حل المسائل فصل سوم

درس حساب دیفرانسیل و انتگرال

دورهٔ پیش دانشگاهی - رشتهٔ علوم ریاضی

به کوشش استاد پرویز رضایی

مدرس دوره ضمن خدمت دروس ریاضی۱، ریاضی۲، حسابان و حساب دیفرانسیل و انتگرال (در استان فارس)

Subject :
Year. Month. Date. ( )

خط مماس بر این منحنی در این نقطه وجود ندارد.

پ)
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

خط مماس قائم دارد و معادله آن $x=0$ می باشد.

ث:
$$F(x)=x\,\mathrm{Sgn}(x)=\begin{cases}x & x>0\\ 0 & x=0\\ -x & x<0\end{cases}=|x|$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{|x|-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}=\begin{cases}1 & x\to 0^+\\ -1 & x\to 0^-\end{cases}$$
f در $x=0$ خط مماس ندارد

حل تمرین در کلاس ص ۱۳۲

$$V(t)=250(16-t)^2$$

$$V'(t)=250\times 2\times(-1)(16-t)=-500(16-t)$$

$$V'(4)=-500\times(12)=-6000\ \frac{m^3}{min}$$

در هر دقیقه ۴، آب با آهنگ ۶۰۰۰ لیتر در دقیقه خارج می شود و با افزایش t، آهنگ تخلیه آب کم می شود. (اگر لیتر...)

حل تمرین در کلاس ص ۱۳۳

الف) $C'(x)$ هزینه نهایی است. (یعنی اگر $C(x)$ هزینه تولید x متر پارچه باشد هزینه تولید $(x+1)$ امین متر برابر $C'(x)$ است)

ب)
$$C'(1000)=900\Rightarrow C(1001)-C(1000)\simeq 900\Rightarrow$$

ASEM4N

Subject :
Year. Month. Date. ( )

حل مسائل ص ۱۳۴

(۱)
$$V=x^3\Rightarrow V'=3x^2\xRightarrow{x=4}V'=48$$

(۲)
مساحت $S=\pi r^2$
شعاع r $\longrightarrow r=\frac{d}{2}$
قطر d

$$S=\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2\Rightarrow S=\frac{\pi}{4}d^2$$
$$\Rightarrow S'=\frac{\pi}{2}d$$

(۳)
$$P(t)=60t^2-t^3 \qquad 0<t\le 40$$

الف)
$$P'(t)=120t-3t^2\rightarrow P'(30)=120(30)-3\times(30)^2=3600-2700=900$$

(فکر می کنم $t=20$ مورد نظر مؤلف بوده است یعنی $P'(20)=1200$)

ب)
$$P'(t)=900\Rightarrow 120t-3t^2=900\rightarrow t^2-40t+300=0$$

$$\Rightarrow(t-30)(t-10)=0\Rightarrow\begin{cases}t=30\\ t=10\end{cases}$$

(۴)
$$C(x)=0/05x^3-3x\rightarrow C'(x)=0/15x^2-3$$

الف)
$$C(101)-C(100)=51212/05-49700=1512/05$$

ب)
$$C'(100)=0/15\times(100)^2-3=1497$$

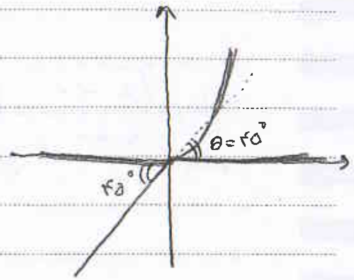
ASEM4N

ب)

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2-0}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} x = 0 \Rightarrow m_1 = 0$$

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x-0}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} 1 = 1 \Rightarrow m_2 = 1$$

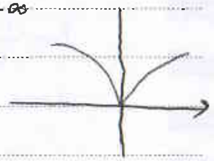
$$\operatorname{tg}\theta = \left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right| = \left|\frac{0-1}{1+0}\right| = 1 \Rightarrow \theta = 45^\circ$$



حل تمرین در کلاس ص ۱۳۸

الف)

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt[3]{x^2}-0}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = +\infty$$



$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt[3]{x^2}-0}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = -\infty$$

$f'(0)$ وجود ندارد

ب)

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}} \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} \quad (x\neq 0)$$

یا

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sqrt[3]{(x+\Delta x)^2}-\sqrt[3]{x^2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x\left(\sqrt[3]{(x+\Delta x)^4}+\sqrt[3]{x^2(x+\Delta x)^2}+\sqrt[3]{x^4}\right)}$$

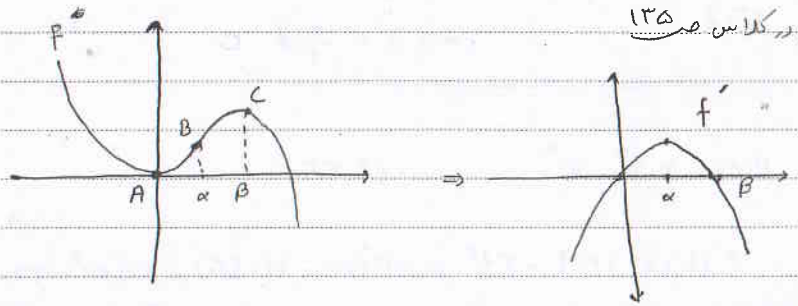
$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta x(2x+\Delta x)}{\Delta x\left(\sqrt[3]{(x+\Delta x)^4}+\sqrt[3]{x^2(x+\Delta x)^2}+\sqrt[3]{x^4}\right)} = \frac{2x}{3\sqrt[3]{x^4}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} \quad (x\neq 0)$$

⑤

$$R(x) = 0/1x^2 - 3x$$

$$R'(x) = 0/2x - 3 \Rightarrow R'(1800) = 357$$

حل تمرین در کلاس ص ۱۳۵

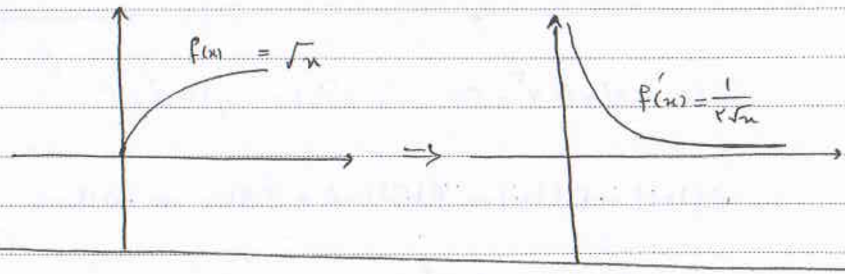


حل تمرین در کلاس ص ۱۳۶

فرض کنید $f(x) = \sqrt{x}$ می‌دانیم $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$D = [0,+\infty)$

$D_{f'} = (0,+\infty)$



حل تمرین در کلاس ص ۱۳۷

الف)

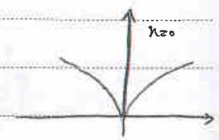
$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|-0}{x} = 1 = \text{شیب مماس راست}$$

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1 = \text{شیب مماس چپ}$$

$m_1 \cdot m_2 = -1 \to \theta = 90^\circ$

ب) اولاً f در $x=0$ پیوسته است ثانیاً

$$\lim_{x\to 0}\left|\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right| = \lim_{x\to 0}\left|\frac{\sqrt[3]{x^2}-0}{x-0}\right| = \lim_{x\to 0}\left|\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right| = +\infty$$



پس f در $x=0$ خط مماس قائم دارد و $x=0$ مماس قائم است.

حل تمرین در کلاس ص ۱۴۰

$$g'(a)=\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)f(x)-0}{x-a}=\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$$

f در $x=a$ پیوسته است

نکته: مشتق گیری به روش عامل صفرزا بیان می کند

حل تمرین در کلاس ص ۱۴۱

$$y'=\frac{1(x^2+6)-2x(x)}{(x^2+6)^2}=\frac{6-x^2}{(x^2+6)^2}\xrightarrow{x=2} m=\frac{6-4}{(2^2+6)^2}=0/02$$

$$y-0/2=0/02(x-2)\Rightarrow y=0/02x+0/16$$

حل تمرین در کلاس ص ۱۴۲

$$(f\cdot g)'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)g(x)-f(a)g(x)+f(a)g(x)-f(a)g(a)}{x-a}$$

$$=\lim\left(g(x)\times\frac{f(x)-f(a)}{x-a}+f(a)\times\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right)$$

f و g در $x=a$ مشتق پذیر $\quad g(a)f'(a)+f(a)g'(a)$

g در $x=a$ پیوسته است

حل تمرین در کلاس ص ۱۴۳

$$\frac{d}{dx}(\cos x)=\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cos x\cos h-\sin x\sin h-\cos x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(\frac{\cos x(\cos h-1)}{h}-\frac{\sin x\sin h}{h}\right)=(\cos x)(0)-(\sin x)(1)=-\sin x$$

$\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}=1$, $\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}=0$ توجه داریم که

حل تمرین در کلاس ص ۱۴۴

$$y=\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}\Rightarrow y'=\frac{(-\sin x)(\sin x)-(\cos x)\cos x}{\sin^2 x}$$

$$\Rightarrow y'=\frac{-(\sin^2 x+\cos^2 x)}{\sin^2 x}=\frac{-1}{\sin^2 x}=-(1+\cot^2 x)$$

حل تمرین در کلاس ص ۱۴۷

$$f(x)=\sqrt[9]{x^2}\Rightarrow f^3(x)=\sqrt[3]{x^2}\Rightarrow g(x)=f^3(x)=\sqrt[3]{x^2}=x^{2/3}\to g'(x)=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f^3(1+h)-f^3(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{g(1+h)-g(1)}{h}=g'(1)=\frac{2}{3}$$

حل تمرین در کلاس ص ۱۴۸

$$y=\frac{\cos x}{2+\sin x}\Rightarrow y'=\frac{(-\sin x)(2+\sin x)-(\cos x)\cos x}{(2+\sin x)^2}$$ (1)

$$y'=\frac{-2\sin x-1}{(2+\sin x)^2}$$

$m=f'(0)=\frac{-1}{4}$ شیب خط مماس $\Rightarrow m'=4$ شیب خط قائم

$y-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}(x-0)\Rightarrow y=-\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$ معادله خط مماس

$y-\frac{1}{2}=4(x-0)\Rightarrow y=4x+\frac{1}{2}$ " " قائم

Subject:
Year. Month. Date. ( )

ثانیاً: شیب خط مماس ۲ می باشد یعنی $f'(1)=2$

$$\lim_{x\to1}\frac{f^2(x)+3f(x)-18}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(f(x)+6)(f(x)-3)}{x-1}=\lim_{x\to1}(f(x)+6)\times\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=(f(1)+6)f'(1)=9\times2=18$$

حل تمرین در کلاس ص ۱۴۹

$$f(x)=(x^2+1)(x^2+2)(x^2+3)=x^6+6x^4+11x^2+6$$

$$f^{(6)}(x)=6! \qquad f^{(5)}(x)=6!\,x \qquad f^{(4)}(x)=\frac{6!}{2}x^2+6(4!)$$

$$\Longrightarrow f^{(4)}(1)=\frac{6!}{2}+6\times4!=21\times4!=504$$

حل تمرین در کلاس ص ۱۵۰

$$f(x)=|x^2-4|=\begin{cases}x^2-4 & x\geq2 ,\ x\leq-2\\ 4-x^2 & -2<x<2\end{cases}$$

$$f'_+(2)=\lim_{x\to2^+}\frac{|x^2-4|}{x-2}=\lim_{x\to2^+}\frac{|x-2||x+2|}{x-2}=4$$

$$f'_-(2)=\lim_{x\to2^-}\frac{|x^2-4|}{x-2}=\lim_{x\to2^-}\frac{|x-2||x+2|}{x-2}=-4$$

$\Rightarrow$ f در $x=2$ مشتق‌پذیر نیست.

$$f'_+(-2)=\lim_{x\to-2^-}\frac{|x^2-4|}{x+2}=\lim_{x\to(-2)^-}\frac{|x-2||x+2|}{x+2}=-4$$

$$f'_-(-2)=\lim_{x\to(-2)^+}\frac{|x^2-4|}{x+2}=\lim_{x\to(-2)^+}\frac{|x-2||x+2|}{(x+2)}=+4$$

$\Rightarrow$ f در $x=-2$ مشتق‌پذیر نیست.

