حل المسائل فصل چهارم

درس حساب دیفرانسیل و انتگرال

دورهٔ پیش دانشگاهی - رشتهٔ علوم ریاضی

به کوشش استاد پرویز رضایی

مدرس دوره ضمن خدمت دروس ریاضی۱، ریاضی۲، حسابان و حساب دیفرانسیل و انتگرال (در استان فارس)

حل تمرین در کلاس صفحه ۲۱۸

حالت اول:

این تمرین به یکی از دو صورت زیر می باشد. (توان ۳ اضافی می باشد)

$$\sum_{i=a+1}^{12} f(b+i) = \sum_{i=a+1+b}^{12+b} f(i) = \sum_{i=1}^{12+b} f(i) - \sum_{i=1}^{a+b} f(i)$$

حالت دوم: (f اضافی می باشد)

$$\sum_{i=a+1}^{12} (b+i)^3 = \sum_{i=1}^{12-a} (b+i+a)^3 = \sum_{i=1}^{12-a} f(i)$$

حل تمرین دیگر کلاس صفحه ۲۲۲

(1) $\sum_{i=1}^{4} i^3 = 1^3+2^3+3^3+4^3$

(2) $\sum_{j=1}^{100} \frac{j^3}{j+1} = \frac{1^3}{1+1}+\frac{2^3}{2+1}+\frac{3^3}{3+1}+\dots+\frac{100^3}{100+1}$

(3) $\sum_{j=1}^{n} 3j = 3(1)+3(2)+3(3)+\dots+3(n)$

(4) $\sum_{i=1}^{n-1} \frac{(-1)^i}{i+1} = \frac{(-1)^1}{1+1}+\frac{(-1)^2}{2+1}+\dots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}$

(5) $\sum_{i=3}^{n} \frac{(-2)^i}{(i+2)^2} = \frac{(-2)^3}{5^2}+\frac{(-2)^4}{6^2}+\dots+\frac{(-2)^n}{(n+2)^2}$

(6) $\sum_{j=1}^{n} \frac{j^2}{n^3} = \frac{1^2}{n^3}+\frac{2^2}{n^3}+\dots+\frac{n^2}{n^3}$

(7) $\sum_{n=1}^{K} \sin\frac{n\pi}{3K} = \sin\frac{\pi}{3K}+\sin\frac{2\pi}{3K}+\dots+\sin\frac{K\pi}{3K}$

(8) $\sum_{k=2}^{n} \frac{e^{-k}}{nk} = \frac{e^{-2}}{2n}+\frac{e^{-3}}{3n}+\dots+\frac{e^{-n}}{n^2}$

(9) $= \sum_{K=5}^{9} K$ (10) $\sum_{K=1}^{200} 2$ (11) $\sum_{K=1}^{98} (-1)^{K+1}(K+1)^2$

(12) $\sum_{K=1}^{100} K x^{K-1}$ (13) $\sum_{K=0}^{n} x^K$ (14) $\sum_{K=0}^{2n} (-1)^K x^K$

(15) $\sum_{K=1}^{n} \frac{(-1)^{K-1}}{K^2}$ (16) $\sum_{K=1}^{n} \frac{K}{2^K}$

حل تمرین در کلاس صفحه ۲۲۷

(1) ابتدا لم زیر را مطرح می کنیم

$$\lim_{x\to 0} \frac{p^{Kx}-1}{p^{Kx+K}-1} = \frac{K}{K+1}$$

اثبات لم

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{p^{Kx}-1}{x-0}}{\frac{p^{(K+1)x}-1}{x-0}} = \frac{(p^{Kx})'\big|_{x=0}}{(p^{(K+1)x})'\big|_{x=0}} = \frac{K p^{Kx} \cancel{\ln p}\big|_{x=0}}{(K+1) p^{(K+1)x} \cancel{\ln p}\big|_{x=0}} = \frac{K}{K+1}$$

حال به حل مساله می پردازیم

$$x_i = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{i}{n}}$$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f\left(a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{i}{n}}\right)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} a^K\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{Ki}{n}}\left(a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{i}{n}} - a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{i-1}{n}}\right)$$

$$= a^{K+1}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{Ki}{n}}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{i}{n}}\left(1-\left(\frac{b}{a}\right)^{-\frac{1}{n}}\right) = a^{K+1}\left(1-\left(\frac{b}{a}\right)^{-\frac{1}{n}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{(K+1)i}{n}}$$

$$= a^{K+1}\left(1-\left(\frac{b}{a}\right)^{-\frac{1}{n}}\right)\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{K+1}{n}}\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{K+1}-1\right)}{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{K+1}{n}}-1} =$$

ادامه در صفحه بعد

(۲)

$$(k+1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left((k+1)^4 - k^4\right) = 4\sum_{k=1}^{n} k^3 + 6\sum_{k=1}^{n} k^2 + 4\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1$$

$$\Rightarrow (n+1)^4 - 1 = 4\sum_{k=1}^{n} k^3 + 6\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 4\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) + n$$

$$\Rightarrow (n+1)^4 - 1 = 4\sum_{k=1}^{n} k^3 + n(n+1)(2n+1) + 2n(n+1) + n$$

$$\Rightarrow n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1 - 1 = 4\sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)(2n^2 + n + 2n) + n$$

$$\Rightarrow 4\sum_{k=1}^{n} k^3 = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + \cancel{4n} - 2n^3 - 3n^2 - 2n^2 - \cancel{3n} - \cancel{n}$$

$$4\sum_{k=1}^{n} k^3 = n^4 + 2n^3 + n^2 = n^2(n^2 + 2n + 1) = n^2(n+1)^2$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2$$

(۳)

$$\Delta x = \frac{b-0}{n} = \frac{b}{n} \qquad x_i = x_0 + i\Delta x = 0 + \frac{bi}{n}$$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} x_i^3 \Delta x = \frac{b}{n}\sum \frac{b^3 i^3}{n^3} = \frac{b^4}{n^4}\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{b^4}{n^4}\times\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$= \frac{b^4(n+1)^2}{4n^2} \qquad A = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{4}b^4$$

$$= a^{k+1}\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{k+1} - 1\right) \times \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k+1}{n}}\left(1 - \left(\frac{b}{a}\right)^{-1/n}\right)}{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k+1}{n}} - 1} = \left(b^{k+1} - a^{k+1}\right)\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k+1}{n}} - \left(\frac{b}{a}\right)^{k/n}}{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k+1}{n}} - 1}$$

$$A = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(b^{k+1} - a^{k+1}\right)\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k+1}{n}} - \left(\frac{b}{a}\right)^{k/n}}{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k+1}{n}} - 1}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(b^{k+1} - a^{k+1}\right)\frac{\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k+1}{n}} - 1\right) - \left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k}{n}} - 1\right)}{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k+1}{n}} - 1}$$

$$= \left(b^{k+1} - a^{k+1}\right)\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{k/n} - 1}{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k+1}{n}} - 1}\right) = \left(b^{k+1} - a^{k+1}\right)\left(1 - \lim_{t\to 0}\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{kt} - 1}{\left(\frac{b}{a}\right)^{kt+t} - 1}\right)$$

$$\underset{\text{طبق هم}}{=} \left(b^{k+1} - a^{k+1}\right)\left(1 - \frac{k}{k+1}\right) = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1}$$

(روش دوم برای حل این تمرین در سایت ریاضی سرای جناب آقای استاد اسدی قرار گرفته است تحت عنوان حل دو مسئله مشکل از دیفرانسیل ۹۱)

همین جا، از جناب آقای اسدی تشکر می‌نمایم. (رضایی)

① $f(x)=3x \quad [0,1] \quad \Delta x=\frac{1-0}{n}=\frac{1}{n}$: ص ۲۲۹

$x_i=0+i\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{i}{n} \qquad S_n=\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x=\sum_{i=1}^{n}\frac{3i}{n}\times\frac{1}{n}=\frac{3}{n^2}\times\frac{n(n+1)}{2}$

$\Rightarrow S_n=\frac{3(n+1)}{2n} \qquad \lim_{n\to\infty} S_n=\frac{3}{2}$

② $f(x)=2x+1 \quad [0,3] \quad \Delta x=\frac{3-0}{n}=\frac{3}{n}$

$x_i=0+i\left(\frac{3}{n}\right)=\frac{3i}{n} \qquad S_n=\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{3i}{n}\right)\frac{3}{n}=\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{6i}{n}+1\right)$

$=\frac{3}{n}\left(\frac{6}{n}\times\frac{n(n+1)}{2}+n\right)=\frac{18(n+1)}{2n}+3 \qquad \lim_{n\to\infty} S_n=9+3=12$

③ $f(x)=2x-1 \quad [1,3] \quad \Delta x=\frac{3-1}{n}=\frac{2}{n} \quad x_i=1+\frac{2i}{n}$

$S_n=\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(2\left(1+\frac{2i}{n}\right)-1\right)=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{4i}{n}+1\right)=\frac{2}{n}\left(\frac{4n(n+1)}{2n}+n\right)$

$=\frac{4(n+1)}{n}+2 \qquad \lim_{n\to\infty} S_n=6$

④ $f(x)=3x+4 \quad [-1,2] \quad \Delta x=\frac{3}{n} \quad x_i=-1+\frac{3i}{n}$

$S_n=\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x=\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(3\left(-1+\frac{3i}{n}\right)+4\right)=\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{9i}{n}+1\right)=$

$\frac{3}{n}\left(\frac{9}{\cancel{n}}\times\frac{\cancel{n}(n+1)}{2}+n\right)=\frac{27(n+1)}{2n}+3 \qquad \lim_{n\to\infty} S_n=\frac{33}{2}$

⑤ $f(x)=x^2 \quad [1,3] \quad \Delta x=\frac{2}{n} \quad x_i=1+\frac{2i}{n}$

$S_n=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{2i}{n}\right)^2=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{4i^2}{n^2}+\frac{4i}{n}\right)$

