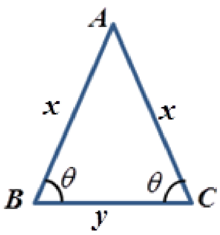
حل تمرین در کلاس صفحه ۱۷۸ کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال چاپ ۱۳۹۱

(به روش مثلثاتی)

مسئله: نشان دهید که در بین همه مثلث های متساوی الساقین که محیط یکسانی دارند مثلث متساوی الاضلاع دارای بیشترین مساحت است.



حل) رابطه سینوس ها در مثلث : $\frac{BC}{SinA}=\frac{AC}{SinB}=\frac{AB}{SinC}$.

درمثلث متساوی الساقین مقابل با فرض $x+x+y=m$, $B=C=\theta \Rightarrow A=۱۸۰-۲\theta$ **داریم:**

$$\frac{x}{Sin\theta}=\frac{x}{Sin\theta}=\frac{y}{Sin(۱۸۰-۲\theta)}=\frac{۲x+y=m}{۲Sin\theta+Sin۲\theta}\Rightarrow x=\frac{mSin\theta}{۲Sin\theta+۲Sin\theta Cos\theta}=\frac{m}{۲+۲Cos\theta}$$

$$S=\frac{۱}{۲}x^{۲}SinA=\frac{۱}{۸}\times\frac{m^{۲}Sin۲\theta}{(۱+Cos\theta)^{۲}}\Rightarrow S'=\frac{m^{۲}}{۸}\times\frac{۲Cos۲\theta(۱+Cos\theta)^{۲}+۲Sin\theta(۱+Cos\theta)Sin۲\theta}{(۱+Cos\theta)^{۴}}$$

$$=\frac{m^{۲}}{۸}\times\frac{۲(۱+Cos\theta)(Cos۲\theta(۱+Cos\theta)+Sin\theta Sin۲\theta)}{(۱+Cos\theta)^{۴}}=\frac{m^{۲}}{۸}\times\frac{۲(۱+Cos\theta)(Cos۲\theta+Cos۲\theta Cos\theta+Sin\theta Sin۲\theta)}{(۱+Cos\theta)^{۴}}$$

$$=\frac{m^{۲}}{۸}\times\frac{۲(۱+Cos\theta)(Cos۲\theta+Cos(\overset{\theta}{\cancel{۲\theta-\theta}}))}{(۱+Cos\theta)^{۴}}$$

$$S'=۰\Rightarrow\begin{cases}۱+Cos\theta=۰\Rightarrow\cancel{\theta=۱۸۰}\\ Cos۲\theta+Cos\theta=۰\Rightarrow Cos۲\theta=Cos(۱۸۰-\theta)\Rightarrow\theta=۶۰^{o}\end{cases}$$

با تشکر از استاد مهدی مشعلچیان (دبیر بازنشسته – ناحیه ۲ ساری)