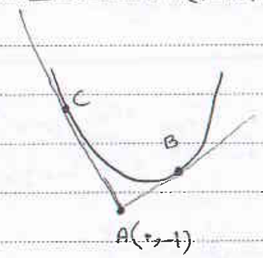
Subject:
Year. Month. Date. ( )

(۲) روش اول: (استفاده از دسته خط) تمام خطوطی که از $A(0,-1)$ می‌گذرد را می‌نویسیم و با سهمی برخورد می‌دهیم

$y+1=m(x-0)\Longrightarrow \boxed{y=mx-1}$ دسته خط گذرا از A

$$\begin{cases}y=mx-1\\ y=x^2+x\end{cases}\Longrightarrow x^2+x=mx-1\Longrightarrow \boxed{x^2+(1-m)x+1=0}\ *$$

$$\Delta=0\Rightarrow(1-m)^2-4=0\Longrightarrow\begin{cases}m=-1\longrightarrow y=-x-1\\ m=3\longrightarrow y=3x-1\end{cases}$$



روش دوم:

فرض می‌کنیم $B(\alpha,\alpha^2+\alpha)$ نقطه تماس باشد

$$f'(x)=2x+1$$

شیب خط مماس در B $=f'(\alpha)=2\alpha+1$

" " گذرنده از A و B $=\dfrac{\alpha^2+\alpha+1}{\alpha}$

$$\Longrightarrow \frac{\alpha^2+\alpha+1}{\alpha}=2\alpha+1$$

$$\Rightarrow 2\alpha^2+\alpha=\alpha^2+\alpha+1\Rightarrow\alpha^2=1\Rightarrow\alpha=\pm1\Rightarrow\begin{cases}B(1,2)\\ B(-1,0)\end{cases}$$ نقاط تماس

$\boxed{\alpha=1}\longrightarrow m=3 \qquad y+1=3(x-0)\Rightarrow y=3x-1$

معادلات خطوط مماس

$\boxed{\alpha=-1}\longrightarrow m=-1 \qquad y+1=-1(x-0)\Rightarrow y=-x-1$

(۳) خط $y=2x+1$ در نقطه‌ای به طول ۱ بر منحنی f مماس است یعنی

اولاً $f(1)=3$ نقطه تماس است یعنی $A(1,3)$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

حل مسائل صـ ۱۵۲

چون f در $x=1$ پیوسته است و $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+h)}{h}=3$ پس باید $\lim\limits_{h\to 0} f(1+h)=0$ پس $f(1)=0$

① $$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-0}{h}=3 \Longrightarrow \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=3 \to f'(1)=3$$

$f(1)=0$

② $$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{(2(1+h)^2-1)-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2h^2+4h}{h}=4$$

③ $$f'_+(\pi)=\lim_{x\to\pi^+}\frac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi}=\lim_{x\to\pi^+}\frac{\sin x\left[\cos\frac{x}{2}\right]-0}{x-\pi}=\lim_{x\to\pi^+}\frac{-\sin x}{x-\pi}$$

$$=\lim_{x\to\pi^+}\frac{-\sin(\pi-x)}{x-\pi}=1$$

$$f'_-(\pi)=\lim_{x\to\pi^-}\frac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi}=\lim_{x\to\pi^-}\frac{\sin x\left[\cos\frac{x}{2}\right]}{x-\pi}=\lim_{x\to\pi^-}\frac{0}{x-\pi}=0$$

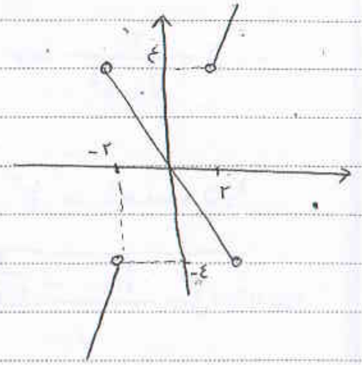
④ (الف) $$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)+f(a)-f(a-h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{2h}-\lim_{h\to 0}\frac{f(a-h)-f(a)}{2h}=\frac{1}{2}f'(a)+\frac{1}{2}f'(a)=f'(a)$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

نقاط $x=\pm 2$، نقاط گوشه تابع هستند.

$$f'(x)=\begin{cases}2x & x>2 \text{ یا } x<-2\\ -2x & -2<x<2\end{cases}$$



$$f''(x)=\begin{cases}2 & x>2 \text{ یا } x<-2\\ -2 & -2<x<2\end{cases}$$

$f'''(x)=0 \qquad x\neq\pm 2$

$\forall n\geq 3 \qquad f^{(n)}(x)=0 \qquad (x\neq\pm 2)$

حل تمرین در کلاس صـ ۱۵۱

$f(0)=0$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x[x^3]+3x}{x}=\lim_{x\to 0^+}\left([x^3]+3\right)=3$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x([x^3]+3)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\left([x^3]+3\right)=-1+3=2$$

نقطه $x=0$ برای تابع، نقطه گوشه است

Subject :
Year. Month. Date. ( )

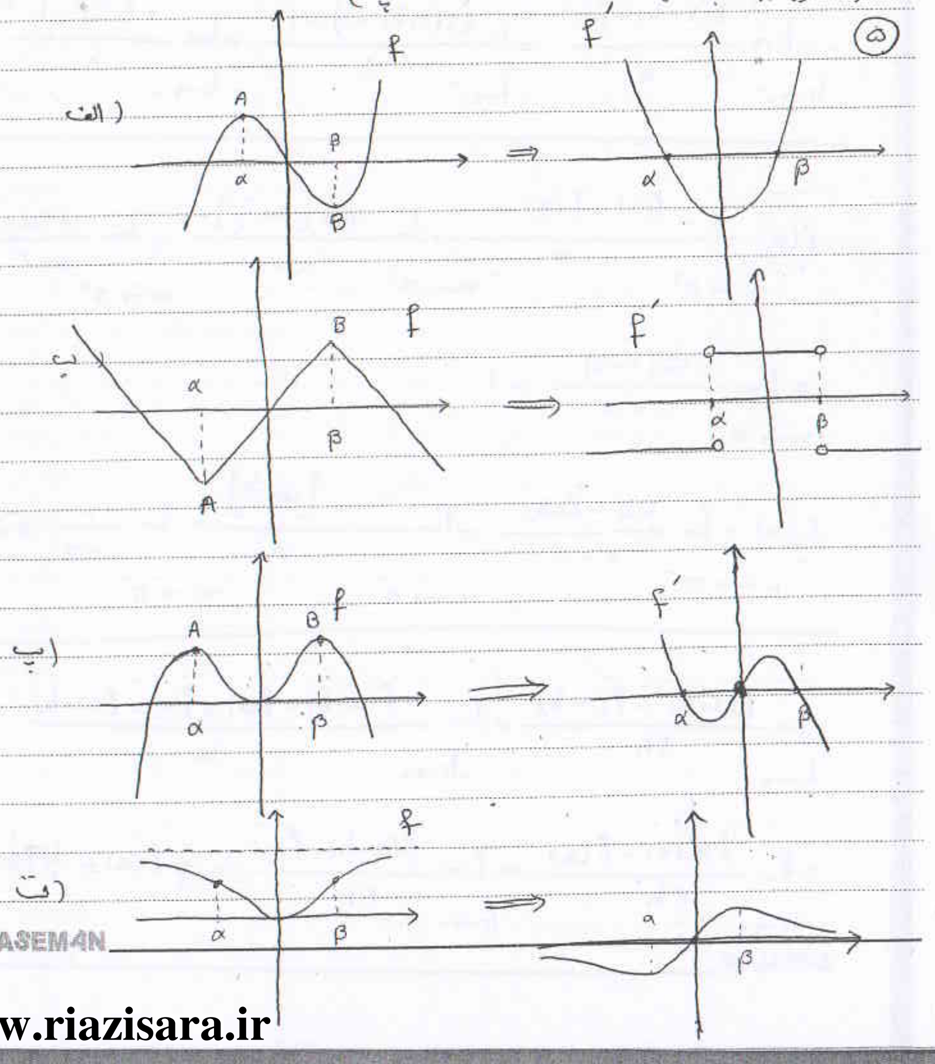
ب) تابع $f(x)=|x|$ و $a=0$ را در نظر می‌گیریم می‌دانیم این تابع در $x=0$ مشتق‌پذیر نیست

(تمرین در کلاس صفحه ۱۳۷) اما

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(-h)}{2h}=\lim_{h\to 0}\frac{|h|-|-h|}{2h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{2h}=0$$

(دو مورد در کتاب اشتباه چاپی دارد موارد الف و پ)

۵



Subject :
Year. Month. Date. ( )

۶ (بهتر است این تمرین به مسائل بعدی برده شود زیرا هنوز قاعده زنجیره‌ای بیان نشده است)

$$y=\frac{x}{\sqrt{1+x}} \Rightarrow y^2=\frac{x^2}{1+x} \Rightarrow y^2(1+x)=x^2 \xrightarrow[\text{رابطه مشتق می‌گیریم}]{\text{از طرفین این}}$$

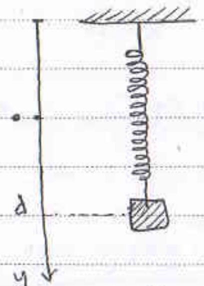
$$2yy'(1+x)+y^2=2x$$

روش دوم: با توجه به تابع داریم $y^2=\frac{x^2}{1+x}$ و $y'=\dfrac{\sqrt{1+x}-\frac{x}{2\sqrt{1+x}}}{1+x}$ ، جایگذاری می‌کنیم.

$$y^2+2yy'(1+x)=\frac{x^2}{1+x}+2\left(\frac{x}{\sqrt{1+x}}\right)\left(\frac{2(1+x)-x}{2\cancel{(1+x)}\sqrt{1+x}}\right)\cancel{(1+x)}$$

$$=\frac{x^2}{1+x}+\frac{\cancel{2}x(2+x)}{\cancel{2}(1+x)}=\frac{x^2+2x+x^2}{1+x}=\frac{2x^2+2x}{x+1}=\frac{2x(x+1)}{x+1}=2x$$

۷



$$f(t)=5\cos t$$

$$\text{سرعت}=f'(t)=-5\sin t$$

$$\text{شتاب}=f''(t)=-5\cos t$$

چون حرکت جسم یک حالت نوسانی با دوره تناوب 2π ثانیه است پس آن را در بازه زمانی $[0,2\pi]$ توصیف می‌کنیم

$$[0,2\pi]=\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\cup\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]\cup\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right]\cup\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right]$$

در این بازه سرعت در حال افزایش است به طوری که در لحظه $t=\frac{\pi}{2}$ به حداکثر خود می‌رسد و در این لحظه شتاب به صفر می‌رسد.

در این بازه سرعت در حال کاهش است به طوری که در $t=\pi$ صفر می‌شود و در این بازه شتاب کند شونده به حداکثر خود می‌رسد.

در این بازه مجدداً سرعت افزایش یافته و در $x=\frac{3\pi}{2}$ به حداکثر خود می‌رسد و در لحظه $\frac{3\pi}{2}$ مجدداً شتاب صفر می‌گردد.

سرعت در حال کم شدن است به طوری که در $t=2\pi$ صفر شده و در عوض شتاب کند شونده زیاد می‌شود.

Subject : Year. Month. Date. ( )

(۸)

$$f(x)=x^6-2x^4-x+1 \Rightarrow f'(x)=6x^5-8x^3-1 \Rightarrow f''(x)=30x^4-24x^2$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f'(1+h)-f'(1)}{h}=f''(1)=30-24=6$$

(۹)

$$x^2-x+1=0 \Rightarrow sgn(x^2-x+1)=1 \Rightarrow f(x)=\frac{x+1}{x}=1+\frac{1}{x}$$

عبارت همواره ⊕ است $\Delta=-3<0$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{-1}{x^2}$$

(۱۰) فرض می‌کنیم

$$f(x)=ax^2+bx+c \ , \ f'(x)=2ax+b \ , \ f''(x)=2a$$

$$\begin{cases} f(1)=2 \\ f'(1)=3 \\ f''(1)=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b+c=2 \longrightarrow c=1 \\ 2a+b=3 \longrightarrow b=-1 \\ 2a=4 \longrightarrow a=2 \end{cases} \qquad f(x)=2x^2-x+1$$

(۱۱)

$$A(1,2),\ B(3,12) \Rightarrow m_{AB}=\frac{12-2}{3-1}=\frac{10}{2}=5$$

$$f'(x)=m_{AB} \Rightarrow 2x+1=5 \Rightarrow x=2 \qquad C(2,6)$$

(۱۲)

$$f(x)=\frac{1+2\sin x}{\sin x}=\frac{1}{\sin x}+2$$

$$f'(x)=\frac{-\cos x}{\sin^2 x} \Rightarrow m=f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{-\sqrt{3}/2}{1/4}=-2\sqrt{3}$$ شیب خط مماس

ASEM4N

معادله خط مماس $y-4=-2\sqrt{3}\left(x-\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow y=-2\sqrt{3}x+4+\frac{\sqrt{3}}{3}$

Subject : Year. Month. Date. ( )

(۱۳)

$$f'(x)=\begin{cases} 3x^2 & x<1 \\ 2ax+b & x\geq 1 \end{cases} \Rightarrow f''(x)=\begin{cases} 6x & x<1 \\ 2a & x\geq 1 \end{cases}$$

شرط آنکه f در $x=1$ مشتق مرتبه دوم داشته باشد آن است که اولاً پیوسته بوده و مشتق اول نیز داشته باشد:

شرط پیوستگی $\Rightarrow a(1)^2+b(1)+c=(1)^3 \Rightarrow a+b+c=1$ (*)

$$f'_+(1)=f'_-(1) \Rightarrow 2a+b=3 \ (**) \qquad f''_+(1)=f''_-(1) \Rightarrow 2a=6 \Rightarrow a=3$$

$$(**) \Longrightarrow b=-3 \qquad (*) \Rightarrow c=1$$

(۱۴) الف)

$$f(x)=\sin x \Rightarrow f'(x)=\cos x \Rightarrow f''(x)=-\sin x \Rightarrow f'''(x)=-\cos x$$

حدس: $f^{(n)}(x)=\sin\left(\frac{n\pi}{2}+x\right)$

$P(1):\ f'(x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x$ ✓

$P(k):\ f^{(k)}(x)=\sin\left(\frac{k\pi}{2}+x\right)$

$P(k+1):\ f^{(k+1)}(x)=\sin\left(\frac{(k+1)\pi}{2}+x\right)$ ✓

$$f^{(k+1)}(x)=\left(\sin\left(\frac{k\pi}{2}+x\right)\right)'=\cos\left(\frac{k\pi}{2}+x\right)=\sin\left(\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{2}+x\right)=\sin\left(\frac{(k+1)\pi}{2}+x\right)$$

ASEM4N

Subject:
Year. Month. Date. ( )

