...+n^{۲}=\dfrac{n(۲n+۱)(n+۱)}{۶}$

با استفاده از استقراء ریاضی ثابت می‌کنیم:

P_n: $\begin{bmatrix} ۲ \\ ۲ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \end{bmatrix}+...+\begin{bmatrix} n \\ ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} n+۱ \\ ۳ \end{bmatrix}$

$P_{۲}$ درست است : $\begin{bmatrix} ۲ \\ ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \end{bmatrix}\Rightarrow ۱=۱$

فرض استقراء P_k : $\begin{bmatrix} ۲ \\ ۲ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \end{bmatrix}+...+\begin{bmatrix} k \\ ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} k+۱ \\ ۳ \end{bmatrix}$

حکم استقراء $P_{k+۱}$: $\begin{bmatrix} ۲ \\ ۲ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \end{bmatrix}+...+\begin{bmatrix} k+۱ \\ ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} k+۲ \\ ۳ \end{bmatrix}$

با توجه به فرض استقراء داریم: $\begin{bmatrix} ۲ \\ ۲ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \end{bmatrix}+...+\begin{bmatrix} k \\ ۲ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} k+۱ \\ ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} k+۱ \\ ۳ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} k+۱ \\ ۲ \end{bmatrix}$

$$=\frac{(k+۱)!}{۳!(k-۲)!}+\frac{(k+۱)!}{۲!(k-۱)!}=\frac{(k-۱)(k+۱)!+۳(k+۱)!}{۳!(k-۱)!}=\frac{(k+۱)!(k-۱+۳)}{۳!(k-۱)!}=\frac{(k+۱)!(k+۲)}{۳!(k-۱)!}$$

$$=\frac{(k+۲)!}{۳!(k-۱)!}=\begin{bmatrix} k+۲ \\ ۳ \end{bmatrix}$$

پس طبق قضیه استقرای ریاضی به ازای هر عدد طبیعی $n\ge ۲$ ، P_n درست است.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

ب) با استفاده از $m^2=2\binom{m}{2}+m$ برای هر عدد طبیعی $m\geq 2$، داریم:

$$2^2=2\binom{2}{2}+2,\ 3^2=2\binom{3}{2}+3,\ldots,n^2=2\binom{n}{2}+n$$

داریم:

$$2^2+3^2+\ldots+n^2=2\binom{2}{2}+2+2\binom{3}{2}+3+\ldots+2\binom{n}{2}+n$$

$$=2\left[\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\ldots+\binom{n}{2}\right]+(2+3+\ldots+n)$$

با استفاده از قسمت الف داریم:

$$\Rightarrow 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=2\binom{n+1}{3}+(1+2+\ldots+n)$$

$$\Rightarrow 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=2\times\frac{(n+1)!}{3!(n-2)!}+\frac{n(n+1)}{2}$$

$$\Rightarrow 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=2\times\frac{(n+1)n(n-1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}$$

$$\Rightarrow 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=2\times\frac{(n+1)n(n-1)+3n(n+1)}{6}+\frac{n(n+1)(2n-2+3)}{6}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

۷ـ کدام‌یک از اعداد زیر بر ۲۲ تقسیم‌پذیرند؟

الف) ۰ **ب)** ۴۴۴

پ) ۱۷۱۶ **ت)** ۳۲۵۱۶ـ

عددی بر ۲۲ تقسیم‌پذیر است که هم بر ۲ و هم بر ۱۱ تقسیم‌پذیر باشد که فقط عدد ۴۴۴ این ویژگی را ندارد پس اعداد ۰ و ۱۷۱۶ و ۳۲۵۱۶ـ بر ۲۲ تقسیم‌پذیرند.

۸ـ الف) اگر a، b، c و d اعداد صحیح باشند و $a\neq 0$، $c\neq 0$، $a|b$ و $c|d$ ثابت کنید $ac|bd$.

ب) نشان دهید اگر a و b و $c\neq 0$ اعداد صحیح باشند آن‌گاه $a|b$ اگر و تنها اگر $ac|bc$.

ج) ثابت کنید اگر برای هر $i=1,2,\ldots,n$، $a\mid b_i$، آن‌گاه برای اعداد صحیح دلخواه $m_1,m_2,\ldots,m_n$ داریم:

$$a\mid m_1b_1+m_2b_2+\ldots+m_nb_n$$

الف)

$$\left.\begin{array}{l} a|b\Rightarrow\exists q\in\ :b=aq \\ c|d\Rightarrow\exists q'\in\ :d=cq' \end{array}\right\}\Rightarrow bd=ac(qq');(qq')\in$$

$$\Rightarrow ac|bd$$

ب)

$$a|b\Leftrightarrow\exists q\in\ :b=aq\overset{c\neq 0}{\Leftrightarrow} bc=(ac)q:q\in\ \Leftrightarrow ac|bc$$

ج)

$$a\mid b_1,a\mid b_2,\ldots,a\mid b_n\Rightarrow a\mid m_1b_1,a\mid m_2b_2,\ldots,a\mid m_nb_n$$

$$\Rightarrow a\mid m_1b_1+m_2b_2+\ldots+m_nb_n$$

۹ـ خارج قسمت و باقیمانده رادرالگوریتم تقسیم هر یک از اعداد زیر، وقتی که بر ۱۷ تقسیم شوند به دست آورید.

الف) ۱۰۰ **ب)** ۴۴ـ

الف)

$$100=17\times 5+15\Rightarrow q=5,r=15$$

ب)

$$-44=17\times(-3)+7\Rightarrow q=-3,r=7$$

۱۰ـ الف) ثابت کنید حاصل‌جمع دو عدد صحیح زوج و هم‌چنین حاصل جمع دو عدد صحیح فرد، زوج است.

ب) ثابت کنید حاصلضرب دو عدد فرد، فرد است.

الف) فرض کنید a و b دو عدد صحیح زوج باشند، داریم:

$$a=2k,k\in$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$b=2k', k'\in$

$\Rightarrow a+b=2k+2k'=2(k+k'), k+k'\in$

پس مجموع دو عدد زوج، زوج است.

فرض کنید a و b دو عدد صحیح فرد باشند، داریم:

$a=2k+1, k\in$

$b=2k'+1, k'\in$

$\Rightarrow a+b=2k+1+2k'+1=2(k+k'+1),(k+k'+1)\in$

پس مجموع دو عدد فرد، فرد است.

ب) فرض کنید a و b دو عدد صحیح فرد باشند، داریم:

$a=2k+1, k\in$

$b=2k'+1, k'\in$

$\Rightarrow ab=(2k+1).(2k'+1)=4kk'+2k+2k'+1=2(2kk'+k+k')+1$

به‌طوری‌که $2kk'+k+k'\in$ پس ab فرد است.

۱۱ـ الف) ثابت کنید حاصل ضرب هر دو عدد به صورت ۴q+۱ و هم‌چنین حاصلضرب هر دو عدد به صورت ۴q+۳، بصورت ۴q+۱ است. ($q\in$)

ب) ثابت کنید مربع هر عدد فرد به صورت ۸q+۱ است.

الف) فرض می‌کنیم $a=4q+1 : q\in$ و $a=4q'+1 : q'\in$ داریم:

$ab=(4q+1).(4q'+1)=16qq'+4q+4q'+1=4(4qq'+q+q')+1$

قرار می‌دهیم $k=4qq'+q+q'$ پس داریم:

$ab=4k+1; k\in$

حال فرض می‌کنیم $a=4q+3 : q\in$ و $b=4q'+3 : q'\in$ داریم:

$ab=(4q+3).(4q'+3)=16qq'+12q+12q'+9=16qq'+12q+12q'+8+1$

$=4(4qq'+3q+3q'+2)+1$

قرار می‌دهیم $k=4qq'+3q+3q'+2$ پس داریم:

$ab=4k+1; k\in$

ب) فرض می‌کنیم $a=2q+1; q\in$ داریم:

$a^2=(2q+1).(2q+1)=4q^2+2q+2q+1$

$=4q^2+4q+1=4(q^2+q)+1=4\underbrace{q(q+1)}_{\text{ضرب دو عدد متوالی}}+1=4(2k)+1=8k+1, k\in$

۱۲ـ نشان دهید حاصلضرب دو عدد به صورت ۶q+۵ به صورت ۶q+۱ است.

فرض می‌کنیم $a=6q+5 : q\in$ و $b=6q'+5 : q'\in$ داریم:

$ab=(6q+5)(6q'+5)=36qq'+30q+30q'+25$

$=36qq'+30q+30q'+24+1$

$=6(6qq'+5q+5q'+4)+1$

قرار می‌دهیم: $k=6qq'+5q+5q'+4$ پس: $ab=6k+1; k\in$

۱۳ـ ثابت کنید حاصلضرب ۳ عدد طبیعی متوالی بر ۶ تقسیم‌پذیر است.

فرض می‌کنیم n+۱ و n و n−۱ ،سه عدد طبیعی متوالی باشند، داریم: $n(n-1)(n+1)=n(n^2-1)$

بنابراین:

$$\begin{cases} n=2k, k\in Z \Rightarrow n(n^2-1)=2k(n^2-1) \Rightarrow 2 \mid n(n^2-1) \\ \text{یا} \\ n=2k+1, k\in Z \Rightarrow n(n^2-1)=n(2k+1)^2-1)=n(4k^2+4k+1-1) \\ \qquad =n(4k^2+4k)=2n(2k^2+2k)\Rightarrow 2 \mid n(n^2-1) \end{cases}$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

پس همواره $۲ \mid n(n^۲-۱)$ (I)

$$\begin{cases} n=۳k, k\in Z \Rightarrow n(n^۲-۱)=۳k(n^۲-۱) \Rightarrow ۳ \mid n(n^۲-۱) \\ \text{یا} \\ n=۳k\pm۱, k\in Z \Rightarrow n(n^۲-۱)=n((۳k\pm۱)^۲-۱)=۳n(۳k^۲\pm۲k) \Rightarrow ۳ \mid n(n^۲-۱) \end{cases}$$

پس همواره $۳ \mid n(n^۲-۱)$ (II)

با توجه به روابط (I) و (II) واین که $۶=[۲ , ۳]$ پس $۶ \mid n(n^۲-۱)$

۱۴ـ الف) عدد ۲۳۶ را درمبنای ۷ بنویسید.

ب) عدد $(۱۰۰۱۰۰۱۱)_۲$ برابر چه عددی در مبنای ۱۰ است؟

پ) عدد ۱۸۶۴ رادر مبنای ۲ بنویسید.

ت) عدد $(a۳۵b۰۶)_{۱۶}$ را در مبنای ۱۰ بنویسید.

(دقت کنید که اگر مبنا بیشتر از ۱۰ باشد، ارقام بیشتر از ۹ را به ترتیب با a ، b ، c ، d و... نمایش می‌دهند، یعنی مثلاً در مبنای ۱۶، a=۱۰ ، b=۱۱ ، c=۱۲ ، d=۱۳ ، e=۱۴ و f=۱۵. البته گاهی هم عدد بالا را با $(۱۰۳۵۱۱۰۶)_{۱۶}$ هم نمایش می‌دهند.)

الف)

$۲۳۶=۷\times۳۳+۵\Rightarrow a_۰=۵$

$۳۳=۷\times۴+۵\Rightarrow a_۱=۵$

$۴=۷\times۰+۴\Rightarrow a_۲=۴$

ب)

$(۱۰۰۱۰۰۱۱)_۲=۱\times۲^۰+۱\times۲^۱+۰\times۲^۲+۰\times۲^۳+۱\times۲^۴+۰\times۲^۵+۰\times۲^۶+۱\times۲^۷$

$=۱+۲+۱۶+۱۲۸=۱۴۷$

پ)

$۱۸۶۴=۲\times۹۳۲+۰\Rightarrow a_۰=۰$

$۹۳۲=۲\times۴۶۶+۰\Rightarrow a_۱=۰$

$۴۶۶=۲\times۲۳۳+۰\Rightarrow a_۲=۰$

$۲۳۳=۲\times۱۱۶+۱\Rightarrow a_۳=۱$

$۱۱۶=۲\times۵۸+۰\Rightarrow a_۴=۰$

$۵۸=۲\times۲۹+۰\Rightarrow a_۵=۰$

$۲۹=۲\times۱۴+۱\Rightarrow a_۶=۱$

$۱۴=۲\times۷+۰\Rightarrow a_۷=۰$

$۷=۲\times۳+۱\Rightarrow a_۸=۱$

$۳=۲\times۱+۱\Rightarrow a_۹=۱$

$۱=۲\times۰+۱\Rightarrow a_{۱۰}=۱$

$\Rightarrow ۱۸۶۴=(a_{۱۰}a_۹...a_۱a_۰)_۲=(۱۱۱۰۱۰۰۱۰۰۰)_۲$

ت)

$(a۳۵b۰۶)_{۱۶}=۶\times۱۶^۰+۰\times۱۶^۱+b\times۱۶^۲+۵\times۱۶^۳+۳\times۱۶^۴+a\times۱۶^۵$

$=۶\times۰+۱۱\times۱۶^۲+۵\times۱۶^۳+۳\times۱۶^۴+۱۰\times۱۶^۵$

$=۶+۲۸۱۶+۲۰۴۸+۱۹۶۶۰۸+۹۴۸۵۷۶۰=۹۶۸۷۲۳۸$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

فصل ۵ اعداد اول

تمرین (صفحه‌ی ۴۷)

۱ـ کدام‌یک از اعداد زیر اول و کدام یک مرکب‌اند؟

الف) ۱ ب) ۷۳۷

پ) ۱۸۹۱ ت) ۲۰۷۹۱

الف) عدد ۱ نه اول است و نه مرکب است.

ب) چون $\sqrt{۷۳۷} < ۲۷$ باید تحقیق نموداین عدد بر اعداد اول کوچکتر از ۲۷ بخش‌پذیر است یاخیر.
که دراین تحقیق به این نتیجه می‌رسیم که ۷۳۷ بر ۱۱ بخش‌پذیر است پس عددی مرکب است.

پ) چون $\sqrt{۱۸۹۱} < ۴۴$ ، باید تحقیق نمود که این عدد بر اعداد اول کوچکتر از ۴۴ بخش‌پذیر است یا خیر.
که در این تحقیق به این نتیجه می‌رسیم که ۱۸۹۱ بر ۳۱ بخش‌پذیر است پس عددی مرکب است.

ت) چون $\sqrt{۲۰۷۹۱} < ۱۴۵$ ، باید تحقیق نمودکه این عدد بر اعداداول کوچکتر از ۱۴۵ بخش‌پذیر است یا خیر.
که چون بر ۱۷ بخش‌پذیر است پس عددی مرکب است.