$=\frac{2}{n}(n)+\frac{8}{n^3}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{8}{n^2}\times\frac{n(n+1)}{2}$

$\lim_{n\to\infty} S_n=2+\frac{16}{6}+4=6+\frac{8}{3}=\frac{26}{3}$

⑥ $f(x)=x^2+1 \quad [0,a] \quad x_i=0+\frac{a}{n}i \quad \Delta x=\frac{a}{n}$

$S_n=\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x=\frac{a}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\left(\frac{ai}{n}\right)^2+1\right)=\frac{a}{n}\left(\frac{a^2}{n^2}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$

$+a \qquad \lim_{n\to\infty} S_n=\frac{1}{3}a^3+a$

⑦ $f(x)=(x+1)^2+2 \quad [-1,2] \quad \Delta x=\frac{3}{n} \quad x_i=-1+\frac{3i}{n}$

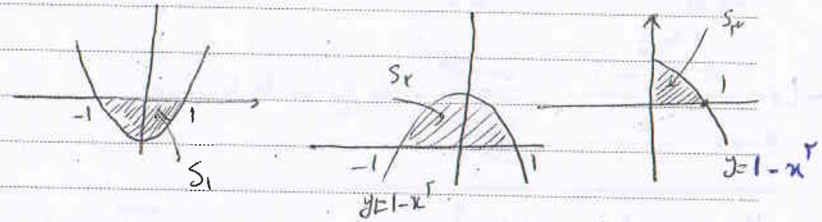
$S_n=\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x=\sum_{i=1}^{n}\left(\left(-1+\frac{3i}{n}+1\right)^2+2\right)\frac{3}{n}=\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{9i^2}{n^2}+2\right)$

$=\frac{3}{n}\left(\frac{9}{n^2}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+2n\right)=\frac{27(n+1)(2n+1)}{6n^2}+6$

$\lim_{n\to\infty} S_n=9+6=15$

$f(x) = x^2 - 1$

(۸)



اگر S_3 را حساب کنیم زیرا $S_1 = S_2 = 2S_3$

$g(x) = 1 - x^2$ $\quad [0,1] \quad \Delta x = \frac{1}{n} \quad x_i = 0 + \frac{i}{n}$

$S_n = \sum_{i=1}^{n} g(x_i)\Delta x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(1 - \frac{i^2}{n^2}\right) = \frac{1}{n}\left(n - \frac{1}{n^2}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$

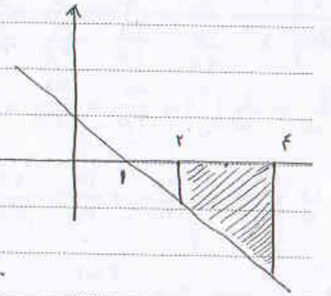
$= 1 - \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} \quad \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{2}{3} = S_3 \Rightarrow S_1 = 2\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3}$

(۹)

$f(x) = 1 - x \quad [2,4]$

قرینه تابع f نسبت به محور x ها را در نظر می گیریم

یعنی تابع $g(x) = x - 1$



$\Delta x = \frac{4-2}{n} = \frac{2}{n} \quad x_i = 2 + \frac{2i}{n}$

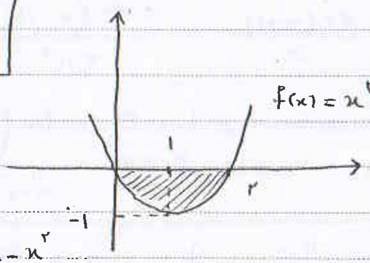
$S_n = \sum_{i=1}^{n} g(x_i)\Delta x = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(2 + \frac{2i}{n} - 1\right) = \frac{2}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} 1 + \sum_{i=1}^{n}\frac{2i}{n}\right)$

$= \frac{2}{n}\left(n + \frac{2}{n}\times\frac{n(n+1)}{2}\right) = \frac{2}{n}(n + n + 1) = \frac{4n+2}{n}$

مساحت $= \lim_{n\to\infty}\frac{4n+2}{n} = 4$

(۱۰)

$f(x) = x^2 - 2x$



قرینه f نسبت به محور x ها یعنی تابع

$g(x) = 2x - x^2$ را در نظر می گیریم

$\Delta x = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n} \quad x_i = 0 + \frac{2i}{n} = \frac{2i}{n}$

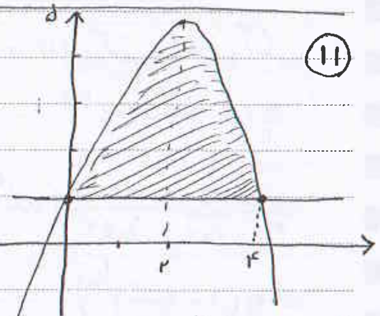
$= \sum_{i=1}^{n} g(x_i)\Delta x = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(2\left(\frac{2i}{n}\right) - \left(\frac{2i}{n}\right)^2\right) = \frac{8}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} i - \sum_{i=1}^{n}\frac{i^2}{n}\right)$

$\frac{8}{n^2}\left(\frac{n(n+1)}{2} - \frac{1}{n}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) = \frac{4(n+1)}{n} - \frac{4(n+1)(2n+1)}{3n^2}$

$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n+4}{n} - \frac{4(n+1)(2n+1)}{3n^2}\right) = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$

(۱۱)

$f(x) = 4x - x^2 + 1$



محور x ها را یک واحد به سمت بالا می بریم معادله منحنی f

$g(x) = f(x) - 1 = 4x - x^2$ در دستگاه جدید $y = 1$

حاصل شده

$\Delta x = \frac{4-0}{n} = \frac{4}{n} \quad x_i = \frac{4i}{n}$

$S_n = \sum_{i=1}^{n} g(x_i)\Delta x = \frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(4x_i - x_i^2\right) = \frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{16i}{n} - \frac{16i^2}{n^2}\right)$

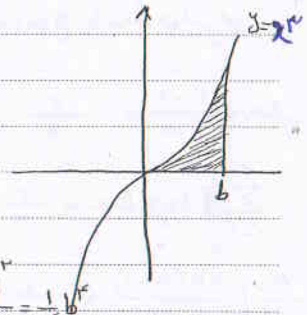
$$= \frac{64}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} i - \sum_{i=1}^{n}\frac{i^2}{n}\right) = \frac{64}{n^2}\left(\frac{n(n+1)}{2} - \frac{1}{n}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$$

$$= \frac{32(n+1)}{n} - \frac{32(n+1)(2n+1)}{3n^2}$$

مساحت مورد نظر $= \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{32(n+1)}{n} - \frac{32(n+1)(2n+1)}{3n^2}\right) = 32 - \frac{64}{3} = \frac{32}{3}$

۱۲

$\Delta x = \frac{b-0}{n} = \frac{b}{n}$, $x_i = \frac{bi}{n}$



$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = \frac{b}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{b^3 i^3}{n^3}$$

$$= \frac{b^4}{n^4}\times\frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{b^4(n+1)^2}{4n^2}$$

مساحت مورد نظر $= \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{b^4(n+1)^2}{4n^2} = \frac{1}{4}b^4$

از افراز نامنظم استفاده می‌کنیم ، بازه $[a,b]$ را به صورت یک دنباله هندسی با نقاط

$a=x_0$ ، $x_1=a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac1n}$ ، $x_2=a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac2n}$ ، ... ، $x_n=a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac nn}$ افراز می‌کنیم ، با فرض اینکه $t=\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac1n}$ داریم $x_i = a(t)^i$ و در نتیجه

$\Delta x_i = at^i - at^{i-1}$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{at^i}\left(at^i - at^{i-1}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(1-t^{-1}\right) = n\left(1-t^{-1}\right)$$

$= n\left(1-\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac1n}\right)$ مساحت مورد نظر $= \lim_{n\to\infty} S_n = \lim n\left(1-\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac1n}\right)$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac1n}}{\frac1n} = \lim_{k\to0}\frac{1-\left(\frac{a}{b}\right)^{k}}{k} = -\lim_{k\to0}\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^{k}-1}{k} =$$

$= -\lim_{k\to0}\frac{e^{k\ln\frac{a}{b}}-1}{k}$ $\underset{\text{تابع نمایی در صفر}}{\overset{\text{طبق مشتق}}{=}}$ $-\ln\frac{a}{b} = \ln b - \ln a$

$f(x) = x^2$ $[1,2]$ حل تمرین در کلاس ص ۲۳۴

$n=3 \longrightarrow \Delta x = \frac{2-1}{3} = \frac13 \longrightarrow$ نقاط افراز : $1 , \frac43 , \frac53 , 2$

x_i	1	4/3	5/3	2
$f(x_i)$	1	$\frac{16}{9}$	$\frac{25}{9}$	4

$L_3 = \frac13\left(1+\frac{16}{9}+\frac{25}{9}\right) \simeq 1.8518$

$U_3 = \frac13\left(\frac{16}{9}+\frac{25}{9}+4\right) \simeq 2.8518$

$n=5 \to \Delta x = \frac{2-1}{5} = \frac15 \to$ نقاط افراز : $1 , \frac65 , \frac75 , \frac85 , \frac95 , 2$

x_i	1	$\frac65$	$\frac75$	$\frac85$	$\frac95$	2
$f(x_i)$	1	$\frac{36}{25}$	$\frac{49}{25}$	$\frac{64}{25}$	$\frac{81}{25}$	4

$L_5 = \frac15\left(1+\frac{36}{25}+\frac{49}{25}+\frac{64}{25}+\frac{81}{25}\right) = 2.04$

$U_5 = \frac15\left(\frac{36}{25}+\frac{49}{25}+\frac{64}{25}+\frac{81}{25}+4\right) = 2.64$