حل تمرین در کلاس ص ۱۶۰

الف) $\cos\sqrt{y} = y^2\sin x$

$$\frac{d}{dx}(\cos\sqrt{y}) = \frac{d}{dx}(y^2\sin x) \Rightarrow \frac{y'}{2\sqrt{y}}(-\sin\sqrt{y}) = 2yy'\sin x + y^2\cos x$$

$$\Rightarrow 2yy'\sin x + y^2\cos x + \frac{y'}{2\sqrt{y}}\sin\sqrt{y} = 0 \Rightarrow y' = \frac{-y^2\cos x}{2y\sin x + \frac{1}{2\sqrt{y}}\sin\sqrt{y}}$$

ب) $x + y^4 + 1 = y + x^2 + xy^2$

$$1 + 4y^3y' = y' + 2x + y^2 + 2yy'x \xRightarrow{x=y=1} 1 + 4y' = y' + 2 + 1 + 2y' \Rightarrow y' = 2$$

$$0 + 12y^2y'^2 + 4y^3y'' = y'' + 2 + 2yy' + 2y'^2x + 2yy''x + 2yy' \xRightarrow[y'=2]{x=y=1}$$

$$12(1)^2(2)^2 + 4(1)^3y'' = y'' + 2 + 2(1)(2) + 2(2)^2(1) + 2(1)y''(1) + 2(1)(2)$$

$$\Rightarrow 48 + 4y'' = y'' + 2 + 4 + 8 + 2y'' + 4 \Rightarrow y'' = -30$$

پ) $3x^2 + 3y^2y' = 6xy' + 6y \Rightarrow y' = \frac{2y - x^2}{y^2 - 2x}$

شیب خط مماس در $A(\frac{4}{3}, \frac{8}{3})$ $= m = \frac{2(\frac{8}{3}) - \frac{16}{9}}{\frac{64}{9} - \frac{8}{3}} = \frac{\frac{16}{3} - \frac{16}{9}}{\frac{64}{9} - \frac{8}{3}} = \frac{\frac{32}{9}}{\frac{40}{9}} = \frac{32}{40} = \frac{4}{5}$

$$y - \frac{8}{3} = \frac{4}{5}(x - \frac{4}{3}) \Rightarrow 15y - 40 = 12x - 16 \Rightarrow 15y = 12x + 24$$

$$\Rightarrow 5y = 4x + 8$$

ASEM4N

Subject:
Year. Month. Date. ( )

ب) روش اول: $f(x) = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2}) \Rightarrow f^{(n)}(x) = \sin(\frac{n\pi}{2} + x + \frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{n\pi}{2} + x)$

روش دوم: $f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\sin x = g(x)$

$$f^{(n)}(x) = g^{(n-1)}(x) = -\sin(\frac{(n-1)\pi}{2} + x) = \cos(\frac{\pi}{2} + \frac{(n-1)\pi}{2} + x) = \cos(\frac{n\pi}{2} + x)$$

حل تمرین در کلاس ص ۱۵۶ فرض می‌کنیم $f(x) = x^n$ و $u = g(x)$ باشد در این صورت

$$y = f(g(x)) = f(u) = u^n$$

$$\frac{d}{dx}(u^n) = \frac{d}{dx}(f(u)) = \frac{du}{dx}\cdot\frac{df}{du} = u'(nu^{n-1}) = nu'u^{n-1}$$

حل تمرین در کلاس ص ۱۵۷

الف) $y = \sin u$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}\cdot\frac{dy}{du} = u'\cos u$$

$y = \cos u$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}\cdot\frac{dy}{du} = u'(-\sin u) = -u'\sin u$$

ب) $y = \tan u$ $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}\cdot\frac{dy}{du} = u'(1 + \tan^2 u)$

$y = \cot u$ $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}\cdot\frac{dy}{du} = u'(-(1 + \cot^2 u)) = -u'(1 + \cot^2 u)$

ASEM4N

Subject:
Year. Month. Date. ( )

حل تمرین در کلاس ص ۱۶۵

(۱)

$$y=\ln|u|=\begin{cases}\ln u & u>0\\ \ln(-u) & u<0\end{cases}$$

$$y'=\begin{cases}\dfrac{u'}{u} & u>0\\ \dfrac{-u'}{-u}=\dfrac{u'}{u} & u<0\end{cases}\Rightarrow y'=\dfrac{u'}{u}$$

(۲)

$$y=x^{\sqrt{x}}\Rightarrow \ln y=\ln x^{\sqrt{x}}\Rightarrow \ln y=\sqrt{x}\ln x$$

$$\Rightarrow \frac{y'}{y}=\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x+\sqrt{x}\left(\frac{1}{x}\right)\Rightarrow y'=x^{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x+\frac{\sqrt{x}}{x}\right)$$

نکته: اگر u و v توابعی برحسب x باشند و $u>0$ آنگاه

$$y=u^{v}\Rightarrow y'=u^{v}\left(v'\ln u+\frac{u'}{u}v\right)$$

حل مسائل ص ۱۶۶

(۱) الف)

$$f'(x)=\frac{\dfrac{1(x^2+1)-2x(x)}{(x^2+1)^2}}{4\sqrt[4]{\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)^3}}$$

ب)

$$f'(x)=\frac{2(2x+1)}{3\sqrt[3]{(x^2+x+1)}}$$

پ)

$$f'(x)=(-\sin x)\cos(\cos x)$$

ت)

$$f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\cos\sqrt[3]{x}$$

ث)

$$f'(x)=\frac{(1+\tan^2 x)-(1+\cot^2 x)}{2\sqrt{\tan x+\cot x}}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

حل تمرین در کلاس ص ۱۶۱

$$f(1)=2\Rightarrow f^{-1}(2)=1$$

(۱)

$$f^{-1\,\prime}(2)=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{1/8}=8$$

$$g(x)=\frac{1}{f^{-1}(x)}\Rightarrow g'(x)=\frac{-f^{-1\,\prime}(x)}{(f^{-1}(x))^2}\xRightarrow{x=2} g'(2)=\frac{-f^{-1\,\prime}(2)}{(f^{-1}(2))^2}=\frac{-8}{1}=-8$$

(۲) در حسابان دیدیم که $\cos(\sin^{-1}x)=\sqrt{1-x^2}$

$$f(x)=\sin x\Rightarrow f'(x)=\cos x$$

$$f^{-1}(x)=\sin^{-1}x \qquad (f'\circ f^{-1})(x)=\cos(\sin^{-1}x)=\sqrt{1-x^2}$$

$$f^{-1\,\prime}(x)=\frac{1}{(f'\circ f^{-1})(x)}=\frac{1}{\cos(\sin^{-1}x)}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

حل تمرین در کلاس ص ۱۶۳

$$y=e^{2x}\cos\pi x$$

$$y'=2e^{2x}\cos\pi x-\pi e^{2x}\sin\pi x$$

شیب خط مماس $=m=2e^{0}\cos 0-\pi e^{0}\sin 0=2$

$$y-1=2(x-0)$$
$$y=2x+1$$

حل تمرین در کلاس ص ۱۶۵

$$f(x)=\ln x \qquad g(x)=u$$

$$y=\ln u=f(u)\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}\cdot\frac{dy}{du}=u'\times\frac{1}{u}=\frac{u'}{u}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

(۲)
$y'=4 \Rightarrow 2(1+\tan^2 2x)=4 \Rightarrow 1+\tan^2 2x=2 \Rightarrow \tan^2 2x=1$

$\Rightarrow \tan 2x=\pm 1$

- $2x=\frac{\pi}{4} \Rightarrow x=\frac{\pi}{8} \rightarrow A(\frac{\pi}{8},1)$
- $2x=-\frac{\pi}{4} \Rightarrow x=\frac{-\pi}{8} \rightarrow B(\frac{-\pi}{8},-1)$

(۳)
الف) f زوج $\Rightarrow f(-x)=f(x) \Rightarrow -f'(-x)=f'(x) \Rightarrow f'(-x)=-f'(x)$

f' فرد است

ب) f فرد $\Rightarrow f(-x)=-f(x) \Rightarrow -f'(-x)=-f'(x) \Rightarrow f'(-x)=f'(x) \rightarrow$

f' زوج است

(۴)
f زوج $\rightarrow$ f' فرد $\qquad f'(1)=2 \Rightarrow f'(-1)=-2$

g فرد $\rightarrow$ g' زوج $\qquad g'(1)=3 \Rightarrow g'(-1)=3$

$(f+g)'(-1)=f'(-1)+g'(-1)=(-2)+(3)=1$

(۵)
$g(x)=f(2-x^2) \Rightarrow g'(x)=-2xf'(2-x^2)$

$\Rightarrow g''(x)=-2f'(2-x^2)+4x^2f''(2-x^2)$

$\xrightarrow{x=0} g''(0)=-2f'(2)+0 \Rightarrow g''(0)=-2(2)=-4$

(البته باید توجه داشت که $f''(2)$ موجود باشد.)

Subject:
Year. Month. Date. ( )

(۶)
توجه داریم که در صورتی که f و g دو چند جمله‌ای باشند و $\deg g(x)=m$, $\deg f(x)=n$ و $m\neq n$ آنگاه

$\deg(f(x)\pm g(x))=\max\{m,n\}$

$\deg(f(x)\times g(x))=m+n \qquad \deg((f\circ g)(x))=\deg((g\circ f)(x))=m$

چون f یک چندجمله‌ای از درجه n است پس f' از درجه $n-1$ می‌باشد و بنابراین $f\circ f'$ از درجه $n(n-1)$ می‌باشد در نتیجه باید

$n(n-1)=12 \Rightarrow n=4$

(۷)
$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$y=f(\cot x) \Rightarrow y'=-(1+\cot^2 x)f'(\cot x)=-(1+\cot^2 x)\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2 x}}$

$=-\sqrt{1+\cot^2 x}=-\sqrt{\frac{1}{\sin^2 x}}=-\frac{1}{|\sin x|}=\frac{1}{\sin x}$

(۸)
$y=\sin x^\circ \Rightarrow y=\sin\frac{\pi}{180}x \Rightarrow y'=\frac{\pi}{180}\cos\frac{\pi}{180}x$

$\Rightarrow y'=\frac{\pi}{180}\cos x^\circ \xrightarrow[x=45]{} y'=\frac{\pi}{180}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi\sqrt{2}}{360}$

$A(45,\frac{\sqrt{2}}{2})$

$y-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi\sqrt{2}}{360}(x-45)$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\frac{d^{k+1}}{dx^{k}}(\cos ax)=\frac{d}{dx}\left(a^{k}\cos\left(ax+\frac{k\pi}{۲}\right)\right)=-a^{k+1}\sin\left(ax+\frac{k\pi}{۲}\right)$$

$$=+a^{k+1}\cos\left(\frac{\pi}{۲}+ax+\frac{k\pi}{۲}\right)=a^{k+1}\cos\left(ax+\frac{(k+1)\pi}{۲}\right)$$

۱۰

$$f(x)=\frac{x+۲}{x-۱}\implies f'(x)=\frac{-۳}{(x-۱)^{۲}}\implies f'(۲)=-۳$$

$A(۲,۴)$ روی f $\implies$ $A'(۴,۲)\in f^{-1}$ روی f^{-1}

شیب خط مماس بر f^{-1} در A' $=f^{-1'}(۴)=\dfrac{1}{f'(۲)}=\dfrac{1}{-۳}$

معادله خط مماس بر f^{-1} در A' : $y-۲=\dfrac{-1}{۳}(x-۴)\implies ۳y+x=۱۰$

۱۱

$$f'(x)=\sqrt{۹+f^{۲}(x)}$$

$A(a,۴)$ روی f $\implies$ $A'(۴,a)$ روی f^{-1}

$f(a)=۴$

$$f^{-1'}(۴)=\frac{1}{f'(a)}=\frac{1}{\sqrt{۹+f^{۲}(a)}}=\frac{1}{\sqrt{۹+۱۶}}=\frac{1}{۵}$$

۱۲

$$y'=\frac{-F'_x}{F'_y}=\frac{-(۳x^{۲}-۳y)}{۳y^{۲}-۳x}=\frac{y-x^{۲}}{y^{۲}-x}$$

شیب خط مماس در A $=y'(A)=\dfrac{(\frac{۳}{۲})-(\frac{۳}{۲})^{۲}}{(\frac{۳}{۲})^{۲}-\frac{۳}{۲}}=-1$

$y-\frac{۳}{۲}=-1\left(x-\frac{۳}{۲}\right)$

$y=-x+۳$ خط مماس در A

Subject:
Year. Month. Date. ( )

۹ الف)

$$\frac{d^{n}}{dx^{n}}(\sin ax)=a^{n}\sin\left(ax+\frac{n\pi}{۲}\right)$$

$P(1):\ \dfrac{d}{dx}(\sin ax)=a^{1}\sin\left(ax+\dfrac{\pi}{۲}\right)=a\cos ax$

$P(k):\ \dfrac{d^{k}}{dx^{k}}(\sin ax)=a^{k}\sin\left(ax+\dfrac{k\pi}{۲}\right)$

$P(k+1):\ \dfrac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}(\sin ax)=a^{k+1}\sin\left(ax+\dfrac{(k+1)\pi}{۲}\right)$

$$\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}(\sin ax)=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^{k}}{dx^{k}}(\sin ax)\right)=\frac{d}{dx}\left(a^{k}\sin\left(ax+\frac{k\pi}{۲}\right)\right)$$

$$=a^{k+1}\cos\left(ax+\frac{k\pi}{۲}\right)=a^{k+1}\sin\left(\frac{\pi}{۲}+ax+\frac{k\pi}{۲}\right)=a^{k+1}\sin\left(ax+\frac{(k+1)\pi}{۲}\right)$$

$\sin\left(\frac{\pi}{۲}+\theta\right)=\cos\theta$

ب)

$$\frac{d^{n}}{dx^{n}}(\cos ax)=a^{n}\cos\left(ax+\frac{n\pi}{۲}\right)$$

$P(1):\ \dfrac{d}{dx}(\cos ax)=-a\sin ax=a\cos\left(ax+\dfrac{\pi}{۲}\right)$

$P(k):\ \dfrac{d^{k}}{dx^{k}}(\cos ax)=a^{k}\cos\left(ax+\dfrac{k\pi}{۲}\right)$

$P(k+1):\ \dfrac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}(\cos ax)=a^{k+1}\cos\left(ax+\dfrac{(k+1)\pi}{۲}\right)$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

(۱۴) الف) $f'(x) = (1+tg^2x)\, e^{tg\,x}$

ب) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2-1}$ ت) $f'(x) = \dfrac{-\sin x}{\cos x} = -tg\,x$

پ) $f'(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x} = cotg\,x$

(۱۵) $y = \dfrac{\ln x}{x} \Rightarrow y' = \dfrac{1}{x} \times \dfrac{1}{x} + \dfrac{-1}{x^2} \ln x$

شیب خط مماس $= \dfrac{1}{1} \times \dfrac{1}{1} - \dfrac{1}{1} \ln 1 = 1 \Rightarrow y - 0 = 1(x-1)$

$y = x-1$ خط مماس

(۱۶) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^{\frac{n}{x}}\right)^x = e^x$

$\Rightarrow f'(x) = e^x \Rightarrow f''(x) = e^x$

(۱۷) در نقاطی خط مماس افقی است که $y' = 0$ پس

$y' = 0 \Rightarrow 2x e^{-x^2} - 2x^3 e^{-x^2} = 0 \Rightarrow e^{-x^2}(2x - 2x^3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$

$A(0,0)$ $B(1, \frac{1}{e})$ $C(-1, \frac{1}{e})$

(۱۸) اگر منظور مؤلف محترم، مقدار مشتق تابع معکوس آن در نقطه‌ای به طول ۳ واقع بر f^{-1} باشد که راه حل به صورت زیر است.