۲ـ ثابت کنید بی‌نهایت عدد اول به صورت $۴q+۳$ یافت می‌شود.

فرض می‌کنیم a عدد طبیعی دلخواهی باشد طبق قضیه تقسیم داریم: $q=۴q+r\,;r=۰,۱,۲,۳$

پس a به یکی از چهار حالت زیر می‌تواند باشد:

$a=۴q\ ,\ a=۴q+۱\ ,\ a=۴q+۲\ ,\ a=۴q+۳$

به‌طوری‌که: $q\geq ۰$

واضح است که $a=۴q$ عدد اول نیست هم‌چنین $a=۴q+۲$ تنها به ازای $q=۰$ عددی اول است.

پس هر عدد طبیعی فرد به صورت $a=۴q+۱$ یا $a=۴q+۳$ است. یعنی هر عدد اول فرد به صورت $a=۴q+۱$ یا $a=۴q+۳$ است. ازطرفی می‌دانیم که تعداد نامتناهی عدد اول وجود دارد.

فرض می‌کنیم که مجموعه اعداد اول به صورت $۴q+۳$ یک مجموعه متناهی به صورت $\{P_۱=۴q_۱+۳,...,P_n=۴q_n+۳\}$ باشد. عدد $x=۴(P_۱P_۲...P_n)+۳$ را در نظر گرفته و نشان می‌دهیم که x دارای عامل اولی به صورت $P=۴q+۳$ است به طوری که P مخالف $P_۱,P_۲,...,P_k,۳$ می‌باشد.

طبق قضیه بنیادی حساب x را می‌توان به عوامل اول تجزیه کرد. تمام عوامل اول x نمی‌توانند به صورت $۴q+۱$ باشند، زیرا دراین صورت خود x به صورت $۴q+۱$ درمی‌آید، پس x حداقل دارای یک عامل اول به صورت $P=۴q+۳$ است قرار می‌دهیم $P=P_i\,(۱\leq i\leq n)$ آن‌گاه داریم:

$P\mid x\,,p\mid ۴(P_۱P_۲...P_n)\Rightarrow P\mid x-۴(P_۱P_۲...P_n)\Rightarrow P\mid ۳$

که این نتیجه نادرست است.

حال اگر $P=۳$ باشد، آن‌گاه: $P\mid x\,,p\mid ۳\Rightarrow P\mid x-۳\Rightarrow P\mid ۴(P_۱P_۲...P_n)$

چون $P=۳$ و $(۳,۴)=۱$ طبق لم اقلیدس $P\mid P_۱P_۲...P_n$ یا $P\mid P_۱P_۲...P_n$ که در این صورت $P_n=۳$ یا ... یا $P_۲=۳$ یا $P_۱=۳$ که این نیز نادرست است پس عدد اول دیگری به جز ۳ و $P_۱,P_۲,...,P_n$ به صورت $۴q+۳$ به دست می‌آید، پس بی‌نهایت عدد اول به صورت $۴q+۳$ وجود دارد.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۳ـ اعداد زیر را به عوامل اول تجزیه کنید.

الف) ۹۵۵۵ **ب)** ۹۹۷۳ـ

پ) ۳۷۴۲۳ **ت)** ۲۸۰۰۰

الف) $۹۵۵۵=۳\times۵\times۷^{۲}\times۱۳$

ب) ۹۹۷۳ـ عددی اول است.

پ) ۳۷۴۲۳ عددی اول است.

ت) $۲۸۰۰۰=۲^{۵}\times۵^{۳}\times۷$

۴ـ نشان دهید که هر عدد طبیعی بزرگتر از ۱ را می‌توان به صورت حاصلضرب یک مربع کامل و یک عدد صحیح و بدون عامل مربع به جز ۱ (یعنی عددی که بر هیچ عدد مربعی جز ۱ قابل قسمت نباشد) نوشت.

عدد طبیعی $n\geq۱$ را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم تجزیه n به حاصل‌ضرب عوامل اول به صورت $n=P_{۱}^{\alpha_{۱}}P_{۲}^{\alpha_{۲}}...P_{r}^{\alpha_{r}}q_{۱}^{\beta_{۱}}q_{۲}^{\beta_{۲}}...q_{s}^{\beta_{s}}$ باشد که این نمایش متعارف است به طوری که در آن α_i ها زوج و β_i ها فرد باشند در این صورت عدد n را به صورت زیر می‌توان نوشت: $n=(P_{۱}^{\alpha_{۱}}P_{۲}^{\alpha_{۲}}...P_{r}^{\alpha_{r}}q_{۱}^{\beta_{۱}-۱}q_{۲}^{\beta_{۲}-۱}...q_{s}^{\beta_{s}-۱})q_{۱}.q_{۲}...q_{s}$

که در آن $P_{۱}^{\alpha_{۱}}P_{۲}^{\alpha_{۲}}...P_{r}^{\alpha_{r}}q_{۱}^{\beta_{۱}-۱}q_{۲}^{\beta_{۲}-۱}...q_{s}^{\beta_{s}-۱}$ مربع کامل بوده و $q_{۱}q_{۲}...q_{s}$ بر هیچ عدد مربعی کاملی به جز ۱ بخش‌پذیر نیست.

۵ـ اگر $p_{۱},p_{۲},...,p_{n}$ و q اعداد اول باشند و $q\mid p_{۱}p_{۲}...p_{n}$ ثابت کنید به ازای یک i ، $۱\leq i\leq n$ ، $p_i=q$

$q\mid p_{۱}p_{۲}...p_{n}\Rightarrow q\mid p_{۱}$ یا $q\mid p_{۲}$ یا ... یا $q\mid p_{n}$

فرض می‌کنیم که $q\mid p_i$ چون p_i اول است پس $q=p_i$ یا $q=۱$ است و چون q عددی اول است پس $q=p_i$

۶ـ الف) نشان دهید اگر a نسبت به b و c اول باشد، نسبت به bc هم اول خواهد بود.

ب) نشان دهید اگر a نسبت به $b_{۱},b_{۲},...,b_{n}$ اول باشد، نسبت به $b_{۱}b_{۲}...b_{n}$ هم اول خواهد بود.

الف) چون $(a\ ,\ b)=۱$ و $(a\ ,\ c)=۱$ ، اعدادرست s و r و s' و r' یافت می‌شوند به‌طوری‌که:

$$\begin{cases}ra+sb=۱\\ r'a+s'c=۱\end{cases}\xrightarrow{\text{در هم ضرب می‌کنیم}}rr'a^{۲}+rs'ac+r'sab+ss'bc=۱$$

$$\Rightarrow(rr'a+rs'c+r'sb)a+(ss')(bc)=۱\Rightarrow(a,bc)=۱$$

ب) طبق فرض مسئله داریم:

$$(a,b_{۱})=۱,(a,b_{۲})=۱,...,(a,b_{n})=۱$$

به استقراء ریاضی ثابت می‌کنیم:

$$\forall n\geq۲;(a,b_{۱}b_{۲}...b_{n})=۱$$

طبق قسمت الف، $P_{۲}$ برقرار است.

$P_{۲}$: $(a,b_{۱}b_{۲})=۱$

P_{k} فرض استقراء : $(a,b_{۱}b_{۲}...b_{k})=۱$

$P_{k+۱}$ حکم استقراء : $(a,b_{۱}b_{۲}...b_{k+۱})=۱$

طبق فرض مسئله داریم $(a,b_{k+۱})=۱$ و طبق فرض استقراء داریم: $(a,b_{۱}b_{۲}...b_{k})=۱$ پس با توجه به قسمت الف نتیجه می‌گیریم که: $(a,(b_{۱}b_{۲}...b_{k})b_{k+۱})=۱$

پس طبق استقرای ریاضی به ازاء هر عدد طبیعی $n\geq۲$ ، P_{n} درست است.

۷ـ نشان دهید اگر a و b نسبت به هم اول باشند و $c|a+b$ ، آن‌گاه c نیز نسبت به a و b اول خواهد بود.

روش اول: به برهان خلف ثابت می‌کنیم.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

فرض می‌کنیم که $d=(a\ ,\ c)$ به‌طوری‌که $d>1$ ، پس $d|c$ و $d|a$

چون طبق فرض $c|a+b$ و از طرف دیگر $d|c$ پس $d|a+b$

$d\,|a\,,d\,|a+b\Rightarrow d\,|b$

بنابراین داریم: $d\,|a\,,d\,|b\Rightarrow d\,|(a\,,b)=1\Rightarrow d\,|1$

که این نتیجه نادرست است پس به تناقض رسیده و حکم ثابت می‌شود.

روش دوم: طبق فرض چون $c|a+b$ پس $a+b=cq$: $\exists q\in$ و با توجه به این که $(a\ ,\ b)=1$ پس اعداد صحیح r و s یافت می‌شوند به‌طوری‌که:

$$ra+sb=1\Rightarrow\begin{cases}ra+s(cq-a)=1\Rightarrow(r-s)a+(sq)c=1\Rightarrow(a\,,c)=1\\ r(cq-b)+sb=1\Rightarrow(s-r)b+(rq)c=1\Rightarrow(b\,,c)=1\end{cases}$$

۸ـ الف) اگر a و b نسبت به هم اول باشند، نشان دهید که برای اعداد طبیعی n و m ، a^n و b^m هم نسبت به هم اول‌اند.

ب) اگر برای هر عدد طبیعی n ، $a^n\,|\,b^n$ ثابت کنید $a|b$

الف) با استفاده ازبرهان خلف اثبات می‌کنیم:

فرض می‌کنیم $1<d=(a^n,b^m)$ ، دراین صورت عدد اول p یافت می‌شود به طوری که $p|d$ ، پس:

$$(a^n,b^m)=d\Rightarrow d\,|\,a^n,d\,|\,b^m\xrightarrow{p|d}p\,|\,a^n,p\,|\,b^m$$

$$\Rightarrow p\,|\,\underbrace{a.a...a}_{\text{n مرتبه}}\,,p\,|\,\underbrace{b.b...b}_{\text{m مرتبه}}\xrightarrow{\text{p اول}}p\,|a\,,p\,|b$$

یعنی a و b دارای شمارنده مشترکی بزرگتر از یک هستند که این با فرض مسئله در تناقض است پس $(a^n,b^m)=1$

ب) فرض می‌کنیم $(a\ ,\ b)=d$ ، دراین صورت:

$$(\frac{a}{d},\frac{b}{d})=1\xrightarrow{\text{طبق قسمت الف}}(\frac{a^n}{d^n},\frac{b^n}{d^n})=1\Rightarrow(\frac{a^n}{d^n}\times d^n,\frac{b^n}{d^n}\times d^n)=d^n$$

$$\Rightarrow(a^n,b^n)=d^n$$

چون طبق فرض $a^n\,|\,b^n$ پس $(a^n,b^n)=|\,a^n\,|$ ، بنابراین: $d^n=|\,a^n\,|$ یا $d=|a|$

پس: $(a\,,b)=d\Rightarrow(a\,,b)=|\,a\,|\Rightarrow|\,a\,|\,|\,b\Rightarrow a\,|b$

فصل ۶ همنهشتی

تمرین (صفحه‌ی ۵۴)

۱ـ دو عدد a و b به صورت‌های زیر نوشته شده‌اند. $b=7k'-2$ و $a=7k+5$

دسته هم‌نهشتی $a+2b$ رابه پیمانه ۷ مشخص کنید.

$$a+2b=7k+5+2(7k'-2)=7k+5+14k'-4=7(k+2k')+1\Rightarrow a+2b\in[1]_7$$

۲ـ هرگاه (پیمانه m) $a\equiv b$ و d یک مقسوم علیه m باشد، نشان دهید (پیمانه d) $a\equiv b$.

با توجه به فرض مسئله، چون $d|m$ پس: $m=dq$: $\exists q\in$ در نتیجه داریم:

$$a\overset{m}{\equiv}b\Rightarrow a-b=mk,k\in\ \Rightarrow a-b=(dq)k\Rightarrow a-b=d(qk),qk\in$$

$$\Rightarrow a\overset{d}{\equiv}b$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

فرض می‌کنیم که $d=(a\ ,\ c)$ به‌طوری‌که $d>1$ ، پس $d|c$ و $d|a$

چون طبق فرض $c|a+b$ و از طرف دیگر $d|c$ پس $d|a+b$

$d\,|a\,,d\,|a+b\Rightarrow d\,|b$

بنابراین داریم: $d\,|a\,,d\,|b\Rightarrow d\,|(a\,,b)=1\Rightarrow d\,|1$

که این نتیجه نادرست است پس به تناقض رسیده و حکم ثابت می‌شود.

روش دوم: طبق فرض چون $c|a+b$ پس $a+b=cq$: $\exists q\in$ و با توجه به این که $(a\ ,\ b)=1$ پس اعداد صحیح r و s یافت می‌شوند به‌طوری‌که:

$$ra+sb=1\Rightarrow\begin{cases}ra+s(cq-a)=1\Rightarrow(r-s)a+(sq)c=1\Rightarrow(a\,,c)=1\\ r(cq-b)+sb=1\Rightarrow(s-r)b+(rq)c=1\Rightarrow(b\,,c)=1\end{cases}$$

۸ـ الف) اگر a و b نسبت به هم اول باشند، نشان دهید که برای اعداد طبیعی n و m ، a^n و b^m هم نسبت به هم اول‌اند.