$n=6 \to \Delta x = \frac{2-1}{6} = \frac16 \Rightarrow$ نقاط افراز : $1 , \frac76 , \frac86 , \frac96 , \frac{10}{6} , \frac{11}{6} , 2$

x_i	1	$\frac76$	$\frac86$	9/6	10/6	11/6	2
$f(x_i)$	1	$\frac{49}{36}$	$\frac{64}{36}$	$\frac{81}{36}$	$\frac{100}{36}$	$\frac{121}{6}$	4

$L_6 = \frac{1}{6}\left(1+\frac{49}{36}+\frac{64}{36}+\frac{81}{36}+\frac{100}{36}+\frac{121}{36}\right) \simeq 2.0879$

$U_6 = \frac{1}{6}\left(\frac{49}{36}+\frac{64}{36}+\frac{81}{36}+\frac{100}{36}+\frac{121}{36}+4\right) \simeq 2.5879$

$n=7 \Rightarrow \Delta x = \frac{2-1}{7} = \frac{1}{7} \Rightarrow$ نقاط افراز: $1, \frac{8}{7}, \frac{9}{7}, \frac{10}{7}, \frac{11}{7}, \frac{13}{7}$ و 2

x_i	1	$\frac{8}{7}$	$\frac{9}{7}$	$\frac{10}{7}$	$\frac{11}{7}$	$\frac{12}{7}$	$\frac{13}{7}$	2
$f(x_i)$	1	$\frac{64}{49}$	$\frac{81}{49}$	$\frac{100}{49}$	$\frac{121}{49}$	$\frac{144}{49}$	$\frac{169}{49}$	4

$L_7 = \frac{1}{7}\left(1+\frac{64}{49}+\frac{81}{49}+\frac{100}{49}+\frac{121}{49}+\frac{144}{49}+\frac{169}{49}\right) \simeq 2.1224$

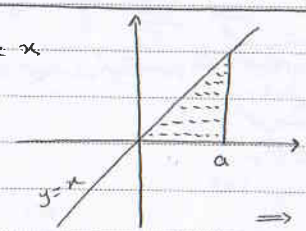
$U_7 = \frac{1}{7}\left(\frac{64}{49}+\frac{81}{49}+\frac{100}{49}+\frac{121}{49}+\frac{144}{49}+\frac{169}{49}+4\right) \simeq 2.5510$

توجه: L_n ها حالت صعودی دارند و U_n ها حالت نزولی دارند و هردو به عدد $\frac{7}{3}$ همگرا هستند.

توجه در این تمرین می‌توان فرمول کلی L_n و U_n را برحسب n پیدا کرد و سپس اعداد را افراز داد.

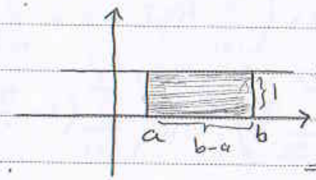
تمرین در کلاس صفحه ۲۳۶

$f(x) = x$



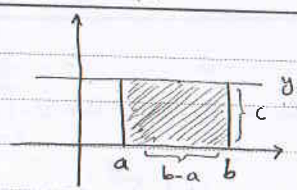
① $S = \frac{1}{2}(a \times a) = \frac{a^2}{2} \Rightarrow \int_0^a x\,dx = \frac{a^2}{2}$

② $f(x) = 1$



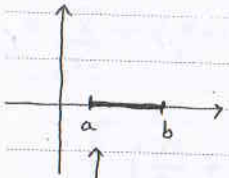
$S = (b-a)\times 1 = b-a \Rightarrow \int_a^b dx = b-a$

③ حالت اول: $c>0$



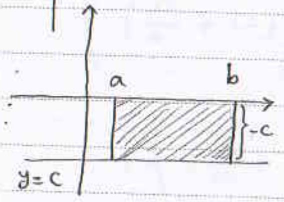
$S = c(b-a) \Rightarrow \int_a^b c\,dx = c(b-a)$

حالت دوم: $c=0$



$S = 0 \Rightarrow \int_a^b 0\,dx = 0$

حالت سوم: $c<0$



$S = -c(b-a) \Rightarrow \int_a^b c\,dx = c(b-a)$

حل تمرین در کلاس صفحه ۲۳۸

$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ 1-x & x<0 \end{cases}$

توجه: با توجه به اینکه ویژگی

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

معمولاً با فرض انتگرال‌پذیر بودن f قابل قبول است پس در حل این تمرین، از این نکته استفاده نمی‌کنم.

$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1-(-1)}{n} = \frac{2}{n}$

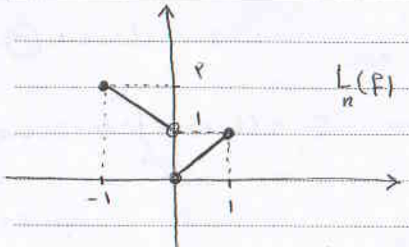
افراز دلخواه P را درنظر می‌گیریم. در این افراز برای n دو حالت درنظر می‌گیریم

حالت اول: (n زوج)، دراینصورت صفر یک نقطه افراز است.

$-1, \; -1+\frac{2}{n}, \; -1+\frac{4}{n}, \; \dots, \; -\frac{2}{n}, \; 0, \; \frac{2}{n}, \; \dots, \; x_{n-1}, \; x_n$

$x_0, \; x_1, \; x_2, \; \dots, \; x_{\frac{n}{2}-1}, \; x_{\frac{n}{2}}, \; x_{\frac{n}{2}+1}, \; \dots, \; 1-\frac{2}{n}, \; 1$

تابع در این بازه اکیداً نزولی است — تابع در این بازه اکیداً صعودی است



$$L_n(f)=\sum_{i=1}^{n} f(l_i)\,\Delta x=\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} f(x_i)\,\Delta x+\sum_{i=n/2}^{n-1} f(x_i)\,\Delta x$$

$$=\frac{2}{n}\left(\sum_{i=1}^{n/2}(1-x_i)+\sum_{i=\frac{n}{2}}^{n-1} x_i\right)$$

$$=\frac{2}{n}\left(\sum_{i=1}^{n/2}\left(1-\left(-1+\frac{2i}{n}\right)\right)+\sum_{i=\frac{n}{2}}^{n-1}\left(-1+\frac{2i}{n}\right)\right)$$

$$=\frac{2}{n}\left(\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}}\left(2-\frac{2i}{n}\right)+\sum_{i=n/2}^{n-1}\left(-1+\frac{2i}{n}\right)\right)$$

$$=\frac{2}{n}\left(2\left(\frac{n}{2}\right)-\frac{2}{n}\times\frac{\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right)}{2}+(-1)\left(n-\frac{n}{2}\right)+\frac{2}{n}\left(\frac{n(n-1)}{2}-\frac{\left(\frac{n}{2}-1\right)\frac{n}{2}}{2}\right)\right)$$

$$=\frac{2}{n}\left(n-\frac{n+2}{4}-\frac{n}{2}+(n-1)-\frac{n-2}{4}\right)=\left(2-\frac{n+2}{2n}-1+\frac{2(n-1)}{n}-\frac{n-2}{2n}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} L_n(f)=2-\frac{1}{2}-1+2-\frac{1}{2}=2 \quad (*)$$

$$U_n(f)=\sum_{i=1}^{n} f(u_i)\,\Delta x=\Delta x\left(\sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} f(x_i)+\sum_{i=\frac{n}{2}+1}^{n} f(x_i)\right)$$

توجه داریم که $x_{n/2}$ در این حالت انتخاب نمی‌شود

$$=\frac{2}{n}\left(\sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1}(1-x_i)+\sum_{i=\frac{n}{2}+1}^{n} x_i\right)=\frac{2}{n}\left(\sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1}\left(2-\frac{2i}{n}\right)+\sum_{i=\frac{n}{2}+1}^{n}\left(-1+\frac{2i}{n}\right)\right)$$

$$=\frac{2}{n}\left(2\left(\frac{n}{2}\right)-\frac{2}{n}\times\frac{\left(\frac{n}{2}-1\right)\left(\frac{n}{2}\right)}{2}\right)+\frac{2}{n}\left((-1)\left(n-\frac{n}{2}\right)+\frac{2}{n}\left(\frac{n(n+1)}{2}-\frac{2}{n}\times\frac{\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right)}{2}\right)\right)=\frac{2}{n}\left(n-\frac{n-2}{4}\right)+\frac{2}{n}\left(\frac{-n}{2}+(n+1)-\frac{n+2}{4}\right)$$

$$=2-\frac{n-2}{2n}-1+\frac{2(n+1)}{n}-\frac{n+1}{2n}$$

$$\lim_{n\to\infty} U_n(f)=2-\frac{1}{2}-1+2-\frac{1}{2}=2 \quad (**)$$

پس در حالتی که n زوج باشد، تابع f روی بازه $[-1,1]$ انتگرال‌پذیر است و داریم

$$(*) \;\&\; (**) \Longrightarrow \int_{-1}^{1} f(x)\,dx=2$$

حالت دوم: (n فرد باشد) در این حالت 0 درون یکی از زیربازه‌های افراز قرار می‌گیرد.