$3x + \ln x = 3 \Rightarrow x = 1$

$A(1,3)$ روی f $\longrightarrow$ $A'(3,1)$ روی f^{-1} $(f^{-1})'(3) = \dfrac{1}{f'(1)} = \dfrac{1}{3+\frac{1}{1}} = \dfrac{1}{4}$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

شیب خط قائم در A $= \dfrac{-1}{\text{شیب خط مماس}} = \dfrac{-1}{-1} = 1$

$y - \dfrac{3}{2} = 1\left(x - \dfrac{3}{2}\right) \Rightarrow y = x$ از مبداء می‌گذرد

(۱۳) $x^2 + y^2 - xy - 1 = 0$ $y' = \dfrac{-F'_x}{F'_y} = \dfrac{-(2x-y)}{2y-x}$

ابتدا نقاطی از منحنی را می‌یابیم که مماس عمود بر محور xها باشد، پس باید $2y - x = 0$

دو نقطه M و N روی منحنی و روی خط $y = \dfrac{x}{2}$ $\Longrightarrow 2y = x$ (*)

قرار دارد پس این همان خط $y = ax+b$ مورد نظر است، اما گاهی اوقات

در اینجا به یک خط می‌رسیم پس باید همانند ادامه زیر عمل کنیم

$\begin{cases} 2y = x \\ x^2 + y^2 - xy - 1 = 0 \end{cases} \longrightarrow 4y^2 + y^2 - 2y^2 = 1 \rightarrow y^2 = \dfrac{1}{3} \rightarrow y = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$M\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ $N\left(\dfrac{-2\sqrt{3}}{3}, \dfrac{-\sqrt{3}}{3}\right)$

حال خط $y = ax+b$ همان خط گذرنده از M و N می‌باشد

$m = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3}} = \dfrac{1}{2}$

$y - \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{1}{2}\left(x - \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right) \Rightarrow y = \dfrac{1}{2}x - \cancel{\dfrac{\sqrt{3}}{3}} + \cancel{\dfrac{\sqrt{3}}{3}} \Rightarrow$

$y = \dfrac{1}{2}x \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \\ b = 0 \end{cases}$

Subject: Year. Month. Date. ( )

ولی اگر مشتق تابع معکوس در حالت کلی باشد که می‌توان آن را به صورت ضمنی به فرم زیر بیان کرد.

$$f(x) = 3x + \ln x \Rightarrow f'(x) = 3 + \frac{1}{x} \Rightarrow f'(f^{-1}(x)) = 3 + \frac{1}{f^{-1}(x)}$$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{(f' \circ f^{-1})(x)} = \frac{1}{3 + \frac{1}{f^{-1}(x)}} = \frac{f^{-1}(x)}{3f^{-1}(x)+1} \Rightarrow y' = \frac{y}{3y+1}$$

(۱۹)

تابع تدارکاتی:

$$f(t) = \frac{L}{1+Me^{-kt}}$$

$$\begin{cases} f(0) = 200 \\ f(1) = 1000 \\ \lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 10000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{L}{1+M} = 200 \\ \frac{L}{1+Me^{-k}} = 1000 \\ L = 10000 \end{cases}$$

$$\frac{10000}{1+M} = 200 \quad 1+M = 50 \quad \boxed{M=49} \quad \boxed{L=10000}$$

$$\frac{10000}{1+49e^{-k}} = 1000 \Rightarrow 1+49e^{-k} = 10$$

$$\Rightarrow 49e^{-k} = 9 \Rightarrow e^{-k} = \frac{9}{49}$$

$$f(t) = \frac{10000}{1+49\left(\frac{9}{49}\right)^t} \Rightarrow f'(t) = \frac{-\left(49 \times \left(\frac{9}{49}\right)^t \ln\frac{9}{49}\right)(10000)}{\left(1+49\left(\frac{9}{49}\right)^t\right)^2}$$

$$f(3) = \frac{10000}{1+49\left(\frac{9}{49}\right)^3} \simeq 7671 \quad , \quad f'(3) = \frac{-490000\left(\frac{9}{49}\right)^3 \ln\frac{9}{49}}{\left(1+49\left(\frac{9}{49}\right)^3\right)^2} \simeq 3028$$

Subject: Year. Month. Date. ( )

حل تمرین در کلاس ص ۱۷۴

$$f(x) = \sqrt{1-x^2} \qquad D_f = [-1, 1]$$

$$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} \qquad f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$$

با توجه به اینکه در کتاب فرض بر این است که نقاط ابتدا و انتهای دامنه عضو نقاط بحرانی محسوب نشود پس این تابع فقط یک نقطهٔ بحرانی دارد و آن هم $x=0$ می‌باشد.

حل تمرین در کلاس ص ۱۷۴ اگر $f(c)$ می‌نیمم نسبی f روی بازه I باشد، و $f'(c)$ موجود باشد ثابت می‌کنیم $f'(c)=0$

چون $f(c)$ می‌نیمم نسبی f است پس برای هر x در I، $f(x) \geq f(c)$ و لذا داریم $f(x) - f(c) \geq 0$

اگر $x<c$ یعنی $x-c<0$ آنگاه $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0$

$$\Rightarrow \lim_{x \to c^-} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0 \Rightarrow f'_-(c) \leq 0 \Rightarrow f'(c) \leq 0 \quad (*)$$

و اگر $x>c$ یعنی $x-c>0$ آنگاه $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0$

$$\Rightarrow \lim_{x \to c^+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0 \Rightarrow f'_+(c) \geq 0 \Rightarrow f'(c) \geq 0 \quad (**)$$

$$(*) \text{ و } (**) \Rightarrow f'(c) = 0$$

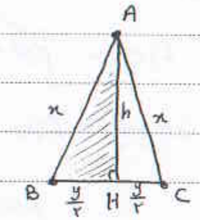
حل تمرین در کلاس ص ۱۷۶ در مثال ۱ رسیدیم به این نتیجه که $V=4x^3-230x^2+3000x$ صفحه ص ۱۶۹

$$V'=12x^2-460x+3000$$

$$V'=0 \Rightarrow 3x^2-115x+750=0 \Rightarrow x=\frac{115\pm 65}{6} \begin{cases} (+)\ 30 & \text{غ ق ق} \\ (-)\ 8.3=\frac{25}{3} & \text{ق ق} \end{cases}$$

$$\Delta=(-115)^2-4(3)(750)=4225 \qquad \sqrt{4225}=65$$

حل تمرین در کلاس ص ۱۷۸



فرض: $2x+y=$ مقدار ثابت $=k \Rightarrow x=\frac{k-y}{2}$ (**)

$\overset{\triangle}{ABH}:\ x^2=h^2+(\frac{y}{2})^2 \Rightarrow h^2=x^2-\frac{y^2}{4}$ (*)

$$S^2=\frac14 h^2y^2=\frac14 y^2\left(x^2-\frac{y^2}{4}\right)=\frac14 y^2\left(\left(\frac{k-y}{2}\right)^2-\frac{y^2}{4}\right)=\frac14 y^2\left(\frac{k^2}{4}-\frac{ky}{2}\right)$$

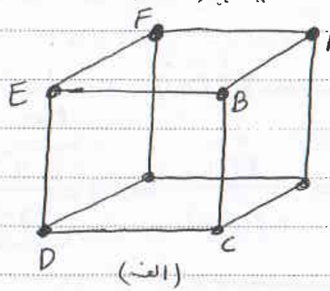
$$\Rightarrow S^2=\frac{k^2y^2}{16}-\frac{ky^3}{8} \Rightarrow 2SS'=\frac{2yk^2}{16}-\frac{3ky^2}{8}$$

$$S'=0 \Rightarrow \frac{2yk^2}{16}-\frac{3ky^2}{8}=0 \Rightarrow 2yk^2-6ky^2=0 \Rightarrow$$

$$2ky(k-3y)=0 \Rightarrow \begin{cases} k=0 & \times \\ y=0 & \times \\ y=\frac{k}{3} & \checkmark \end{cases} \xrightarrow{(**)} x=\frac{k-\frac{k}{3}}{2}=\frac{k}{3}$$

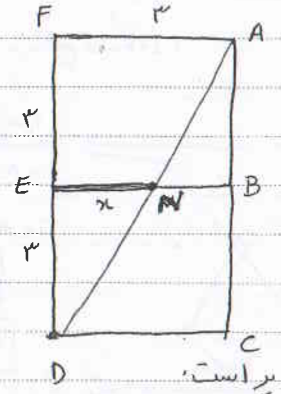
پس ضلع های مثلث برابر و اندازه هرکدام $\frac{k}{3}$ است یعنی مثلث متساوی الساقین

راه حل کوتاه و ساده هندسی که برای مثال ص ۱۷۸ (کوتاه‌ترین مسیر عنکبوت)



عنکبوت در نقطه A قرار دارد و سوسک در نقطه D قرار دارد.

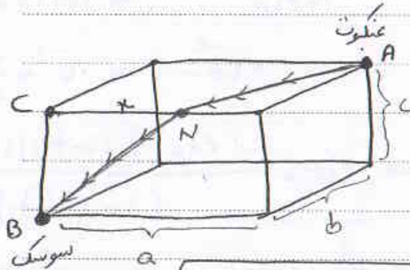
مکعب را روی یالهای BC و CD و DE برش می‌دهیم و وجه BCDE را بلند می‌کنیم (حول یال BE) تا در صفحه مربع ABEF واقع شود. (شکل ب)



با توجه به اینکه EB∥AF طبق قضیه تالس داریم NE=x،

$$\frac{x}{3}=\frac{3}{6} \Rightarrow x=\frac{3}{2} \Rightarrow$$ N وسط BE است

نکته: مسئله در صورتی که به جای مکعب از مکعب مستطیل به طول یالهای a و b و c استفاده شود به صورت زیر است:



$CN=x$

$$\frac{x}{a}=\frac{c}{b+c} \Rightarrow x=\frac{ac}{b+c}$$

حل مسائل بهینه سازی ص ۱۸۰

① فرض می‌کنیم x و y اعداد مثبت باشند

فرض: $x+y=9 \rightarrow y=9-x$

تابع هدف $P=xy=x(9-x)=9x-x^2$

$$P'=9-2x=0 \Rightarrow x=9/2=y$$

Subject :
Year. Month. Date. ( )

نکته : اگر ~~حاصلضرب~~ مجموع دو عدد مقدار ثابتی باشد حاصلضرب آنها وقتی max است که آن دو عدد برابر باشند

تعبیر هندسی : در بین تمام مستطیل‌های با محیط برابر، مربع بیشترین مساحت را دارد!

در مورد مسئله زیر فکر کنید.

مسئله : فرض کنید $\alpha x + \beta y = k$ (α و β و k اعداد ثابت اند) بیشترین مقدار عبارت $P = x^n + y^m$ را بیابید (m و n اعداد ثابتی اند)

---

②

$xy = 8 \Rightarrow y = \frac{8}{x}$

$S = x + y \Rightarrow S = x + \frac{8}{x} \Rightarrow S' = 1 - \frac{8}{x^2} \Rightarrow S' = \frac{x^2 - 8}{x^2}$

$S' = 0 \Rightarrow x^2 - 8 = 0 \Rightarrow x = 2\sqrt{2}$ و $y = 2\sqrt{2}$

نکته : اگر حاصلضرب دو عدد مقدار ثابتی باشد مجموع آنها وقتی مینیمم است که آن دو عدد مساوی باشند.

تعبیر هندسی : در بین تمام مستطیل‌های با مساحت برابر، مربع کمترین محیط را دارد

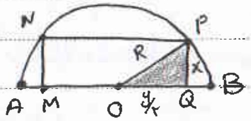
در مورد مسئله زیر فکر کنید.