ب) اگر برای هر عدد طبیعی n ، $a^n\,|\,b^n$ ثابت کنید $a|b$

الف) با استفاده ازبرهان خلف اثبات می‌کنیم:

فرض می‌کنیم $1<d=(a^n,b^m)$ ، دراین صورت عدد اول p یافت می‌شود به طوری که $p|d$ ، پس:

$$(a^n,b^m)=d\Rightarrow d\,|\,a^n,d\,|\,b^m\xrightarrow{p|d}p\,|\,a^n,p\,|\,b^m$$

$$\Rightarrow p\,|\,\underbrace{a.a...a}_{\text{n مرتبه}}\,,p\,|\,\underbrace{b.b...b}_{\text{m مرتبه}}\xrightarrow{\text{p اول}}p\,|a\,,p\,|b$$

یعنی a و b دارای شمارنده مشترکی بزرگتر از یک هستند که این با فرض مسئله در تناقض است پس $(a^n,b^m)=1$

ب) فرض می‌کنیم $(a\ ,\ b)=d$ ، دراین صورت:

$$(\frac{a}{d},\frac{b}{d})=1\xrightarrow{\text{طبق قسمت الف}}(\frac{a^n}{d^n},\frac{b^n}{d^n})=1\Rightarrow(\frac{a^n}{d^n}\times d^n,\frac{b^n}{d^n}\times d^n)=d^n$$

$$\Rightarrow(a^n,b^n)=d^n$$

چون طبق فرض $a^n\,|\,b^n$ پس $(a^n,b^n)=|\,a^n\,|$ ، بنابراین: $d^n=|\,a^n\,|$ یا $d=|a|$

پس: $(a\,,b)=d\Rightarrow(a\,,b)=|\,a\,|\Rightarrow|\,a\,|\,|\,b\Rightarrow a\,|b$

فصل ۶ همنهشتی

تمرین (صفحه‌ی ۵۴)

۱ـ دو عدد a و b به صورت‌های زیر نوشته شده‌اند. $b=7k'-2$ و $a=7k+5$

دسته هم‌نهشتی $a+2b$ رابه پیمانه ۷ مشخص کنید.

$$a+2b=7k+5+2(7k'-2)=7k+5+14k'-4=7(k+2k')+1\Rightarrow a+2b\in[1]_7$$

۲ـ هرگاه (پیمانه m) $a\equiv b$ و d یک مقسوم علیه m باشد، نشان دهید (پیمانه d) $a\equiv b$.

با توجه به فرض مسئله، چون $d|m$ پس: $m=dq$: $\exists q\in$ در نتیجه داریم:

$$a\overset{m}{\equiv}b\Rightarrow a-b=mk,k\in\ \Rightarrow a-b=(dq)k\Rightarrow a-b=d(qk),qk\in$$

$$\Rightarrow a\overset{d}{\equiv}b$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۳ـ ثابت کنید:

الف) اگر r باقیمانده تقسیم a بر m باشد، آن‌گاه (پیمانه m) $a\equiv r$

ب) اگر (پیمانه m) $a\equiv b$ و c عدد صحیح باشد، آن‌گاه: (پیمانه m) $ac\equiv bc$

پ) اگر (پیمانه m) $a+b\equiv c$ آن‌گاه: (پیمانه m) $a\equiv c-b$

ت) اگر m و c نسبت به هم اول باشند و (پیمانه m) $ac\equiv bc$ ، آن‌گاه: (پیمانه m) $a\equiv b$

الف) اگر r باقیمانده تقسیم a بر m باشد، داریم:

$$a=mq+r\,;\ 0\le r<m$$

$$\Rightarrow a-r=mq;q\in \quad \Rightarrow a\overset{m}{\equiv}r$$

$$a\overset{m}{\equiv}b\Rightarrow a-b=mk,k\in$$

ب) حال طرفین تساوی رادر c ضرب می‌کنیم، داریم:

$$(a-b)\times c=mk\times c\Rightarrow ac-bc=m(kc);kc\in \quad \Rightarrow ac\overset{m}{\equiv}bc$$

پ)

$$a+b\overset{m}{\equiv}c\Rightarrow (a+b)-c=mk\,;k\in \quad \Rightarrow a-(c-b)=mk;k\in$$

$$\Rightarrow a\overset{m}{\equiv}c-b$$

ت)

$$ac\overset{m}{\equiv}bc\Rightarrow ac-bc=mk;k\in \quad \Rightarrow (a-b)c=mk\,,k\in \quad \Rightarrow a\overset{m}{\equiv}b$$

$$\Rightarrow m\ \Big|\ (a-b)\times c\xrightarrow[\text{طبق لم اقلیدس}]{(m,c)=1} m\ |\ a-b\Rightarrow a-b=mk';k'\in \quad \Rightarrow a\overset{m}{\equiv}b$$

۴ـ ثابت کنید که برای هر دو عدد صحیح a و b

الف) (پیمانه ab) $(a\pm b)^2\equiv a^2+b^2$

ب) (پیمانه ab) $(a\pm b)^3\equiv a^3\pm b^3$

الف)

$$(a\pm b)^2-(a^2+b^2)=a^2\pm 2ab+b^2-a^2-b^2=\pm 2ab$$

$$\Rightarrow (a\pm b)^2-(a^2+b^2)=ab(\pm 2)\Rightarrow (a\pm b)^2\overset{m}{\equiv}a^2+b^2$$

ب)

$$(a\pm b)^3-(a^3\pm b^3)=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3-a^3\mp b^3$$

$$=\pm 3a^2b+3ab^2$$

$$\Rightarrow (a\pm b)^3-(a^3\pm b^3)=ab(\pm 3a+3b)\Rightarrow (a\pm b)^3\overset{ab}{\equiv}a^3\pm b^3$$

اثبات: داریم $(a+b)^n\overset{ab}{\equiv}a^n+b^n$; $n\in$

$$(a+b)^n=a^n+\underbrace{na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2+\dots+na.b^{n-1}}_{\text{مضربی از ab}}+b^n$$

$$\Rightarrow (a+b)^n-(a^n+b^n)=(ab)k;k\in \quad \Rightarrow (a+b)^n\overset{ab}{\equiv}a^n+b^n$$

و برای حالت $(a-b)^n$ داریم:

$$(a-b)^n=a^n-\underbrace{na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2-\dots+(-1)^{n-1}n.ab^{n-1}}_{\text{مضربی از ab}}+(-1)^n.b^n$$

$$\Rightarrow (a-b)^n-(a^n+(-1)^nb^n)=(ab)k\,;k\in$$

$$\Rightarrow \begin{cases}(a-b)^n-(a^n+b^n)=(ab)k: \text{زوج}\ n\Rightarrow (a-b)^n\overset{ab}{\equiv}a^n+b^n\\ (a-b)^n-(a^n-b^n)=(ab)k: \text{فرد}\ n\Rightarrow (a-b)^n\overset{ab}{\equiv}a^n-b^n\end{cases}$$

در نتیجه اگر n عدد طبیعی زوج باشد، داریم: $(a\pm b)^n\overset{ab}{\equiv}a^n+b^n$

و اگر n عدد طبیعی فرد باشد، دو حالت داریم: $((a+b)^n\overset{ab}{\equiv}a^n+b^n,(a-b)^n\overset{ab}{\equiv}a^n-b^n$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۵ـ ثابت کنید $2^{11}-1$ بر ۲۳ تقسیم‌پذیر است.

$$2^{11}-1 \overset{23}{\equiv} (2^5)^2\times 2-1 \overset{23}{\equiv} (32)^2\times 2-1 \overset{23}{\equiv} (9)^2\times 2-1 \overset{23}{\equiv} 162-1 \overset{23}{\equiv} 161 \overset{23}{\equiv} 0 \Rightarrow 23 \mid 2^{11}-1$$

۶ـ آخرین رقم سمت راست هر یک از اعداد 3^{424} و 7^{101} را به دست آورید.

برای به دست آوردن آخرین رقم سمت راست عددی، باقیمانده عدد را به پیمانه ۱۰ به دست می‌آوریم، داریم:

رقم سمت راست $1=3^{424}$

$$3^{424} \overset{10}{\equiv} (3^2)^{212} \overset{10}{\equiv} (-1)^{212} \overset{10}{\equiv} 1 \Rightarrow$$

رقم سمت راست $7=7^{101}$

$$7^{101} \overset{10}{\equiv} (7^2)^{50}\times 7 \overset{10}{\equiv} (-1)^{50}\times 7 \overset{10}{\equiv} 7 \Rightarrow$$

۷ـ برای هر یک از معادلات سیاله زیر یا تمام جواب‌ها را به دست آورید و یا ثابت کنید جواب ندارد.

الف) $2x+5y=11$ **ب)** $17x+13y=100$

پ) $21x+14y=147$ **ت)** $60x+18y=97$

شرط وجود جواب برای هر معادله سیاله خطی به فرم $ax+by=c$ این است که $(a\ ,\ b)|c$.

الف) معادله سیاله جواب دارد

$$2x+5y=11 \Rightarrow (2,5)=1 \Rightarrow 1 \mid 11 \Rightarrow$$

$$2x+5y=11 \Rightarrow 2x=11-5y=10+1-4y-y \Rightarrow x=5-2y+\frac{1-y}{2}$$

$$\Rightarrow k=\frac{1-y}{2} \Rightarrow y=1-2k;\ k\in$$

$$\Rightarrow x=5-2y+\frac{(1-y)}{2}=5-2(1-2k)+k=5-2+4k+k=5k+3$$

$$\Rightarrow x=5k+3;\ k\in$$

ب) معادله سیاله جواب دارد.

$$17x+13y=100 \Rightarrow (17,13)=1 \Rightarrow 1 \mid 100 \Rightarrow$$

$$17x+13y=100 \Rightarrow 13y=100-17x=91+9-13x-4x$$

$$\Rightarrow y=7-x+\frac{9-4x}{13} \Rightarrow k=\frac{9-4x}{13}\in \quad \Rightarrow x=\frac{9-13k}{4},k\in$$

$$\Rightarrow x=\frac{9-13k}{4}=2-3k+\frac{1-k}{4} \Rightarrow k'=\frac{1-k}{4}\in \quad \Rightarrow k=1-4k'$$

$$\Rightarrow x=2-3(1-4k')+k'=2-3+12k'+k' \Rightarrow x=13k'-1;\ k'\in$$

$$\Rightarrow y=7-(13k'-1)+(1-4k')=7-13k'+1+1-4k' \Rightarrow y=-17k'+9;\ k'\in$$

پ) معادله سیاله جواب دارد.

$$21x+14y=147 \Rightarrow (21,14)=7 \Rightarrow 7 \mid 147 \Rightarrow$$

طرفین معادله سیاله را بر ۷ تقسیم می‌کنیم:

$$3x+2y=21$$

$$\Rightarrow 2y=21-3x=20+1-2x-x \Rightarrow y=10-x+\frac{1-x}{2}$$

$$\Rightarrow k=\frac{1-x}{2}\in \quad \Rightarrow x=1-2k \Rightarrow y=10-(1-2k)+k$$

$$\Rightarrow y=9+3k;\ k\in$$

ت) معادله سیاله جواب ندارد

$$60x+18y=97 \Rightarrow (60,18)=6 \Rightarrow 6 \nmid 97$$

۸ـ پستخانه‌ای فقط تمبرهای ۱۴۰ و ۲۱۰ ریالی برای فروش دارد. برای چسباندن تمبر به بسته‌هایی که مقدار تمبر لازم برای آنها هر یک ازمقادیر زیر است، در صورت امکان ترکیبی از این دو نوع تمبر تعیین کنید.

الف) ۳۵۰۰ ریال **ب)** ۴۰۰۰ ریال

الف) فرض می‌کنیم x تمبر ۱۴۰ ریالی و y تمبر ۲۱۰ ریالی برای این کار نیاز داریم، پس:

$$140x+210y=3500 \Rightarrow (140,210)=70 \Rightarrow 70 \mid 3500$$

پس معادله سیاله دارای جواب است.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

برای حل معادله ابتدا طرفین را بر ۷۰ تقسیم می‌کنیم:

$$2x+3y=50 \Rightarrow 2x=50-3y=50-2y-y \Rightarrow x=25-y-\frac{y}{2}$$
$$\Rightarrow k=\frac{y}{2} \Rightarrow y=2k,\ k\in$$
$$\Rightarrow x=25-2k-k \Rightarrow x=-3k+25;\ k\in$$
$$\begin{cases} x=25-3k\geq 0 \Rightarrow k\leq \frac{25}{3} \\ y=2k\geq 0 \Rightarrow k\geq 0 \end{cases} \xrightarrow{k\in} k=0 \text{ یا } 1 \text{ یا } 2 \text{ یا } 3 \text{ یا } 4 \text{ یا } 5 \text{ یا } 6 \text{ یا } 7 \text{ یا } 8$$
$$k=0 \Rightarrow (x,y)=(25,0),\ k=1 \Rightarrow (x,y)=(22,2)$$
$$k=2 \Rightarrow (x,y)=(19,4),\ k=3 \Rightarrow (x,y)=(16,6)$$
$$k=4 \Rightarrow (x,y)=(13,8),\ k=5 \Rightarrow (x,y)=(10,10)$$
$$k=6 \Rightarrow (x,y)=(7,12),\ k=7 \Rightarrow (x,y)=(4,14)$$
$$k=8 \Rightarrow (x,y)=(1,16)$$

ب)
$$140x+210y=4000 \Rightarrow (140,210)=70 \Rightarrow 70 \nmid 4000$$

پس معادله سیاله جواب ندارد.

فصل ۷ مدل های شهودی و تجسمی در ترکیبیات

تمرین (صفحه‌ی ۶۹)

۱ـ فرض کنید $A=\{1,2,3,4\}$ برای هر یک از حالت‌های زیر گرافی رسم کنید که رابطه متناظر با آن:

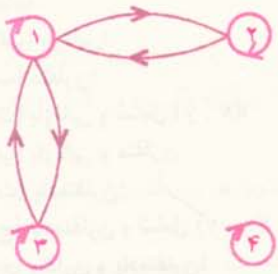
الف) بازتابی ومتقارن باشد ولی ترایایی نباشد.

ب) بازتابی و ترایایی باشد ولی متقارن نباشد.

پ) متقارن وترایایی باشد ولی بازتابی نباشد.

جواب‌های خود را با ماتریس‌های متناظر امتحان کنید.

الف)
$$R_1=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,2),(2,1),(1,3),(3,1)\}$$



$$M(R_1)=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

چون $I \ll M$ پس رابطه بازتابی است.

چون $M=M^T$ پس رابطه متقارن است.

چون $M^{(2)}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \not\ll M$ ، پس رابطه ترایایی نیست.

ب)
$$R_2=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

برای حل معادله ابتدا طرفین را بر ۷۰ تقسیم می‌کنیم:

$$2x+3y=50 \Rightarrow 2x=50-3y=50-2y-y \Rightarrow x=25-y-\frac{y}{2}$$
$$\Rightarrow k=\frac{y}{2} \Rightarrow y=2k,\ k\in$$
$$\Rightarrow x=25-2k-k \Rightarrow x=-3k+25;\ k\in$$
$$\begin{cases} x=25-3k\geq 0 \Rightarrow k\leq \frac{25}{3} \\ y=2k\geq 0 \Rightarrow k\geq 0 \end{cases} \xrightarrow{k\in} k=0 \text{ یا } 1 \text{ یا } 2 \text{ یا } 3 \text{ یا } 4 \text{ یا } 5 \text{ یا } 6 \text{ یا } 7 \text{ یا } 8$$
$$k=0 \Rightarrow (x,y)=(25,0),\ k=1 \Rightarrow (x,y)=(22,2)$$
$$k=2 \Rightarrow (x,y)=(19,4),\ k=3 \Rightarrow (x,y)=(16,6)$$
$$k=4 \Rightarrow (x,y)=(13,8),\ k=5 \Rightarrow (x,y)=(10,10)$$
$$k=6 \Rightarrow (x,y)=(7,12),\ k=7 \Rightarrow (x,y)=(4,14)$$
$$k=8 \Rightarrow (x,y)=(1,16)$$

ب)
$$140x+210y=4000 \Rightarrow (140,210)=70 \Rightarrow 70 \nmid 4000$$

پس معادله سیاله جواب ندارد.