-1 $-1+\frac{2}{n}$ $-1+\frac{4}{n}$ … $-\frac{1}{n}$ 0 $\frac{1}{n}$ $\frac{3}{n}$ … $1-\frac{2}{n}$ 1

x_0 x_1 x_2 … $x_{\frac{n-1}{2}}$ $x_{\frac{n+1}{2}}$ $x_{\frac{n+3}{2}}$ … x_{n-1} x_n

تابع در این قسمت اکیداً نزولی است

تابع در این زیربازه غیر یکنوا است

$f(l_i)=0$

$f(u_i)=1+\frac{1}{n}$

تابع در این قسمت اکیداً صعودی است

$$L_n(f)=\sum_{i=1}^{n} f(l_i)\,\Delta x=\Delta x\left(\sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} f(x_i)+0+\sum_{i=\frac{n+1}{2}}^{n-1} f(x_i)\right)$$

$$=\frac{2}{n}\left(\sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}}(1-x_i)+\sum_{i=\frac{n+1}{2}}^{n-1} x_i\right)=\frac{2}{n}\left(\sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}}\left(2-\frac{2i}{n}\right)+\sum_{i=\frac{n+1}{2}}^{n-1}\left(-1+\frac{2i}{n}\right)\right)$$

$$= \frac{2}{n}\left(2\left(\frac{n-1}{2}\right) - \frac{2}{n}\times\frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2}\right) + \frac{2}{n}\left((-1)\left(n-\frac{n+1}{2}\right) + \frac{2}{n}\left(\frac{(n-1)n}{2} - \frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2}\right)\right) = \frac{2}{n}\left((n-1) - \frac{n^2-1}{4n}\right) + \frac{2}{n}\left(\frac{-n+1}{2} + (n-1) - \frac{n^2-1}{4n}\right) = \frac{2(n-1)}{n} - \frac{n^2-1}{2n^2} + \frac{1-n}{n} + \frac{2(n-1)}{n} - \frac{n^2-1}{2n^2}$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} L_n(f) = 2 - \frac{1}{2} - 1 + 2 - \frac{1}{2} = 2 \quad (***)$$

$$U_n(f) = \sum_{i=1}^{n} f(u_i)\Delta x = \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} f(x_i)\Delta x + \sum_{i=\frac{n+3}{2}}^{n} f(x_i)\Delta x$$

$$= \frac{2}{n}\left(\sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} (1-x_i) + \sum_{i=\frac{n+3}{2}}^{n} x_i\right) = \frac{2}{n}\left(\sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}}\left(2-\frac{2i}{n}\right) + \sum_{i=\frac{n+3}{2}}^{n}\left(-1+\frac{2i}{n}\right)\right)$$

$$= \frac{2}{n}\left(2\left(\frac{n+1}{2}\right) - \frac{2}{n}\times\frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2} + (-1)\left(\frac{n-1}{2}\right) + \frac{2}{n}\left(\frac{n(n+1)}{2} - \frac{\left(\frac{n+1}{2}\right)\left(\frac{n+3}{2}\right)}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{2}{n}\left((n+1) - \frac{n^2-1}{4n} + \frac{1-n}{2} + (n+1) - \frac{(n+1)(n+3)}{4n}\right)$$

$$= \frac{2(n+1)}{n} - \frac{n^2-1}{2n^2} + \frac{1-n}{n} + \frac{2(n+1)}{n} - \frac{(n+1)(n+3)}{2n^2}$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} U_n(f) = 2 - \frac{1}{2} - 1 + 2 - \frac{1}{2} = 2 \quad (****)$$

پس در حالتی که n فرد باشد هم تابع f روی بازه $[-1,1]$ انتگرال پذیر است و $\int_{-1}^{1} f(x)dx = 2$

حل مسائل صفحه ۲۴۱

(۱) $f(x) = x \quad [0,2] \quad \Delta x = \frac{2-0}{8} = \frac{1}{4}$

x_i	0	1/4	2/4	3/4	1	5/4	6/4	7/4	2
$f(x_i)$	0	1/4	2/4	3/4	1	5/4	6/4	7/4	2

$$L_8 = \frac{1}{4}\left(0 + \frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4} + 1 + \frac{5}{4} + \frac{6}{4} + \frac{7}{4}\right) = \frac{28}{16} = 1.75$$

$$U_8 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4} + 1 + \frac{5}{4} + \frac{6}{4} + \frac{7}{4} + 2\right) = \frac{36}{16} = 2.25$$

(۲) $f(x) = x^2 \quad [0,4] \quad n=4 \quad \Delta x = \frac{4-0}{4} = 1$

x_i	0	1	2	3	4
$f(x_i)$	0	1	4	9	16

تابع f روی این بازه اکیداً صعودی است پس داریم

$$L_4(f) = 1(0 + 1 + 4 + 9) = 14$$

$$U_4(f) = 1(1 + 4 + 9 + 16) = 30$$

(۳) $f(x) = e^x \quad [-2,2] \quad n=4 \quad \Delta x = \frac{2-(-2)}{4} = 1$

x_i	-2	-1	0	1	2
$f(x_i)$	e^{-2}	e^{-1}	1	e	e^2

تابع f روی بازه داده شده اکیداً صعودی است پس داریم

$$L_4(f) = 1\left(e^{-2} + e^{-1} + 1 + e\right) = \frac{1}{e^2} + \frac{1}{e} + 1 + e = \frac{1+e+e^2+e^3}{e^2}$$

$$U_4(f) = 1\left(e^{-1} + 1 + e + e^2\right) = \frac{1}{e} + 1 + e + e^2 = \frac{1+e+e^2+e^3}{e}$$

(۴) $f(x) = \ln x \quad [1,2] \quad n=5 \quad \Delta x = \frac{2-1}{5} = \frac{1}{5}$

x_i	1	$\frac{6}{5}$	$7/5$	$8/5$	$9/5$	2
$f(x_i)$	0	$\ln\frac{6}{5}$	$\ln\frac{7}{5}$	$\ln\frac{8}{5}$	$\ln\frac{9}{5}$	$\ln 2$

تابع f در این بازه اکیداً صعودی است پس داریم

$$L_n(f) = \frac{1}{5}\left(0 + \ln\frac{6}{5} + \ln\frac{7}{5} + \ln\frac{8}{5} + \ln\frac{9}{5}\right) = \frac{1}{5}\ln\frac{3024}{625} \simeq 0{,}3153$$

$$U_n(f) = \frac{1}{5}\left(\ln\frac{6}{5} + \ln\frac{7}{5} + \ln\frac{8}{5} + \ln\frac{9}{5} + \ln 2\right) = \frac{1}{5}\ln\frac{30240}{3125} \simeq 0{,}4539$$

$f(x) = \sin x \qquad [0, \pi] \qquad n = 6 \qquad \Delta x = \frac{\pi - 0}{6} = \frac{\pi}{6}$

x_i	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$f(x_i)$	0	$1/2$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

تابع f در این بازه غیر یکنوا است اما نقطه‌ی اکسترمم عضو نقاط افراز است.

$$L_6 = \frac{\pi}{6}\left(0 + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} + 0\right) = \frac{\pi}{6}\left(1 + \sqrt{3}\right) \simeq 1{,}4305$$

$$U_n(f) = \frac{\pi}{6}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 + 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}\left(3 + \sqrt{3}\right) \simeq 2{,}4777$$

(۶) $f(x) = \cos x \qquad [0, 2\pi] \qquad n = 4 \qquad \Delta x = \frac{2\pi - 0}{4} = \frac{\pi}{2}$

x_i	0	$\pi/2$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$f(x_{i})$	1	0	-1	0	1

تابع f در این بازه غیر یکنوا است و نقاط اکسترمم عضو نقاط افراز است پس داریم

$$L_4(f) = \frac{\pi}{2}\left(0 + (-1) + (-1) + 0\right) = -\pi$$

$$U_n(f) = \frac{\pi}{2}\left(1 + 0 + 0 + 1\right) = \pi$$

(۷) $f(x) = 1 - x \qquad [0, 2] \qquad \Delta x = \frac{2}{n} \qquad x_i = \frac{2i}{n}$

با توجه به اینکه تابع f در بازه $[0, 2]$ اکیداً نزولی است پس در هر زیر بازه ی افراز $[x_{i-1}, x_i]$ داریم $l_i = x_i$, $u_i = x_{i-1}$ باشند

$$L_n(f) = \sum_{i=1}^{n} f(l_i)\,\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\frac{2}{n} = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(1 - \frac{2i}{n}\right) = \frac{2}{n}\left(n - \frac{2}{n}\times\frac{n(n+1)}{2}\right) = 2 - \frac{2(n+1)}{n} = \frac{-2}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} L_n(f) = \lim_{n\to\infty}\frac{-2}{n} = 0 \quad (*)$$

$$U_n(f) = \sum_{i=1}^{n} f(u_i)\,\Delta x = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}) = \frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) = \frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left(1 - \frac{2i}{n}\right) = \frac{2}{n}\left(n - \frac{2}{n}\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)\right) = 2 - \frac{2(n-1)}{n} = \frac{2}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} U_n(f) = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n} = 0 \quad (**)$$

$$(*)\ \&\ (**) \Longrightarrow \int_0^2 (1 - x)\,dx = 0$$

(۸) $f(x) = x^3 \qquad [0, 1] \qquad \Delta x = \frac{1 - 0}{n} = \frac{1}{n} \qquad x_i = \frac{i}{n}$

با توجه به اینکه تابع f در بازه $[0, 1]$ اکیداً صعودی است پس در هر زیر بازه ای دلخواه از افراز مانند $[x_{i-1}, x_i]$ داریم $l_i = x_{i-1}$ و $u_i = x_i$

$$L_n(f) = \sum_{i=1}^{n} f(l_i)\,\Delta x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{i^3}{n^3}$$

روش دوم: استفاده از افراز کردن بازه $f(x)=\sqrt{9-x^2}$

با توجه به زوج بودن تابع $f(x)=\sqrt{9-x^2}$ ، داریم $\int_{-3}^{3} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{3} f(x)\,dx$

تابع f روی بازه $[0,3]$ پیوسته و اکیداً صعودی است پس از طرفی انتگرال پذیر است و برای محاسبه‌ی انتگرال آن کافی است یکی از دو مورد $U_n(f)$ یا $L_n(f)$ را محاسبه کرده و حد گیری کنیم

همچنین در هر زیر بازه دلخواه از این افراز مانند $[x_{i-1},x_i]$ داریم $u_i=x_{i-1}$ ، $l_i=x_i$ پس