اگر $x^n y^m = k$ (n و m و k مقادیر ثابتی اند) کمترین مقدار $\alpha x + \beta y$ را بیابید (α و β مقدار ثابتی اند)

ASEM4N

Subject :
Year. Month. Date. ( )

③



$\overset{\Delta}{OPQ}: \; x^2 + (\frac{y}{2})^2 = R^2$

$4x^2 + y^2 = 4R^2 \Rightarrow y = \sqrt{4R^2 - 4x^2}$

$\Rightarrow y = 2\sqrt{R^2 - x^2}$ ⊛

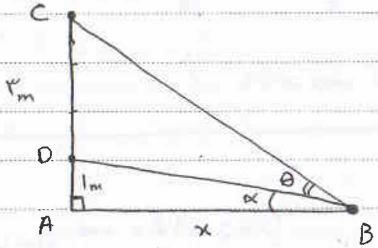
$S = xy = 2x\sqrt{R^2 - x^2} = 2\sqrt{R^2x^2 - x^4}$

$S' = 0 \Rightarrow 2R^2x - 4x^3 = 0 \Rightarrow 2x(R^2 - 2x^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 & \times \\ x = \frac{R\sqrt{2}}{2} & \checkmark \end{cases}$

$y = 2\sqrt{R^2 - \frac{R^2}{2}} \Rightarrow y = R\sqrt{2}$ $\qquad S_{max} = (R\sqrt{2})(R\frac{\sqrt{2}}{2}) = R^2$

---

④



$tg\,\alpha = \frac{1}{x}$

$tg(\alpha + \theta) = \frac{4}{x}$

$tg\,\theta = tg((\alpha+\theta) - \alpha) = \frac{tg(\alpha+\theta) - tg\,\alpha}{1 + tg(\alpha+\theta)\,tg\,\alpha} = \frac{\frac{4}{x} - \frac{1}{x}}{1 + (\frac{4}{x})(\frac{1}{x})} = \frac{\frac{3}{x}}{1 + \frac{4}{x^2}}$

$\Rightarrow tg\,\theta = \frac{3x}{x^2+4} \Rightarrow \theta = tg^{-1}(\frac{3x}{x^2+4})$

$\theta' = \frac{u'}{1+u^2} = 0 \Rightarrow u' = 0 \Rightarrow \frac{3(x^2+4) - 2x(3x)}{(x^2+4)^2} = 0 \Rightarrow$

$3x^2 + 12 - 6x^2 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 12 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$

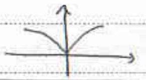
ASEM4N

حل تمرین در کلاس ص ۱۸۳

$f(x)=\sqrt[3]{x^2} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x}}$ $\quad f'(0)=$ وجود ندارد

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	‖	$+$	
y	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

تابع در بازه‌ی $(-\infty,0)$ اکیداً نزولی و در بازه $(0,+\infty)$ اکیداً صعودی است.



حل تمرین در کلاس ص ۱۸۵

$g(x)=\frac{x}{1+x^2} \quad g'(x)=\frac{1(1+x^2)-2x(x)}{(1+x^2)^2}=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$

$g'(x)=0 \Rightarrow 1-x^2=0 \Rightarrow x=\pm1$

$g''(x)=\frac{(-2x)(1+x^2)^2-4x(1+x^2)(1-x^2)}{(1+x^2)^4}=\frac{(-2x)(1+x^2)-4x(1-x^2)}{(1+x^2)^3}$

$g''(x)=\frac{-2x-2x^3-4x+4x^3}{(1+x^2)^3}=\frac{2x^3-6x}{(1+x^2)^3}$

$g''(x)=0 \Rightarrow 2x(x^2-3)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\pm\sqrt{3} \end{cases}$

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
y'		$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	
y''		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
y		↘		↘		↗		↗		↘		↘	
		∩		∪		∪		∩		∩		∪	

حل تمرین در کلاس ص ۱۸۷

$f(x)=2+x^{\frac{1}{3}} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{3}x^{-2/3} \Rightarrow f''(x)=\frac{-2}{9}x^{-5/3}=\frac{-2}{9x\sqrt[3]{x^2}}$

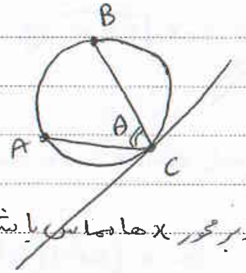
$f'(0)=$ وجود ندارد

$f'(0)=+\infty$

x		0	
y''	$+$	‖	$-$
y	∪	2	∩

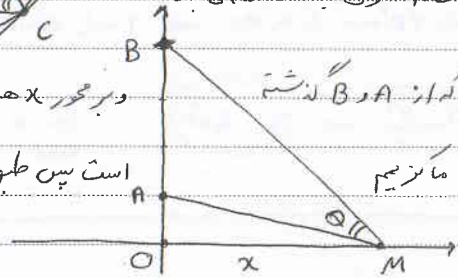
$A(0,2)$ نقطه عطف قائم تابع است.

نکته: دایره‌ای را در نظر بگیرید که از دو نقطه A و B گذشته و بر خط L مماس باشد، در بین تمام زوایایی که رأس آنها روی خط L و دو ضلع آن از A و B می‌گذرد، کدام زاویه $\widehat{ACB}$ ماکزیمم است؟ (چرا؟)



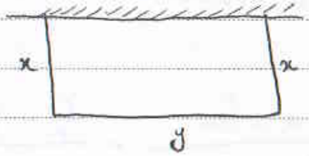
روش دیگری برای حل مسأله‌ی فوق به کمک نکته‌ی بالا

دایره‌ای را در نظر بگیریم که از A و B گذشته و بر محور x ها مماس باشد در این صورت زاویه $\theta=\widehat{AMB}$ ماکزیمم است پس طبق روابط طولی در این دایره داریم



$x^2=OA\cdot OB \Rightarrow x^2=1\times4 \Rightarrow x=2$

⑤



$2x+y=150 \to y=150-2x$

$S=xy=x(150-2x)=150x-2x^2$

$S'=150-4x=0 \Rightarrow x=\frac{150}{4}=\frac{75}{2}=37.5\,m \to y=75\,m$

$S_{max}=(37.5)(75)=2815.5$

Subject :

Year. Month. Date. ( )

حل تمرین در کلاس ص ۱۹۱

$f(x)=\sqrt{3}\,x-2\cos x \qquad (0,2\pi)$

$f'(x)=\sqrt{3}+2\sin x=0 \Longrightarrow \sin x=\frac{-\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow x=\frac{4\pi}{3}\,,\ \frac{5\pi}{3}$

x	0		$\frac{4\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{3}$		2π
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	-2	$\nearrow$	$\frac{4\pi\sqrt{3}}{3}+1 \simeq 8{,}255$	$\searrow$	$\frac{5\pi\sqrt{3}}{3}-1 \simeq 8{,}069$	$\nearrow$	$+2\pi\sqrt{3}-2 \simeq 8{,}883$

حل تمرین در کلاس ص ۱۹۲

$f(x)=x^4-2x^3$

$f'(x)=4x^3-6x^2=0 \Longrightarrow 2x^2(2x-3)=0 \Longrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=3/2 \end{cases}$ نقاط بحرانی

$f''(x)=12x^2-12x$

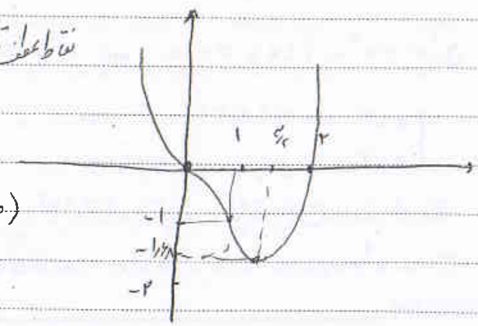
$f''(0)=0$ در مورد $x=0$ چیزی نمی‌توان گفت.

x	$-\infty$		0		$3/2$		$+\infty$
y'		$-$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-1{,}6875$	$\nearrow$	$+\infty$

$f''\left(\frac{3}{2}\right)=12\left(\frac{3}{2}\right)^2-12\left(\frac{3}{2}\right)=9>0 \Longrightarrow$ f در $x=\frac{3}{2}$ مینیمم نسبی دارد.

$f''(x)=0 \Longrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$ نقاط عطف تابع

(مشابه مثال حل شده در ص ۱۸۶)

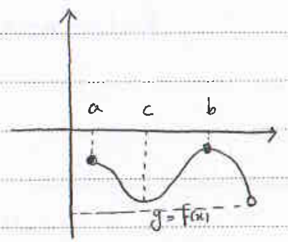


Subject :

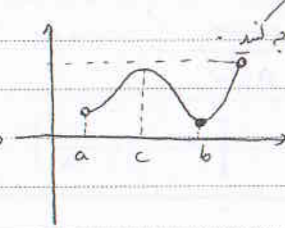
Year. Month. Date. ( )

حل مسائل ص ۱۹۳

(۱) خیر به مثال روبرو توجه کنید.



$\Rightarrow$



(۲)

$f(x)=x\left|x^2-1\right|=\begin{cases} x^3-x & x\geq 1 \text{ یا } x\leq -1 \\ x-x^3 & -1<x\leq 1 \end{cases}$

$f'(x)=\begin{cases} 3x^2-1 & x>1 \text{ یا } x<-1 \\ 1-3x^2 & -1<x<1 \end{cases}$

$f'_+(1)=2$, $f'_-(1)=-2 \longrightarrow f'(1)=$ وجود ندارد

$f'_+(-1)=-2$, $f'_-(-1)=2 \Longrightarrow f'(-1)=$ وجود ندارد

$f'(x)=0 \Longrightarrow x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ مجموعه‌ی نقاط بحرانی $=\left\{1,-1,\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$

(۳)

$f(x)=|x-1|\sqrt[3]{x^2} \Longrightarrow \begin{cases} (x-1)\sqrt[3]{x^2} & x\geq 1 \\ (1-x)\sqrt[3]{x^2} & x<1 \end{cases}$

$f'(x)=\begin{cases} \sqrt[3]{x^2}+\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}(x-1) & x>1 \\ -\sqrt[3]{x^2}+\frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}}(1-x) & x<1 \quad (x\neq 0) \end{cases} \Longrightarrow$

Subject :
Year. Month. Date. ( )

(6)

$$f(x) = \sqrt[3]{x-1} = (x-1)^{\frac{1}{3}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}(x-1)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}} \qquad f'(1) = +\infty$$

خط مماس قائم دارد.

$$f''(x) = \frac{-2}{9}(x-1)^{-\frac{5}{3}} = \frac{-2}{9(x-1)\sqrt[3]{(x-1)^2}}$$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f''		$+$	||	$-$	
f	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

نقطه عطف

(7)

$$f(x) = x^4 + ax^3 + 3x^2$$

$$f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + 6x \Rightarrow f''(x) = 12x^2 + 6ax + 6 = 0$$

$$\Rightarrow f''(x) = 2x^2 + ax + 1 = 0$$

$$\Delta_{f''} \leq 0 \Rightarrow a^2 - 8 \leq 0 \Rightarrow a^2 \leq 8 \Rightarrow -\sqrt{8} \leq a \leq \sqrt{8}$$

(8)

$$y = x(x-6)^2 = x^3 - 12x^2 + 36x$$

$$y' = 3x^2 - 24x + 36 = 0 \Rightarrow x^2 - 8x + 12 = 0 \Rightarrow (x-6)(x-2) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x=2 \to A(2,32) & \text{max نسبی} \\ x=6 \to B(6,0) & \text{min نسبی} \end{cases} \qquad y'' = 6x - 24 = 0 \Rightarrow x = 4$$

C وسط A و B : $C\left(\frac{6+2}{2}, \frac{32+0}{2}\right) = (4,16)$ $\qquad$ $C(4,16)$ نقطه عطف

معادله خطی که از نقاط A و B می‌گذرد: $m = -8$ ، $y - 0 = -8(x-6)$

$y = -8x + 48$: مختصات C در این معادله صدق می‌کند.

Subject :
Year. Month. Date. ( )

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{5x-2}{3\sqrt[3]{x}} & x > 1 \\[2ex] \dfrac{2-5x}{3\sqrt[3]{x}} & x < 1 ,\ x \neq 0 \end{cases}$$

$f'(1)$ وجود ندارد و $f'(0)$ وجود ندارد.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{5}$$

$$\text{مجموعه‌ی نقاط بحرانی} = \left\{0, 1, \frac{2}{5}\right\}$$

(4) الف)

$$f(x) = x^3 - 3x + 1 \qquad \left[-\frac{3}{2}, 3\right]$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \qquad \text{مجموعه‌ی نقاط بحرانی} = \{1, -1\}$$

x	$-\frac{3}{2}$	-1	1	3
$f(x)$	$\frac{13}{8}$	3	-1	19

min ← ، max

ب)

$$f(x) = \sin^2 x + 2\cos x \qquad [0, 2\pi]$$

$$f'(x) = 2\sin x\cos x - 2\sin x = 0 \Rightarrow 2\sin x(\cos x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0, \pi, 2\pi \\ x = 0 \end{cases} \qquad \text{مجموعه‌ی نقاط بحرانی} = \{\pi\}$$

x	0	π	2π
$f(x)$	2	-2	2
	max	min	max

(5)

$$S(t) = 30t - 5t^2 \qquad S'(t) = 0 \Rightarrow t = 3_{(s)}$$

$$S'(t) = 30 - 10t$$

t	0		3		6
$S'(t)$		$+$	0	$-$	
$S(t)$		↗	45	↘	

ترتیب در بازه زمانی $(0,3)$ به سمت بالا حرکت می‌کند و در بازه $(3,6)$ به سمت پایین حرکت می‌کند

ارتفاع ماکزیمم ۴۵ متر است.