فصل ۷ مدل های شهودی و تجسمی در ترکیبیات

تمرین (صفحه‌ی ۶۹)

۱ـ فرض کنید $A=\{1,2,3,4\}$ برای هر یک از حالت‌های زیر گرافی رسم کنید که رابطه متناظر با آن:

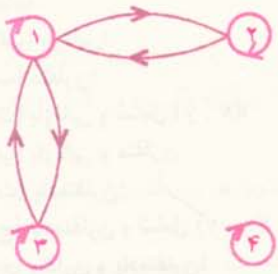
الف) بازتابی ومتقارن باشد ولی ترایایی نباشد.

ب) بازتابی و ترایایی باشد ولی متقارن نباشد.

پ) متقارن وترایایی باشد ولی بازتابی نباشد.

جواب‌های خود را با ماتریس‌های متناظر امتحان کنید.

الف)
$$R_1=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,2),(2,1),(1,3),(3,1)\}$$



$$M(R_1)=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

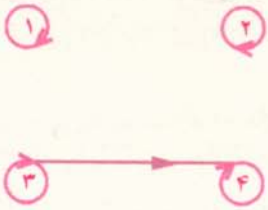
چون $I \ll M$ پس رابطه بازتابی است.

چون $M=M^T$ پس رابطه متقارن است.

چون $M^{(2)}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \not\ll M$ ، پس رابطه ترایایی نیست.

ب)
$$R_2=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا



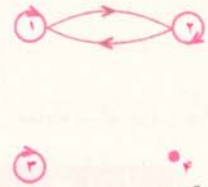
$$M(R_۲)=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

چون $I \ll M$ ، پس رابطه ترایایی است.

چون $M \neq M^T$ پس رابطه تقارنی نیست.

چون $M^{(۲)}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \ll M$ پس رابطه ترایایی است.

پ) $R۳=\{(۱ , ۱) , (۲ , ۲) , (۱ , ۲) , (۲ , ۱) , (۳ , ۳)\}$



$$M(R_۳)=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

توجه: اگر M ماتریس متناظر با رابطه R باشد، آن‌گاه گزاره‌های زیر همواره برقرار است:

۱) $R \leftrightarrow I \ll M$ بازتابی است

۲) $R \leftrightarrow M=M^T$ تقارنی است

۳) $R \leftrightarrow M^{(۲)} \ll M$ ترایایی است

۴) $R \leftrightarrow M \wedge M^T \ll I$ پادمتقارن است

ماتریس متناظر باهر رابطه بازتابی همواره باید تمامی درایه‌های روی قطر اصلی آن یک باشد.

ماتریس متناظر با هر رابطه تقارنی باید متقارن باشد یعنی درایه‌های بالا و پایین قطر اصلی نظیربه‌نظیر با هم برابر باشند و هم‌چنین $M^{(۲)}$ ماتریسی است که از ضرب ماتریس M در خودش به دست می‌آید با این تفاوت که ضرب و جمع‌های انجام شده، ضرب و جمع بولی هستند.

۲ـ فرض کنید $A=\{w , x , y , z\}$ تعداد رابطه‌های روی A با ویژگی‌های داده شده در هر یک از حالت‌های زیر را بیابید:

الف) بازتابی؛

ب) متقارن؛

ت) بازتابی و شامل (x , y)؛

پ) بازتابی و متقارن

ث) پادمتقارن؛

ج) پادمتقارن و شامل (x , y)؛

چ) متقارن و پادمتقارن؛

ح) پادمتقارن، متقارن وبازتابی؛

خ) هم‌ارزی (راهنمایی: تعداد افرازهای مختلف را پیدا کنید.)

الف) ماتریس M را متناظر با رابطه در نظر می‌گیریم. اگر بازتابی باشد آن‌گاه $I \ll M$ ، در این صورت تمام درایه‌های روی قطر اصلی مساوی (۱) است. اما بقیه درایه‌های دیگر که تعداد ۱۲ تاست می‌تواند مساوی (۱) یا (۰)

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

باشند، بنابراین برای هر درایه از این (۱۲) درایه دو حالت داریم، پس طبق اصل شمارش داریم:

$$\text{تعداد روابط بازتابی} = \underbrace{۲\times۲\times...\times۲}_{\text{۱۲ بار}} = ۲^{۱۲}$$

تذکر ماتریس M یک ماتریس ۴×۴ است پس کلاً دارای (۱۶) درایه است.

ب) در صورتی رابطه متقارن است که $M=M^T$. درایه‌های روی قطر اصلی M با درایه‌های روی قطر اصلی M^T همواره برابر است پس باید درایه ij ام درایه ji ام در ماتریس M یکسان باشند. بنابراین برای هر درایه روی قطر اصلی دو حالت داریم و در مورد (۱۲) درایه دیگر، هر درایه ij ام و ji ام دارای دو حالت هستند یا هر دو (۰) هستند یا هر دو (۱) هستند پس طبق اصل شمارش داریم:

$$\text{تعداد روابط تقارنی} = \underbrace{۲\times۲\times...\times۲}_{\text{۱۰ بار}} = ۲^{۱۰}$$

پ) چون رابطه بازتابی است پس $I\ll M$ بنابراین درایه‌های روی قطر اصلی برابر (۱) هستند.
و چون رابطه تقارنی است پس $M=M^T$. در نتیجه در مورد (۱۲) درایه‌ی دیگر که روی قطر اصلی نیستند باید درایه ij ام با درایه ji ام برابر باشد. بنابراین برای این ۲ درایه ۲ حالت داریم، بنابراین طبق اصل شمارش:

$$\text{تعداد روابط بازتابی و تقارنی} = \underbrace{۲\times۲\times...\times۲}_{\text{۶ بار}} = ۲^{۶}$$

ت) چون رابطه بازتابی است پس $I\ll M$ یعنی تمام درایه‌های روی قطر اصلی M برابر (۱) هستند و چون (x , y) عضو رابطه است پس درایه متناظر با زوج (x , y) برابر (۱) است و بقیه درایه‌های که تعداد برابر با (۱۱) است هر یک از دو حالت ۰ یا ۱ را می‌توانند بپذیرند پس طبق اصل شمارش:

$$\text{تعداد روابط بازتابی شامل } (x , y) = \underbrace{۲\times۲\times...\times۲}_{\text{۱۱ بار}} = ۲^{۱۱}$$

ث) چون رابطه پادمتقارنی است، پس $M\wedge M^T\ll I$ ، پس هر یک از درایه‌های روی قطر دو حالت (۰) یا (۱) را می‌پذیرند و باید داشته باشیم: (درایه ij ام ماتریس M^T)×(درایه ij ام ماتریس M) =۰
یا به عبارت دیگر: (درایه ji ام ماتریس M)×(درایه ij ام ماتریس M) =۰
یعنی هر دو درایه ij ام و ji ام می‌تواند ۳ حالت را داشته باشند، یا هر دو صفر باشند یا یکی صفر و دیگری یک باشد، دراین صورت:

$$\text{تعداد روابط پادمتقارن} = (۲\times۲\times۲\times۲)\times\underbrace{(۳\times...\times۳)}_{\text{۶ بار}} = ۲^{۴}\times۳^{۶}$$

ج) این حالت همانند حالت (ث) است فقط با این تفاوت که چون رابطه شامل زوج (x , y) است رابطه پادتقارنی است پس دیگر نباید شامل زوج (y , x) باشد بنابراین درایه نظیر زوج (x , y) برابر ۱ و درایه نظیر زوج (y , x) برابر ۰ است پس این دو زوج ۱ حالت را قبول می‌کنند نه ۳ حالت، داریم:

$$\text{تعداد روابط پادمتقارن و شامل } (x , y) = (۲\times۲\times۲\times۲)\times\underbrace{(۳\times...\times۳)}_{\text{۵ بار}} = ۲^{۴}\times۳^{۵}$$

چ) چون رابطه متقارن است، داریم $M=M^T$ یعنی اگر رابطه زوج (i , j) را داشته باشد باید زوج (j , i) را نیز داشته باشد و چون طبق فرض رابطه پادمتقارن است پس باید داشته باشیم i=j در نتیجه در ماتیس M تمام درایه‌های غیرقطر اصلی برابر (۰) هستند و هر یک از درایه‌های روی قطر اصلی می‌توانند یکی ازدو حالت (۰) یا (۱) رامی‌پذیرند، پس طبق اصل شمارش داریم:

$$\text{تعداد روابط متقارن و پادمتقارن} = ۲\times۲\times۲\times۲ = ۲^{۴}$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

ح) با توجه به قسمت (چ) فقط رابطه $\{(x , x) , (y , y) , (z , z) , (w , w)\}$ می‌تواند هم پادمتقارن و هم متقارن و هم بازتابی باشد پس تنها یک رابطه داریم.

خ) توجه: تعداد روابط هم‌ارزی با تعدادافرازها برابر است.

$$\text{تعداد افرازهای یک عضوی} = \begin{bmatrix}۴\\۴\end{bmatrix} = ۱$$

$$\text{تعداد افرازهای ۲ عضوی} = \frac{\begin{bmatrix}۴\\۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲\\۲\end{bmatrix}}{۲!} + \begin{bmatrix}۴\\۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳\\۳\end{bmatrix} = ۷$$

$$\text{تعداد افرازهای ۳ عضوی} = \frac{\begin{bmatrix}۴\\۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲\\۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱\\۱\end{bmatrix}}{۲!} = ۶$$

تعداد افرازهای ۴ عضوی = ۱

⇐ تعداد روابط هم‌ارزی = تعداد افرازها = ۱+۷+۶+۱=۱۵

۳ـ فرض کنید $A=\{۱ , ۲ , ۳ , ۴\}$ دو رابطه R و S روی A به صورت زیر داده شده‌اند:

$R=\{(۱ , ۲) , (۱ , ۳) , (۲ , ۴) , (۴ , ۴)\}$

$S=\{(۱ , ۱) , (۱ , ۲) , (۱ , ۳) , (۲ , ۳) , (۲ , ۴)\}$

رابطه‌های ROR و SOS را پیدا کنید.

اگر ماتریس متناظر با رابطه R باشد، آن‌گاه ماتریس متناظر بارابطه ROR برابر با $M^{(۲)}$ خواهد بود.

$$[M(R)]^۲ = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} = M(ROR)$$

در نتیجه داریم: $ROR=\{(۱ , ۴) , (۲ , ۴) , (۴ , ۴)\}$

$$[M(S)]^۲ = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} = M(SOS)$$

در نتیجه داریم: $SOS=\{(۱ , ۱) , (۱ , ۲) , (۱ , ۳) , (۱ , ۴)\}$

۴ـ بندهای (الف) و (ب) از قضیه ۱ را اثبات کنید.

الف) اگر $M(R)=[۰]_{n\times n}$ آن‌گاه داریه ij مساوی صفر است یعنی زوج (i , j) به رابطه تعلق ندارد و چون تمام درایه‌ها مساوی صفر هستند پس هیچ‌کدام از زوج‌های (i , j) به رابطه تعلق ندارد پس رابطه تهی است.

$R=\varnothing$

برعکس: اگر $R=\varnothing$ یعنی زوج (i , j) به رابطه تعلق ندارد پس درایه ij ام صفر است و چون $R=\varnothing$ پس تمام درایه‌ها صفر هستند پس $M(R)=[۰]_{n\times n}$

ب) اگر $M(R)=[۱]_{n\times n}$ یعنی همه درایه‌های M(R) یک‌اند پس درایه ij ام برابر (۱) است پس زوج (i , j) به رابطه R تعلق دارد بنابراین به ازای هر i و j عضو A داریم $(i,j)\in R$ بنابراین $R=A\times A$

برعکس: اگر $R=A\times A$ آن‌گاه به ازای هر i و j متعلق به به A داریم $(i,j)\in R$ پس هر درایه ij ام مساوی (۱) است.

پس $M(R)=[۱]_{n\times n}$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۵ـ بندهای (الف) و (ب) از قضیه (۲) را اثبات کنید.

الف) اگر R بازتابی باشد و چون R رابطه روی مجموعه n عضوی A ، $n\in$ است پس به ازای هر i متعلق به A داریم $(i,i)\in R$ پس درایه‌های روی قطر اصلی M ، ماتریس متناظر با رابطه R ، برابر (۱) است و بقیه درایه‌ها باتوجه به رابطه R مساوی (۰) یا (۱) هستند پس داریم $I_n \ll M$

برعکس اگر $I_n \ll M$ آن‌گاه درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس M مساوی (۱) است و بقیه درایه‌های M ، (۰) یا (۱) هستند. چون به ازای هر i متعلق به A داریم: $(i,i)\in R$ پس رابطه R ، بازتابی است.

ب) اگر R متقارن باشد آن‌گاه به ازای هر i و j متعلق به A که $(i,j)\in R$ در نتیجه $(j,i)\in R$ پس اگر به جای سطرها و ستون‌های M را با حفظ ترتیب عوض کنیم تغییری در M پدید نمی‌آید پس $M=M^T$

برعکس اگر $M=M^T$ آن‌گاه درایه ij ام M با درایه ji ام آن فرقی نمی‌کند مثلاً اگر درایه ij ام M مساوی (۱) باشد یعنی زوج $(i,j)\in R$ آن‌گاه درایه ji ام M نیز مساوی (۱) است یعنی $(j,i)\in R$ و اگر درایه ij ام M مساوی (۰) باشد آن‌گاه درایه ji ام نیز مساوی (۰) است یعنی $(j,i)\notin R$ و $(i,j)\notin R$ پس رابطه R متقارن است.

۶ـ فرض کنید R یک رابطه بازتابی روی مجموعه متناهی A باشد. نشان دهید که رابطه ROR نیز بازتابی است.