فقط $L_n(f)$ را محاسبه می‌کنیم ، بازه را به صورت نامنظم و به صورت زیر افراز می‌کنیم.

$$x_0=0,\quad x_1=3\sin\frac{\pi}{2n},\quad x_2=3\sin\frac{2\pi}{2n},\quad x_3=3\sin\frac{3\pi}{2n},\quad \dots,\quad x_{n-1}=3\sin\frac{(n-1)\pi}{2n},\quad x_n=3$$

یعنی فرض می‌کنیم $x_i = 3\sin\frac{i\pi}{2n}$

$$L_n(f)=\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{9-9\sin^2\frac{i\pi}{2n}}\left(3\sin\frac{i\pi}{2n}-3\sin\frac{(i-1)\pi}{2n}\right)$$

$$=9\sum_{i=1}^{n}\cos\frac{i\pi}{2n}\left(\sin\frac{i\pi}{2n}-\sin\frac{(i-1)\pi}{2n}\right)=9\sum_{i=1}^{n}\cos\frac{i\pi}{2n}\left(2\sin\frac{\frac{i\pi}{2n}-\frac{i\pi}{2n}+\frac{\pi}{2n}}{2}\cos\frac{\frac{i\pi}{2n}+\frac{i\pi}{2n}-\frac{\pi}{2n}}{2}\right)=18\sum_{i=1}^{n}\cos\frac{i\pi}{2n}\sin\frac{\pi}{4n}\cos\left(\frac{i\pi}{2n}-\frac{\pi}{4n}\right)$$

$$=18\sin\frac{\pi}{4n}\sum_{i=1}^{n}\cos\frac{i\pi}{2n}\cos\left(\frac{i\pi}{2n}-\frac{\pi}{4n}\right)=9\sin\frac{\pi}{4n}\sum_{i=1}^{n}\left(\cos\frac{\pi}{4n}+\cos\left(\frac{i\pi}{n}-\frac{\pi}{4n}\right)\right)=9\sin\frac{\pi}{4n}\left(n\cos\frac{\pi}{4n}+\sum_{i=1}^{n}\cos\left(\frac{i\pi}{n}-\frac{\pi}{4n}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{n^4}\sum_{i=0}^{n-1} i^3=\frac{1}{n^4}\times\frac{(n-1)^2n^2}{4}$$

$$\lim_{n\to\infty} L_n(f)=\frac{1}{4} \quad (*)$$

$$U_n(f)=\sum_{i=1}^{n} f(u_i)\,\Delta x=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i^3}{n^3}=\frac{1}{n^4}\times\frac{n^2(n+1)^2}{4}=\frac{(n+1)^2}{4n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} U_n(f)=\frac{1}{4} \quad (**)$$

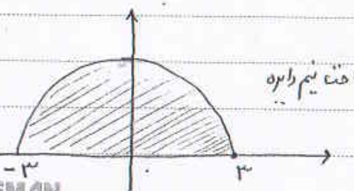
$$(*)\ \text{و}\ (**) \Longrightarrow \int_0^1 x^3\,dx=\frac{1}{4}$$

۹

برای پاسخ دادن به این سؤال سه روش زیر را داریم اما هدف کتاب روش اول می‌باشد

روش اول: می‌دانیم $x^2+y^2=9$ معادله دایره‌ای به مرکز مبداء مختصات و شعاع ۳ می‌باشد

$$x^2+y^2=9 \Rightarrow y^2=9-x^2 \Rightarrow \begin{cases} y=\sqrt{9-x^2} \rightarrow \text{معادله‌ی نیم دایره بالایی} \\ y=-\sqrt{9-x^2} \rightarrow \text{معادله‌ی نیم دایره‌ی پایینی} \end{cases}$$



مساحت نیم دایره $= S=\frac{1}{2}\pi r^2=\frac{1}{2}\pi(3)^2=\frac{9\pi}{2}$

$$\int_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}\,dx=\frac{9\pi}{2}$$

$$= 9\sin\frac{\pi}{4n}\left(n\cos\frac{\pi}{4n} + \sum_{i=1}^{n}\left(\cos\frac{i\pi}{n}\cos\frac{\pi}{4n} + \sin\frac{i\pi}{n}\sin\frac{\pi}{4n}\right)\right)$$

طبق روابط (*) و (**) که در ادامه داریم

$$= 9\sin\frac{\pi}{4n}\left(n\cos\frac{\pi}{4n} + (-1)\cos\frac{\pi}{4n} + \sin\frac{\pi}{4n}\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2n}\right)$$

$$= 9n\sin\frac{\pi}{4n}\cos\frac{\pi}{4n} - 9\sin\frac{\pi}{4n}\cos\frac{\pi}{4n} + 9\sin^2\frac{\pi}{4n}\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2n} \Rightarrow$$

$$L_n(f) = \frac{9n}{2}\sin\frac{\pi}{2n} - \frac{9}{2}\sin\frac{\pi}{2n} + 9\sin\frac{\pi}{4n}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2n}$$

$$\lim_{n\to\infty} L_n(f) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{9n}{2}\sin\frac{\pi}{2n} - \underbrace{9\sin\frac{\pi}{2n}}_{\text{حدش صفر است}} + \underbrace{9\sin^2\frac{\pi}{4n}\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2n}}_{\text{حدش صفر است}}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{9\sin\frac{\pi}{2n}}{\frac{2}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{9\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{\frac{2}{n}} = \frac{9\pi}{4}$$

بنابراین داریم

$$\int_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}\,dx = 2\int_0^3 f(x)\,dx = 2\lim_{n\to\infty} L_n(f) = 2\left(\frac{9\pi}{4}\right) = \frac{9\pi}{2}$$

$$A = \sum_{k=1}^{n}\sin kx = \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \dots + \sin nx \qquad (*)$$

در اینگونه موارد اگر کمان‌ها دنباله‌ی حسابی با قدر نسبت d تشکیل دهند عبارت را در $2\sin\frac{d}{2}$ ضرب و برآن تقسیم می‌کنیم

$$A = \frac{2\sin x\sin\frac{x}{2} + 2\sin 2x\sin\frac{x}{2} + \dots + 2\sin nx\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}$$

یادآوری از حسابان : $2\sin a\sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$

$$A = \frac{\left(\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{3x}{2}\right) + \left(\cos\frac{3x}{2} - \cos\frac{5x}{2}\right) + \dots + \left(\cos\left(nx-\frac{x}{2}\right) - \cos\left(nx+\frac{x}{2}\right)\right)}{2\sin\frac{x}{2}}$$

$$A = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{(2n+1)x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}} \xrightarrow{\text{صورت را به حاصلضرب تبدیل کرده‌ایم}} A = \frac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

در این تمرین نیاز داریم به جای x قرار دهیم $\frac{\pi}{n}$ پس

$$\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n} = \frac{\sin\frac{n}{2}\times\frac{\pi}{n}\,\sin\frac{n+1}{2}\times\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{n}} = \frac{(1)\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2n}\right)}{\sin\frac{\pi}{2n}}$$

$$= \frac{\cos\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}} = \operatorname{cotg}\frac{\pi}{2n}$$

$$B = \sum_{k=1}^{n}\cos kx = \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx \qquad (**)$$

در اینگونه موارد نیز مانند قسمت قبل عبارت را در $2\sin\frac{x}{2}$ ضرب و برآن تقسیم می‌کنیم.

$$B = \frac{2\cos x\sin\frac{x}{2} + 2\cos 2x\sin\frac{x}{2} + \dots + 2\cos nx\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}$$

$$B = \frac{\left(\sin\left(\frac{x}{2}-x\right) + \sin\left(\frac{x}{2}+x\right)\right) + \left(\sin\left(\frac{x}{2}-2x\right) + \sin\left(\frac{x}{2}+2x\right)\right) + \dots + \left(\sin\left(\frac{x}{2}-nx\right) + \sin\left(\frac{x}{2}+nx\right)\right)}{2\sin\frac{x}{2}} = \frac{-\sin\frac{x}{2} + \sin\frac{(2n+1)x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}$$

در نتیجه داریم

$$B=\frac{\sin\frac{(2n+1)x}{2}-\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}} \xrightarrow[\text{حاصلضرب تبدیل می‌کنیم}]{\text{صورت را به}} B=\frac{\sin\frac{nx}{2}\cos\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

در این تمرین نیاز داریم که به جای x قرار دهیم $\frac{\pi}{n}$ پس

$$\sum_{i=1}^{n}\cos\frac{i\pi}{n}=\frac{\sin\frac{n}{2}\times\frac{\pi}{n}\;\cos\frac{n+1}{2}\times\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{n}}=\frac{(1)\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2n}\right)}{\sin\frac{\pi}{2n}}$$

$$=\frac{-\sin\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}}=-1$$

روش سوم: کافی است از تغییر متغیر $x=3\sin\theta$ یا $x=3\cos\theta$ استفاده کنیم (چنین روشی در کتاب مطرح نشده است)

(10) چون تابع f بر بازه $[a,b]$ پیوسته و اکیداً صعودی است پس این تابع در زیر بازه‌های افراز نیز پیوسته و اکیداً صعودی است در نتیجه در هر زیر بازه دلخواه مانند $[x_{i-1},x_i]$ داریم

$u_i=x_i$ و $l_i=x_{i-1}$ و لذا داریم

$$L_n(f)=\sum_{i=1}^{n}f(l_i)\Delta x=\sum_{i=1}^{n}f(x_{i-1})\Delta x$$

$$U_n(f)=\sum_{i=1}^{n}f(u_i)\Delta x=\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\Delta x$$

بنابراین

$$U_n(f)-L_n(f)=\Delta x\left(\sum_{i=1}^{n}\left(f(x_i)-f(x_{i-1})\right)\right)\underset{\text{قاعده‌ی تلسکوپی}}{=}\Delta x\left(f(x_n)-f(x_0)\right)$$

$$=\left(\frac{b-a}{n}\right)\left(f(b)-f(a)\right)$$

اثبات ساده از قضیه‌ی ۱ را مطرح می‌کند (حالت خاص قضیه ۱)

(11) با توجه به اینکه جفت تمرین برای تمرین‌های ۵ و ۶ را می‌خواهد پس احتمالاً در حدود انتگرال اشتباه شده است. یعنی منظور محاسبه‌ی $\int_0^{\pi}\sin x\,dx$ و $\int_0^{2\pi}\cos x\,dx$ مورد نظر می‌باشد.

الف) به محاسبه‌ی $\int_0^{\pi}\sin x\,dx$ می‌پردازیم

$f(x)=\sin x \qquad [0,\pi] \qquad \Delta x=\frac{\pi}{n} \qquad x_i=\frac{\pi i}{n}$

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\Delta x=\sum_{i=1}^{n}\left(\sin\frac{i\pi}{n}\right)\frac{\pi}{n}=\frac{\pi}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}\;\underset{\text{صفحه قبل داشتیم}}{\overset{\text{طبق رابطه‌ی}}{=}}$$

(*) که در صفحه قبل داشتیم

$$=\frac{\pi}{n}\times\left(\cot\frac{\pi}{2n}\right)=\frac{\pi\cot\frac{\pi}{2n}}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi\cot\frac{\pi}{2n}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\times\frac{2n}{\pi}=2 \Rightarrow \int_0^{\pi}\sin x\,dx=2$$

این مقدار از $\frac{\pi}{6}$ بیشتر ولی از $\frac{\pi}{4}$ کمتر است ولی هر دو تقریبی برای این مقدار می‌باشند

ب)

$f(x)=\cos x \qquad [0,2\pi] \qquad \Delta x=\frac{2\pi}{n} \qquad x_i=\frac{2\pi i}{n}$

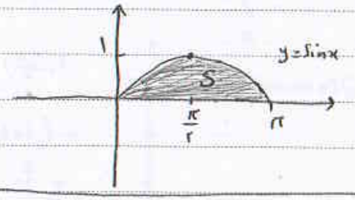
$$\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\Delta x=\frac{2\pi}{n}\sum_{i=1}^{n}\cos\frac{2\pi i}{n}\underset{\text{طبق فرمول B ص ۱۶۰}}{=}\frac{2\pi}{n}\times\frac{\sin\left(\frac{n}{2}\times\frac{2\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{n+1}{2}\right)\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{\sin\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{n}\right)}$$

$$=\frac{2\pi}{n}\times\frac{\overset{\text{صفر}}{\sin\pi}\;\cos\left(\frac{n+1}{n}\pi\right)}{\sin\frac{\pi}{n}}=0$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} \cos x\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

توجه داریم که انتگرال معین، مفهوم مساحت یا قرینهٔ مساحت را دارد بین دراین بهترین برنوعی

مساحت زیر یک قوس $y=\sin x$ را حساب کردیم یعنی به دست آوردیم که



$S=2$

حل تمرین در کلاس ص ۲۴۷

الف) مساحت زیر یک طاق تابع $y=\sin x$ که در بالا دیدیم که ۲ شد به طریق دیگر (استفاده از قضیه‌ی بنیادی) آن را حساب می‌کنیم.

$$\int_0^{\pi} \sin x\,dx = g(\pi)-g(0) = (-\cos\pi)-(-\cos 0) = 1+1=2$$

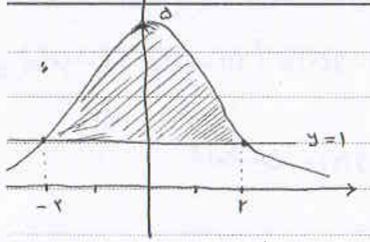
$f(x)=\sin x \Longrightarrow$ تابع اولیه $g(x)=-\cos x$

(تابعی که مشتق آن $y=\sin x$ می‌شود)

از این به بعد برای محاسبه‌ی انتگرال‌های معین از روش قضیه‌ی ۲ بنیادی کمک می‌گیریم.

ب) $$\int_0^{2\pi}|\sin x|\,dx = \int_0^{\pi}|\sin x|\,dx + \int_{\pi}^{2\pi}|\sin x|\,dx = |(g(\pi)-g(0))| + |g(2\pi)-g(\pi)|$$

$$= 2+2=4$$



ج) تابع $f(x)=\frac{5}{x^2+1}$ تابعی زوج است، برای مساحت این ناحیه، می‌توان محور x ها را یک واحد به بالا انتقال داد، با این کار ضابطه تابع f در دستگاه جدید به صورت زیر است

$$g(x)=f(x)-1=\frac{5}{x^2+1}-1$$

بنابراین داریم

مساحت مورد نظر $= A = 2\int_0^2 g(x)\,dx = 2\int_0^2\left(\frac{5}{x^2+1}-1\right)dx = 2(h(2)-h(0))$

$=2\left((5\tan^{-1}2-2)-(5\underbrace{\tan^{-1}0}_{\text{صفر}}-0)\right)$

$=2(5\tan^{-1}2-2) = 10\tan^{-1}2-4$

{در کتاب جواب ۹۱ اشتباه چاپی دارد}

تابع اولیه این تابع برابر $h(x)=5\tan^{-1}x-x$ می‌باشد

حل مسائل ص ۲۴۹

(1) $$\int_0^2 x^3\,dx = g(2)-g(0) = \frac14(2)^4-\frac14(0)^4 = 4$$

$f(x)=x^3 \longrightarrow$ تابع اولیه $g(x)=\frac14x^4$

(2) $$\int_0^4 \sqrt{x}\,dx = g(4)-g(0) = \frac23\left(4\sqrt4-0\sqrt0\right) = \frac{16}{3}$$

$f(x)=\sqrt{x}=x^{\frac12} \longrightarrow$ تابع اولیه $=g(x)=\frac{1}{\frac12+1}x^{\frac12+1}=\frac23 x\sqrt{x}$

(۳) $\int_0^{2\pi}(1+\sin t)\,dt = g(2\pi)-g(0) = (2\pi-\cos 2\pi)-(0-\cos 0) = 2\pi$

$f(t)=1+\sin t \Longrightarrow$ تابع اولیه $g(t)=t-\cos t$

(۴) $\int_{\frac12}^{1}\frac{dx}{x} = g(1)-g(\frac12) = \ln 1 - \ln\frac12 = 0-\ln\frac12 = \ln 2$

$f(x)=\frac1x \Longrightarrow$ تابع اولیه $g(x)=\ln x$

(۵) $\int_{-2}^{-1}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)dx = g(-1)-g(-2) = \left(1+\cancel{\frac12}\right)-\left(\cancel{\frac12}+\frac18\right) = \frac78$

$f(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}=x^{-2}-x^{-3} \Longrightarrow$ تابع اولیه $g(x)=\frac{1}{-2+1}x^{-2+1}-\frac{1}{-3+1}x^{-3+1}$

$\Rightarrow g(x)=\frac{-1}{x}+\frac{1}{2x^2}$

(۶) $\int_1^2\left(\frac{2}{x^3}-\frac{x^3}{2}\right)dx = g(2)-g(1) = \left(\frac{-1}{4}-2\right)-\left(-1-\frac18\right) = \frac{-9}{8}$

$f(x)=\frac{2}{x^3}-\frac{x^3}{2} = 2(x^{-3})-\frac12(x^3) \Longrightarrow$ تابع اولیه $g(x)=2\left(\frac{1}{-3+1}x^{-3+1}\right) -$

$\frac12\left(\frac{1}{3+1}x^{3+1}\right) = \left(\frac{-1}{x^2}-\frac18 x^4\right)$

(۷) $\int_{-\frac\pi4}^{-\frac\pi6}\cos x\,dx = g(-\frac\pi6)-g(-\frac\pi4) = (-\frac12)-(-\frac{\sqrt2}{2}) = \frac{\sqrt2-1}{2}$

$f(x)=\cos x \Longrightarrow$ تابع اولیه $g(x)=\sin x$

(۸) $\int_0^{\frac{4\pi}{3}}|\sin x|\,dx = \int_0^{\pi}\sin x\,dx + \int_\pi^{\frac{4\pi}{3}}(-\sin x)\,dx = (g(\pi)-g(0)) - \left(g(\frac{4\pi}{3})-g(\pi)\right)$

$= (1+1)-(\frac12-1)$

$= \frac52$

$f(x)=\sin x \Longrightarrow$ تابع اولیه $g(x)=-\cos x$

(۹) $\int_{-\pi}^{\pi}e^x\,dx = g(\pi)-g(-\pi) = e^\pi - e^{-\pi} = e^\pi - \frac{1}{e^\pi} = \frac{e^{2\pi}-1}{e^\pi}$

$f(x)=e^x \Longrightarrow$ تابع اولیه $g(x)=e^x$

حل تمرین در کلاس ص ۲۵۰

الف) $\int(x^5-3x+e^{3x}-2)\,dx$

تابع اولیه $= \frac16x^6-\frac32x^2+\frac13e^{3x}-2x+C$

(جواب انتگرال نامعین)

ب) $\int(\sin 3x-\cos 2x)\,dx$

جواب انتگرال = تابع اولیه $= \frac{-1}{3}\cos 3x-\frac12\sin 2x+C$

حل مسائل صفحه ۲۵۱ :

الف)

(۱) مفهوم $\int f(x)dx$ این است که تابعی پیدا کنیم مانند g که اگر از آن نسبت به متغیر x مشتق بگیریم تابع $f(x)$ به دست آید یعنی $g'(x)=f(x)$.

ب۱ : درست است ، انتگرال نامعین تابع های اولیه را مشخص می‌کند یعنی در واقع جلوی آن باید تابع‌های اولیه نوشته شود ولی انتگرال معین یک عدد است که مفاهیم از قبیل مساحت سطح محدود ، طول قوس ، حجم ، ... را بیان می‌کند.

ب۲ : می‌توانیم درست فرض کنیم ، اگر منظور از تابع همان تابعهای اولیه باشد .

ب۳ : نادرست است به قسمت ب۱ مراجعه کنید

ب۴ / سؤال ناقص است . اگر منظور درست بودن یا نادرست بودن باشد و آن نقطه چین عدد ۷ (قضیه ۷) باشد می‌توانیم درست فرض کنیم زیرا ابتدا تابع اولیه را پیدا می‌کنیم سپس طبق قضیه ۷ قسمت ب انتگرال معین را محاسبه می‌کنیم

اگر منظور این است که ما نقطه چین را پر کنیم ، جواب (قضیه ۷ قسمت ب) می‌باشد .

ج)

$$\bar f = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{b-a}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n} \times \frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

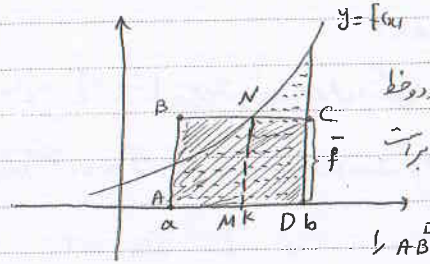
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} f(x_i)}{n} \simeq \frac{\sum_{i=1}^{n} f(x_i)}{n} = \frac{f(x_1)+f(x_2)+\dots+f(x_n)}{n}$$

اگر n بزرگ باشد

پس $\bar f$ یعنی مجموع مقادیر $f(x)$ها تقسیم بر تعداد آنها ، به نوعی میانگین آنها می‌باشد

اما تعبیر هندسی آن ، به صورت زیر است .

$$\bar f = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = (b-a)\bar f$$



طرف سمت چپ تساوی فوق ، مفهوم مساحت سطح محصور بین تابع f و محور xها و دو خط x=a و x=b را دارد که با طرف دوم برابر است

طرف دوم مفهوم مساحت مستطیل $\overset{\square}{ABCD}$ را دارد که طول یک ضلع آن $(b-a)$ می‌باشد پس $\bar f$ طول ضلع دیگر این مستطیل می‌باشد

یعنی $\bar f = AB = CD = MN = f(K)$

(د) چون فرض بر این است که تابع f در بازه $[a,b]$ تعریف شده است و فقط در تعداد متناهی نقطه ناپیوسته است مثلاً در x_1 و x_2 و ... و x_n ، و در سایر نقاط پیوسته است پس می‌توان نوشت که

$$[a,b] = [a,x_1]\cup[x_1,x_2]\cup\dots\cup[x_{n-1},x_n]\cup[x_n,b]$$

اگر تابع f در نقاط x_1 و x_2 و ... و x_n دارای حد چپ و راست باشد آنگاه تابع f در هرکدام از زیر بازه‌های $[a, x_1]$ و $[x_1, x_2]$ و ... و $[x_n, b]$ انتگرال‌پذیر خواهد بوده و برای محاسبه‌ی انتگرال آن به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \dots + \int_{x_n}^{b} f(x)\,dx$$

به مثال زیر توجه کنید (تمرین در کلاس ص ۱۳۸)

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & -1 \le x < 0 \\ x & 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

این تابع در بازه $[-1,1]$ پیوسته نیست ولی انتگرال‌پذیر است زیرا فقط یک نقطه‌ی ناپیوستگی دارد نقطه‌ی $x=0$ که f در آن هم حد راست و هم حد چپ دارد.

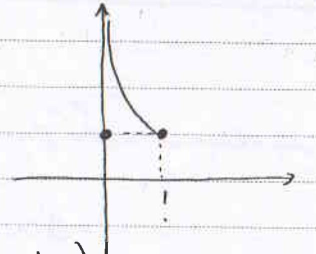
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 \quad , \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = 1$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0}(1-x)\,dx + \int_0^1 x\,dx = \left[x - \frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1$$

$$= \left((0-0) - \left(-1-\frac{1}{2}\right)\right) + \left(\frac{1}{2} - 0\right) = 2$$

ولی اگر تابع f در نقطه‌ای یا نقاطی از ناپیوستگی‌های خود حد چپ یا راست نداشته باشد f برای بازه انتگرال‌پذیر نمی‌باشد به مثال بعدی توجه کنید.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & 0 < x \le 1 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$



$$\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}(\ln 1 - \ln\varepsilon) = +\infty$$

(۲)

الف) $\int_0^4 x\sqrt[3]{x}\,dx = g(4) - g(0) = \frac{3}{7}\left(16\sqrt[3]{4} - 0\right)$

$f(x) = x\sqrt[3]{x} = x \cdot x^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{4}{3}} \Longrightarrow$ تابع اولیه $g(x) = \frac{1}{\frac{4}{3}+1}x^{\frac{4}{3}+1} = \frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}}$

$\Rightarrow g(x) = \frac{3}{7}x^2\sqrt[3]{x}$

ب) $\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\sin 2x + \operatorname{tg} x)\,dx = g(\frac{\pi}{3}) - g(0) = \frac{1}{4} + \ln 2 + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} + \ln 2$

$f(x) = \sin 2x + \operatorname{tg} x \Longrightarrow$ تابع اولیه $g(x) = \frac{-1}{2}\cos 2x - \ln|\cos x|$

$g(\frac{\pi}{3}) = \frac{-1}{2}\cos\frac{2\pi}{3} - \ln|\cos\frac{\pi}{3}| = \frac{1}{4} + \ln 2$

$g(0) = \frac{-1}{2}\cos 0 - \ln|\cos 0| = \frac{-1}{2}$

ج) $\int_0^2 |\sqrt{x} - 1|\,dx$

$= \int_0^1 -(\sqrt{x}-1)\,dx + \int_1^2 (\sqrt{x}-1)\,dx = \left[x - \frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_0^1 + [$

$$\left.\frac{2}{3}x\sqrt{x}-x\right]_1^2=\left(1-\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{4}{3}\sqrt{2}-2-\frac{2}{3}+1\right)=\frac{4\sqrt{2}}{3}-\frac{4}{3}$$

ت) $\int_0^1 |3x-1|\,[3x]\,dx$

با توجه به حدود x این مقدار یک می‌شود

با توجه به حدود x مثبت است

با توجه به حدود x مقدارش ۲ می‌شود

$$=\int_0^{\frac{1}{3}}|3x-1|\underbrace{[3x]}_{\text{با توجه به حدود x این مقدار صفر است}}dx+\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}|3x-1|\,[3x]\,dx+\int_{\frac{2}{3}}^{1}|3x-1|\,[3x]$$

با توجه به حدود x مثبت است

$$=0+\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}(3x-1)\,1\,dx+\int_{\frac{2}{3}}^{1}2(3x-1)\,dx$$

$$=\left[\frac{3x^2}{2}-x\right]_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}+2\left[\frac{3x^2}{2}-x\right]_{\frac{2}{3}}^{1}=\left(\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\right)-\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{3}\right)\right)+2\left(\left(\frac{3}{2}-1\right)-\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\right)\right)=\frac{1}{6}+2\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{7}{6}$$

الف) $\int \sin 4x \cos 2x \, dx$

$$\xrightarrow{\text{به حاصل جمع تبدیل می‌کنیم}}\int \frac{1}{2}(\sin 6x+\sin 2x)\,dx=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{6}\cos 6x-\frac{1}{2}\cos 2x\right)+C$$

$$=\frac{-1}{12}\cos 6x-\frac{1}{4}\cos 2x+C$$

ب) $\int \frac{x^2+\sqrt{x}+1}{2x^2}\,dx$

در اینگونه موارد تفکیک می‌کنیم

$$=\int\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{x}}{2x^2}+\frac{1}{2x^2}\right)dx=\int\frac{1}{2}dx+\int\frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}}dx+\int\frac{1}{2x^2}dx$$

$$=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{-\frac{3}{2}+1}x^{-\frac{3}{2}+1}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{-2+1}x^{-2+1}\right)+C$$

$$=\frac{1}{2}x-\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{2x}+C$$

ج) $\int\sqrt{(1-\sqrt{x})^2+4\sqrt{x}}\,dx$

می‌توانیم از اتحاد $(a-b)^2+4ab=(a+b)^2$ کمک بگیریم یا اینکه مستقیم حساب کنیم

$$(1-\sqrt{x})^2+4\sqrt{x}=(1+\sqrt{x})^2$$

$$\int\sqrt{1-2\sqrt{x}+x+4\sqrt{x}}\,dx=\int\sqrt{1+2\sqrt{x}+x}\,dx=\int\sqrt{(\sqrt{x}+1)^2}\,dx$$

$$=\int(\sqrt{x}+1)\,dx=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+x+C$$

د) $\int\frac{1+e^{2x}}{e^x}dx=\int\left(\frac{1}{e^x}+\frac{e^{2x}}{e^x}\right)dx=\int(e^{-x}+e^{x})\,dx$

$$=-e^{-x}+e^{x}+C=\frac{e^{2x}-1}{e^x}+C$$

(۴) $f(x)=\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}=\sqrt{\frac{2\cos^2\frac{x}{2}}{2}}=\sqrt{\cos^2\frac{x}{2}}=\left|\cos\frac{x}{2}\right|$

$$0\le x\le\pi\Rightarrow 0\le\frac{x}{2}\le\frac{\pi}{2}\Rightarrow 0\le\cos\frac{x}{2}\le 1$$

$$\bar{f} = \frac{1}{\pi - 0} \int_0^{\pi} \cos \frac{x}{2}\, dx = \frac{1}{\pi} \left[2 \sin \frac{x}{2} \right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi} \left(\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 \right) = \frac{2}{\pi}$$