Subject :
Year. Month. Date. ( )

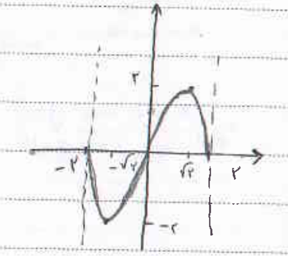
۹

$f(x)=x\sqrt{4-x^2} \qquad D_f=[-2,2]$

$$f'(x)=\sqrt{4-x^2}+\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}x=\frac{4-x^2-x^2}{\sqrt{4-x^2}}=\frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}}$$

$f'(x)=0 \Rightarrow 4-2x^2=0 \Rightarrow x^2=2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2}$

x	-2		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		2
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	0
	max نسبی		min مطلق و نسبی		max نسبی و مطلق		min نسبی



$$f'(2)=f'_-(2)=\lim_{x\to 2^-}\left|\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\right|=\lim_{x\to 2^-}\left|\frac{x\sqrt{4-x^2}}{x-2}\right|=\lim_{x\to 2^-}\left|\frac{x\sqrt{2+x}}{-\sqrt{2-x}}\right|=\left|\frac{4}{-0^+}\right|=+\infty$$

پس f در $x=2$ مماس قائم دارد.

$$f'(-2)=f'_+(-2)=\lim_{x\to -2^+}\left|\frac{x\sqrt{4-x^2}}{x+2}\right|=\lim_{x\to -2^+}\left|\frac{x\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x}}\right|=+\infty$$

پس f در $x=-2$ مماس قائم دارد.

۱۰

$$C=\frac{3t}{27+t^3}$$

$$C'=\frac{3(27+t^3)-3t^2(3t)}{(27+t^3)^2}=\frac{81-6t^3}{(27+t^3)^2}$$

$C'=0 \Rightarrow 81-6t^3=0 \Rightarrow t^3=\frac{27}{2} \Rightarrow t=\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$

t	0		$\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$		$+\infty$
C'		$+$	0	$-$	
C	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt[3]{4}}{9}$	$\searrow$	

Subject :
Year. Month. Date. ( )

۱۱

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

$f''(x)=6ax+2b$

$$\begin{cases} f(2)=4 \\ f'(2)=0 \\ f''(3)=0 \\ f(3)=3 \\ f'(4)=0 \\ f(4)=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8a+4b+2c+d=4 \longrightarrow \boxed{d=4-20a} \\ 12a+4b+c=0 \longrightarrow 12a-36a+c=0 \to \boxed{c=24a} \\ 18a+2b=0 \longrightarrow \boxed{b=-9a} \\ 27a+9b+3c+d=3 \Rightarrow 27a-81a+72a+4-20a=3 \\ 48a+8b+c=0 \\ 64a+16b+4c+d=2 \end{cases}$$

$\Rightarrow a=\frac{1}{2}$

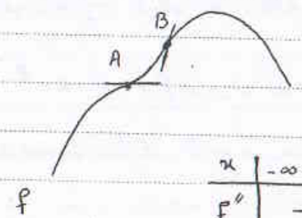
$b=\frac{-9}{2}$

$c=12$

$d=-6$

$$f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{9}{2}x^2+12x-6$$

۱۲



فرض می‌کنیم طول نقاط A و B به ترتیب α و β باشد

x	$-\infty$		α		β		$+\infty$
f''		$-$	0	$+$	0	$-$	
f'		$\searrow$	min نسبی f'	$\nearrow$	max نسبی f' (عرض مثبت)	$\searrow$	

مقدار min نسبی f' صفر است زیرا خط مماس بر f موازی محور xها است پس $f'(\alpha)=0$

مقدار max نسبی f' عددی مثبت است زیرا خط مماس بر f در B شیب مثبت در صعود دارد

$\frac{-1}{e} \simeq -0/37 \qquad \frac{-2}{e^2} \simeq -0/27$

Subject :
Year. Month. Date. ( )

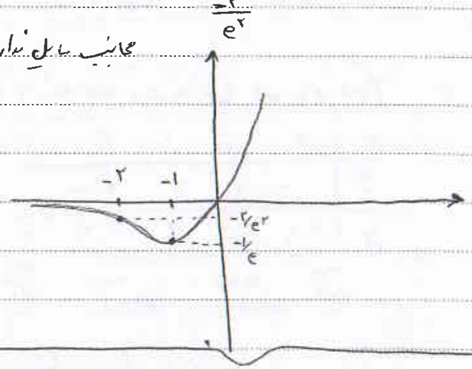
$f''(x) = e^x(1+x) + e^x = e^x(2+x)$

$f''(x) = 0 \Rightarrow x = -2$

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
y''		$-$		$+$	
y		$\cap$		$\cup$	

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{xe^x}{x} = +\infty$ مجانب مایل ندارد

$x = 0 \longrightarrow y = 0$
محل برخورد با محور yها و xها



(۱۵) توجه: منظور از تابع همواره پیوسته f، این است که f در $\mathbb{R}$ پیوسته است.

$\boxed{*}$ نقطه $x = -2$ برای تابع f یک نقطه بازگشتی است زیرا $f'_-(-2) = -\infty$ و $f'_+(-2) = +\infty$، پس

نمودار f در $x = -2$ به صورت زیر است و این نقطه مینیمم نسبی f است.

$x=-2$

$\boxed{**}$ نقطه $x=-1$ یک نقطه بحرانی f است زیرا $f'(-1) = 0$ و در ضمن علامت f' قبل از آن $\oplus$ و بعد از آن $\ominus$

است پس f در $x=-1$ ماکزیمم نسبی دارد، و نمودار f در $x=-1$ به صورت می باشد.

$\boxed{***}$ f' در بازه $(-1, -\frac{1}{2})$ نزولی و در بازه $(-\frac{1}{2}, 0)$ صعودی است پس تقعر f در بازه $(-1, -\frac{1}{2})$ رو به پایین و در بازه

$(-\frac{1}{2}, 0)$ رو به بالا است یعنی f در $x=-\frac{1}{2}$ تغییر تقعر می دهد و چون $f'(-\frac{1}{2})$ موجود است در نتیجه نقطه $x=-\frac{1}{2}$

عطف تابع f است.

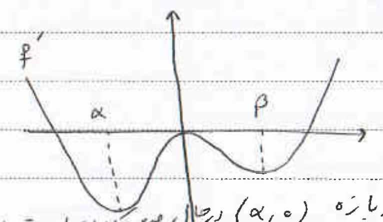
$\boxed{****}$ تقعر تابع f در $x=0$ نیز عوض می شود زیرا f' در بازه $(-\frac{1}{2}, 0)$ نزولی است و $(0, \frac{1}{2})$ صعودی

ASEM4N

است و $f'(0) = 0$ پس خط مماس هم دارد یعنی $x=0$ عطف افقی f است.

Subject :
Year. Month. Date. ( )

(۱۳)



تابع f' در بازه $(-\infty, \alpha)$ در حال نزول کردن است

پس تقعر f در این بازه رو به پایین است و f' در بازه $(\alpha, 0)$ در حال صعود کردن است پس

تقعر f در این بازه رو به بالا است چون $f'(\alpha)$ موجود و عددی منفی است پس f در $x=\alpha$

خط مماس دارد و بنابراین $x=\alpha$ یک نقطه عطف مایل f است و نمودار f در $x=\alpha$ حدوداً

به صورت α می باشد. همچنین f' در بازه $(0, \beta)$ در حال نزولی است پس

تقعر f در این بازه رو به پایین است یعنی در صفر تقعر f عوض می شود و در ضمن $f'(0) = 0$ یعنی f در

$x=0$ خط مماس افقی دارد در نتیجه f در $x=0$ عطف افقی دارد و نمودارش به صورت

است و در نهایت f' در بازه $(\beta, +\infty)$ در حال صعودی است یعنی تقعر f رو به بالا است

پس در $x=\beta$ نیز تقعر f عوض می شود و بنابراین f در $x=\beta$ عطف مایل دارد زیرا $f'(\beta) > 0$

و موجود است و نمودار f به صورت β می باشد

نکته . اگر f' تابعی پیوسته باشد عطف f، همان اکسترمم های نسبی f' می باشد

(۱۴)

$f(x) = xe^x \qquad D_f = \mathbb{R}$

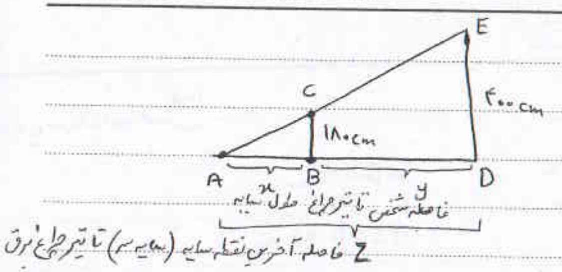
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-x}{e^x} = 0$ پس $y=0$ مجانب افقی و قائم ندارد

$f'(x) = e^x + xe^x = e^x(1+x) = 0 \Rightarrow x = -1$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$-$		$+$	
y		$\searrow$	$-\frac{1}{e}$ min	$\nearrow$	

ASEM4N

Subject :
Year. Month . Date . ( )



حل تمرین در کلاس ص ۱۹۶

$y' = 0.4 \ m/s = 40 \ cm/s$

در اینجا دو سوال مطرح است،

طول سایه با چه سرعتی کاهش می‌یابد، هدف محاسبه x' می‌باشد.

$y' = -40$

$$BC \parallel DE \xRightarrow{\text{تالس}} \frac{x}{x+y} = \frac{180}{400} \Rightarrow \frac{x}{x+y} = \frac{9}{20} \Rightarrow 20x = 9x + 9y$$

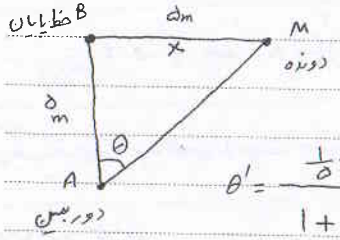
$$\Rightarrow 11x = 9y \Rightarrow 11x' = 9y' \Rightarrow 11(x') = 9(40) \Rightarrow x' = \frac{360}{11}$$

نقطه A (همان آخرین نقطه سایه) با چه سرعتی به طرف تیر چراغ برق حرکت می‌کند؟ که همان z' است.

$$\frac{x}{z} = \frac{180}{400} \Rightarrow \frac{z-y}{z} = \frac{9}{20} \Rightarrow 20z - 20y = 9z \Rightarrow 11z = 20y$$

$$\Rightarrow 11z' = 20y' \Rightarrow 11(z') = 20(40) \Rightarrow z' = \frac{800}{11} \simeq 72.72 \ (cm/s)$$

نتیجه: نقطه انتهای سایه، سرعتی بیش از سرعت شخص دارد.



حل تمرین در کلاس ص ۱۹۸

$$tg\theta = \frac{x}{5} \Rightarrow \theta = tg^{-1}\left(\frac{x}{5}\right)$$

$$\theta' = \frac{\frac{1}{5}x'}{1+\left(\frac{x}{5}\right)^2} \xrightarrow[x = 5m]{x' = -10 \ m/s} \theta' = \frac{\frac{1}{5}(-10)}{1+\left(\frac{5}{5}\right)^2} = \frac{-2}{2} = -1 \ rad/s$$

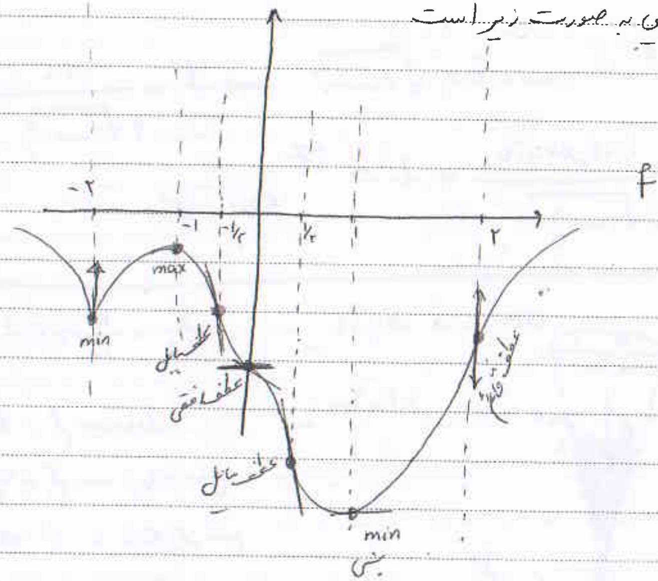
Subject :
Year. Month . Date . ( )

$\boxed{*****}$ $x = 1/2$ دقیقاً مشابه $x = -1/2$ است یعنی عطف مایل f است.

$\boxed{******}$ f در $x=1$ می‌نیمم نسبی دارد زیرا اولاً $f'(1)=0$ پس $x=1$ بحرانی f است، علامت f' در بازه $(\frac{1}{2},1)$ منفی و در بازه $(1,2)$ مثبت است طبق آزمون مشتق اول $x=1$ می‌نیمم نسبی f است.

$\boxed{*******}$ f' در بازه $(1,2)$ صعودی است پس تقعر f در این بازه رو به بالا است و همچنین f' در بازه $(2,+\infty)$ نزولی است پس تقعر f در این بازه رو به پایین است در نتیجه تقعر f در $x=2$ عوض می‌شود از طرفی $f'_-(2) = f'_+(2) = +\infty$ یعنی f در $x=2$ خط مماس قائم دارد پس $x=2$ عطف قائم f است.

نمودار f به طور تقریبی به صورت زیر است



Subject:
Year. Month. Date. ( )

(3)

قطر $d = 60\ mm = 6\ cm \Rightarrow r = 3\ cm$ شعاع

$r' = 3\ \frac{mm}{s} = 0.3\ \frac{cm}{s}$

$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

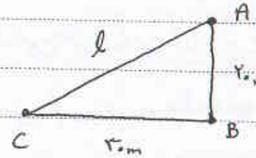
$V' = \frac{4}{3}\pi(3r^2 r')$

$V' = 4\pi r^2 r'$

$V' = 4\pi(3)^2(0.3) \Rightarrow V' = 10.8\pi\ \frac{cm^3}{s}$

---

(4)



$BC = x$

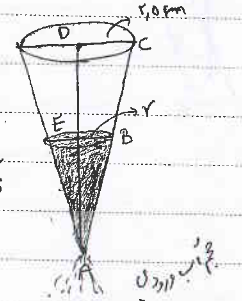
$x' = 8\ \frac{m}{min} = 8 \times \frac{1}{60} x$ $\boxed{8 \times 60 = 480}$ $\frac{8}{60} = \frac{2}{15}\ \frac{m}{s}$

$l^2 = x^2 + 20^2 \Rightarrow l = \sqrt{400 + x^2} \Rightarrow l' = \frac{2x x'}{2\sqrt{400+x^2}}$

$\Rightarrow l' = \frac{(30)(\cancel{480})\frac{2}{15}}{\sqrt{400+900}} \Rightarrow l' \simeq \cancel{480}\ \frac{4}{10\sqrt{13}}\ (\frac{m}{s})$

---

(5)



$V' = 9\ \frac{m^3}{h} = \frac{9}{3600}\ \frac{m^3}{s}$

$AD = 10\ m$ $\frac{r}{2.5} = \frac{h}{10} \Rightarrow r = \frac{1}{4}h$

$AE = h = 5\ m$

حجم آب ورودی $= V$

حجم آب درون منبع $= V_1 = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

" " خروجی از منبع W

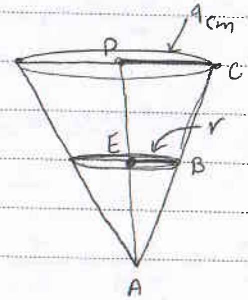
$V = V_1 + W \Rightarrow V - W = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi(\frac{1}{4}h)^2 h = \frac{1}{48}\pi h^3$

$\Rightarrow V' - W' = \frac{1}{48}\pi(3h^2 h') \Rightarrow \underbrace{\frac{9}{3600}}_{m^3/s} - W' = \frac{1}{16}\pi \underbrace{(5)^2}_{m^2} \times \underbrace{\frac{0.18}{3600}}_{m/s}$

$\Rightarrow \frac{1}{400} - W' = \frac{\pi}{12800} \Rightarrow W' = \frac{1}{400} - \frac{\pi}{12800} = \frac{32-\pi}{12800}\ (\frac{m^3}{s}) \simeq 2.25 \times 10^{-3}$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

حل تمرین در کلاس ص ۱۹۹



$AD = 20\ cm$

$AE = h = 6\ cm$

$EB \parallel DC \Rightarrow \frac{h}{20} = \frac{r}{9} \Rightarrow r = \frac{9}{20}h$

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \Rightarrow V = \frac{1}{3}\pi(\frac{9}{20}h)^2 h \Rightarrow V = \frac{27}{400}\pi h^3$

$V' = \frac{27}{400}(3\pi h^2 h') \Rightarrow \underbrace{1.8}_{cm^3/s} = \frac{81}{400}\pi \underbrace{(6)^2}_{cm^2} \underbrace{h'}_{cm/s}$

$\Rightarrow h' = \frac{400 \times 1.8}{81 \times 36\pi}\ \frac{cm}{s} \Rightarrow h' = \frac{720}{81 \times 36\pi} = \frac{80}{9 \times 36\pi} = \frac{20}{81\pi} \simeq 0.077\ \frac{cm}{s}$

حل مسائل ص ۱۹۹

(1)

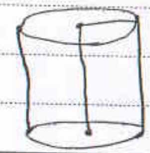
$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \Rightarrow \frac{-p'}{p^2} + \frac{-q'}{q^2} = 0 \Rightarrow q' = \frac{q^2}{p^2}(-p')$

$\Rightarrow q' = (\frac{q}{p})^2(-p') \Rightarrow q' = (\frac{\sqrt{2}}{2})^2(+8) \Rightarrow q' = 4\ (\frac{cm}{s})$

چون نزدیک شدن جسم به عدسی را جهت منفی فرض کرده ایم پس $q' = 4\ (\frac{cm}{s})$ یعنی تصویر جسم با سرعت $4\ \frac{cm}{s}$ از عدسی دور می شود

---

(2)



$r = 3$

$V = \pi r^2 h \Rightarrow V = 9\pi h$

$V' = 9\pi h' \Rightarrow h' = \frac{V'}{9\pi} = \frac{2 \times \frac{1}{60}\ (\frac{m^3}{s})}{9\pi\ (m^2)} = \frac{1}{270\pi}\ (\frac{m}{s})$

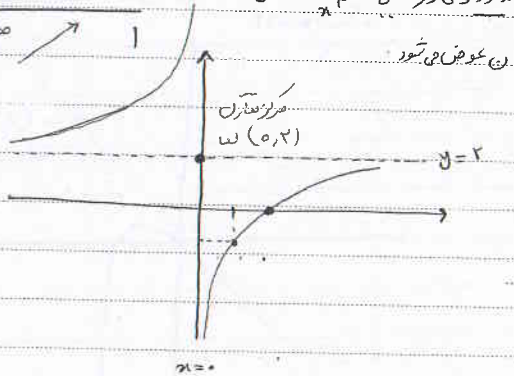
Subject:
Year. Month. Date. ( )

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$+$	‖	$+$	
y	1	$\nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow$	1

$y'' = \frac{-4}{x^3}$ نقطه عطف ندارد ولی در همسایگی $x=0$ تقعر آن عوض می‌شود

نقاط کمکی

x	1	2
y	-1	0



$y=\frac{x^2-3x}{x-4}$ $\quad D_f=\mathbb{R}-\{4\}$ حل تمرین در کلاس ص ۲۰۸

$\lim_{x\to 4^+} y = \frac{4}{0^+}=+\infty$, $\lim_{x\to 4^-} y = \frac{4}{0^-}=-\infty$ $\Rightarrow$ $x=4$ مجانب قائم تابع است

$\lim_{x\to\pm\infty} y = \pm\infty \Rightarrow$ تابع مجانب افقی ندارد

$$\begin{array}{r|l} x^2-3x & x-4 \\ \hline x^2-4x & x+1 \\ x & \\ x-4 & \\ 4 & \end{array}$$

$\Rightarrow y=x+1$ مجانب مایل f است

$y=0 \Rightarrow x^2-3x=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=3 \end{cases}$ محل برخورد تابع با محور x ها و y ها $\quad O(0,0)\quad A(3,0)$

$y'=\frac{(2x-3)(x-4)-1(x^2-3x)}{(x-4)^2}=\frac{x^2-8x+12}{(x-4)^2}$

$y'=0 \Rightarrow x^2-8x+12=0 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \longrightarrow y=1 \\ x=6 \longrightarrow y=9 \end{cases}$

x	$-\infty$		2		4		6		$+\infty$
y'		$+$	•	$-$	‖	$-$	•	$+$	
y		$\nearrow$	1	$\searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow$	9	$\nearrow$	$+\infty$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

حل تمرین در کلاس ص ۲۰٤

$f(x)=x^4-8x^2+7 \quad D_f=\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$

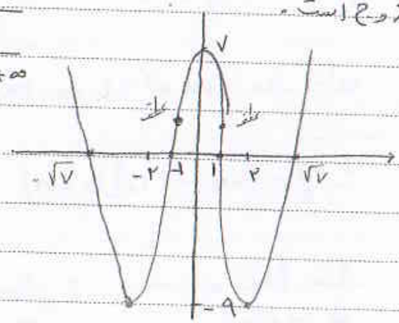
$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty} x^4=+\infty$ تابع مجانب مایل، قائم و افقی ندارد

$f'(x)=4x^3-16x \quad f'(x)=0 \Rightarrow 4x(x^2-4)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\pm 2\end{cases}$

$f''(x)=12x^2-16 \quad f''(x)=0 \Rightarrow x^2=\frac{4}{3} \Rightarrow x=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$ طول‌های نقاط عطف

تابع زوج است.

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$-$	•	$+$	•	$-$	•	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-9	$\nearrow$	7	$\searrow$	-9	$\nearrow$	$+\infty$



$f(x)=0 \Rightarrow x^4-8x^2+7=0$

$\Rightarrow \begin{cases} x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1 \\ x^2=7 \Rightarrow x=\pm\sqrt{7}\end{cases}$ محل برخورد با محور x ها

حل تمرین در کلاس ص ۲۰۶

$y=\frac{x-2}{x} \quad D_f=\mathbb{R}-\{0\}$

$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 0^+} f(x)=\frac{-2}{0^+}=-\infty \\ \lim_{x\to 0^-} f(x)=\frac{-2}{0^-}=+\infty\end{array}\right\} \Rightarrow$ $x=0$ مجانب قائم تابع f است

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=1 \rightarrow$ $y=1$ مجانب افقی تابع f است.

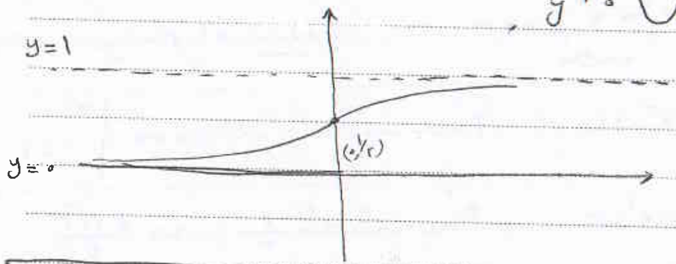
$y=0 \Rightarrow x-2=0 \Rightarrow x=2 \quad A(2,0)$ نقطه‌ی برخورد تابع با محور x ها

$y'=\frac{1(x)-1(x-2)}{x^2}=\frac{2}{x^2} \quad y'=0 \rightarrow$ جواب ندارد.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

x	$-\infty$		$+\infty$
y'		$+$	
y	0	$\nearrow$	1

x	$-\infty$				$+\infty$
y''		$+$	0	$-$	
y	0	$\cup$	$\frac{1}{2}$	$\cap$	1



$y = x + \sqrt{x^2-1}$

حل تمرین در کلاس صفحه ۲۱۱

$x^2-1 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 1 \Rightarrow |x| \geq 1 \Rightarrow x \geq 1$ یا $x \leq -1 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - (-1,1)$

$\therefore D_f = (-\infty,-1] \cup [1,+\infty) \qquad f(1)=1 \;,\; f(-1)=-1$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \;,\; \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ $\quad$ $y=0$ مجانب افقی f است

$y = x+|x| \xrightarrow[x\to+\infty]{} y=2x$ مجانب مایل f است $\qquad$ f مجانب قائم ندارد

$$y' = 1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} = \frac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}}$$

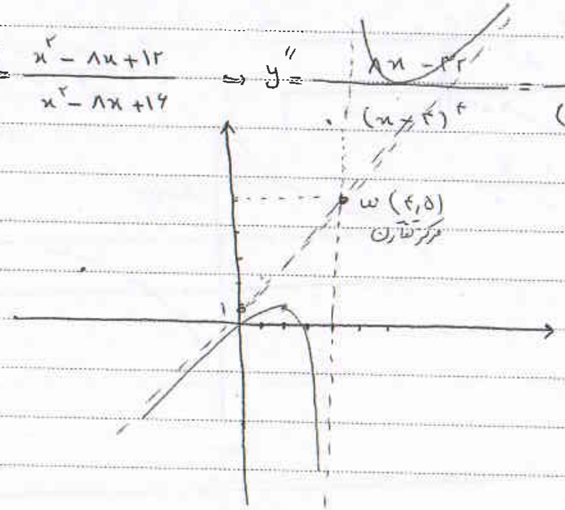
$y'=0 \Rightarrow \sqrt{x^2-1}+x=0 \Rightarrow \sqrt{x^2-1} = -x \Rightarrow x^2-1 = x^2 \Rightarrow -1=0$ #

پس مشتق ریشه ندارد و تابع همواره برای $x>1$ صعودی و برای $x<-1$ نزولی است.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$-$				$+$	
y	0	$\searrow$	-1		1	$\nearrow$	$+\infty$

$$y' = \frac{x^2-8x+12}{x^2-8x+16} \Rightarrow y'' = \frac{8x-32}{(x-4)^4} = \frac{8}{(x-4)^3}$$

نقطه‌ی عطف ندارد ولی در همسایگی $x=4$ تغییر تقعر می‌دهد.



حل تمرین در کلاس صفحه ۲۰۹

$y = \frac{1}{1+e^{-x}} \qquad 1+e^{-x}=0 \Rightarrow e^{-x}=-1$ جواب ندارد $\Rightarrow D_f = \mathbb{R}$

زیرا تابع نمایی صفر یا عدد منفی نمی‌شود حاصل

$$\lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+e^{-x}} = \frac{1}{1+0} = 1 \qquad \lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{1+e^{-x}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

خطوط $y=0$ و $y=1$ مجانب افقی تابع اند، تابع مجانب مایل و قائم ندارد.

$$y' = \frac{0(1+e^{-x}) - (-e^{-x})}{(1+e^{-x})^2} = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} > 0$$

نمودار تابع محور x ها را قطع نمی‌کند اما در $A(0,\frac{1}{2})$ محور y ها را قطع می‌کند. تابع اکیداً صعودی است.

$$y'' = \frac{(-e^{-x})(1+e^{-x})^2 - 2(1+e^{-x})(-e^{-x})(e^{-x})}{(1+e^{-x})^4} = \frac{-e^{-x}(1+e^{-x}) + 2e^{-2x}}{(1+e^{-x})^3} = \frac{-e^{-x}+e^{-2x}}{(1+e^{-x})^3}$$

 $\Rightarrow y'' = \frac{e^{-x}(e^{-x}-1)}{\ldots}$

$y''=0 \Rightarrow -e^{-x}+e^{-2x}=0 \Rightarrow -2x=-x \Rightarrow x=0$

Subject :
Year. Month. Date. ( )

حل مسائل ص ۲۱۳

(۱)

$y=\dfrac{x^2-4x+8}{x-2}$ $\qquad D_f=\mathbb{R}-\{2\}$

$\lim_{x\to 2^+} y=+\infty \qquad \lim_{x\to 2^-} y=-\infty \Longrightarrow$ $x=2$ مجانب قائم تابع است

$y=\dfrac{(x-2)^2+4}{x-2}=x-2+\dfrac{4}{x-2}\Longrightarrow$ $y=x-2$ مجانب مایل تابع f است

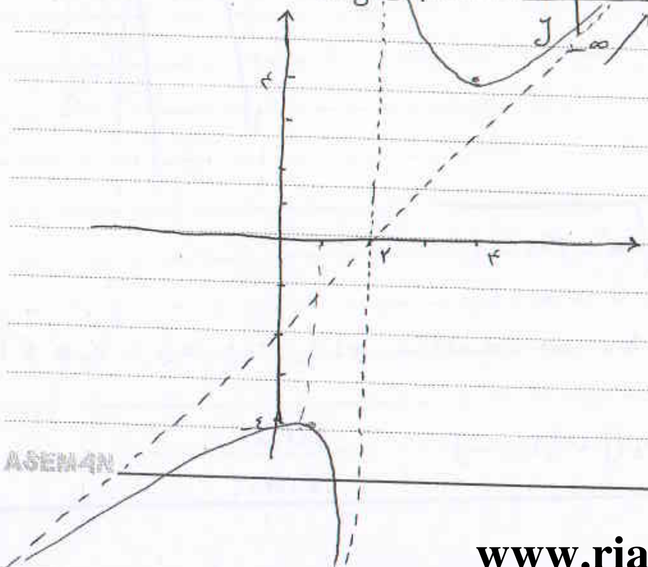
$x=0 \Longrightarrow y=-4 \Longrightarrow A(0,-4)$ نقطه برخورد تابع با محور yها

نمودار تابع محور xها را قطع نمی‌کند زیرا $y=0$ یعنی $x^2-4x+8=0$ جواب حقیقی ندارد

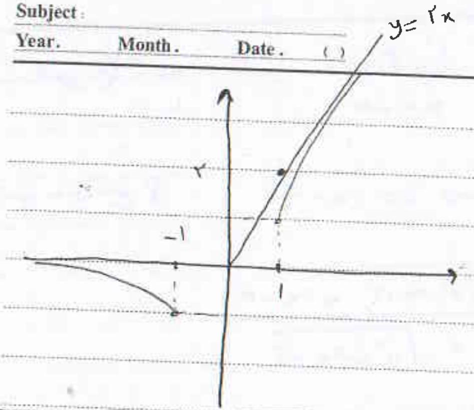
$y'=1+\dfrac{-4}{(x-2)^2}=\dfrac{(x-2)^2-4}{(x-2)^2}=\dfrac{x^2-4x}{(x-2)^2}$

$y'=0 \Longrightarrow \begin{cases} x=0 \to y=-4 \\ x=4 \to y=4 \end{cases}$

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
y'		+	0	−	‖	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	-4	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	4	↗	$+\infty$



Subject :
Year. Month. Date. ( )



$y=\sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$

حل تمرین در کلاس ص ۲۱۲

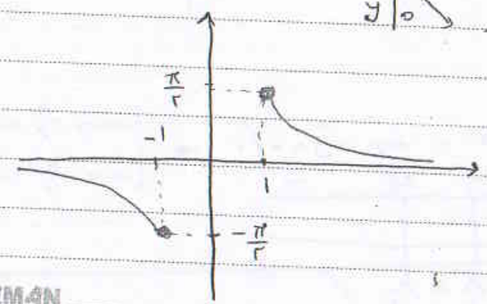
$-1\le \frac{1}{x}\le 1 \Longrightarrow \frac{1}{|x|}\le 1 \Longrightarrow |x|\ge 1 \Longrightarrow x\ge 1$ یا $x\le -1$

$D_f=[+1,+\infty)\cup(-\infty,-1] \qquad f(1)=\pi/2 \qquad f(-1)=\frac{-\pi}{2}$

$\lim_{x\to\pm\infty} y=\lim_{x\to\pm\infty}\sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)=0 \Longrightarrow$ $y=0$ مجانب افقی تابع مورد است.

$y'=\dfrac{-1/x^2}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}}<0$ $\qquad$ $y'=0$ ریشه ندارد.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		−				−	
y	0	↘	$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$	↘	0



Subject
Year. Month. Date. ( )

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{3}{2}$ $\Rightarrow$ مجانب افقی تابع $y=\frac{3}{2}$

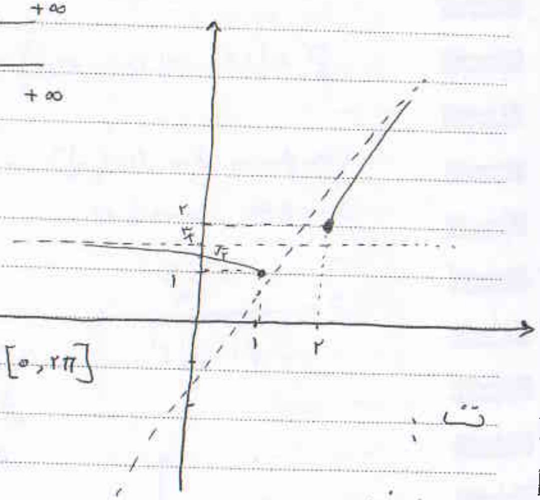
$y = x + |x - \frac{3}{2}| \underset{x\to+\infty}{\Longrightarrow} y = 2x - \frac{3}{2}$ مجانب مایل تابع f

$y' = 1 + \frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x+2}} = \frac{2\sqrt{x^2-3x+2} + 2x - 3}{2\sqrt{x^2-3x+2}}$

$y'=0 \Rightarrow 2\sqrt{x^2-3x+2} = 3 - 2x \Rightarrow 4x^2 - 12x + 8 = 9 - 12x + 4x^2$

$\Rightarrow 8 = 9$ # $y'=0$ جواب ندارد

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
y'		$-$		//////		$+$	
y	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	1		2	$\nearrow$	$+\infty$



ت)

$y = \sin x + \sqrt{3}\cos x$ $[0, 2\pi]$

$f(0) = f(2\pi) = \sqrt{3}$

$f'(x) = \cos x - \sqrt{3}\sin x$

$f'(x) = 0 \Rightarrow \cos x = \sqrt{3}\sin x \Rightarrow \cot x = \sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} \to y = 2 \\ x = \frac{7\pi}{6} \to y = -2 \end{cases}$

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{7\pi}{6}$		2π
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$\sqrt{3}$	$\nearrow$	$+2$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$\sqrt{3}$

ASEM4N

Subject :
Year. Month. Date. ( )

ب)

$y = \frac{x^2 + 2x}{x^2 + 2x - 3}$

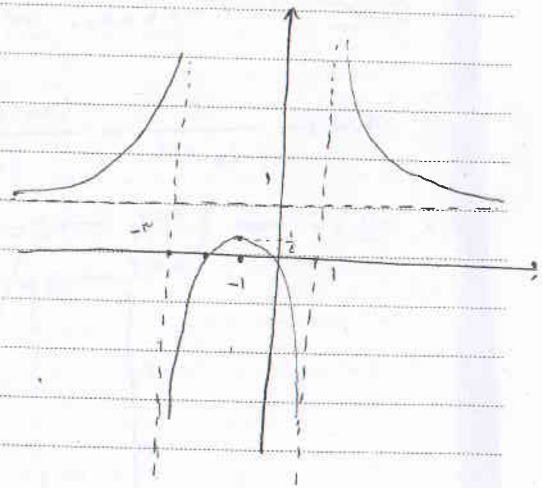
$x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}$ مجانب های قائم $D_f = \mathbb{R} - \{1, -3\}$

$\lim_{x\to\pm\infty} y = 1 \Rightarrow$ مجانب افقی $y = 1$

$y = 0 \Rightarrow x^2 + 2x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$ نقاط برخورد تابع با محورهای مختصات $O(0,0)$ $A(-2,0)$

$y' = \frac{-4x - 4}{(x^2+2x-3)^2}$ $y' = 0 \Rightarrow \boxed{x = -1} \to y = \frac{1}{4}$

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
y	1	$\nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow$	1



پ)

$y = x + \sqrt{x^2 - 3x + 2}$

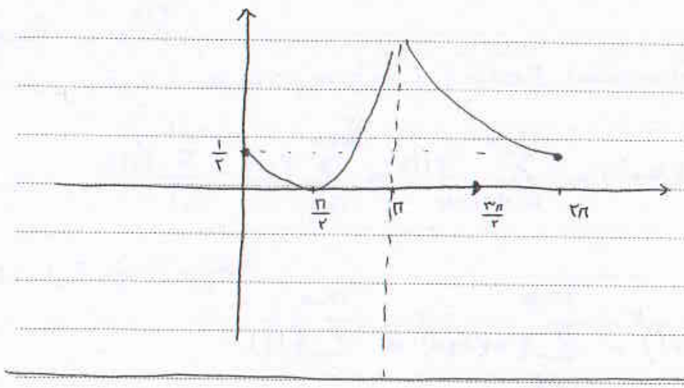
$x^2 - 3x + 2 \geq 0 \Rightarrow (x-1)(x-2) \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$ یا $x \leq 1$

$D_f = (-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$ $f(2) = 2$

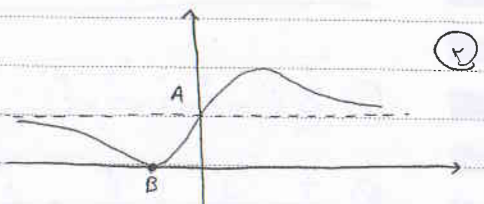
$f(1) = 1$

ASEM4N

Subject:
Year. Month. Date. ( )



$$y=\frac{x^۲+۲ax+1}{۲x^۲+b}$$ ۲



$\lim_{x\to\pm\infty} y=\frac{1}{۲} \Rightarrow A(۰,\frac{1}{۲})$

$f(۰)=\frac{1}{۲} \Rightarrow \frac{1}{b}=\frac{1}{۲} \Rightarrow b=۲ \Longrightarrow f(x)=\frac{x^۲+ax+1}{۲x^۲+۲}$

$$f'(x)=\frac{-۲ax^۲+۲a}{(۲x^۲+۲)^۲}$$

$f'(x)=۰ \rightarrow -۲ax^۲+۲a=۰ \Rightarrow \begin{cases} a=۰ \ \times \ (\text{چرا؟}) \\ x=1 \ \checkmark \\ x=-1 \ \checkmark \Rightarrow B(-1,۰) \Rightarrow f(-1)=۰ \rightarrow ۲-a=۰ \Rightarrow a=۲ \end{cases}$

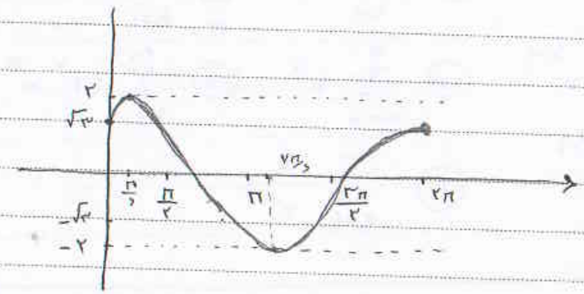
نکته: نمودار f بر محور xها مماس است پس باید Δ ی صورت صفر باشد.

$\Delta=a^۲-۴=۰ \Rightarrow \begin{cases} a=۲ \ \checkmark \\ a=-۲ \ \times \end{cases}$ (چرا؟)

(دلیل چرا؟) $\begin{vmatrix} 1 & a \\ ۲ & ۰ \end{vmatrix} < ۰ \Rightarrow -۲a<۰ \Rightarrow a>۰$

ASEM4N

Subject:
Year. Month. Date. ( )



(۳

$y=\frac{1-\sin x}{1+\cos x} \quad [۰,۲\pi]$

$1+\cos x=۰ \Rightarrow \cos x=-1 \Rightarrow x=\pi$ مجانب قائم

$f(۰)=f(۲\pi)=\frac{1}{۲}$

$$f'(x)=\frac{(-\cos x)(1+\cos x)-(-\sin x)(1-\sin x)}{(1+\cos x)^۲}=\frac{-\cos x-\cos^۲ x+\sin x-\sin^۲ x}{(1+\cos x)^۲}$$

$$=\frac{\sin x-\cos x-1}{(1+\cos x)^۲}$$

$f'(x)=۰ \Rightarrow \sin x-\cos x-1=۰ \Rightarrow \sin x-\cos x=1 \Rightarrow$

$\sqrt{۲}\sin(x-\frac{\pi}{۴})=1 \Rightarrow \begin{cases} x-\frac{\pi}{۴}=\frac{\pi}{۴} \Rightarrow x=\frac{\pi}{۲} \ \checkmark \\ x-\frac{\pi}{۴}=\frac{۳\pi}{۴} \Rightarrow x=\pi \ \times \end{cases}$

x	۰		π/۲		π		۲π
y'		−	۰	+	‖	−	
y	½	↘	۰	↗	+∞ ‖ +∞	↘	½

ASEM4N