چون رابطه R بازتابی است پس همه درایه‌های روی قطر اصلی M(R) برابر (۱) هستند و اگر ماتریس M(ROR) را با ماتریس $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ نشان دهیم، برای به دست آوردن درایه a_{ii} مطابق زیر عمل می‌کنیم (می‌دانیم که $(M(ROR)=\left[M(R)\right]^2$

$$a_{ii}=m_{i1}\odot m_{1i}\overset{\bullet}{+}m_{i2}\odot m_{2i}\overset{\bullet}{+}\dots+m_{ii}\odot m_{ii}\overset{\bullet}{+}\dots\overset{\bullet}{+}m_{in}\odot m_{ni}=1$$

پس هر درایه از قطر اصلی M(ROR) نیز برابر (۱) است پس رابطه ROR نیز بازتابی است.

۷ـ ماتریس صفر و یک $E=\begin{bmatrix}1&0&1&1\\0&1&0&1\\1&0&0&0\end{bmatrix}$ **را در نظر می‌گیریم. تعداد ماتریس‌های صفر و یک F با شرط $E\ll F$ را بیابید.**

باتوجه به شرط $E\ll F$ ، درایه‌های f_{11} ، f_{13} ، f_{14} ، f_{22} ، f_{24} و f_{31} در ماتریس F بایدبرابر (۱) باشند ولی بقیه درایه‌های می‌توانند دو حالت صفر یا یک را بپذیرند، پس داریم:

تعداد حالت‌های ماتریس F $=2\times2\times2\times2\times2\times2=2^6=64$

۸ـ با استفاده از قضیه‌هایی که دراین فصل خوانده‌اید نشان دهید که آیا رابطه زیر روی مجموعه $A=\{1,2,3,4\}$ یک رابطه هم‌ارزی است یا خیر؟

$R=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,2),(1,3),(2,4),(4,2),(2,1),(3,1)\}$

ماتریس متناظر با رابطه R را در نظر می‌گیریم:

$$M(R)=\begin{bmatrix}1&1&1&0\\1&1&0&1\\1&0&1&0\\0&1&0&1\end{bmatrix}$$

اولاً: چون $I\ll M$ ، پس رابطه R بازتابی است.

ثانیاً: داریم:

$$M^T=\begin{bmatrix}1&1&1&0\\1&1&0&1\\1&0&1&0\\0&1&0&1\end{bmatrix}=M$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

پس رابطه تقارنی است.

ثالثاً:

$$M^{(2)}=\begin{bmatrix}1&1&1&0\\1&1&0&1\\1&0&1&0\\0&1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1&0\\1&1&0&1\\1&0&1&0\\0&1&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&0\\1&1&0&1\end{bmatrix}$$

چون $M^{(2)}\not\leq M$ پس رابطه ترایایی نیست در نتیجه R رابطه هم‌ارزی نیست.

۹ـ یک ماتریس n×n از اعداد متمایز مثلاً $1,2,3,\dots,n^2$ را یک مربع وفقی (یا مربع جادویی) می‌نامیم، هرگاه حاصل جمع درایه‌های هر سطر، حاصلجمع درایه‌های هر ستون، حاصل جمع درایه‌های قطر اصلی، و حاصل جمع درایه‌های قطر فرعی با هم مساوی باشند. به عنوان مثال یک مربع وفقی ۳×۳ در زیر نشان داده شده است:

۲	۷	۶
۹	۵	۱
۴	۳	۸

ثابت کنید که در هر مربع وفقی ۳×۳ که از اعضای $1,2,3,\dots,9$ تشکیل شده است عضوی که در مرکز مربع قرار می‌گیرد همیشه عدد ۵ است. مجموع اعداد $1,2,3,\dots,9$ برابر با ۴۵ است پس جمع هر ردیف برابر $\frac{45}{3}$ یا ۱۵ است.

a	b	c
a′	b′	c′
a″	b″	c″

قطر اصلی $a+b'+c''=15$

قطر فرعی $c+b'+a''=15$

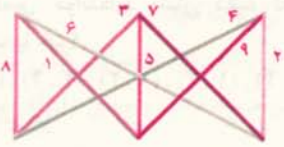
ستون دوم $b+b'+b''=15$

$$(a+b+c)+(a''+b''+c'')+3b'=45$$
$$3b'=15 \Rightarrow b'=5$$

۱۰ـ گراف G داده شده است. یک برچسب گذاری جادویی G عبارت است از متناظر کردن اعدادی، معمولاً صحیح ومثبت، به یال‌های G به طوری که حاصل جمع اعداد متناظر با یال‌های ماربر هر رأس عددی ثابت باشد. در گرافی که در شکل ۵ (الف) داده شده است اعدادی که روی یال‌ها نوشته شده‌اند یک برچسب‌گذاری جادویی را نشان می‌دهد. زیرا حاصل‌جمع اعداد متناظر به یالهای ماربر هر رأس مساوی با ۴ است.

با استفاده از مربع وفقی ۳×۳ یک برچسب‌گذاری جادویی برای گراف شکل (۵) (ب) به دست آورید.

۲	۷	۶
۹	۵	۱
۴	۳	۸



۱۱ـ ثابت کنید که تعداد انتخاب n گل از k نوع مختلف گل، که تکرار نیز مجاز باشد مساوی است با $\binom{n+k-1}{n}$

به تعداد انتخاب‌های گل یعنی n، عدد ۱ و به تعداد یکی کمتر از انواع یعنی k ، عدد صفر را نظیر می‌کنیم. این یک‌ها و صفرها به هر طریقی که کنار هم قرار گیرند در واقع یک انتخاب را نشان می‌دهند مثلا می‌خواهیم از بین ۵ نوع گل، ۳ گل انتخاب کنیم پس ۳ تا یک و ۵ تا صفر درنظرمی‌گیریم. پس هر یک از حالت‌های زیر یک انتخاب را نشان می‌دهد:

انتخاب دو گل از نوع اول و یک گل ازنوع دوم را نشان می‌دهد ⟵ ۱۰۱۰۰۰،

انتخاب یک گل از نوع اول و یک گل از نوع دوم و یک گل از نوع چهارم را نشان می‌دهد ⟵ ۱۰۱۰۰۱۰۰

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

پس تعداد حالت‌های انتخاب برابر تعداد حالاتی است که می‌توان n تا (۱) و (k-۱) تا صفر رادر کنار هم قرار داد،

پس با توجه به رابطه تبدیل با تکرار داریم: $\text{تعداد حالات} = \frac{(n+k-1)!}{(k-1)!n!} = \binom{n+k-1}{n}$

۱۲ـ تعداد جواب‌های صحیح ومثبت هر یک از معادلات زیر را پیدا کنید.

الف) $x_1+x_2+x_3=7$

ب) $x_1+x_2+x_3=8 \quad 2\le x_1\le 3, 4\le x_2\le 8, x_3\ge 1$

پ) $x_1+x_2+x_3=14 \quad 1\le x_i\le 7, i=1,2,3$

الف) چون جواب‌های صحیح و مثبت خواسته شده است، پس داریم: $x_3\ge 1, x_2\ge 1, x_1\ge 1$

در نتیجه: $x_3-1\ge 0, x_2-1\ge 0, x_1-1\ge 0$

حال فرض می‌کنیم: $y_3=x_3-1, y_2=x_2-1, y_1=x_1-1$

پس: $x_3=y_3+1, x_2=y_2+1, x_1=y_1+1$

که در این صورت y_1، y_2 و y_3 اعداد صحیح نامنفی را قبول می‌کنند، پس: $y_1+y_2+y_3=4\Rightarrow n=4, k=3$

$\text{تعداد جواب‌های صحیح و مثبت} = \binom{n+k-1}{n} = \binom{4+3-1}{4} = \binom{6}{4} = \frac{6!}{4!2!} = 15$

ب) $2\le x_1\le 3\Rightarrow 0\le x_1-2\le 1$

$4\le x_2\le 8\Rightarrow 0\le x_2-4\le 4$

$1\le x_3\Rightarrow 0\le x_3-1$

قرار می‌دهیم: $y_3=x_3-1, y_2=x_2-4, y_1=x_1-2$

در این صورت داریم: $0\le y_3, 0\le y_2\le 4, 0\le y_1\le 1$

که y_1، y_2 و y_3 اعداد صحیح نامنفی را قبول می‌کنند. پس: $y_1+y_2+y_3=1$

پس y_1، y_2 و y_3 نمی‌توانند عددی غیر از صفر ویک قبول کنند، در نتیجه: $x_2\le 5, x_1\le 3$

بنابراین هر جواب صحیح نامنفی این معادله یک جواب معادله $x_1+x_2+x_3=8$ با شرایط داده شده است پس:

پس: $\text{تعداد جواب‌های صحیح و مثبت} = \binom{n+k-1}{n} = \binom{1+3-1}{1} = \binom{3}{1} = 3 \Rightarrow n=1, k=3$

پ) $1\le x_i\le 7\Rightarrow 0\le x_i-1\le 6; i=1,2,3$

قرار می‌دهیم: $y_i=x_i-1; i=1,2,3$

در این صورت y_1، y_2 و y_3 مقادیر صحیح نامنفی را می‌پذیرند. پس: $y_1+y_2+y_3=11$

حال تعداد جواب‌های صحیح نامنفی معادله $y_1+y_2+y_3=11$ با شرط $y_1\ge 0, y_2\ge 0, y_3\ge 0$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$\text{تعداد جواب‌های صحیح و مثبت } k=3 \text{ و } n=11 = |S| = \binom{n+k-1}{n} = \binom{11+3-1}{11} = \binom{13}{11} = \frac{13!}{11!2!} = 78$

حال مجموعه‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

$A_1=\{$ جواب‌های معادله $y_1+y_2+y_3=11$ به شرطی که $y_1>6$ باشد $\}$

$A_2=\{$ جواب‌های معادله $y_1+y_2+y_3=11$ به شرطی که $y_2>6$ باشد $\}$

$A_3=\{$ جواب‌های معادله $y_1+y_2+y_3=11$ به شرطی که $y_3>6$ باشد $\}$

با توجه به این که $y_1+y_2+y_3=11$، واضح است که اگر یکی از سه مجهول y_1 یا y_2 یا y_3 بزرگتر از ۶ باشند، دو مجهول دیگر از ۶ کمترند، پس: $A_1\cap A_2=A_1\cap A_3=A_2\cap A_3=A_1\cap A_2\cap A_3=\emptyset$

اگر $y_1>6$ باشد، آن‌گاه $y_1-7\ge 0$، قرار می‌دهیم: $z_1=y_1-7$، پس: $y_1=z_1+7$

داریم: $y_1+y_2+y_3=4\Rightarrow n=4, k=3$

$\text{تعداد جواب‌های صحیح و مثبت} = |A_1| = \binom{4+3-1}{4} = \binom{6}{4} = \frac{6!}{4!2!} = 15$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

به طریق مشابه، به دست می‌آوریم: $|A_2| = ۱۵$ و $|A_3| = ۱۵$. بنابراین:

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = ۱۵+۱۵+۱۵-۰-۰-۰-۰=۴۵$$

پس تعداد جواب‌های صحیح و مثبت معادله اولیه با شرایط داده شده، مطابق زیر به دست می‌آید:

$$|\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}| = |S| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3| = ۷۸-۴۵=۳۳$$

۱۳ـ مطلوب است تعداد شمارهٔ شماسنامه‌های پنج رقمی که در آن‌ها هر یک از رقم‌های ۱، ۳ و ۷ حداقل یک بار ظاهر می‌شوند. ابتدا تعداد کل شماره‌شناسنامه‌های پنج رقمی را به دست می‌آوریم:

تعداد کل شماره‌شناسنامه‌های پنج رقمی = $۹ \times ۱۰ \times ۱۰ \times ۱۰ \times ۱۰ = ۹۰۰۰۰$

رقم صفر در جایگاه اول نمی‌تواند قرار گیرد پس ۹ حالت داریم ولی برای بقیه جایگاه‌ها ۱۰ حالت داریم:

حال قرار می‌دهیم:

$A_1=\{$اعداد پنج رقمی فاقد رقم ۱$\}$

$A_2=\{$اعداد پنج رقمی فاقد رقم ۳$\}$

$A_3=\{$اعداد پنج رقمی فاقد رقم ۷$\}$

حال می‌خواهیم $|A_1|$ را به دست آوریم.

چون A_1 شامل اعداد پنج رقمی فاقد رقم ۱ است پس برای رقم اول، ۸ حالت داریم، زیرا رقم اول، مقدار صفر و یک را نمی‌پذیرد ولی برای بقیه ارقام، ۹ حالت داریم. چون تنها مقدار یک را نمی‌پذیرند. پس:

$$|A_1| = ۸\times۹\times۹\times۹\times۹=۸\times۹^۴$$

و به طریق مشابه به دست می‌آوریم:

$$|A_2| = |A_3| = ۸\times۹^۴$$

حال می‌خواهیم $|A_1 \cap A_2|$ را به دست آوریم.