الف) $\int \frac{(x+2)^3}{x}\, dx$

$$= \int \frac{x^3 + 6x^2 + 12x + 8}{x}\, dx$$

$$= \int \left(x^2 + 6x + 12 + \frac{8}{x} \right) dx$$

$$= \frac{1}{3} x^3 + 3x^2 + 12x + 8 \ln|x| + C$$

ب) $\int \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x}}\, dx$

$$\int \left(\frac{x^2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx$$

$$= \int \left(x\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx$$

$$= \frac{2}{5} x^2 \sqrt{x} + 2\sqrt{x}$$

توجه: برای سرعت در محاسبات انتگرالهای زیر را از حفظ داشته باشید:

$$\int \frac{1}{x^2}\, dx = \frac{-1}{x} + C \qquad \int \frac{1}{x^n}\, dx = \frac{-1}{(n-1)\, x^{n-1}} + C \quad (n \neq 1)$$

$$\int \sqrt{x}\, dx = \frac{2}{3} x \sqrt{x} \qquad \int x^n \sqrt[m]{x^k}\, dx = \frac{m}{m(n+1)+k}\, x^{n+1} \sqrt[m]{x^k} + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = 2\sqrt{x} + C \qquad \int \sqrt[p]{x}\, dx = \frac{p}{p+1}\, x \sqrt[p]{x} + C$$

الف) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx = \sin^{-1} \frac{x}{a} + C$

$$g(x) = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C \Rightarrow g'(x) = \frac{1/a}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \frac{1/a}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} = \frac{1/a}{\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}}$$

$$\boxed{y = \sin^{-1} u \to y' = \frac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}} \qquad \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} = f(x)$$

بنابراین انتگرال فوق درست است. به نمونه‌ای از کاربرد آن توجه کنید:

مثال $\int \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}} = \sin^{-1} \frac{x}{2} + C$

مثال: $\int \frac{dx}{\sqrt{9 - 25x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{25\left(\frac{9}{25} - x^2\right)}} = \frac{1}{5} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 - x^2}} = \frac{1}{5} \sin^{-1} \frac{5x}{3} + C$

مثال۳: (فرمول کلی‌تر) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - b^2x^2}} = \frac{1}{b} \sin^{-1} \frac{bx}{a} + C$

ب) $\int \frac{1}{a^2 + x^2}\, dx = \frac{1}{a} tg^{-1} \frac{x}{a} + C$

$$g(x) = \frac{1}{a} tg^{-1} \frac{x}{a} + C \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{a} \times \frac{1/a}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{\frac{1}{a^2}}{\frac{a^2 + x^2}{a^2}} = \frac{1}{a^2 + x^2} = f(x)$$

بنابراین انتگرال فوق درست است.

$$\boxed{\text{یادآوری:}\ y = tg^{-1} u \to y' = \frac{u'}{1 + u^2}}$$

به چند نمونه از مثالهای آن توجه کنید.

مثال ۱ : $\int \frac{dx}{1+x^2} = tg^{-1}x + c$

مثال ۲ : $\int \frac{dx}{9+x^2} = \frac{1}{3}\, tg^{-1}\frac{x}{3} + c$

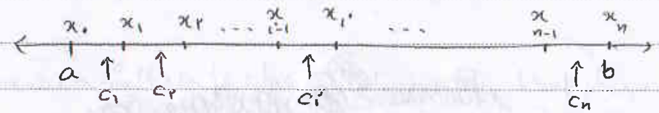
مثال ۳ : $\int \frac{dx}{16+36x^2} = \frac{1}{36}\int \frac{dx}{(\frac{4}{6})^2+x^2} = \frac{1}{36}\times\left(\frac{3}{2}\, tg^{-1}\frac{3}{2}x\right)+C$

$= \frac{1}{24}\, tg^{-1}\frac{3}{2}x + C$

مثال ۴ : (فرمول کلی) $\int \frac{dx}{a^2+b^2x^2} = \frac{1}{ab}\, tg^{-1}\frac{b}{a}x + c$

۷) افرازی دلخواه از بازه $[a,b]$ به صورت زیر را در نظر می‌گیریم $\Delta x = \frac{b-a}{n}$

$x_i = a + i\Delta x$ ، فرض می‌کنیم c_i نقطه‌ای دلخواه در درون بازه $[x_{i-1}, x_i]$ باشد.



$\forall i$

$\forall x \in [a,b] \Longrightarrow f(x) \le g(x) \Longrightarrow c_i \in [x_{i-1}, x_i] \,;\, f(c_i) \le g(c_i)$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \le \sum_{i=1}^{n} g(c_i) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x \le \sum_{i=1}^{n} g(c_i)\Delta x$

(نامنفی است Δx)

$\xrightarrow[\text{پس این حدود وجود دارند}]{\text{f و g انتگرال‌پذیرند}} \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x \le \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} g(c_i)\Delta x \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$

{ انشاءالله این قضیه به کتاب اضافه خواهد شد }

۸) مساحت سطح محصور بین نمودار تابع $f(x) = \frac{2-\cos 2x}{1+\cos 2x}$ با محور طولها و دو خط $x=0$ و $x=\frac{\pi}{4}$ را بیابید.

در بازه $[0, \frac{\pi}{4}]$ نمودار تابع همواره در بالای محور xها قرار دارد و محور xها را قطع نمی‌کند.

$f(x) = \frac{2-\cos 2x}{1+\cos 2x} = \frac{3-1-\cos 2x}{1+\cos 2x} = \frac{3}{1+\cos 2x} - 1$

$= \frac{3}{2\cos^2 x} - 1 = \frac{3}{2}(1+tg^2x) - 1$

مساحت سطح محصور $= S = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{3}{2}(1+tg^2x)-1\right)dx = \left[\frac{3}{2}\, tg\, x - x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$= \frac{3}{2}\left(tg\frac{\pi}{4} - tg\, 0\right) - \left(\frac{\pi}{4} - 0\right) = \frac{3}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{6-\pi}{4}$

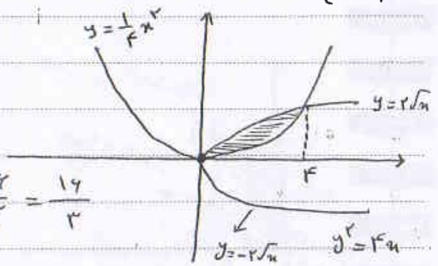
۹) مساحت سطح محصور بین نمودار دو منحنی $y^2=4x$ و $x^2=4y$ را بیابید.

ابتدا نقاط برخورد این دو منحنی را می‌یابیم

$\begin{cases} y^2 = 4x \\ x^2 = 4y \end{cases} \Longrightarrow 4x = \left(\frac{x^2}{4}\right)^2 \Rightarrow 4x = \frac{x^4}{16} \Rightarrow 64x = x^4 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=4 \end{cases}$

مساحت سطح محصور $= S = \int_0^4 \left(2\sqrt{x} - \frac{1}{4}x^2\right)dx$

$= \left[2\left(\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right) - \frac{1}{12}x^3\right]_0^4 = \frac{32}{3} - \frac{16}{3} = \frac{16}{3}$



۱۰) مساحت سطح محصور $f(x)=\frac{x^3-4}{x^2}$ و خطوط $y=x$ و $x=3$ و $x=k$ $(k>3)$ را بر حسب k حساب کرده و سپس حد این مساحت وقتی $k\to+\infty$ را حساب کنید.

حل: این تمرین حرکتی است به سوی انتگرالهای نابسره (مجازی)

توجه داریم که خط $y=x$ مجانب مایل تابع f است زیرا $f(x)=x-\frac{4}{x^2}$

حدش در $+\infty$ صفر است

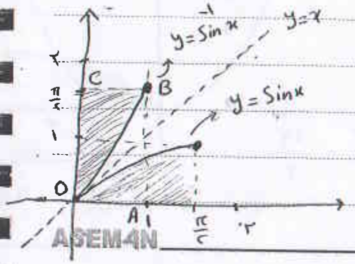
تابع f همواره در زیر مجانب مایل خود قرار دارد، پس

$$S_k=\int_3^k \left(x-f(x)\right)dx=\int_3^k\left(x-\left(x-\frac{4}{x^2}\right)\right)dx=\int_3^k\frac{4}{x^2}dx$$

$$\left[\frac{-4}{x}\right]_3^k=\left(\frac{-4}{k}\right)-\left(\frac{-4}{3}\right)=\frac{4}{3}-\frac{4}{k}$$

$$\lim_{k\to+\infty}S_k=\lim_{k\to+\infty}\left(\frac{4}{3}-\frac{4}{k}\right)=\frac{4}{3}$$

۱۱) حاصل $\int_0^1 \sin^{-1}x\,dx$ را بدست آورید (راهنمایی: از نمودار $y=\sin x$ در بازه $[0,\frac{\pi}{2}]$ و $y=\sin^{-1}x$ در بازه $[0,1]$ استفاده کنید)



می دانیم $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=1$ و مساحت های هاشور خورده در شکل روبرو برابرند

می دانیم مساحت مستطیل $\boxed{OABC}$ برابر $1\times\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$ است، بنابراین

$$\int_0^1\sin^{-1}x\,dx=\left(\text{مساحت مستطیل } \boxed{OABC}\right)-\left(\text{مساحت سطح محصور } \sin^{-1}x \text{ با محور } y\text{ها}\right)$$

$$=\frac{\pi}{2}-1=\frac{\pi-2}{2}$$

والسلام: انشاءالله مورد استفاده عزیزان قرار بگیرید

پرویز رضایی

استان فارس

0917 323 6003

لطفاً درصورتی که سؤالی ایراد دارد به آدرس زیر ایمیل کنید.

Parvizrr@yahoo.com

تمرینات ۸، ۹، ۱۰، ۱۱ احتمالاً به کتاب چاپ ۹۲ اضافه شود.

تمرین ۱ ص ۲۲۷ از کتاب حذف شده است.