مجموعه $(A_1 \cap A_2)$ شامل اعداد پنج رقمی فاقد رقم یک و سه هستند، پس برای رقم اول، ۷ حالت داریم زیرا سه مقدار ۰ و ۱ و ۳ را نمی‌پذیرد و برای بقیه ارقام ۸ حالت داریم. زیرا تنها دو مقدار ۱ و ۳ را نمی‌پذیرند. پس:

$$|A_1 \cap A_2| = ۷\times۸\times۸\times۸\times۸=۷\times۸^۴$$

به طریق مشابه داریم:

$$|A_1 \cap A_2| = |A_2 \cap A_3| = ۷\times۸^۴$$

حال باید $|A_1 \cap A_2 \cap A_3|$ را به دست آوریم:

مجموعه $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ شامل اعداد پنج رقمی فاقد رقم ۱ و ۳ و ۷ است. پس رقم اول ۶ حالت دارد زیرا ارقام ۰ و ۱ و ۳ و ۷ را نمی‌پذیرد و بقیه ارقام ۷ حالت دارند، پس:

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = ۶\times۷\times۷\times۷\times۷=۶\times۷^۴$$

بنابراین جواب مطلوب از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$|\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}| = |S| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3|$$

$$= |S| -(|A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|)$$

$$=۹۰۰۰۰-(۸\times۹^۴+۸\times۹^۴+۸\times۹^۴-۷\times۸^۴-۷\times۸^۴-۷\times۸^۴+۶\times۷^۴)$$

$$=۹۰۰۰۰-(۳\times۸\times۹^۴-۳\times۷\times۸^۴+۶\times۷^۴) = ۹۰۰۰۰-(۱۵۷۴۶۴-۸۶۰۱۶+۱۴۴۰۶)=۴۱۳۸$$

۱۴ـ در یک نظرخواهی از ۱۰۰ نفر دانش‌آموز نتایج زیر به دست آمده است: ۶۰ نفر آنها مجلهٔ A را می‌خوانند، ۵۰ نفر مجلهٔ B، ۵۰ نفر مجله C، ۳۰ نفر مجله‌های A و B، ۲۰ نفر مجله‌های B و C، ۴۰ نفر مجله‌های A و C و بالاخره ۱۰ نفر هر سه مجلهٔ A و B و C را می‌خوانند. مطلوب است تعداد دانش‌آموزانی که:

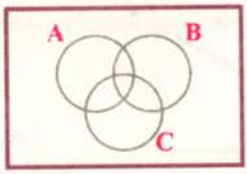
الف) هیچ مجله‌ای نمی‌خوانند؛

ب) دقیقاً ۲ مجله می‌خوانند؛

پ) حداقل ۲ مجله می‌خوانند؛

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

با توجه به نمودار ون داریم:



$|A|=۶۰, |B|=۵۰, |C|=۵۰$

$|A\cap B|=۳۰, |A\cap C|=۴۰, |B\cap C|=۲۰$

$|A\cap B\cap C|=۱۰$

الف) $|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$

$=۶۰+۵۰+۵۰-۳۰-۴۰-۲۰+۱۰=۸۰$

جواب مطلوب عبارت است از: $|\overline{A\cup B\cup C}|=|S|-|A\cup B\cup C|=۱۰۰-۸۰=۲۰$

ب) با توجه به نمودار ون، تعداد افرادی که دقیقاً ۲ مجله می‌خوانند برابر است با:

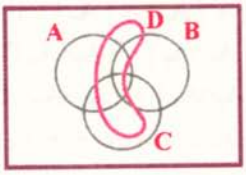
$|A\cap B|+|A\cap C|+|B\cap C|-۳|A\cap B\cap C|=۳۰+۴۰+۲۰-۳۰=۶۰$

پ) با توجه به نمودار ون، تعداد افرادی که حداقل ۲ مجله می‌خوانند، علاوه بر تعداد افراد به دست آمده در حالت (ب) ، تعداد عضوهای $A\cap B\cap C$ را نیز شامل می‌شود، داریم:

$|A\cap B|+|A\cap C|+|B\cap C|-۲|A\cap B\cap C|=۳۰+۴۰+۲۰-۲۰=۷۰$

۱۵ـ الف) اصل شمول و عدم شمول را در حالت چهارمجموعه بنویسید و آن‌را اثبات کنید.

ب) در منطقه‌ای چهار روستا وجود دارد. قرار است راه‌هایی دو طرفه بین بعضی از روستاهاساخته شود به طوری که نهایتاً هیچ روستایی منفرد (یعنی بدون ارتباط با هیچ روستای دیگر) نماند. این کار به چند طریق امکان دارد؟



$|A\cup B\cup C\cup D|=|A|+|B|+|C|+|D|-|A\cap B|-|A\cap C|-|A\cap D|-|B\cap C|-$
$|B\cap D|-|C\cap D|+|A\cap B\cap C|+|A\cap B\cap D|+|A\cap C\cap D|+|B\cap C\cap D|-|A\cap B\cap C\cap D|$

x رامتعلق به S در نظر می‌گیریم. اگر x متعلق به هیچ‌یک از مجموعه‌های A ، B ، C و D نباشد، در این صورت در دو طرف رابطه صفر بار حساب می‌شود حال فرض می‌کنیم x به r مجموعه از مجموعه‌های A ، B ، C و D متعلق باشد یعنی $۱\le r\le ۴$ آن‌گاه x در طرف چپ رابطه یک بار حساب می‌شود و در طرف راست داریم:

اگر x متعلق به یک مجموعه باشد، یعنی $r=۱$ آن‌گاه x در طرف راست رابطه نیز یک بار به حساب می‌آید.

اگر x متعلق به دو مجموعه باشد، یعنی $r=۲$ آن‌گاه x، $۱-۱=۲$ بار به حساب می‌آید.

اگر x متعلق به سه مجموعه باشد، یعنی $r=۳$ آن‌گاه x، $۱-۳+۳=۱$ بار به حساب می‌آید.

اگر x متعلق به چهار مجموعه باشد، یعنی $r=۴$ آن‌گاه x، $۱-۴+۶-۴=۱$ بار به حساب می‌آید.

بنابراین رابطه همواره برقرار است.

ب) با استفاده از اصل طرد و شمول حل می‌کنیم.

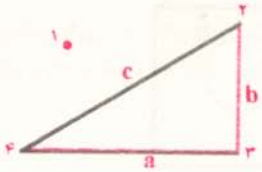
قرار می‌دهیم: $A_i=\{$راه‌هایی که روستای i در ان منفرد بماند$\}$ ؛ $i=۱, ۲, ۳, ۴$

حال باید $|A_i|$ یعنی تعداد راه‌هایی که روستای i ام در آن منفرد می‌ماند را حساب کنیم $(i=۱, ۲, ۳, ۴)$

برای محاسبه $|A_۱|$ با توجه به شکل زیر داریم:

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

برای هر یک از راه‌های a ، b و c ، دو حالت داریم؛ ساخته می‌شود یا ساخته نمی‌شود.



بنابراین: $|A_1| = ۲\times۲\times۲=۸$

به طریق مشابه داریم: $|A_2| = |A_3| = |A_4| = ۸$

حال باید تعداد راه‌هایی که روستای ۱ و روستای ۲ منفردمی‌مانند یعنی $|A_1\cap A_2|$ را محاسبه کنیم.

با توجه به شکل زیر داریم:

برای راه a ، دو حالت داریم: ساخته می‌شود یا ساخته نمی‌شود.

بنابراین: $|A_1\cap A_2| = ۲$

به طریق مشابه داریم: $|A_1\cap A_3| = |A_1\cap A_4| = |A_2\cap A_3| = |A_2\cap A_4| = |A_3\cap A_4| = ۲$

حال باید تعداد راه‌هایی که سه روستا منفرد هستند را به دست آوریم که در این حالت اگر سه روستا منفرد باشند، روستای چهارم نیز منفرد می‌ماند، پس:

$$|A_1\cap A_2\cap A_3| = |A_1\cap A_2\cap A_4| = |A_1\cap A_3\cap A_4| = |A_2\cap A_3\cap A_4| = ۱$$

در نتیجه داریم:

$$\begin{aligned}|A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4| &= |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| - |A_1\cap A_2| - |A_1\cap A_3| - |A_1\cap A_4| \\ &- |A_2\cap A_3| - |A_2\cap A_4| - |A_3\cap A_4| + |A_1\cap A_2\cap A_3| + |A_1\cap A_2\cap A_4| \\ &+ |A_1\cap A_3\cap A_4| + |A_2\cap A_3\cap A_4| - |A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4| \\ &=(۸+۸+۸+۸-۲-۲-۲-۲-۲-۲+۱+۱+۱+۱-۱)=۲۳\end{aligned}$$

حال باید تعداد کل حالت‌های ممکن را به دست آوریم.

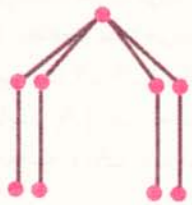
برای هر راه بین هر دو روستا ۲ حالت وجوددارد، ساخته می‌شود یا ساخته نمی‌شود. حال باید تعداد حالاتی که می‌توان دو روستا را انتخاب کرد را به دست آوریم، داریم:

تعداد حالاتی که می‌توان دو روستا انتخاب کرد $= \binom{۴}{۲} = ۶$

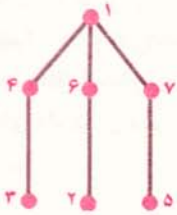
تعداد کل حالات $= ۲\times۲\times۲\times۲\times۲\times۲=۲^۶=۶۴$

بنابراین: تعداد حالات مطلوب $= |S| - |A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4| = ۶۴-۲۳=۴۱$

۱۶ـ برای درخت‌ها برچسب‌گذاری‌های مختلف تعریف می‌شود. یک برچسب‌گذاری دلپذیر برای یک درخت n رأسی عبارت است از نسبت دادن اعداد 1,2,3,....,n به رئوس آن، به طوری که برچسب یال‌ها n-1 عدد متمایز باشند و برچسب هر یال از قدرمطلق تفاضل برچسب رأس‌های دو انتهای آن به دست می‌آید. مثلاً در شکل ۶ (الف) یک برچسب‌گذاری دلپذیر را می‌بینیم.



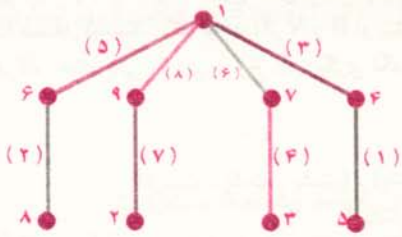
(ب)



(الف) یک برچسب گذاری دلپذیر

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

یک برچسب‌گذاری برای درخت شکل ۶ (ب) پیداکنید. حدس این است که در هر درخت یک برچسب‌گذاری دلپذیر دارد. ولی این حدس هنوز ثابت یا رد نشده است.



فصل ۸ احتمال

تمرین (صفحه‌ی ۹۱)

۱ـ جعبه‌ای محتوی ۳ مهرهٔ سفید و ۲ مهرهٔ سیاه است. متوالیاً دو مهره به تصادف از جعبه بدون جایگذاری برمی‌داریم.

الف) اگر اولین مهره سیاه باشد احتمال اینکه دومین مهره هم سیاه باشد چقدر است؟

ب) احتمال اینکه مهرهٔ دوم همرنگ مهرهٔ اول باشد چقدر است؟

الف)

A= پیشامد این‌که مهره اول سیاه باشد

B= پیشامد این‌که مهره دوم سیاه باشد

با استفاده از احتمال شرطی داریم:

$$P(B \mid A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{۲}{۵}\times\frac{۱}{۴}}{\frac{۲}{۵}}=\frac{۱}{۴}$$

ب)

$A_۱$ پیشامد این که مهره اول سفید باشد

$A_۲$ پیشامد این که مهره دوم سفید باشد

$B_۱$ پیشامد این که مهره اول سیاه باشد

$B_۲$ پیشامد این که مهره دوم سیاه باشد

A= پیشامد این که مهره دوم همرنگ مهره اول باشد

$$P(A)=P(A_۱\cap A_۲)+P(B_۱\cap B_۲)=P(A_۲ \mid A_۱).P(A_۱)+P(B_۲ \mid B_۱).P(B_۱)$$

$$=\frac{۲}{۴}\times\frac{۳}{۵}+\frac{۱}{۴}\times\frac{۲}{۵}=\frac{۶}{۲۰}+\frac{۲}{۲۰}=\frac{۸}{۲۰}=\frac{۲}{۵}$$

$$=\frac{۶}{۲۰}+\frac{۲}{۲۰}=\frac{۸}{۲۰}=\frac{۲}{۵}$$

۲ـ برحسب تجربهٔ گذشته می‌دانیم احتمال اینکه رتبهٔ اول سال آخر رشتهٔ ریاضی دبیرستانی در مسابقهٔ ورودی دانشگاه قبول شود ۰/۹۵ است. با توجه به سوابق تحصیلی علی در این دبیرستان، احتمال اینکه او در سال آخر رشتهٔ ریاضی دبیرستان رتبهٔ اول شود ۰/۹ است. احتمال اینکه علی هم رتبهٔ اول شود و هم در مسابقهٔ ورودی دانشگاه قبول شود چقدر است؟

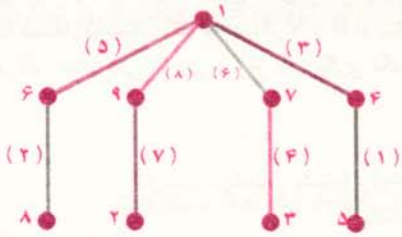
A= پیشامد این که علی رتبه اول شود

B= پیشامد این که علی در مسابقه ورودی دانشگاه قبول شود

$$P(A\cap B)=P(B \mid A).P(A)=۰/۹۵\times ۰/۹=۰/۸۵۵$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

یک برچسب‌گذاری برای درخت شکل ۶ (ب) پیداکنید. حدس این است که در هر درخت یک برچسب‌گذاری دلپذیر دارد. ولی این حدس هنوز ثابت یا رد نشده است.



فصل ۸ احتمال

تمرین (صفحه‌ی ۹۱)

۱ـ جعبه‌ای محتوی ۳ مهرهٔ سفید و ۲ مهرهٔ سیاه است. متوالیاً دو مهره به تصادف از جعبه بدون جایگذاری برمی‌داریم.

الف) اگر اولین مهره سیاه باشد احتمال اینکه دومین مهره هم سیاه باشد چقدر است؟

ب) احتمال اینکه مهرهٔ دوم همرنگ مهرهٔ اول باشد چقدر است؟

الف)

A= پیشامد این‌که مهره اول سیاه باشد

B= پیشامد این‌که مهره دوم سیاه باشد

با استفاده از احتمال شرطی داریم:

$$P(B \mid A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{۲}{۵}\times\frac{۱}{۴}}{\frac{۲}{۵}}=\frac{۱}{۴}$$

ب)

$A_۱$ پیشامد این که مهره اول سفید باشد

$A_۲$ پیشامد این که مهره دوم سفید باشد

$B_۱$ پیشامد این که مهره اول سیاه باشد

$B_۲$ پیشامد این که مهره دوم سیاه باشد

A= پیشامد این که مهره دوم همرنگ مهره اول باشد

$$P(A)=P(A_۱\cap A_۲)+P(B_۱\cap B_۲)=P(A_۲ \mid A_۱).P(A_۱)+P(B_۲ \mid B_۱).P(B_۱)$$

$$=\frac{۲}{۴}\times\frac{۳}{۵}+\frac{۱}{۴}\times\frac{۲}{۵}=\frac{۶}{۲۰}+\frac{۲}{۲۰}=\frac{۸}{۲۰}=\frac{۲}{۵}$$

$$=\frac{۶}{۲۰}+\frac{۲}{۲۰}=\frac{۸}{۲۰}=\frac{۲}{۵}$$

۲ـ برحسب تجربهٔ گذشته می‌دانیم احتمال اینکه رتبهٔ اول سال آخر رشتهٔ ریاضی دبیرستانی در مسابقهٔ ورودی دانشگاه قبول شود ۰/۹۵ است. با توجه به سوابق تحصیلی علی در این دبیرستان، احتمال اینکه او در سال آخر رشتهٔ ریاضی دبیرستان رتبهٔ اول شود ۰/۹ است. احتمال اینکه علی هم رتبهٔ اول شود و هم در مسابقهٔ ورودی دانشگاه قبول شود چقدر است؟

A= پیشامد این که علی رتبه اول شود

B= پیشامد این که علی در مسابقه ورودی دانشگاه قبول شود

$$P(A\cap B)=P(B \mid A).P(A)=۰/۹۵\times ۰/۹=۰/۸۵۵$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۳ـ سکه‌ای همگن را ۳ بار می‌اندازیم. اگر A پیشامد رخ دادن رو در دو پرتاب اول، B پیشامد رخ دادن پشت در پرتاب سوم، و C پیشامد رخ دادن دقیقاً دو پشت در سه پرتاب باشد، نشان دهید که A و B مستقل‌اند ولی B و C مستقل نیستند. **توجه:** اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه S باشند آن‌گاه دو پیشامد A و B را مستقل گویند هرگاه رخداد یکی تأثیری بر رخ داد دیگری نگذارد.

دو پیشامد A و B مستقل‌اند $\Leftrightarrow P(A\cap B)=P(A).P(B)$

A={(رو , رو , رو) , (رو , رو , پشت)}

B={(پشت , پشت , پشت) , (پشت , رو , پشت) , (پشت , پشت , رو) , (پشت , رو , رو)}

C={(پشت , پشت , رو) , (پشت , رو , پشت) , (رو , پشت , پشت)}

A∩B={(پشت , رو , رو)}

B∩C={(پشت , رو , پشت) , (پشت , پشت , رو)}

$n(S)=۲\times۲\times۲=۸$

$P(A)=\frac{۲}{۸}$ و $P(B)=\frac{۴}{۸}$ و $P(C)=\frac{۳}{۸}$

$P(A\cap B)=\frac{۱}{۸}, P(B\cap C)=\frac{۲}{۸}$

$P(A\cap B)=\frac{۱}{۸}=\frac{۲}{۸}\times\frac{۴}{۸}=P(A).P(B)$ پس دو پیشامد A و B مستقل‌اند.

$P(B\cap C)=\frac{۲}{۸}\neq\frac{۴}{۸}\times\frac{۳}{۸}=P(B).P(C)$ پس دو پیشامد B و C مستقل نیستند.

۴ـ احتمال زنده ماندن در یک عمل پیوند عضو برابر ۰/۵ است. اگر بیماری پس از عمل زنده باشد احتمال اینکه بدن او در طول یک ماه پیوند را قبول نکند وبمیرد ۰/۲ است. احتمال زنده ماندن یک بیمار پیوندی پس از این دو مرحله چقدر است؟

A= پیشامد زنده ماندن بیمار در عمل پیوند

B= پیشامد قبول کردن پیوند و زنده ماندن بیمار

$P(A\cap B)=P(B\mid A).P(A)=(۱-۰/۲)\times۰/۵=۰/۸\times۰/۵=۰/۴$

۵ـ جعبه‌ای شامل ۱۲ لامپ است که ۳ تای آنها معیوب‌اند. اگر به تصادف ۳ لامپ متوالیاً بدون جایگذاری از جعبه برداریم احتمال اینکه هر ۳ لامپ معیوب باشند چقدر است؟

$A_۱=$ **پیشامد این که لامپ اول معیوب باشد**

$A_۲=$ **پیشامد این که لامپ دوم معیوب باشد**

$A_۳=$ **پیشامد این که لامپ سوم معیوب باشد**

$P(A_۱\cap A_۲\cap A_۳)=P(A_۱).P(A_۲\mid A_۱).P(A_۳\mid A_۱\cap A_۲)=\frac{۳}{۱۲}\times\frac{۲}{۱۱}\times\frac{۱}{۱۰}=\frac{۱}{۲۲۰}$

۶ـ یک فضای نمونه‌ای متشکل از ۵ برآمد a ، b ، c ، d و e است. به شرط آن‌که $P(a)=\frac{۱}{۴}$ ، $P=(\{a,b,c\})=\frac{۱}{۲}$ مطلوب است.

الف) محاسبهٔ $P(\{b , c , d\}|\{a , b , c\})$

ب) محاسبهٔ $P(\{a\}|\{a , b , c\})$

الف) $P(\{a,b,c\})=P(a)+P(\{b,c\})$

$\{a,b,c\}\cap\{b,c,d\}=\{b,c\}$

$\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۴}+P(\{b,c\})\Rightarrow P(\{b,c\})=\frac{۱}{۴}$

$P(\{b,c,d\}\mid\{a,b,c\})=\frac{P(\{b,c\})}{P(\{a,b,c\})}=\frac{\frac{۱}{۴}}{\frac{۱}{۲}}=\frac{۱}{۲}$

$P(\{a\}|\{a,b,c\})=\frac{P\{a\}}{P(\{a,b,c\})}=\frac{\frac{۱}{۴}}{\frac{۱}{۲}}=\frac{۱}{۲}$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۷ـ ۴ مهره به شماره‌های ۱ ، ۲ ، ۳ و ۴ را در ظرفی ریخته‌ایم. اگر بخواهیم دو مهره به تصادف از ظرف بیرون بیاوریم شش امکان (۲ , ۱) , (۳ , ۱) , (۴ , ۱) , (۳ , ۲) , (۴ , ۲) , (۴ , ۳) وجود دارند. تفاضل هر دو شماره را R و مجموعه آنها را S فرض می‌کنیم.

الف) احتمال پیشامدی را که برای آن R=۲ ، به دست آورید.

ب) احتمال پیشامدی را که برای آن S=۵ ، به دست آورید.

آیا این پیشامدها مستقل‌اند؟

پ) اگر در قسمت الف R برابر یک باشد و در قسمت ب S همچنان ۵ باشد پیشامدها مستقل‌اند؟

الف) پیشامد این که تفاضل هر دو شماره برابر ۲ است $=A_1$

$A_1=\{(1,3),(2,4)\}$

$P(A_1)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

ب) پیشامد این که مجموعه هر دو شماره برابر ۵ است $=B_1$

$B_1=\{(1,4),(2,3)\}$

$P(B_1)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

$A_1\cap B_1=\emptyset\Rightarrow P(A_1\cap B_1)=0\neq\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=P(A_1)P(B_1)$ پس دو پیشامد A_1 و B_1 مستقل نیستند.

پ) پیشامد این که تفاضل هر دو شماره برابر ۱ است $=A_2$

$A_2=\{(1,2),(2,3),(3,4)\}$

$P(A_2)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

پیشامد این که مجموع هر دو شماره برابر ۵ است $=B_2$

$B_2=\{(1,4),(2,3)\}$

$P(B_2)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

$A_2\cap B_2=\{(2,3)\}\Rightarrow P(A_2\cap B_2)=\frac{1}{6}$

$P(A_2\cap B_2)=\frac{1}{6}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=P(A_2).P(B_2)$ بنابراین دو پیشامد A_2 و B_2 مستقل‌اند.

۸ـ در دو جعبه به ترتیب ۳۰ و ۲۰ عدد لامپ همانند وجود دارد. در جعبهٔ اول ۵ عدد لامپ معیوب و در جعبهٔ دوم ۳ عدد لامپ معیوب موجود است. از اولی ۱۰ لامپ و از دومی ۸ لامپ به تصادف انتخاب می‌کنیم و آنهارا به صورت درهم در جعبه‌ای جدید قرار می‌دهیم. از این جعبه به تصادف لامپی برمی‌داریم. احتمال اینکه این لامپ معیوب باشد چقدر است؟

$A=$ پیشامد این که لامپ انتخاب شده از جعبه جدید، معیوب باشد

$B=$ پیشامد اینکه لامپ انتخاب شده از جعبه جدید، متعلق به جعبه اول باشد

$C=$ پیشامد این که لامپ انتخاب شده از جعبه جدید، متعلق به جعبه دوم باشد

$$P(A)=P(A\mid B).P(B)+P(A\mid C).P(C)$$

$$=\frac{5}{30}\times\frac{10}{18}+\frac{3}{20}\times\frac{8}{18}=\frac{1}{18}\left(\frac{50}{30}+\frac{24}{20}\right)=\frac{1}{18}\left(\frac{5}{3}+\frac{6}{5}\right)$$

$$=\frac{1}{18}\times\frac{25+18}{15}=\frac{43}{270}$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۹ـ دو ظرف داریم. اولی شامل ۱۰ مهره سفید و ۸ مهرهٔ سیاه است و دومی شامل ۱۲ مهرهٔ سفید و ۹ مهرهٔ سیاه است. از ظرف اول به تصادف مهره‌ای درمی‌آوریم و در ظرف دوم قرار می‌دهیم. آنگاه از ظرف دوم به تصادف مهره‌ای درمی‌آوریم. احتمال اینکه این مهره سفید باشد چقدر است؟

$A_1=$ پیشامد این که مهره خارج شده از ظرف اول سفید باشد

$A_2=$ پیشامد این که مهره خارج شده از ظرف اول سیاه باشد

$A_3=$ پیشامد این که مهره خارج شده از ظرف دوم سفید باشد

$$P(A)=P(A\mid A_1).P(A_1)+P(A\mid A_2).P(A_2)$$

$$=\frac{13}{22}\times\frac{10}{18}+\frac{12}{22}\times\frac{8}{18}=\frac{226}{18\times 22}=\frac{113}{198}$$

۱۰ـ تکمیل بنای راهی ممکن است به دلیل اعتصاب کارگران به تأخیر افتد. فرض کنید احتمال اینکه اعتصابی رخ دهد ۰/۶۵ باشد و احتمال اینکه اگر اعتصابی نباشد کار به موقع انجام شود ۰/۸ و احتمال اینکه اگر اعتصابی باشد کار به موقع انجام شود ۰/۳ باشد. احتمال اینکه کار بنای راه به موقع انجام شود چقدر است؟

$A=$ پیشامد آن‌که اعتصابی رخ دهد

$B=$ پیشامد آن که کاربنای راه به موقع انجام شود

$$P(\overline{A})=1-P(A)=1-0/65=0/35$$

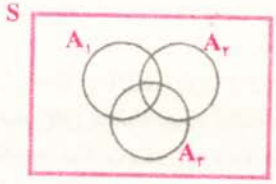
$$P(B)=P(B\mid A).P(A)+P(B\mid \overline{A}).P(\overline{A})$$

$$=0/3\times 0/65+0/8\times 0/35=0/195+0/280=0/475$$

۱۱ـ اگر A_1, A_2, A_3 سه پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند ثابت کنید:

$$P(A_1\cup A_2\cup A_1)\le P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)$$

روش اول: با استفاده از نمودار ون وبه طور شهودی داریم:



داریم: $n(A_1\cup A_2\cup A_3)\le n(A_1)+n(A_2)+n(A_3)$

حال طرفین نامساوی را بر $n(S)$ تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{n(A_1\cup A_2\cup A_3)}{n(S)}\le\frac{n(A_1)}{n(S)}+\frac{n(A_2)}{n(S)}+\frac{n(A_3)}{n(S)}\Rightarrow P(A_1\cup A_2\cup A_3)\le P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)$$

روش دوم:

$$\begin{aligned}P(A_1\cup A_2\cup A_3)&=P\left[A_1\cup(A_2\cup A_3)\right]=P(A_1)+P(A_2\cup A_3)-P\left[A_1\cap(A_2\cap A_3)\right]\\&=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_2\cap A_3)-P\left[(A_1\cap A_2)\cup(A_1\cap A_3)\right]\\&=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_2\cap A_3)-(P(A_1\cap A_2)+P(A_1\cap A_3)\\&\quad-P(A_1\cap A_2\cap A_3))=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_2\cap A_3)-P(A_1\cap A_2)\\&\quad-P(A_1\cap A_3)+P(A_1\cap A_2\cap A_3)\end{aligned}$$

چون $A_1\cap A_2\cap A_3\subseteq A_1\cap A_2$ پس:

$$P(A_1\cap A_2\cap A_3)\le P(A_1\cap A_2)$$

$$P(A_1\cap A_2\cap A_3)\le P(A_1\cap A_2)+P(A_1\cap A_3)+P(A_2\cap A_3)$$

$$\Rightarrow P(A_1\cap A_2\cap A_3)-P(A_1\cap A_2)-P(A_1\cap A_3)-P(A_2\cap A_3)\le 0$$

$$\Rightarrow P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1\cap A_2)-P(A_1\cap A_3)-P(A_2\cap A_3)+P(A_1\cap A_2\cap A_3)$$

$$\le P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)$$

$$\Rightarrow P(A_1\cup A_2\cup A_3)\le P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۲ـ اگر B_1, B_2, B_3 سه پیشامد از فضای نمونه‌ای S و با احتمال مثبت باشند، $P(B_3 \mid B_2 \cap B_1)$ به معنای احتمال رخداد پیشامد B_3 به شرط رخداد هر دو پیشامد B_1, B_2 است. بااین تعریف ثابت کنید.

$$P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = P(B_1)P(B_2 \mid B_1)P(B_3 \mid B_2 \cap B_1)$$

$$P(B_3 \mid B_2 \cap B_1) = \frac{P(B_1 \cap B_2 \cap B_3)}{P(B_1 \cap B_2)} = \frac{P(B_1 \cap B_2 \cap B_3)}{P(B_2 \mid B_1).P(B_1)}$$

$$\Rightarrow P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = P(B_1).P(B_2 \mid B_1).P(B_3 \mid B_1 \cap B_2)$$

۱۳ـ اگر B_1, B_2, B_3 سه پیشامد دو به دو ناسازگار و با احتمال مثبت باشند که اجتمال آنها برابر با S است و اگر A پیشامدی از S باشد ثابت کنید:

$$P(B_1 \mid A) = \frac{P(A \mid B_1)P(B_1)}{\sum_{i=1}^{3} P(A \mid B_i)P(B_i)}, i = 1, 2, 3$$

چون فضای نمونه S به سه پیشامد B_1, B_2, B_3 افراز شده است و A پیشامدی از S است پس طبق فرمول احتمال کل داریم:

$$P(A) = P(A|B_1).P(B_1) + P(A|B_2).P(B_2) + P(A|B_3).P(B_3)$$

بنابراین:

$$P(B_1|A) = \frac{P(A \cap B_1)}{P(A)} = \frac{P(A|B_1).P(B_1)}{\sum_{i=1}^{3} P(A|B_i)P(B_i)}$$

فصل ۹ توزیع های گسسته ی احتمال

تمرین (صفحه‌ی ۱۰۳)

۱ـ پنج سکهٔ منصف را با هم پرتاب می‌کنیم:

الف) فضای نمونه‌ای را بنویسید.

ب) یک متغیرتصادفی تعریف کنید که تعداد «شیرها» را نشان دهد.

پ) تابع احتمال متغیر تصادفی بند ب را بنویسید.

الف)

S={(خط , شیر , شیر , شیر , شیر) , (شیر , شیر , شیر , شیر , شیر)
(شیر , شیر , خط , شیر , شیر) , (شیر , خط , شیر , شیر , شیر)
(خط , خط , خط , خط , خط) , (شیر , خط , خط , خط , خط)}

چون برای هر سکه دو برآمد ممکن شیر یا خط را داریم، پس تعداد اعضای فضای نمونه S برابر است با:

$$n(S) = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5 = 32$$

ب) تعداد شیرهای مشاهده شده در پرتاب پنج سکه =X

به طوری که متغیر تصادفی X می‌تواند مقادیر ۰ ، ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ و ۵ را اختیار کند.

پ) تابع احتمال متغیر تصادفی X بند (ب) به صورت زیر است:

$$P_i = P(X = x_i) = \frac{\binom{5}{x_i}}{32}, i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

x_i	۰	۱	۲	۳	۴	۵
$P_i = P(X = x_i)$	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۲ـ اگر B_1, B_2, B_3 سه پیشامد از فضای نمونه‌ای S و با احتمال مثبت باشند، $P(B_3 \mid B_2 \cap B_1)$ به معنای احتمال رخداد پیشامد B_3 به شرط رخداد هر دو پیشامد B_1, B_2 است. بااین تعریف ثابت کنید.

$$P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = P(B_1)P(B_2 \mid B_1)P(B_3 \mid B_2 \cap B_1)$$

$$P(B_3 \mid B_2 \cap B_1) = \frac{P(B_1 \cap B_2 \cap B_3)}{P(B_1 \cap B_2)} = \frac{P(B_1 \cap B_2 \cap B_3)}{P(B_2 \mid B_1).P(B_1)}$$

$$\Rightarrow P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = P(B_1).P(B_2 \mid B_1).P(B_3 \mid B_1 \cap B_2)$$

۱۳ـ اگر B_1, B_2, B_3 سه پیشامد دو به دو ناسازگار و با احتمال مثبت باشند که اجتمال آنها برابر با S است و اگر A پیشامدی از S باشد ثابت کنید:

$$P(B_1 \mid A) = \frac{P(A \mid B_1)P(B_1)}{\sum_{i=1}^{3} P(A \mid B_i)P(B_i)}, i = 1, 2, 3$$

چون فضای نمونه S به سه پیشامد B_1, B_2, B_3 افراز شده است و A پیشامدی از S است پس طبق فرمول احتمال کل داریم:

$$P(A) = P(A|B_1).P(B_1) + P(A|B_2).P(B_2) + P(A|B_3).P(B_3)$$

بنابراین:

$$P(B_1|A) = \frac{P(A \cap B_1)}{P(A)} = \frac{P(A|B_1).P(B_1)}{\sum_{i=1}^{3} P(A|B_i)P(B_i)}$$

فصل ۹ توزیع های گسسته ی احتمال

تمرین (صفحه‌ی ۱۰۳)

۱ـ پنج سکهٔ منصف را با هم پرتاب می‌کنیم:

الف) فضای نمونه‌ای را بنویسید.

ب) یک متغیرتصادفی تعریف کنید که تعداد «شیرها» را نشان دهد.

پ) تابع احتمال متغیر تصادفی بند ب را بنویسید.

الف)

S={(خط , شیر , شیر , شیر , شیر) , (شیر , شیر , شیر , شیر , شیر)
(شیر , شیر , خط , شیر , شیر) , (شیر , خط , شیر , شیر , شیر)
(خط , خط , خط , خط , خط) , (شیر , خط , خط , خط , خط)}

چون برای هر سکه دو برآمد ممکن شیر یا خط را داریم، پس تعداد اعضای فضای نمونه S برابر است با:

$$n(S) = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5 = 32$$

ب) تعداد شیرهای مشاهده شده در پرتاب پنج سکه =X

به طوری که متغیر تصادفی X می‌تواند مقادیر ۰ ، ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ و ۵ را اختیار کند.

پ) تابع احتمال متغیر تصادفی X بند (ب) به صورت زیر است:

$$P_i = P(X = x_i) = \frac{\binom{5}{x_i}}{32}, i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

x_i	۰	۱	۲	۳	۴	۵
$P_i = P(X = x_i)$	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۲ـ دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. متغیر تصادفی x را مجموع دو عدد ظاهر شده در روی دو تاس تعریف می‌کنیم.

الف) فضای نمونه‌ای این آزمایش را بنویسید.

ب) تابع احتمال x را به دست آورید.

پ) احتمال این‌که $x\leq ۷$ باشد چقدر است؟

الف) $S=\{(۱,۱),(۱,۲),...,(۱,۶),(۲,۱),...,(۲,۶),...,(۶,۶)\}$

چون برای هر تاس شش حالت ممکن را داریم. پس تعداد اعضای فضای نمونه برابر است با: $n(S)=۶\times۶=۳۶$

ب) مجموع دو عدد ظاهر شده در روی دو تاس $=X$

به طوری که متغیر تصادفی X می‌تواند مقادیر ۲ , ۳ , ۴ ,..., ۱۲ را بپذیرد.

تابع احتمال X به صورت زیر است:

$$P_i=P(X=x_i)=\frac{۶-|x_i-۷|}{۳۶};x_i=۲,...,۱۲$$

x_i	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
$P_i=P(X=x_i)$	$\frac{۱}{۳۶}$	$\frac{۲}{۳۶}$	$\frac{۳}{۳۶}$	$\frac{۴}{۳۶}$	$\frac{۵}{۳۶}$	$\frac{۶}{۳۶}$	$\frac{۵}{۳۶}$	$\frac{۴}{۳۶}$	$\frac{۳}{۳۶}$	$\frac{۲}{۳۶}$	$\frac{۱}{۳۶}$

پ) $P(X\leq ۷)=P(X=۲)+P(X=۳)+P(X=۴)+P(X=۵)+P(X=۶)+P(X=۷)$

$$\frac{۱}{۳۶}+\frac{۲}{۳۶}+\frac{۳}{۳۶}+\frac{۴}{۳۶}+\frac{۵}{۳۶}+\frac{۶}{۳۶}=\frac{۲۰}{۳۶}=\frac{۵}{۹}$$

۳ـ یک تاس پرتاب می‌کنیم. متغیر تصادفی x را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$x=\begin{cases}۱ & \text{اگر عدد فرد بیاید،}\\ ۲ & \text{اگر عدد زوج بیاید،}\end{cases}$$

الف) تابع احتمال x را بیابید.

ب) آیا x یک متغیر تصادفی برنولی است؟

الف)

$$\begin{cases}P(X=۱)=\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲}\\ P(X=۲)=\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲}\end{cases}$$

$$P(X=x_i)=\frac{۱}{۲};x_i=۱,۲$$

x_i	۱	۲
$P_i=P(X=x_i)$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$

ب) p : احتمال زوج آمدن $P(X=۲)$

q : احتمال فرد آمدن $P(X=۱)$

چون متغیر تصادفی X تنها دو مقدار ۱ و ۲ را می‌پذیرد و تابع احتمال آن به صورت $P(X=i)=\begin{cases}(\frac{۱}{۲})^i(\frac{۱}{۲})^{۱-i}:i=۱,۲\\ ۰ \quad \text{به ازای سایر مقادیر:}\end{cases}$ است پس X یک متغیر تصادفی برنولی است.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۴ـ سکه‌ای منصف را آنقدر پرتاب می‌کنیم تا «شیر» بیاید.

الف) فضای نمونه‌ای این آزمایش را بنویسید.

ب) یک متغیر تصادفی تعریف کنید که براساس آن بتوان احتمال شیر آمدن را محاسبه کرد.

پ) احتمال اینکه اولین بار در آزمایش صدم شیر ظاهر شود چقدر است؟

الف) $S=\{\text{شیر}, \underbrace{\text{خط خط}}_{n\ \text{تا}}, \text{خط خط خط}, \text{خط خط}, \text{خط}, \dots ; n\geq ۰$

ب) تعداد رخدادهای خط تا آمدن اولین شیر $=X$

تابع احتمال متغیر تصادفی X عبارت است از:

$$P(X=x_i)=(\frac{۱}{۲})^{x_i} ; x_i=۰,۱,۲,\dots$$

پ)

$$x_i=۹۹ \Rightarrow P(X=۹۹)=(\frac{۱}{۲})^{۹۹}$$

۵ـ توزیع احتمال متغیر تصادفی x به صورت زیر مشخص می‌شود:

$$P(X=i)=\frac{i}{i^۲+۳} \quad i=۱,۲,۳$$

$$P(X=j)=\frac{۱}{۱۴} \quad j=۴,۵,۶$$

الف) جدول توزیع x را بسازید.

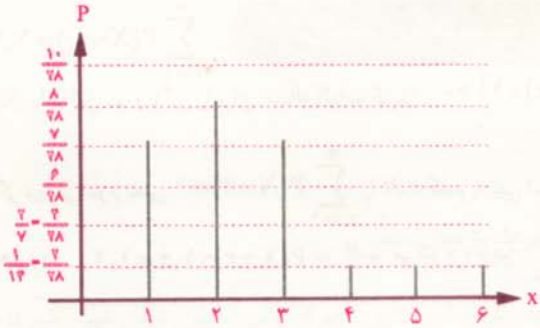
ب) نمودار توزیع را رسم کنید.

پ) مقدار $P(X\geq ۳)$ را حساب کنید.

الف) جدول توزیع احتمال X به صورت زیر است:

x_i	۱	۲	۳	۴	۵	۶
$P_i=P(X=x_i)$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۲}{۷}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۱۴}$	$\frac{۱}{۱۴}$	$\frac{۱}{۱۴}$

ب) نمودار توزیع احتمال X به صورت زیر است:



پ)

$$P(X\geq ۳)=P(X=۳)+P(X=۴)+P(X=۵)+P(X=۶)$$

$$=\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۱۴}+\frac{۱}{۱۴}+\frac{۱}{۱۴}=\frac{۷+۶}{۲۸}=\frac{۱۳}{۲۸}$$

۶ـ احتمال اینکه فردی مسن مبتلا به دیابت باشد $\frac{۱}{۸۰}$ است. در روستایی مردان مسن را تحت آزمایش قرار می‌دهند. اگر متغیر تصادفی X را برابر با تعداد افرادی تعریف کنیم که به ترتیب آزمایش می‌شوند تا اولین فرد دیابتی مشخص شود، تابع احتمال متغیر X را به دست آورید. احتمال اینکه دومین نفر دیابتی باشد چقدر است؟

تذکر: اگر یک آزمایش برنولی راآنقدر تکرار کنیم تا برای اولین بار یک پیروزی مشاهده شود و متغیر تصادفی X تعداد آزمایش‌های لازم تا مشاهده اولین پیروزی باشد آن‌گاه X را متغیر تصادفی هندسی می‌گویند و تابع احتمال آن به صورت زیر است:

P= احتمال پیروزی در یک آزمایش برنولی $(۰<P<۱)$

x= تعداد آزمایش‌های لازم تا مشاهده اولین پیروزی

$$P(X=x)=(۱-P)^{x-۱}.P$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

بنابراین تابع احتمال X در این مسأله به صورت $P(X=n)=(\frac{۷۹}{۸۰})^{n-۱}(\frac{۱}{۸۰})$ می‌باشد.

احتمال این که دومین نفر دیابتی باشد، برابر است با: $P(X=۲)=(\frac{۷۹}{۸۰})\times(\frac{۱}{۸۰})=\frac{۷۹۰}{۶۴۰۰}$

۷ـ فضای نمونه‌ای یک آزمایش تصادفی ۳ برآمد دارد اگر احتمال‌های متناظر با ۳ برآمد به ترتیب $\frac{۱}{۳}$، $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۶}$ باشد متغیری تصادفی روی این فضا تعریف کنید. فرض می‌کنیم درون کیسه‌ای ۲ مهره قرمز و ۳ مهره سفید و یک مهره سیاه وجود داشته باشد. حال یک مهره به تصادف از کیسه خارج می‌کنیم. متغیر تصادفی X را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$X=\begin{cases} ۰ & \text{مهره خارج شده، قرمز باشد} \\ ۱ & \text{مهره خارج شده سفید باشد} \\ ۲ & \text{مهره خارج شده سیاه باشد} \end{cases}$$

جدول توزیع احتمال X به صورت زیر است:

x_i	۰	۱	۲
$P_i=P(X=x_i)$	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۶}$

۸ـ نشان دهید که تابع زیر یک تابع احتمال است.

$$P(X=x)=\frac{۱}{n^۲}\left[۲(n-x)+۱\right]\quad n,x=۱,۲,...,n$$

هر تابع احتمال مربوط به متغیر تصادفی گسسته X که متناهی باشد دارای ویژگی‌های زیر است:

۱ـ $۰\le P(X=x_i)\le ۱ \quad i=۱,۲,...,n$

۲ـ $\sum_{i=۱}^{n} P(X=x_i)=۱$

حال باید این دو ویژگی را برای مسأله اثبات کنیم: $n\ge x\Rightarrow n-x\ge ۰\Rightarrow ۲(n-x)+۱\ge ۰\Rightarrow \frac{۱}{n^۲}\left[۲(n-x)+۱\right]\ge ۰$

$\Rightarrow P(X=x)\ge ۰\,;x=۱,۲,...,n$

اگر ویژگی دوم یعنی $\sum_{x=۱}^{n} P(X=x)=۱$ را ثابت کنیم بدیهی است که هر یک از آنها کوچکتر یا مساوی یک است یعنی $P(X=x)\le ۱, x=۱,۲,...,n$ نیز ثابت می‌شود. داریم:

$$\sum_{x=۱}^{n} P(X=x)=\sum_{x=۱}^{n}\frac{۱}{n^۲}\left[۲(n-x)+۱\right]$$

$$=\frac{۱}{n^۲}\left[۲(n-۱)+۱\right]+\frac{۱}{n^۲}\left[۲(n-۲)+۱\right]+...+\frac{۱}{n^۲}\left[۲(n-n)+۱\right]$$

$$=\frac{۱}{n^۲}\left[۲(n-۱)+(n-۲)+...+(n-n)+n\right]$$

$$=\frac{۱}{n^۲}\left[۲\left[(n-۱)+(n-۲)+...+۰\right]+n\right]$$

$$=\frac{۱}{n^۲}\left[۲\frac{n((n-۱)+۰)}{۲}+n\right]$$

$$=\frac{۱}{n^۲}(n^۲-n+n)=۱$$

چون تابع داده شده هر دو ویژگی تابع احتمال را دارد، بنابراین یک تابع احتمال است.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا