# حل المسائل فصل دوم

## درس حساب دیفرانسیل و انتگرال

## دورهٔ پیش دانشگاهی - رشتهٔ علوم ریاضی

# به کوشش استاد پرویز رضایی

مدرس دوره ضمن خدمت دروس ریاضی۱، ریاضی۲، حسابان و حساب دیفرانسیل و انتگرال (در استان فارس)

Subject :
Year. Month. Date. ( )

$\lim_{n\to\infty} a_n = l$ داریم $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = l$ . (طبق تمرین ۲ ص ۳۸) و بنابراین

$$100\,l = 452 + l \Rightarrow l = \frac{452}{99}$$

(۱۳) فرض می‌کنیم $\lim_{n\to\infty} P_n = l$ در این صورت (طبق تمرین ۲ ص ۳۸) داریم $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = l$

و لذا داریم

$$l = \frac{bl}{a+l} \Rightarrow al + l^2 = bl \Rightarrow l^2 + (a-b)l = 0 \Rightarrow \begin{cases} l = 0 & \times \\ l = b-a & \checkmark \end{cases}$$

(۱۴)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{2} = \left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{2} = e^{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}} = \left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$



Subject :
Year. Month. Date. ( )

حل تمرین در کلاس ص ۵۷

$a_n = 1 - \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$ : $0,\ 0.9,\ 0.99,\ 0.999,\ 0.9999$

(۱)

$b_n = 1 + \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$ : $2,\ 1.1,\ 1.01,\ 1.001,\ 1.0001$

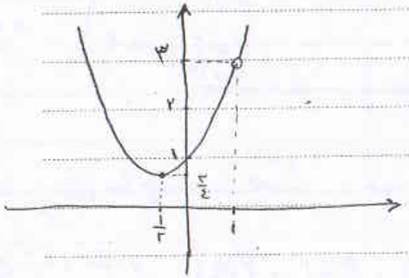
هر دو دنباله به عدد یک همگرا هستند

$f(x) = x^2 + x + 1 \quad (x \neq 1)$

(۲)

| $x$ | $0$ | $0.9$ | $0.99$ | $0.999$ | $0.9999$ | $\boxed{1}$ | $1.0001$ | $1.001$ | $1.01$ | $1.1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $1$ | $2.71$ | $2.9701$ | $\downarrow$ $2.997001$ | $2.99970001$ | ت.ن | $3.00030001$ | $\downarrow$ $3.003001$ | $3.0301$ | $3.31$ | $7$ |

با توجه به جدول مقادیر $f(x)$ به عدد ۳ نزدیک می‌شود.



$$y = \frac{x^3-1}{x-1} = x^2 + x + 1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

با توجه به نمودار مقادیر $f(x)$ به عدد ۳ نزدیک می‌شود

حل تمرین در کلاس ص ۶۰

$a_n = (0.1)^n = \frac{1}{10^n}$ : $0.1,\ 0.01,\ 0.001,\ 0.0001$

$b_n = -(0.1)^n = \frac{-1}{10^n}$ : $-0.1,\ -0.01,\ -0.001,\ -0.0001$

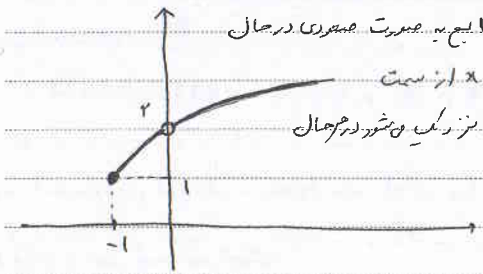
$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}-1} = \sqrt{x+1} + 1$$

با فرض $x \neq 0$

| $x$ | $-0.1$ | | $-0.01$ | | $-0.001$ | | $-0.0001$ | $\boxed{0}$ | $0.0001$ | | $0.001$ | | $0.01$ | | $0.1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $1.9486832980$ | $\downarrow$ $1.994987437$ | | | $1.9994998749$ | $\downarrow$ $1.99994999$ | | ت.ن | | $\downarrow$ $2.00004999$ | | $2.000499875$ | | $\downarrow$ $2.004987562$ | $2.0488088481$ |

Subject :

Year. Month. Date. ( )

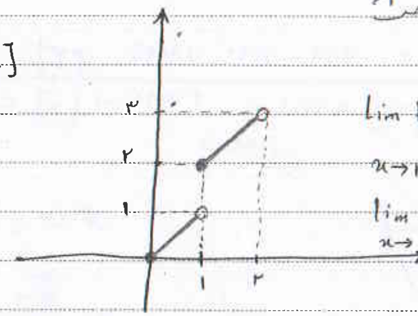


با نزدیک شدن $x$ از سمت چپ به $x=0$ تابع به صورت صعودی در حال نزدیک شدن به ۲ می‌باشد و با نزدیک شدن $x$ از سمت راست به $x=0$ تابع به صورت نزولی به ۲ نزدیک می‌شود در حال

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 2$$

حل تمرین در کلاس ص ۶۱

$f(x) = x + [x]$



$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 2\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 1} f(x) = \text{وجود ندارد}$$

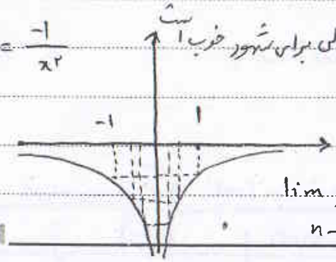
جواب پرسش مطرح شده در ص ۶۳ خیر زیرا به ازای دنباله‌های $\{a_n\}$، $\{b_n\}$ و $\{c_n\}$ مطرح شده، مقادیر $f(a_n)$ و $f(b_n)$ و $f(c_n)$ به یک عدد میل نمی‌کنند.

حل تمرین در کلاس ص ۶۶

چون هدف کتاب در اینجا حالت شهودی است و تعریف دقیق ریاضی نیست (زیرا همین تمرین به صورت دقیق در مثال ص ۱۰۹ حل شده است) پس به کمک شکل و جدول توضیح می‌دهیم:

هر چند این دو دنباله برای پاسخ دقیق کافی نیست ولی برای شهود خوب است

$y = \dfrac{-1}{x^2}$



$a_n = 1/n$ و $b_n = \dfrac{-1}{n}$ را در نظر می‌گیریم

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} (-n^2) = -\infty$$

$$\lim_{n\to\infty} f(b_n) = \lim_{n\to\infty} (-n^2) = -\infty$$

در نتیجه $f$ در $x=0$ حد نامتناهی $-\infty$ را دارد.





Subject :

Year. Month. Date. ( )

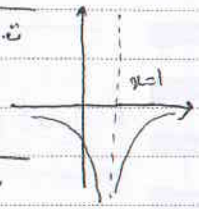
حل تمرین در کلاس ص ۶۷ : هر چند این تمرین مانند تمرین در کلاس قبلی است (بهتر بود تمرین در کلاس قبلی حدش $+\infty$ شود) ولی به کمک جدول و نمودار حل می‌کنیم

$a_n = 1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n$

| $a_n$ | ۰٫۹ | ۰٫۹۹ | ۰٫۹۹۹ | ۰٫۹۹۹۹ | ۱ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(a_n)$ | $-100$ | $-10000$ | $-1000000$ | $-100000000$ | ت.ن |

$b_n = 1 + \left(\frac{1}{10}\right)^n$

| $b_n$ | ۱٫۱ | ۱٫۰۱ | ۱٫۰۰۱ | ۱٫۰۰۰۱ | ۱ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(b_n)$ | $-100$ | $-10000$ | $-1000000$ | $-100000000$ | ت.ن |




هر دو دنباله‌ی $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ به صفر همگرا هستند.

ولی مقادیر $f(a_n)$ و $f(b_n)$ به $-\infty$ واگرا هستند پس

$$\lim_{x\to 1} \frac{-1}{(x-1)^2} = -\infty$$

حل دقیق ریاضی ص ۱۰۹ کتاب آمده است.

حل تمرین در کلاس ص ۶۸

$f(x) = \dfrac{x}{x+1}$

به کمک جدول و نمودار حل می‌کنیم

| $x$ | ۱ | ۱۰ | ۱۰۰ | ۱۰۰۰ | ۱۰۰۰۰ | ۱۰۰۰۰۰ | $\dots \to +\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $1/2$ | $\frac{10}{11}$ | $\frac{100}{101}$ | $\frac{1000}{1001}$ | $\frac{10000}{10001}$ | $\frac{100000}{100001}$ | $\to 1$ |

راه حل محسن کاملاً درست است.

| $a_n$ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ... | $n$ | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(a_n)$ | $1/2$ | $2/3$ | $3/4$ | $4/5$ | | $n/(n+1)$ | ... |

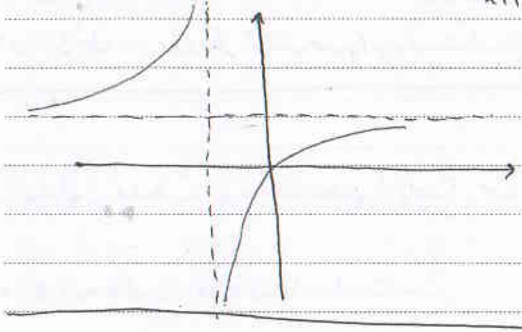
| $b_n$ | ۲ | ۵ | ۱۰ | ۱۷ | ۲۶ | ... | $n^2+1$ | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(b_n)$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{5}{6}$ | $\frac{10}{11}$ | $\frac{17}{18}$ | $\frac{26}{27}$ | | $\frac{n^2+1}{n^2+2}$ | ... |

با افزایش $n$ در هر دو دنباله $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ مقادیر $f(a_n)$ و $f(b_n)$ به عدد ۱ نزدیک می‌شوند

Subject :
Year. Month. Date. ( )

در مورد $\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x+1}$ فکر می‌کنیم که باز هم جواب ۱+ باشد طبق همان روش محسن که عدد ۱ را در مخرج حذف کرد، و جدول نیز حرف ما را تأیید می‌کند.

$y = \frac{x}{x+1} = \frac{x+1-1}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$ ← نمودار $\frac{-1}{x+1}$ را یک واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم.



حل تمرین در کلاس صـ ۶۹

① در هر دو مورد چون با اعداد بزرگ و بزرگتر x (کوچک و کوچکتر) سروکار داریم عدد ثابت ۱ را حذف می‌کنیم

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{|x|} = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{|x|} = -1$$





Subject :
Year. Month. Date. ( )

② الف) $\lim_{x\to2^-} f(x) = +\infty$ ب) $\lim_{x\to2^+} f(x) = +\infty$

ج) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2$ د) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$ (گرچه نمودار به تقریب حالت افقی به خود گرفته است)

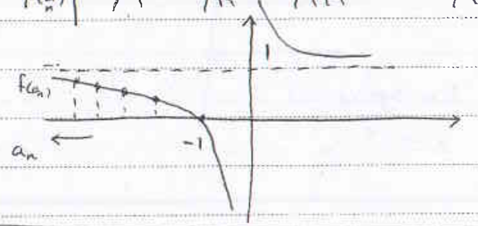
③ $f(x) = \frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x}$

$a_n = -(10^n)$

الف)

| $a_n$ | -10 | -100 | -1000 | -10000 |
|---|---|---|---|---|
| $f(a_n)$ | ۰/۹ | ۰/۹۹ | ۰/۹۹۹ | ۰/۹۹۹۹ |

ب) بلی و مقدار آن ۱ می‌باشد.



حل مسائل صـ ۷۰

① الف) مقدار $\lim_{x\to-1} f(x)$ وجود ندارد زیرا از روی نمودار متوجه می‌شویم $\lim_{x\to(-1)^+} f(x) = 0$ و $\lim_{x\to(-1)^-} f(x) = -2$

ب) مقدار $\lim_{x\to0} f(x)$ وجود دارد و مقدارش یک می‌باشد.

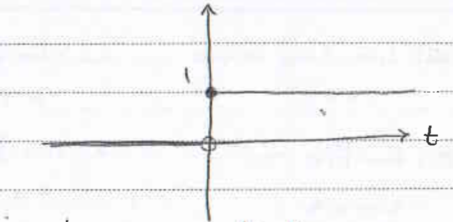
ج) $\lim_{x\to2} f(x)$ وجود ندارد زیرا $\lim_{x\to2^+} f(x) = 3$ و $\lim_{x\to2^-} f(x) = 1$

د) $\lim_{x\to4} f(x)$ وجود دارد و مقدارش ۲ می‌باشد.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

(۲)

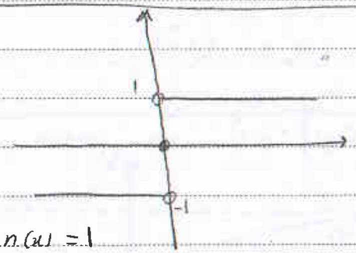
الف)
$$H(t)=\begin{cases}1 & t\geq 0\\ 0 & t<0\end{cases}$$



ب) $\lim_{x\to 0^-} f(x)=0$ و $\lim_{x\to 0^+} f(x)=1$

(۳)

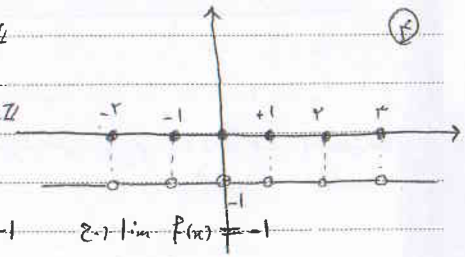
الف)
$$\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$$



ب) $\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sgn}(x)=1$ $\lim_{x\to 0^-} \operatorname{sgn}(x)=-1$

(۴)

$$f(x)=[x]+[-x]=\begin{cases}0 & x\in\mathbb{Z}\\ -1 & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$$

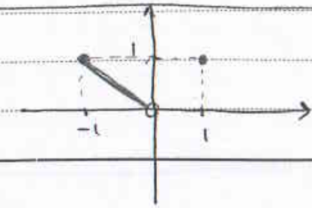


الف) $\lim_{x\to 1^-} f(x)=-1$ ب) $\lim_{x\to 1^+} f(x)=-1$ ج) $\lim_{x\to 1} f(x)=-1$

همواره می‌توان گفت که $\lim_{x\to a} f(x)=-1$ برای هر $a\in\mathbb{R}$ زیرا وقتی $x\to a$ دراینصورت $x\notin\mathbb{Z}$

(۵)

$$f(x)=\begin{cases}-x & -1\leq x<0\\ \text{صفر} & 0<x<1\\ 1 & x=1\end{cases}$$



ASEM4N



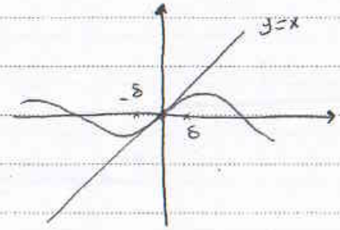
Subject:
Year. Month. Date. ( )

الف) $\lim_{x\to 0^-} \frac{x}{[x]}=0$

ب) درمورد $\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{[x]}$ نظر من این است که چنین موردی نباید نوشته شود زیرا طبق قرارداد حسابان اصولاً وقتی از نماد lim می‌توان استفاده کرد که شرایط حدگیری (فرایند حدگیری) مهیا شده باشد که در اینجا مهیا نیست و وجود این مساله بابی است در خصوص مثالهای نقض برای بعضی از قضایای کتاب حسابان و دیفرانسیل . ولی نظر مؤلف محترم این است که بیان شود این حد وجود ندارد . (در تناقض با ص ۷۴ حسابان.)

(۶)

روش اول : همانطور که در حسابان دیدیم (تمرین ۳ ص ۱۹۱ چاپ ۸۹ یا مسائل قبل از مشتق تابع وارون)



خط $y=x$ در مبداء بر $y=\sin x$ مماس است .

فرض کنید $\delta$ کوچک باشد .

$$0<x<\delta \Rightarrow 0<\sin x<x \Rightarrow 0<\frac{\sin x}{x}<1 \Rightarrow \left[\frac{\sin x}{x}\right]=0 \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{\sin x}{x}\right]=0 \quad (*)$$

$$-\delta<x<0 \Rightarrow x<\sin x<0 \Rightarrow 0<\frac{\sin x}{x}<1 \Rightarrow \left[\frac{\sin x}{x}\right]=0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^-}\left[\frac{\sin x}{x}\right]=0 \quad (**) \qquad (*),(**) \Rightarrow \lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin x}{x}\right]=0$$

یا می‌توانید از نمودار $y=\frac{\sin x}{x}$ که در ص ۵۷ کتاب رسم شده است استفاده کنید :

ASEM4N

Subject:
Year. Month. Date. ( )

حل تمرین در کلاس صـ ۷۴

① فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله‌ی دلخواهی باشد که به عدد $a$ همگرا است و $a_n \neq a$ . در این صورت

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} c = c \Rightarrow \lim_{x\to a} c = c$$

در مورد حد $\lim_{x\to a} x$ نیز به طریق مشابه داریم

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \lim_{x\to a} x = a$$

② فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله‌ای دلخواه از اعداد حقیقی باشد که به صفر همگرا بوده و برای هر $n$، $a_n \neq 0$

در این صورت $\exists M\in\mathbb{N};\ \forall n\geq M\ \ a_n>0$

$$-1 \le \sin\frac{1}{a_n} \le 1 \Rightarrow -a_n \le a_n\sin\frac{1}{a_n} \le a_n \xrightarrow[\text{طبق قضیه فشردگی}]{} \lim_{n\to\infty} a_n \sin\frac{1}{a_n} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = 0 \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (-a_n) = 0$$

$\exists M\in\mathbb{N};\ \forall n\ge M\ \ a_n<0$

$$-1\le \sin\frac{1}{a_n}\le 1 \Rightarrow -a_n \ge a_n\sin\frac{1}{a_n} \ge a_n \xrightarrow[\text{طبق قضیه فشردگی}]{} \lim_{n\to\infty} a_n\sin\frac{1}{a_n} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x)=0$$

فرض کنیم $\{b_n\}$ زیردنباله‌ای از $\{a_n\}$ باشد که $b_n>0$ و $\{c_n\}$ زیردنباله‌ای از $\{a_n\}$ باشد که $c_n<0$

در این صورت

$$-1 \le \sin\frac{1}{b_n} \le 1 \Rightarrow -b_n \le b_n \sin\frac{1}{b_n} \le b_n \xrightarrow[\text{طبق فشردگی}]{} \lim_{n\to\infty} b_n\sin\frac{1}{b_n}=0 \quad (*)$$

ASEM4N



Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$-1\le \sin\frac{1}{c_n}\le 1 \Rightarrow -c_n \ge c_n\sin\frac{1}{c_n} \ge c_n \xrightarrow{\text{طبق فشردگی}} \lim_{n\to\infty} c_n \sin\frac{1}{c_n}=0 \quad (**)$$

$$(*), (**) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n\sin\frac{1}{a_n}=0 \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x)=0$$

③ فرض می‌کنیم $\{a_n\}$ دنباله‌ی دلخواهی از اعداد حقیقی باشد که $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ بوده و $a_n\neq a$

در این صورت $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} a_n^2 = a^2$ بنابراین $\lim_{x\to a} x^2 = a^2$

④ فرض می‌کنیم $\{a_n\}$ دنباله دلخواهی از اعداد حقیقی باشد که به $a$ همگرا بوده و $a_n\neq a$

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty}\sqrt{a_n} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} a_n} = \sqrt{a} \Rightarrow \lim_{x\to a}\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$$

(قاعده ریشه‌گیری) صـ ۸۱

حل تمرین در کلاس صـ ۷۵

① دو دنباله $a_n = \frac{1}{2n\pi}$ و $b_n = \frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$ را در نظر می‌گیریم این دو دنباله هر دو به صفر همگرا هستند

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty}\cos\frac{1}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\cos 2n\pi = \lim_{n\to\infty} 1 = 1 = L_1$$

$$\lim_{n\to\infty} f(b_n) = \lim_{n\to\infty} \cos\frac{1}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\cos\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0 = L_2$$

ASEM4N

چون $L_1\neq L_2$ پس $f$ در $x=0$ حد ندارد

Subject :
Year. Month. Date. ( )

(۳) دنباله‌های $a_n = 1/n$ و $b_n = \frac{-1}{n}$ را در نظر می‌گیریم این دو دنباله هر دو به صفر همگرا هستند

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}-1\right) = -1 = L_1$$

$$\lim_{n\to\infty} f(b_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{-1}{n}\right)^2 = 0 = L_2$$

چون $L_1 \neq L_2$ پس $f$ در $x=0$ حد ندارد.

---

حل تمرین در کلاس ص ۷۷

فرض: $\lim_{x\to a} f(x) = L$ حکم: $\lim_{x\to a} (f(x)-L) = 0$

(۱) $\lim_{x\to a} \left(f(x) - L\right) = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} L = L - L = 0$

فرض: $\lim_{x\to a} (f(x)-L) = 0$ حکم: $\lim_{x\to a} f(x) = L$

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} \left((f(x)-L)+L\right) = \lim_{x\to a} \left(f(x)-L\right) + \lim_{x\to a} L = 0 + L = L$$

---

(۲) الف) $\lim_{x\to 2} 9x^2 = \lim_{x\to 2} 9 \lim_{x\to 2} x^2 = 9(2)^2 = 36$

ب) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2}{x+1} = \frac{\lim_{x\to 2} x^2}{\lim_{x\to 2}(x+1)} = \frac{4}{2+1} = 3$

ج) $\lim_{x\to 1} (x^2+1)(x^2+x) = \lim_{x\to 1}(x^2+1) \lim_{x\to 1}(x^2+x) = \left(\lim_{x\to 1} x^2 + \lim_{x\to 1} 1\right)\left(\lim_{x\to 1} x^2 + \lim_{x\to 1} x\right)$

$= (1^2+1)(1^2+1) = 4$





Subject :
Year. Month. Date. ( )

حل تمرین در کلاس ص ۷۹

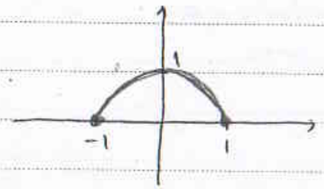
$1-x^2 \geq 0 \Rightarrow 1 \geq x^2 \Rightarrow 1 \geq |x| \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$

پس $D_f = [-1,1]$

$x \in D_f \Rightarrow 0 \leq x^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -x^2 \leq 0 \Rightarrow 0 \leq 1-x^2 \leq 1 \Rightarrow$

$0 \leq \sqrt{1-x^2} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq f(x) \leq 1 \Rightarrow \forall x \in D_f ; \ |f(x)| \leq 1$

یعنی $f$ بر دامنه‌اش کراندار است




(توجه: تابعی بر دامنه‌اش کراندار است که بردش کراندار باشد)

---

حل تمرین در کلاس ص ۸۰

(۱) فرض: $\lim_{x\to a} |f(x)| = 0$ حکم: $\lim_{x\to a} f(x) = 0$

طبق ویژگی قدر مطلق داریم،

$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to a} |f(x)| = 0 \\ &\lim_{x\to a} \left(-|f(x)|\right) = 0 \end{aligned}\right\} \xRightarrow{\text{قضیه فشردگی}} \lim_{x\to a} f(x) = 0$$

روش دوم: فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله‌ی دلخواهی باشد که همگرا به ۰ بوده و $a_n \neq 0$، چون

$\lim_{x\to a} |f(x)| = 0$ پس $\lim_{n\to\infty} |f(a_n)| = 0$ یعنی

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists M \in \mathbb{N} \ni \forall n \geq M \Rightarrow \left| |f(a_n)| - 0 \right| < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists M \in \mathbb{N} \ni \forall n \geq M \Rightarrow |f(a_n) - 0| < \varepsilon$



یعنی برای هر $\{a_n\}$ که همگرا به صفر بوده $a_n \neq 0$، داریم $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = 0$ پس $\lim_{x\to a} f(x) = 0$

از این تمرین در حل مسائل دیریکله حد داره و اثبات به مثال و تمرین ص ۸۵ استفاده می‌کنیم.

(۲)

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 0}(3-x^2)=3\\ \lim_{x\to 0}(3+x^2)=3\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{قضیه فشردگی}}\lim_{x\to 0}f(x)=3$$

(۳) تابع دیریکله $D(x)=\begin{cases}1 & \text{گویا}\\ 0 & \text{گنگ}\end{cases}$ ، کراندار است زیرا $R_D=\{0,1\}$ ، $\lim_{x\to 0}x=0$ پس طبق

قضیه ۳ در این صفحه ص ۸۰ داریم $\lim_{x\to 0}xD(x)=0$

حل تمرین در کلاس ص ۸۱

$$\lim_{x\to 1}\sqrt[4]{\frac{x+15}{2x^2-1}}=\sqrt[4]{\lim_{x\to 1}\frac{x+15}{2x^2-1}}=\sqrt[4]{\frac{16}{1}}=2$$

حل تمرین در کلاس ص ۸۳

فرض کنید $\{a_n\}$ همگرا به صفر بوده و $a_n>0$ باشد در این صورت داریم $f(a_n)=\frac{|a_n|}{a_n}=1$ پس $\lim_{n\to\infty}f(a_n)=1$ و در نتیجه $\lim_{x\to 0^+}f(x)=1$.

حل تمرین در کلاس ص ۸۳

فرض می‌کنیم $\lim_{x\to a^-}f(x)=L$ و $\lim_{x\to a^+}f(x)=L$

فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله‌ای دلخواه از اعداد حقیقی باشند که به $a$ همگرا بوده و $a_n\neq a$ باشد. در این صورت سه حالت زیر را در نظر می‌گیریم

حالت اول: اگر عددی طبیعی مانند $M$ موجود باشد که برای هر $n\geq M$ داشته باشیم $a_n>a$ ، در این صورت چون $\lim_{x\to a^+}f(x)=L$ پس $\lim_{n\to\infty}f(a_n)=L$





بنابراین $\lim_{x\to a}f(x)=L$.

حالت دوم: اگر عددی طبیعی مانند $M$ موجود باشد بطوریکه برای هر $n\geq M$ داشته باشیم $a_n<a$

در این صورت چون $\lim_{x\to a^-}f(x)=L$ پس داریم $\lim_{n\to\infty}f(a_n)=L$ و در نتیجه $\lim_{x\to a}f(x)=L$

حالت سوم: فرض کنید $\{a_n\}$، زیر دنباله‌های مانند $\{b_n\}$ و $\{c_n\}$ داشته باشد بطوریکه

برای هر $n\in\mathbb{N}$ ، $b_n>a$ و $c_n<a$ ، چون دنباله‌ی $\{a_n\}$ به $a$ همگراست

پس هر زیر دنباله‌ی آن هم به $a$ همگرا است، بنابراین

$$\lim_{x\to a^+}f(x)=L\Rightarrow\lim_{n\to\infty}f(b_n)=L\Rightarrow$$

$$\lim_{x\to a^-}f(x)=L\Rightarrow\lim_{n\to\infty}f(c_n)=L\Rightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty}f(a_n)=L\Rightarrow\lim_{x\to a}f(x)=L$$

حل تمرین در کلاس ص ۸۴

دنباله‌ی دلخواه $\{a_n\}$ که همگرا به صفر بوده و $a_n>0$ را در نظر می‌گیریم $f(a_n)=\frac{|a_n|}{a_n}=1$ پس داریم

(*) $\lim_{n\to\infty}f(a_n)=1$ و در نتیجه $\lim_{x\to 0^+}f(x)=1$

دنباله‌ی دلخواه $\{b_n\}$ که همگرا به صفر بوده و $b_n<0$ را در نظر می‌گیریم $f(b_n)=\frac{|b_n|}{b_n}=\frac{-b_n}{b_n}=-1$

پس داریم (**) $\lim_{n\to\infty}f(b_n)=-1$ و در نتیجه $\lim_{x\to 0^-}f(x)=-1$



(*), (**) $\Longrightarrow$ $\lim_{x\to 0}f(x)$ وجود ندارد

Subject :
Year. Month. Date. ( )

البته برای حل این مسأله می‌توان دو دنباله‌ی $a_n=\frac{1}{n}$ و $b_n=\frac{-1}{n}$ را نیز در نظر گرفت.

حل تمرین در کلاس ص ۸۵

1 روش اول: فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله‌ای دلخواه و همگرا به $a$ بوده و برای $n$ ها $a_n\neq a$،

ثابت می‌کنیم $\lim_{n\to\infty} f(a_n)=f(a)$. کافی است ثابت کنیم

حکم: $\forall \varepsilon>0 \quad \exists M\in \mathbb{N} \ni \forall n\geq M \Rightarrow |f(a_n)-f(a)|<\varepsilon$

چون $\lim_{n\to\infty} a_n=a$ پس داریم $\forall \varepsilon>0 \quad \exists K\in \mathbb{N} \ni \forall n\geq K \Rightarrow |a_n-a|<\varepsilon$

$$|f(a_n)-f(a)|=|\cos a_n-\cos a|=\left|-2\sin\frac{a_n+a}{2}\sin\frac{a_n-a}{2}\right|\leq 2\left|\sin\frac{a_n-a}{2}\right|$$

$$\leq |a_n-a|<\varepsilon$$

پس کافی است $M\geq K$ اختیار شود.

طبق مثال ص ۸۵

روش دوم:

$$\lim_{x\to a}\cos x=\lim_{x\to a}\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\lim_{t\to\frac{\pi}{2}-a}\sin t=\sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=\cos a$$

2

الف) $\lim_{x\to a}\tan x=\lim_{x\to a}\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\lim_{x\to a}\sin x}{\lim_{x\to a}\cos x}=\frac{\sin a}{\cos a}=\tan a$





Subject :
Year. Month. Date. ( )

ب) $\lim_{x\to a}\cot x=\lim_{x\to a}\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{\lim_{x\to a}\cos x}{\lim_{x\to a}\sin x}=\frac{\cos a}{\sin a}=\cot a$

حل تمرین در کلاس ص ۸۶

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{2x}\times\frac{2x}{3x}=1\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$$

حل تمرین در کلاس ص ۸۷

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)}{\cancel{(x-1)}(x+1)}=\frac{3}{2}$$

حل تمرین در کلاس ص ۸۷

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\sqrt[3]{x}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\sqrt[3]{x}-1}\times\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}{\cancel{x-1}}=6$$

حل تمرین در کلاس ص ۸۸

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}=\lim_{x\to \pi/2}\frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x}=\lim_{x\to \pi/2}\frac{1-\sin x}{(1-\sin x)(1+\sin x)}=\frac{1}{2}$$

حل مسائل صفحه ۸۸

1 الف) فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله‌ای دلخواه و همگرا به ۲ بوده و $a_n\neq 2$،

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n)=\lim_{n\to\infty} a_n^3=\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)^3=2^3=8$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

ب) فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله دلخواه و همگرا به ۳ بوده و $a_n \neq 3$.

$$f(a_n) = \frac{a_n^2-9}{a_n-3} = \frac{(\cancel{a_n-3})(a_n+3)}{(\cancel{a_n-3})} = a_n+3$$

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n+3) = 3+3=6 \Rightarrow \lim_{x\to3}\frac{x^2-9}{x-3}=6$$

پ) فرض کنیم $\{a_n\}$ دنباله دلخواه همگرا به یک بوده بطوریکه $1<a_n$ در اینصورت

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n-1} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to1^+}\sqrt{x-1}=0 \Rightarrow \lim_{x\to1}\sqrt{x-1}=0$$

(وقتی $a\neq0$)

ت) فرض می‌کنیم $\{a_n\}$ دنباله‌ای دلخواه و همگرا به $a$ بوده و $a_n\neq a$ در اینصورت

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt a \Rightarrow \lim_{x\to a}\sqrt x = \sqrt a$$

در حالتی که $a=0$ باشد فرض می‌کنیم $\{a_n\}$ دنباله دلخواه و همگرا به صفر بوده و $a_n>0$ در اینصورت

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty}\sqrt{a_n} = \sqrt0 = 0 \Rightarrow \lim_{x\to0^+}\sqrt x=0 \Rightarrow \lim_{x\to0}\sqrt x=0$$

ث) فرض می‌کنیم $\{a_n\}$ دنباله دلخواه و همگرا به $\frac12$ باشد بطوریکه $a_n>\frac12$.

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} a_n^2[a_n] = \lim_{n\to\infty} a_n^2 \times \lim_{n\to\infty}[a_n] = \frac14\times0=0$$

روش دوم: می‌توان از کراندار بودن $a_n^2$ در همسایگی $\frac12$ و صفر بودن حد دنباله $[a_n]$ نیز استفاده کرد.





Subject:
Year. Month. Date. ( )

۲) الف) تابع $f(x)=[x]$ در $x=1$ حد ندارد و تابع $g(x)=x-[x]$ نیز در $x=1$ حد ندارد اما تابع $f(x)+g(x)=([x]+x-[x])=x$ در $x=1$ حد دارد.

ب) تابع $f(x)=\begin{cases}2 & x>0\\ 6 & x<0\end{cases}$ و تابع $g(x)=\begin{cases}3 & x>0\\ 1 & x<0\end{cases}$ هر دو در $x=0$ حد ندارند

ولی $f(x)g(x)=6$ در $x=0$ حد دارد.

۳) الف) $\lim_{x\to0}\frac{(x+3)^2-9}{x} = \lim_{x\to0}\frac{x^2+6x+9-9}{x} = \lim_{x\to0}\frac{x(x+6)}{x} = \lim_{x\to0}(x+6)=6$

ب) $\lim_{x\to4}\frac{x-4}{\sqrt x-2} = \lim_{x\to4}\frac{(\cancel{\sqrt x-2})(\sqrt x+2)}{(\cancel{\sqrt x-2})} = \lim_{x\to4}(\sqrt x+2)=4$

پ) $\lim_{x\to0} \tan x\cot x = \lim_{x\to0} \frac{\sin x}{\cos x}\times\frac{\cos x}{\sin x} = \lim_{x\to0} 1 = 1$

ت) $\lim_{x\to0^-}(1-x+[x]-[2x]) = 1-0+(-1)-(-1)=1$

۴) صورت کسر به ازای $x=2$ صفر می‌شود پس باید مخرج کسر هم به ازای $x=2$ صفر شود زیرا در غیر اینصورت جواب حد عدد صفر نمی‌شود.

$$2(2)^2+a(2)-4=0 \Rightarrow a=-2$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\lim_{x\to 2}\frac{x+1-\sqrt{4x+1}}{2x^2-2x-4}\times\frac{x+1+\sqrt{4x+1}}{x+1+\sqrt{4x+1}}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+1)^2-(4x+1)}{2(x^2-x-2)(x+1+\sqrt{4x+1})}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x\cancel{(x-2)}}{2\cancel{(x-2)}(x+1)(x+1+\sqrt{4x+1})}=\frac{2}{2(3)(6)}=\frac{1}{18}$$

⑤ جواب حد، عدد ۱ می باشد و مخرج کسر به ازای $x=0$ صفر می‌شود پس باید صورت کسر هم به ازای $x=0$ باید صفر شود.

$$\sqrt{a(0)+b}-2=0\Rightarrow\sqrt{b}=2\Rightarrow b=4$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{ax+4}-2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{ax+4}-2}{x}\times\frac{\sqrt{ax+4}+2}{\sqrt{ax+4}+2}=\lim_{x\to 0}\frac{ax}{x(\sqrt{ax+4}+2)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{a}{\sqrt{ax+4}+2}=\frac{a}{4}$$

چون جواب حد را یک داده است پس $\frac{a}{4}=1$ یعنی $\boxed{a=4}$.

⑥
$$\lim_{x\to 0}\frac{|3x-1|-|3x+1|}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(-3x+1)-(3x+1)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{-6x}{x}=-6$$





Subject:
Year. Month. Date. ( )

⑦
$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(1-x\left[\frac{1}{x}\right]\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]\right)=\lim_{m\to\infty}(m-[m])$$

دو دنباله $a_n=n$ و $b_n=n+1/2$ را در نظر می‌گیریم

$$f(a_n)=a_n-[a_n]=n-[n]=0\Longrightarrow\lim_{n\to\infty}f(a_n)=0\Longrightarrow L_1=0$$

$$f(b_n)=b_n-[b_n]=(n+\tfrac{1}{2})-[n+1/2]=n+\tfrac{1}{2}-n=\tfrac{1}{2}\Longrightarrow\lim_{n\to\infty}f(b_n)=1/2$$

$$\Rightarrow L_2=\frac{1}{2}$$

چون $L_1\neq L_2$ پس $f$ در $x=0$ حد ندارد.

⑧
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{3x-4}{x(x-2)}-\frac{x+2}{x(x+1)}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)(3x-4)-(x+2)(x-2)}{x(x-2)(x+1)}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x^2-4x+3x-4-x^2+4}{x(x-2)(x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2-x}{x(x-2)(x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x-1}{(x-2)(x+1)}=\frac{1}{2}$$

⑨
$$\lim_{x\to 0}\sin 4x\left(\frac{\cos 2x}{\sin 2x}-\frac{\cos x}{\sin x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x(\cos 2x\sin x-\sin 2x\cos x)}{\sin 2x\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\cancel{\sin 2x}\cos 2x(\sin(x-2x))}{\cancel{\sin 2x}\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\cos 2x\cancel{\sin x}}{\cancel{\sin x}}=-2$$

Subject :
Year. Month. Date. ( )

(۱۰) $\lim\limits_{x\to\frac12^+}\frac{|\cos\pi x|}{1-\sqrt{2x}} = \lim\limits_{x\to\frac12^+}\frac{-\cos\pi x}{1-\sqrt{2x}} = \lim\limits_{t\to0^+}\frac{\cos\pi(t+\frac12)}{\sqrt{2(t+\frac12)}-1} = \lim\limits_{t\to0^+}\frac{-\sin\pi t}{\sqrt{2t+1}-1}$

$x-\frac12=t \Rightarrow \begin{array}{c|c} x & t \\ \frac12^+ & 0^+ \end{array}$

$=\lim\limits_{t\to0^+}\frac{-\sin\pi t}{2t+1-1}\times\frac{\sqrt{2t+1}+1}{1} = \lim\limits_{t\to0^+}\frac{-\sin\pi t}{2t}\times\lim\limits_{t\to0^+}(\sqrt{2t+1}+1)$

$=\frac{-\pi}{2}\times2=-\pi$

روش دوم : قاعده هوپیتال $\lim\limits_{x\to\frac12^+}\frac{-\cos\pi x}{1-\sqrt{2x}} = \lim\limits_{x\to\frac12^+}\frac{\pi\sin\pi x}{-\frac{2}{2\sqrt{2x}}} = \frac{\pi}{-1}=-\pi$

(۱۱) $f(x)=\left[\frac{3x^2+3+x^2}{x^2+1}\right]=\left[\frac{3(x^2+1)+x^2}{x^2+1}\right]=\left[3+\frac{x^2}{x^2+1}\right]=3+\left[\frac{x^2}{x^2+1}\right]$

$0\le\frac{x^2}{x^2+1}<1 \Rightarrow \left[\frac{x^2}{x^2+1}\right]=0 \Rightarrow f(x)=3$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}3=3$ این تابع در هر عدد حقیقی حد دارد.

یا

$f(x)=\left[\frac{4x^2+4-1}{x^2+1}\right]=\left[\frac{4(x^2+1)-1}{x^2+1}\right]=\left[4+\frac{-1}{x^2+1}\right]=4+\left[\frac{-1}{x^2+1}\right]$

$-1\le\frac{-1}{x^2+1}<0 \Rightarrow \left[\frac{-1}{x^2+1}\right]=-1 \Rightarrow f(x)=4+(-1)=3$



Subject :
Year. Month. Date. ( )

(۱۲) الف) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac x2}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^2\frac x2}{\frac{x^2}{2}}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin\frac x2}{\frac x2}\times\frac{\sin\frac x2}{x}$

$=1\times\frac12=\frac12$

ب) $\lim\limits_{x\to\frac\pi4}\frac{1-\tan x}{\sin x-\cos x}=\lim\limits_{x\to\frac\pi4}\frac{1-\frac{\sin x}{\cos x}}{\sin x-\cos x}=\lim\limits_{x\to\frac\pi4}\frac{-\cancel{(\sin x-\cos x)}}{\cos x\cancel{(\sin x-\cos x)}}=-\sqrt2$

پ) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos3x-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{-2\sin\frac{3x+x}{2}\sin\frac{3x-x}{2}}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{-2\sin2x\sin x}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to0}(-2)\left(\frac{\sin2x}{x}\right)\left(\frac{\sin x}{x}\right)=(-2)(2)(1)=-4$

روش دوم استفاده از هم‌ارزی $=\lim\limits_{x\to0}\frac{\left(1-\frac12(9x^2)\right)-\left(1-\frac12x^2\right)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{-4x^2}{x^2}=-4$

روش سوم: هوپیتال $=\lim\limits_{x\to0}\frac{(-3\sin3x)-(-\sin x)}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{-9\cos3x+\cos x}{2}=\frac{-9+1}{2}=-4$

ت) $\lim\limits_{x\to4}(2-\sqrt x)\tan\frac{\pi x}{8}=\lim\limits_{x\to4}\frac{2-\sqrt x}{\cot\frac{\pi x}{8}}=\lim\limits_{t\to0}\frac{2-\sqrt{t+4}}{\cot\frac\pi8(t+4)}=\lim\limits_{t\to0}\frac{2-\sqrt{t+4}}{\tan\frac{\pi t}{8}}$

$x-4=t\Rightarrow x=t+4 \quad \begin{array}{c|c} x & t \\ 4 & 0 \end{array}$

$=\lim\limits_{t\to0}\frac{4-(t+4)}{(\tan\frac{\pi t}{8})(2+\sqrt{t+4})}=\lim\limits_{t\to0}\frac{-t}{\tan\frac{\pi t}{8}}\times\frac{1}{2+\sqrt{t+4}}=\frac{-\pi}{32}$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

(۱۳)

$$-1 \le \cos\frac{1}{x} \le 1 \Longrightarrow -x^2 \le x^2\cos\frac{1}{x} \le x^2$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 0} x^2 = 0 \\ \lim_{x\to 0}(-x^2) = 0\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{قضیه فشردگی}} \lim_{x\to 0} x^2\cos\frac{1}{x} = 0$$

چون تابع $y_1=\cos\frac{1}{x}$ کراندار و تابع $y_2=x^2$ دارای حدی برابر صفر در $x=0$ می باشد پس حاصلضرب آنها دارای حد صفر است.

(۱۴)

$$f\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{n}\right)=\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{n}+\frac{1}{3}\right]+\left[3\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{n}\right)\right]=\left[\frac{2}{3}+\frac{1}{n}\right]+\left[1+\frac{3}{n}\right]$$

$$=\left[\frac{2}{3}+\frac{1}{n}\right]+1+\left[\frac{3}{n}\right]$$

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\left[\frac{2}{3}+\frac{1}{n}\right]+1+\left[\frac{3}{n}\right]\right)=0+1+0=1$$

(۱۵) الف) دنباله های $a_n=1+\frac{1}{n}$ و $b_n=1-\frac{1}{n}$ را درنظر بگیرید.

$$f(a_n)=\frac{|a_n-1|}{a_n-1}=\frac{|1+\frac{1}{n}-1|}{1+\frac{1}{n}-1}=\frac{1/n}{1/n}=1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(a_n)=1=L_1$$

$$f(b_n)=\frac{|b_n-1|}{b_n-1}=\frac{|1-1/n-1|}{1-1/n-1}=\frac{1/n}{-1/n}=-1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(b_n)=-1=L_2$$

پس f در $x=1$ حد ندارد.

ASEM4N





Subject:
Year. Month. Date. ( )

ب) دنباله های $a_n=1+\frac{1}{2n\pi}$ و $b_n=1+\frac{1}{2n\pi+\pi}$ را درنظر میگیریم.

$$f(a_n)=\cos\frac{1}{a_n-1}=\cos\frac{1}{1+\frac{1}{2n\pi}-1}=\cos(2n\pi)=1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(a_n)=1=L_1$$

$$f(b_n)=\cos\frac{1}{b_n-1}=\cos\frac{1}{1+\frac{1}{2n\pi+\pi}-1}=\cos(2n\pi+\pi)=-1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(b_n)=-1=L_2$$

پس f در $x=1$ حد ندارد.

(۱۶) فرض می کنیم $a\in\mathbb{R}$ و دلخواه باشد ثابت می کنیم f در $x=a$ حد ندارد.

حالت اول: $a\in\mathbb{Q}$: دنباله های $a_n=a+1/n$ و $b_n=a+\frac{\sqrt{2}}{n}$ را درنظر می گیریم.

$$f(a_n)=1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(a_n)=1 \Rightarrow L_1=1$$

$$f(b_n)=0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(b_n)=0 \Rightarrow L_2=0$$

پس f در $x=a$ حد ندارد.

حالت دوم: $a\notin\mathbb{Q}$

فرض می کنیم $\{a_n\}$ دنباله ای از اعداد گویا باشد که به a همگرا است (این دنباله قطعاً وجود دارد طبق قضیه ص ۶۵ ، مثلاً دنباله ی $a_n=\frac{[na]}{n}$ را درنظر میگیریم)

$$f(a_n)=1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(a_n)=1 \Rightarrow L_1=1$$

و فرض می کنیم دنباله ی $\{b_n\}$ دنباله ای از اعداد اصم باشد که به a همگرا است (مثلاً $b_n=a+\frac{1}{n}$)

$$f(b_n)=0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(b_n)=0 \Rightarrow L_2=0$$

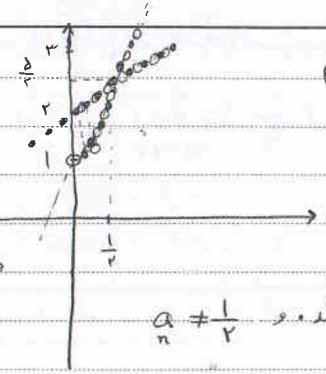
ASEM4N

چون $L_1\neq L_2$ پس f در $x=a$ حد ندارد درنتیجه f در $a\in\mathbb{R}$ حد ندارد.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

(۱۷)

$$f(x)=\begin{cases} x+2 & x \text{ گویا} \\ 3x+1 & x \text{ اصم} \end{cases}$$




فرض می‌کنیم $\{a_n\}$ دنباله‌ای دلخواه باشد که به عدد $\frac{1}{2}$ همگرا باشد و $a_n \neq \frac{1}{2}$

$$f(a_n)=\begin{cases} a_n+2 & a_n \text{ گویا} \\ 3a_n+1 & a_n \text{ اصم} \end{cases}$$

$$\left|f(a_n)-\frac{5}{2}\right| = \begin{cases} \left|a_n+2-\frac{5}{2}\right| = \left|a_n-\frac{1}{2}\right| & a_n \text{ گویا} \\ \left|3a_n+1-\frac{5}{2}\right| = \left|3(a_n-\frac{1}{2})\right| & a_n \text{ اصم} \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|f(a_n)-\frac{5}{2}\right| = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 1/2}\left|f(x)-\frac{5}{2}\right| = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 1/2}\left(f(x)-\frac{5}{2}\right)=0$$

(در هر دو حالت)

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1/2} f(x) = \frac{5}{2}$$

حل تمرین در کلاس ص ۹۲

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}} = 2 \neq f(1)$$

پس f در $x=1$ ناپیوسته است.





Subject:
Year. Month. Date. ( )

حل تمرین در کلاس ۹۳:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-1} = \sqrt{3} = f(1)$$

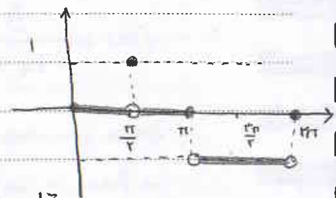
f در $x=1$ پیوسته است.

حل تمرین در کلاس ۹۴:

$f(\pi)=0$

$$\lim_{x\to \pi^+} f(x) = \lim_{x\to \pi^+}[\sin x] = -1$$

$$\lim_{x\to \pi^-} f(x) = \lim_{x\to \pi^-}[\sin x] = 0$$




تابع f در $x=\pi$ پیوستگی چپ دارد ولی پیوستگی راست ندارد.

حل تمرین در کلاس ۹۵:

$f(x) = x-\sqrt{4-x^2}$ $\qquad D_f = [-2,2]$

$f(2)=2$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}\left(2-\sqrt{4-x^2}\right) = 2-0 = 2$$

f در $x=2$ پیوسته است.

$f(-2)=-2$

$$\lim_{x\to (-2)} f(x) = \lim_{x\to (-2)^+} f(x) = \lim_{x\to (-2)^+}\left(x-\sqrt{4-x^2}\right) = -2-0 = -2$$

f در $x=-2$ پیوسته است

حل تمرین در کلاس ص ۹۵ دامنه این تابع $(1,+\infty)$ است، این تابع در دامنه‌اش پیوسته است زیرا اگر $a>1$ و دلخواه باشد

$$\lim_{x\to a}\frac{1}{\sqrt{x-1}} = \frac{1}{\sqrt{a-1}} = f(a)$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

چون هر زیر دنباله از $\{f(a_n)\}$ به صفر همگرا است پس $\{f(a_n)\}$ نیز به صفر همگرا است و در

نتیجه $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ از طرفی $f(0)=0$ در نتیجه $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$ یعنی $f$

در $x=0$ پیوسته است.

---

حل مسائل صفحه ۱۰۲

① تابع $f_1(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ بر بازه $(1,+\infty)$ پیوسته است و تابع $f_2(x) = x^2$ بر بازه $(-\infty,1]$

پیوسته است، کافی است پیوستگی $f$ در $x=1$ بررسی شود.

$f(1)=1$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x^2 = 1 \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$$

$f$ فقط در $x=1$ ناپیوسته است.

---

② $f(0)=a$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x+8}-2}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x+8-8}{x\left(\sqrt[3]{(x+8)^2}+\sqrt[3]{(x+8)}+4\right)}$$

$$= \lim \frac{1}{(\sqrt[3]{x+8})^2+(\sqrt[3]{x+8})+4} = \frac{1}{12}$$

کافی است $a = 1/12$.

---

③ $f(0)=a$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x}\sqrt{|x|} = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0$$

ASEM4N



Subject:
Year. Month. Date. ( )

حل تمرین در کلاس صفحه ۹۸

$$f(x) = \frac{2}{x-3} + \frac{x+1}{x^2+x+1} \qquad D_f = \mathbb{R} - \{3\}$$

این تابع روی بازه های $(-\infty,3)\cup(3,+\infty)$ پیوسته است.

---

حل تمرین در کلاس صفحه ۹۹

$$f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{1+\sin x} = \frac{\sin x}{\cos x(1+\sin x)}$$

$\cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \pi/2$

$1+\sin x = 0 \Rightarrow \sin x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi - \pi/2$

این تابع در نقاط دامنه خود پیوسته است.

---

حل تمرین در کلاس صفحه ۱۰۰

$$f(x) = \operatorname{tg}\sqrt{x} \qquad D_f = \left\{x\in\mathbb{R} \;;\; x\geq 0 ,\ \sqrt{x} \neq k\pi+\frac{\pi}{2} ,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$$

تابع در همه نقاط دامنه اش پیوسته است

---

حل تمرین در کلاس صفحه ۱۰۱

فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله ای دلخواه از اعداد حقیقی باشد که به ۰ همگراست، و $a_n \neq 0$.

فرض کنید $\{b_n\}$ زیردنباله ی اعداد گویا از $\{a_n\}$ و $\{c_n\}$ زیردنباله ی اعداد اصم از $\{a_n\}$ باشند.

$f(b_n) = b_n^2 \qquad f(c_n) = 0$

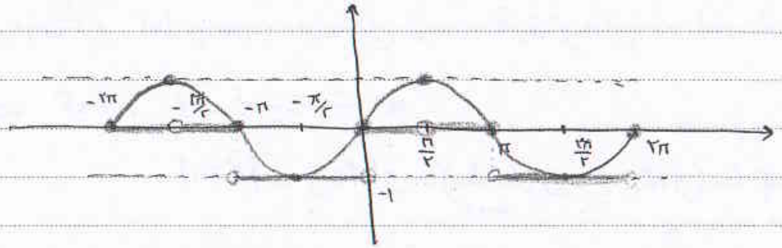
چون $\{a_n\}$ به صفر همگرا است پس زیردنباله های آن نیز همگرا به صفر می باشند

$$\lim_{n\to\infty} f(b_n) = \lim_{n\to\infty} b_n^2 = 0 \quad , \quad \lim_{n\to\infty} f(c_n) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

ASEM4N

Subject :
Year.  Month.  Date. ( )

⑥




این تابع در نقاط $x=-\frac{3\pi}{2}$ و $-\pi$ و $0$ و $\frac{\pi}{2}$ و $\pi$ و $2\pi$ ناپیوسته است

⑦ فرض کنید $f$ در $x=a$ پیوسته باشد یعنی $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$ ، ثابت می‌کنیم $\lim_{x\to a}|f(x)|=|f(a)|$ .

فرض: $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$ ، حکم: $\lim_{x\to a}|f(x)|=|f(a)|$

باید ثابت کنیم

بنابراین برای هر دنباله‌ی دلخواه مانند $a_n$ که به $a$ همگرا بوده و $a_n\neq a$ ،

$$\lim_{n\to\infty}|f(a_n)|=|f(a)|$$

یعنی

$$\forall\varepsilon>0\ \exists M\in\mathbb{N} \ni \forall n\ge M \Rightarrow \big||f(a_n)|-|f(a)|\big|<\varepsilon$$

از طرفی می‌دانیم $\lim_{n\to\infty} f(a_n)=f(a)$ پس

$$\forall\varepsilon>0\ \exists K\in N \ni \forall n\ge K \Rightarrow |f(a_n)-f(a)|<\varepsilon$$

با فرض $M\ge K$ داریم

$$\forall n\ge M \Rightarrow n\ge K \Rightarrow |f(a_n)-f(a)|<\varepsilon \Rightarrow \big||f(a_n)|-|f(a)|\big|<\varepsilon$$

زیرا $\big||a|-|b|\big|\le|a-b|$

پس حکم اثبات شده است.









Subject :
Year.  Month.  Date. ( )

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}\sqrt{-x}=0$$

اگر $a=0$ تابع $f$ در $x=0$ پیوسته است.

④

$f(0)=b$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(a+[x])=a-1$$

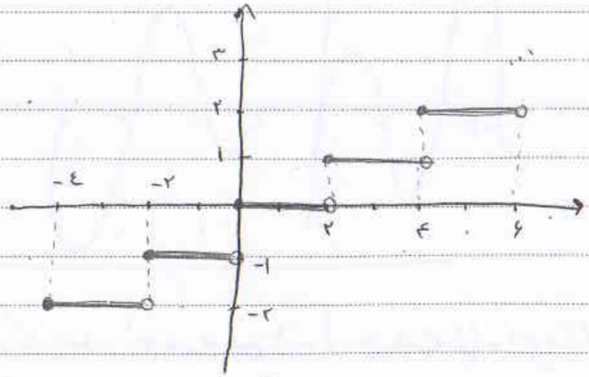
$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sqrt{2\sin^2\frac{x}{2}}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2\cancel{\sin\frac{x}{2}}\cos\frac{x}{2}}{\sqrt{2}\,\cancel{\sin\frac{x}{2}}}=\sqrt{2}$$

شرط پیوستگی آن است که

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=f(0)\rightarrow\begin{cases} b=\sqrt{2}\\ a-1=\sqrt{2}\Rightarrow a=1+\sqrt{2}\end{cases}$$

⑤

$$f(x)=\left[\frac{x}{2}\right]$$



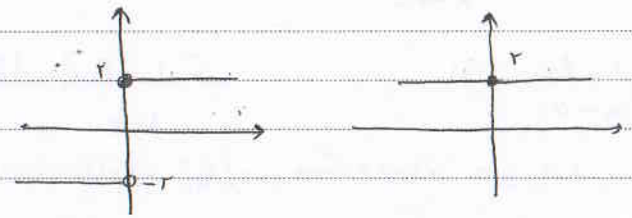

این تابع در اعداد زوج صحیح ناپیوسته است.

روش دوم: فرض کنید $g(x)=|x|$ ، چون تابع g در هر عدد حقیقی پیوسته است و f در $x=a$ پیوسته است پس $g\circ f$ در $x=a$ پیوسته است یعنی

$$\lim_{x\to a}|f(x)| = \lim_{x\to a}(g\circ f)(x) = g(\lim_{x\to a} f(x)) = g(f(a)) = |f(a)|$$

عکس این مطلب درست نیست مثال نقض چنین است

$$f(x)=\begin{cases}2 & x\geq 0\\ -2 & x<0\end{cases} \longrightarrow |f(x)|=2$$




(8) $f(x)=\begin{cases}5 & x\geq 0\\ 2 & x<0\end{cases}$ ، $g(x)=\begin{cases}2 & x\geq 0\\ 5 & x<0\end{cases}$

این دو تابع هر دو در $x=0$ ناپیوسته اند ولی $f(x)+g(x)=7$ در $x=0$ پیوسته است.

(9) دو تابع $f(x)=\begin{cases}2 & x>1\\ 3 & x\leq 1\end{cases}$ ، $g(x)=\begin{cases}3 & x>1\\ 2 & x\leq 1\end{cases}$ در $x=1$ ناپیوسته اند ولی حاصلضرب آنها یعنی $f(x)g(x)=6$ در $x=1$ پیوسته اند.





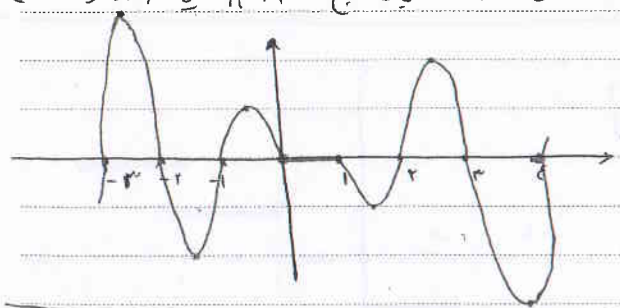
(10) فرض کنید f در $x=a$ پیوسته و g در $x=a$ ناپیوسته باشد ولی $f+g$ در $x=a$ پیوسته باشد، بنابراین طبق قضیه ۱ صفحه ۹۶ تابع $(f+g)-f$ یعنی g در $x=a$ پیوسته است که این فرض مسئله در تناقض است، پس فرض خلف باطل است و حکم اثبات شده است.

(11) فرض می‌کنیم $f_1(x)=[x]$ و $f_2(x)=\sin\pi x$.

توابع $f_1$ و $f_2$ هر دو در $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ پیوسته‌اند پس حاصلضرب آنها یعنی $f=f_1f_2$ نیز در $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ پیوسته است.

تابع $f_1$ در هر نقطه‌ای از اعداد صحیح ناپیوسته است ولی در همسایگی هر عدد صحیح کراندار است و تابع $f_2$ در هر عدد صحیح پیوسته و مقدارش صفر است پس تابع $f_1f_2$ یعنی f در هر عدد صحیح پیوسته است

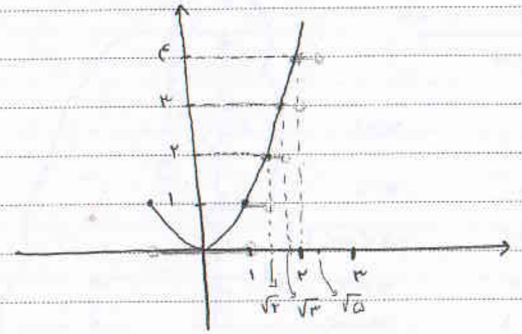
در نتیجه f در $\mathbb{R}$ پیوسته است.




(12) تابع $f(x)=[x^2]$ در نقاطی که حاصل $x^2$ عدد صحیح باشد (به جز حالت صفر) ناپیوسته است بنابراین تابع f در بازه‌های به شکل $[\sqrt{n},\sqrt{n+1})$ یا $(-\sqrt{n+1},-\sqrt{n}]$ پیوسته است.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

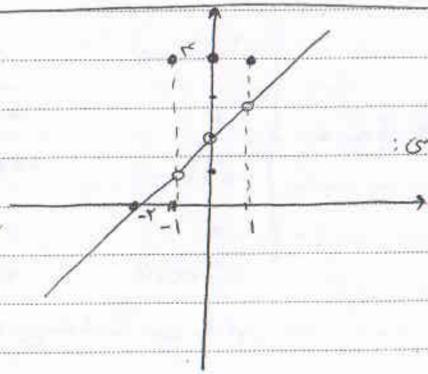
پس باید $[2, 2+k) = [2, \sqrt{5})$ بنابراین $2+k=\sqrt{5} \Rightarrow k=\sqrt{5}-2$




(۱۳)

$$x^2=|x| \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \\ x=-1 \end{cases}$$

روش هندسی:




این تابع در سه نقطه از دامنه‌اش ناپیوسته است

که عبارتند از $x=0$ و $x=\pm 1$

$$f(x)=\begin{cases} 4 & x=0,1,-1 \\ x+2 & x\neq 0,1,-1 \end{cases}$$

روش جبری:

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=4 \\ \lim\limits_{x\to 0} f(x)=2 \end{array}\right\} \longrightarrow$$ $f$ در $x=0$ ناپیوسته است

$$\left.\begin{array}{l} f(-1)=4 \\ \lim\limits_{x\to -1} f(x)=1 \end{array}\right\} \longrightarrow$$ $f$ در $x=-1$ ناپیوسته است

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=4 \\ \lim\limits_{x\to 1} f(x)=3 \end{array}\right\} \longrightarrow$$ $f$ در $x=1$ ناپیوسته است



Subject:
Year. Month. Date. ( )

(۱۴)

تابع $f_1(x)=4-\sqrt{x+3}$ در دامنه‌اش یعنی $[-3, +\infty)$ پیوسته است

تابع $f_2(x)=\sqrt[3]{x+1}-1$ در $\mathbb{R}$ پیوسته است بنابراین تابع $f(x)=\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}=\dfrac{4-\sqrt{x+3}}{\sqrt[3]{x+1}-1}$

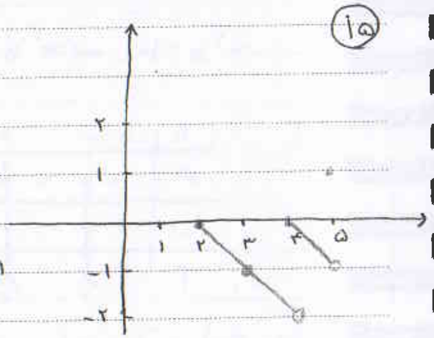
در $[-3,+\infty)-\{0\}$ پیوسته است یعنی این تابع در تمام نقاط دامنه‌اش پیوسته است.

(نکته: توابعی که ممکن است در دامنه‌اش ناپیوسته باشد یا شامل جزء صحیح است و یا اینکه

به فرم چندضابطه‌ای است و یا به فرم دیریکله‌ای است)

(۱۵)

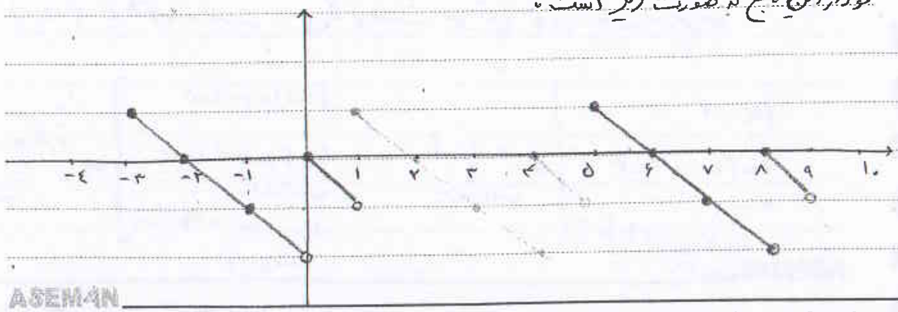
$$f(x)=\begin{cases} (2-x)+\sin\pi = 2-x & 2\le x<3 \\ (3-x)+\sin\frac{3\pi}{2}=2-x & 3\le x<4 \\ (4-x)+\sin 2\pi = 4-x & 4\le x<5 \\ 1 & x=5 \end{cases}$$




این تابع در دو نقطه $x=4$ و $x=5$ از این بازه ناپیوسته است.

لذا:

نمودار این تابع به صورت زیر است.






این تابع متناوب است و دوره تناوب آن ۴ است و در نقاطی به صورت $x=4k$ و $x=4k+1$ ناپیوسته است.

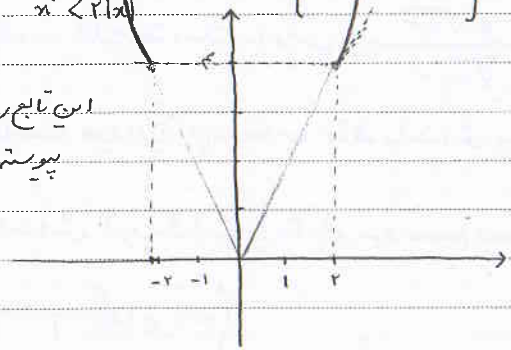
Subject:
Year. Month. Date. ( )

(16)

روش اول:

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & x^2 \geq 2|x| \\ 2|x| & x^2 < 2|x| \end{cases} = \max\left\{x^2,\ 2|x|\right\}$$

این تابع روی تمام نقاط دامنه‌اش پیوسته است.




روش دوم:

$$x^2 \geqslant 2|x| \Rightarrow x^4 \geqslant 4x^2 \Rightarrow x^4 - 4x^2 \geqslant 0 \Rightarrow x^2(x^2-4) \geqslant 0$$

| $x$ | $-\infty$ | $-2$ | $0$ | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x^2$ | + | + | + | + | |
| $x^2-4$ | + | − | − | + | |
| $P$ | + | − | − | + | |

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & x \leq -2 \\ 2|x| & -2<x<2 \\ x^2 & x \geqslant 2 \end{cases}$$

واضح است که تابع $y_1 = x^2$ در بازه‌های $(-\infty,-2)$ و $(2,+\infty)$ پیوسته‌اند و $y_2 = 2|x|$ در $(-2,2)$ نیز پیوسته است. پس کافی است پیوستگی $f$ در $x=\pm 2$ بررسی شود.

$$\left.\begin{aligned} & f(2)=4 \\ & \lim_{x\to 2^+} f(x) = 2^2=4 \\ & \lim_{x\to 2^-} f(x) = 2|2|=4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$ $f$ در $x=2$ پیوسته است

$$\left.\begin{aligned} & f(-2)=(-2)^2=4 \\ & \lim_{x\to(-2)^-} f(x) = (-2)^2=4 \\ & \lim_{x\to(-2)^-} f(x) = 2|-2|=4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$ $f$ در $x=-2$ پیوسته است

در نتیجه $f$ در $IR$ پیوسته است.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

(17)

$$x^2+x-2=0 \Rightarrow (x+2)(x-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-2 \end{cases}$$

| $x$ | $-\infty$ | $-2$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $x^2+x-2$ | + | − | + | |

$$sgn(x^2+x-2) = \begin{cases} 1 & x>1 \\ 0 & x=1 \\ -1 & -2<x<1 \\ 0 & x=-2 \\ 1 & x<-2 \end{cases}$$

نکته: در اینگونه مسائل باید عبارت پشت $sgn$ و جلوی $sgn$ مثل هم باشند یعنی

$$x^2-bx+a = x^2+x-2 \Rightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=-1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} x^2-bx+a & x>1 \\ 0 & x=1 \\ -x^2+bx-a & -2<x<1 \\ 0 & x=-2 \\ x^2-bx+a & x<-2 \end{cases}$$

تابع وقتی در $IR$ پیوسته است که در $x=1$ و $x=-2$ پیوسته باشد پس داریم

$$\left.\begin{aligned} & \lim_{x\to 1^+} f(x) = 1-b+a \\ & f(1)=0 \\ & \lim_{x\to 1^-} f(x) = -1+b-a \end{aligned}\right\} \xRightarrow{\text{شرط پیوستگی}} 1-b+a=-1+b-a \Rightarrow b-a=1$$

$$\boxed{\begin{aligned} a&=-2 \\ b&=-1 \end{aligned}}$$

$$\left.\begin{aligned} & \lim_{x\to -2^+} f(x) = -4-2b-a \\ & f(-2)=0 \\ & \lim_{x\to(-2)^-} f(x) = 4+2b+a \end{aligned}\right\} \xRightarrow{\text{شرط پیوستگی}} -4-2b-a=4+2b+a \Rightarrow a+2b=-4$$

Subject :
Year. Month. Date. ( )

حل تمرین در کلاس صفحه ۱۰۴

واضح است که تابع $f(x) = x - \cos x$ در بازه $[0,1]$ پیوسته است زیرا تفاضل دو تابع پیوسته است.

$f(0) = 0 - \cos 0 = -1 < 0$ و $f(1) = 1 - \cos(1) > 0$

چون $f(0)f(1) < 0$ بنا بر قضیه بولزانو، معادله $f(x) = 0$ در بازه $(0,1)$ حداقل یک ریشه را دارد.

حل تمرین در کلاس صفحه ۱۰۵

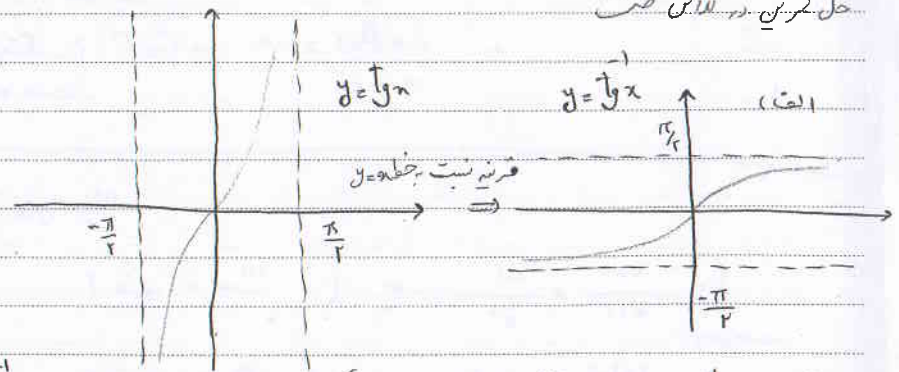
تابع $f(x) = \frac{x^3}{4} + \sin \pi x + 4$ در بازه $[-2,2]$ پیوسته است زیرا مجموع سه تابع پیوسته است.

$f(2) = \frac{8}{4} + 0 + 4 = 6$ $\quad f(-2) = \frac{-8}{4} + 0 + 4 = 2$

چون $k = 5$ بین $f(-2)$ و $f(2)$ قرار دارد بنابراین طبق قضیه مقدار میانی عددی مانند $c$ از بازه $(-2,2)$ وجود دارد بطوریکه $f(c) = 5$.

حل تمرین در کلاس صفحه ۱۰۶

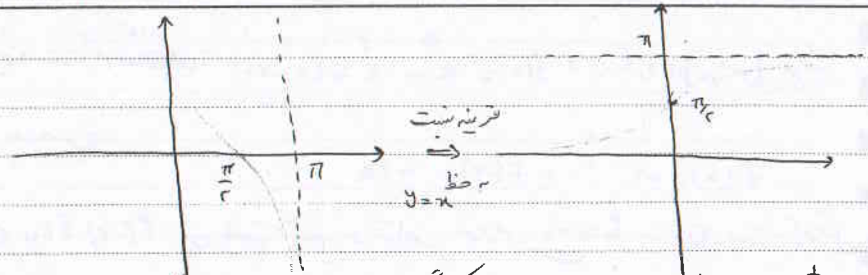
الف)




تابع $y = tg\,x$ در بازه $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ پیوسته و اکیداً صعودی است و تابع $y = tg^{-1}x$ در بازه $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ پیوسته و اکیداً صعودی است.



Subject :
Year. Month. Date. ( )

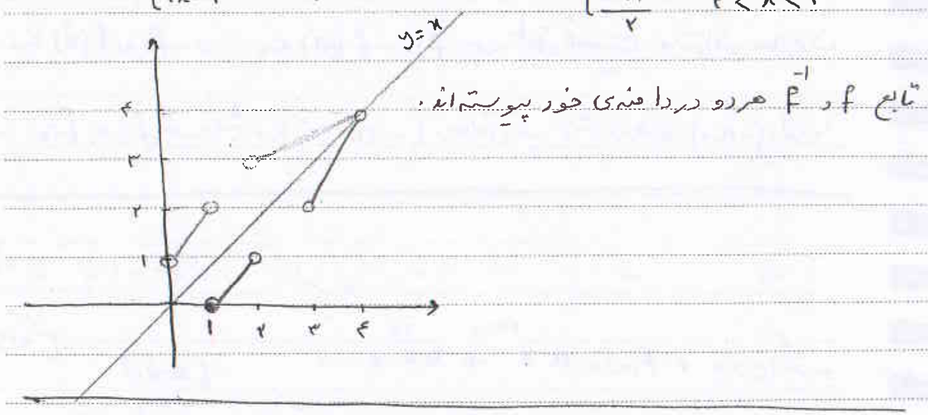



تابع $y = cotg\,x$ در بازه $(0, \pi)$ پیوسته و اکیداً نزولی است و تابع $y = cotg^{-1}x$ در $\mathbb{R}$ پیوسته و اکیداً نزولی است.

حل مسائل صفحه ۱۰۷

(1) $f(x) = \begin{cases} x-1 & 1<x<2 \\ 2x-4 & 3<x<4 \end{cases} \Rightarrow f^{-1}(x) = \begin{cases} x+1 & 0<x<1 \\ \frac{x+4}{2} & 2<x<4 \end{cases}$

تابع $f$ و $f^{-1}$ هر دو در دامنه‌ی خود پیوسته‌اند.




(2) واضح است که $f(x) = x^3 - x - 1$ در بازه‌ی $[1,2]$ پیوسته است از طرفی

$f(1) = -1$ $\quad f(2) = 5$

چون $f(1)f(2) < 0$ پس معادله‌ی $f(x) = 0$ در بازه‌های $(1,2)$ حداقل یک ریشه دارد.

چون $f$ در $\mathbb{R}$ پیوسته است پس باید در بازه $[k_1, k_2]$ نیز پیوسته باشد. از طرفی $f(k_1)f(k_2)<0$ بنابراین طبق قضیه بولتزانو، معادله $f(x)=0$ حداقل یک ریشه در بازه $(k_1, k_2)$ دارد.

---

حل تمرین در کلاس ص ۱۱۰

عبارت ۱) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$ یعنی اگر به ازای هر دنباله $\{x_n\}$ که همگرا به $a$ بوده و $x_n>a$، $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x_n)=+\infty$

آنگاه $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$

عبارت ۳) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty$ یعنی اگر به ازای هر دنباله $\{x_n\}$ که همگرا به $a$ بوده و $x_n<a$، $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=+\infty$ آنگاه $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty$

عبارت ۴) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty$، یعنی اگر برای هر دنباله $\{x_n\}$ که همگرا به $a$ بوده و $x_n<a$، $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=-\infty$ آنگاه $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty$

---

حل تمرین در کلاس ص ۱۱۲

① $\lim\limits_{x\to(-2)^+} \dfrac{x+1}{x+2} = \dfrac{-1}{0^+} = -\infty$ (قسمت ث ص ۱۱۱)

② $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{[x]-1}{x^2-1} = \dfrac{0-1}{0^-} = +\infty$ (قسمت پ ص ۱۱۱)

ASEMAN







③ واضح است که تابع $f(x)=x^5+x^4+2x^3-x+2$، در بازه $[-2,0]$ پیوسته است و همچنین

$f(0)=+2$ و $f(-2)=-28$

چون $f(-2)f(0)<0$ پس طبق قضیه بولتزانو معادله $f(x)=0$ در بازه $(-2,0)$ حداقل یک ریشه را دارد.

---

④ تابع $f(x)=\sin x - x^2 + x + 1$ در بازه $[-\pi,\pi]$ پیوسته است.

$f(\pi)=0-\pi^2+\pi+1<0 \qquad f(0)=1>0 \qquad f(-\pi)=0-\pi^2-\pi+1<0$

چون $f(0)f(\pi)<0$ و $f(0)f(-\pi)<0$ پس طبق قضیه‌ی بولتزانو معادله‌ی $f(x)=0$ حداقل یک ریشه در بازه $(0,\pi)$ و حداقل یک ریشه در بازه $(-\pi,0)$ دارد.

---

⑤ ([illegible])

فرض کنیم $f(x)=ax^{2n+1}+bx^{2n}+\dots$ $(a\neq 0)$، بدون اینکه به کلیت مسأله خللی وارد شود، فرض می‌کنیم $a>0$ باشد.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} ax^{2n+1}=+\infty \Longrightarrow \exists k_1\in\mathbb{R} \text{ s.t. } f(k_1)>0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} ax^{2n+1}=-\infty \Longrightarrow \exists k_2\in\mathbb{R} \text{ s.t. } f(k_2)<0$

ASEMAN

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$\lim_{x\to(-\frac{\pi}{2})^-} g(x) = \lim_{x\to(-\frac{\pi}{2})^-} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-1}{0^+} = -\infty \Rightarrow$ مجانب قائم است $x=-\frac{\pi}{2}$

نکته: مجانب های قائم لزوماً ریشه های مخرج کسرها نمی باشند. (مثال بزنید)

---

حل تمرین در کلاس ص ۱۱۴:

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$ ، هرگاه به ازای هر دنباله از نقاط دامنه f مانند $\{x_n\}$ که واگرا به $-\infty$ ، دنباله ی $\{f(x_n)\}$ به L همگرا باشد.

---

حل تمرین در کلاس ص ۱۱۶

۱) الف) $\lim_{x\to-\infty}\frac{5x^3+x+1}{x^3-x+2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{5+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{1-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}} = \frac{\lim_{x\to-\infty} 5+\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}+\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^3}}{\lim_{x\to-\infty} 1-\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}+\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{x^3}} = \frac{5}{1}=5$

ب) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2(3+\frac{1}{3x^2})}}{x(2-\frac{3}{x})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{3+\frac{1}{3x^2}}}{2-\frac{3}{x}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

پ) $\lim_{x\to-\infty}\cos\frac{1}{x} = \lim_{t\to 0^-}\cos t = \cos 0 = 1$

---

۲) $\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{x}=2 \\ \lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+3x}{x^2}=2\end{array}\right\} \xRightarrow{\text{فشردگی}} \lim_{x\to+\infty} f(x)=2$









Subject:
Year. Month. Date. ( )

۳۲) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{1}{0^+}=+\infty$ (قسمت الف از قضیه ۱ ص ۱۱۱)

$\lim_{x\to 0^+}\cot x=\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{1}{0^+}=+\infty$ (قسمت الف از قضیه ۱ ص ۱۱۱)

---

حل تمرین در کلاس ص ۱۱۳

۱) $D_f=(1,+\infty)$

$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x-1}}\right)=1+(+\infty)=+\infty$

خط $x=1$ تنها مجانب قائم تابع f است.

---

۲) الف) $f(x)=\frac{x+1}{x^2-1}$ $\quad x^2-1=0 \Rightarrow x=\pm1$

$D_f=\mathbb{R}-\{\pm1\}$ $\quad \lim_{x\to1^+}f(x)=\frac{2}{0^+}=+\infty$

$x=1$ مجانب قائم است.

$\lim_{x\to(-1)}f(x)=\lim_{x\to-1}\frac{x+1}{x^2-1}=\frac{-1}{2}$

$x=-1$ مجانب قائم نیست

---

ب) $g(x)=\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ $\quad [-\pi,\pi]$

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}g(x)=\frac{1}{0^+}=+\infty \Rightarrow x=\frac{\pi}{2}$ مجانب قائم است.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

حل تمرین در کلاس ص ۱۱۸

الف) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{2x+1}{x-2} = 2 \Rightarrow$ $y=2$ مجانب افقی تابع است

ب) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2}} = \begin{cases} 1 & x\to+\infty \\ -1 & x\to-\infty \end{cases}$ خطوط $y=\pm1$ مجانب های افقی تابع اند

ج) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$ (طبق فشردگی) $\Longrightarrow$ $y=0$ مجانب افقی است.

نکته: با توجه به تعریف کتاب هر خط افقی، مجانب افقی خود می باشد یعنی شرطی که از یک مرحله ای به بعد آن را قطع نکند مطرح نشده است

حل تمرین در کلاس ص ۱۱۹

می نویسیم $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ هرگاه به ازای هر دنباله از نقاط دامنه $f$ مانند $\{x_n\}$ که واگرا به $+\infty$ باشد دنباله $\{f(x_n)\}$ واگرا به $-\infty$ باشد.

می نویسیم $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ هرگاه به ازای هر دنباله از نقاط دامنه $f$ مانند $\{x_n\}$ که واگرا به $-\infty$ باشد دنباله $\{f(x_n)\}$ واگرا به $+\infty$ باشد.

می نویسیم $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ هرگاه به ازای هر دنباله از نقاط دامنه $f$ مانند $\{x_n\}$ که واگرا به $-\infty$ باشد دنباله $\{f(x_n)\}$ واگرا به $-\infty$ باشد.

ASEMAN

Subject:
Year. Month. Date. ( )

حل تمرین در کلاس ص ۱۲۲

$f(x) = 2x + \sqrt{x^2+3}$

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x+\sqrt{x^2+3}}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(2 + \frac{\sqrt{x^2+3}}{x}\right) = 2-1 = 1$$

$$h = \lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-mx\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(2x+\sqrt{x^2+3}-x\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(2x+|x|-x\right) = 0$$

پس خط $y = x$ مجانب مایل $f$ است

حل مسائل مجانب مایل ص ۱۲۲

① $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$، این تابع مجانب افقی ندارد

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1 & x\to+\infty \\ -1 & x\to-\infty \end{cases}$$

$$h = \lim_{x\to-\infty}\left(f(x)+x\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{|x|}+x\right) = 0 \Longrightarrow h=0$$

یعنی $y=-x$ مجانب مایل در شاخه $-\infty$ می باشد

$$h = \lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{|x|}-x\right) = 0 \Longrightarrow h=0$$

یعنی $y=x$ مجانب مایل در شاخه $+\infty$ می باشد

② روش اول: $y = x-|x+1| \Longrightarrow \begin{cases} y=-1 & x\to+\infty \ \text{(افقی)} \\ y=2x+1 & x\to-\infty \ \text{(مایل)} \end{cases}$

ASEMAN

Subject:
Year. Month. Date. ( )

روش دوم: $m=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x+\sqrt{4x^2+x+1}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2-(4x^2+x+1)}{x(x-\sqrt{4x^2+x+1})}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-3x^2-x-1}{x(x-|2x|)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-3x^2}{3x^2}=-1$

$h=\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-mx)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{4x^2+x+1}+x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4x^2-(4x^2+x+1)}{2x-\sqrt{4x^2+x+1}}=\frac{-1}{4}$

خط $y=-x-\frac{1}{4}$ مجانب مایل تابع $f$ در حالت $x\to-\infty$ است.

$m=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\left(\frac{x+\sqrt{4x^2+x+1}}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\sqrt{4x^2}}{x}\right)=3$

$h=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-3x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt{4x^2+x+1}-3x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+x+1}-2x\right)$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4x^2+x+1-4x^2}{\sqrt{4x^2+x+1}+2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{2x+2x}=\frac{1}{4}$

خط $y=3x+\frac{1}{4}$ مجانب مایل تابع $f$ در حالت $x\to+\infty$ است.

ب) $y=\sqrt{x^2+4x}=|x+2| \Rightarrow \begin{cases} y=x+2 & x\to+\infty \quad m_1=1 \\ y=-x-2 & x\to-\infty \quad m_2=-1 \end{cases}$

$m_1 \cdot m_2=-1$ پس $\theta=90^\circ$ یا

$tg\,\theta=\left|\frac{m_2-m_1}{1+m_1m_2}\right|=\left|\frac{1+(-1)}{1+(-1)}\right|=\frac{2}{0}=$ ت.ن $\Rightarrow \theta=\frac{\pi}{2}$







Subject:
Year. Month. Date. ( )

$m=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-\sqrt{x^2+2x}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-(x^2+2x)}{x(x+\sqrt{x^2+2x})}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2}{x+\sqrt{x^2+2x}}=0$

$h=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-0)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+2x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x+\sqrt{x^2+2x})(x-\sqrt{x^2+2x})}{x+\sqrt{x^2+2x}}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2x}{x+|x|}=-1$

خط $y=-1$ مجانب افقی $f$ است.

$m=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x-\sqrt{x^2+2x}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{x}-\frac{\sqrt{x^2+2x}}{x}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\frac{|x|}{x}\right)=2$

$h=\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-2x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-\sqrt{x^2+2x}-2x\right)=-\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)$

$=-\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2+2x-x^2}{\sqrt{x^2+2x}-x}=-\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x}{|x|-x}=1$

خط $y=2x+1$ مجانب مایل $f$ در حالت $x\to-\infty$ است.

۳) $f(x)=\frac{x^3+x+1}{x^2+3}$

$$\begin{array}{r|l} x^3+x+1 & x^2+3 \\ \hline x^3+3x & x \\ \hline -2x & \end{array}$$

خط $y=x$ تنها مجانب مایل آن است. این تابع مجانب افقی ندارد.

۴) روش اول: $x\to+\infty$:

$y=x+2\left|x+\frac{1}{8}\right| \Rightarrow \begin{cases} y=3x+\frac{1}{4} \\ y=-x-\frac{1}{4} & x\to-\infty \end{cases}$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

حل تمرینات صفحه ۱۲۳

(1)

الف) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^+} \frac{\cancel{\sqrt{x-2}}\,\sqrt{x+2}}{\cancel{\sqrt{x-2}}\,\sqrt{x-2}} = \frac{2}{0^+} = +\infty$

ب) $\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{[x]-2}{x-2} = \frac{1-2}{2^- -2} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$

پ) $\lim\limits_{x\to \pi^+} \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$

ت) $\lim\limits_{x\to \frac{3\pi}{2}^-} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$

ث) $\lim\limits_{x\to 4^-} \frac{x-2}{(x-4)(x+2)} = \frac{-2}{(0^-)(6)} = +\infty$

ج) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{(-1)^{[x]+1}}{x^2-4} = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^+} \frac{(-1)^3}{x^2-4} = \frac{-1}{0^+} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^-} \frac{(-1)^2}{x^2-4} = \frac{1}{0^-} = -\infty \end{cases}$ $\Leftarrow$ جواب $= -\infty$

چ) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\tan x}{\cot x} = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

ح) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x-1}{x^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$

(2)

$\lim\limits_{v\to c^-} m = \lim \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_0}{0^+} = +\infty$

$v\to c^-$ انرژی معادل جرم $m_0$، بسیار بسیار زیاد می‌شود.

ASEMAN

Subject:
Year. Month. Date. ( )

(3)

الف) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{2x+1}{x-3} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x(2+\frac{1}{x})}{x(1-\frac{3}{x})} = \frac{2}{1} = 2$

ب) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x^2+5x-1}{2x^2-1} = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x^2(1+\frac{5}{x}-\frac{1}{x^2})}{x^2(2-\frac{1}{x^2})} = \frac{1+0-0}{2-0} = \frac{1}{2}$

پ) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{2x+1}{x^2+3x-1} = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x(2+\frac{1}{x})}{x^2(1+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2})} = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{2+\frac{1}{x}}{x(1+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2})} = 0$

ت) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(x-\sqrt{x^2+2x}\right) = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^2-(x^2+2x)}{x+\sqrt{x^2+2x}} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{-2x}{x+|x|} = -1$

ث) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\sqrt{x^2+3x} - \sqrt{x^2-3x}\right) = \lim\limits_{x\to -\infty} \left(\frac{(x^2+3x)-(x^2-3x)}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2-3x}}\right) = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{6x}{|x|+|x|}$

$= \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{6x}{-2x} = -3$

ج) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left[\frac{x^2+x+3-2}{x^2+x+3}\right] = \lim\limits_{x\to +\infty} \left[1-\frac{2}{x^2+x+3}\right] = \lim\limits_{x\to +\infty} \left(1+\left[\frac{-2}{x^2+x+3}\right]\right)$

$= 1+(-1) = 0$

چ) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x\tan^{-1}x}{2-x} = \lim\limits_{x\to -\infty} \left(\frac{x}{2-x}\right)\tan^{-1}x = (-1)\left(\frac{-\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$

ASEMAN

Subject :
Year. Month. Date. ( )

هدف مؤلف $\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x\sqrt[3]{x^{-1}}}{2-x}\right]$ بوده است که در این صورت جواب (۲) می‌باشد.

ج) $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt[3]{8x^3+2x^2}-2x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{8x^3+2x^2-8x^3}{\sqrt[3]{(8x^3+2x^2)^2}+2x\sqrt[3]{8x^3+2x^2}+4x^2}=\lim\frac{2x^2}{12x^2}=\frac{1}{6}$

خ) $\lim_{x\to-\infty}\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2+3}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-(x^2+1)}{x^2-(x^2+3)}\times\frac{x-\sqrt{x^2+3}}{x-\sqrt{x^2+1}}$

$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-(x-|x|)}{-3(x-|x|)}=\frac{1}{3}$

د) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}2\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}$

$=\lim_{x\to+\infty}2\underbrace{\sin\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}}_{\text{حدش صفر است}}\underbrace{\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}}_{\text{کراندار است}}=0$

۴) الف) $\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3-x+1}{x^2+x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(2x-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}$

$=\lim\frac{2x-1/x+1/x^2}{1+1/x-1/x^2}=\frac{-\infty}{1}=-\infty$

ASEM4N

Subject :
Year. Month. Date. ( )

ب) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x+1}{\sqrt{x^2+2x-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+1/x+1/x^2\right)}{\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}}$

$=\frac{+\infty(1+0+0)}{\sqrt{1+0-0}}=+\infty$

۵) روش اول: چون $\lim_{x\to a}f(x)=+\infty$ پس $\lim_{x\to a}\frac{1}{f(x)}=0$ ، در نتیجه

$\lim_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right)=\lim_{x\to a}f(x)\left(1+\frac{g(x)}{f(x)}\right)=\lim_{x\to a}f(x)=+\infty$

روش دوم:

g در یک همسایگی محذوف a کراندار است $\Rightarrow \exists\, m,M\in\mathbb{R}$ st. $\forall x\in N_\delta(a)-\{a\}:\ m\le g(x)\le M$

$\Rightarrow m+f(x)\le f(x)+g(x)\le M+f(x)$

$\Rightarrow \lim_{x\to a}\left(m+f(x)\right)\le\lim_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right)\Rightarrow +\infty\le\lim_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right)$

$\Rightarrow \lim_{x\to a}f(x)+g(x)=+\infty$

ASEM4N

Subject: 
Year. Month. Date. ( )

حل تمرین در کلاس ص ۱۲۷

تابع $f(x)=\sqrt[3]{x-1}$ در $x=1$ پیوسته است.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left|\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}\right| = \lim_{\Delta x\to 0}\left|\frac{\sqrt[3]{1+\Delta x-1}-0}{\Delta x}\right| = \lim_{\Delta x\to 0}\left|\frac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\sqrt[3]{\Delta x^3}}\right| = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x^2}}$$

$= \frac{1}{0^+} = +\infty \Longrightarrow$ پس خط $x=1$ خط مماس قائم بر نمودار $f$ در $x=1$ می‌باشد.

حل تمرین در کلاس ص ۱۲۸

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x+\Delta x-x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}$$

$= \frac{1}{2\sqrt{x}} \xRightarrow[x=1]{A(1,1)} m=\frac{1}{2}$ شیب خط مماس

حل مسائل ص ۱۲۸

①

$$m=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{1+\Delta x}-1}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1+\Delta x-1}{\Delta x(\sqrt{1+\Delta x}+1)}=\frac{1}{2}$$ شیب خط مماس

$y-1=\frac{1}{2}(x-1) \longrightarrow y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ معادله خط مماس

$y-1=-2(x-1) \longrightarrow y=-2x+3$ « « قائم

Subject: 
Year. Month. Date. ( )

②

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{x+\Delta x}-\frac{1}{x}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x-x-\Delta x}{\Delta x(x+\Delta x)x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-1}{x(x+\Delta x)}=\frac{-1}{x^2}$$

$d: y=2x \longrightarrow$ $d$ شیب خط $=2$

خط مماس ⊥ عمود بر خط $\Longrightarrow (2)\left(\frac{-1}{x^2}\right)=-1 \Longrightarrow x^2=2 \Longrightarrow x=\pm\sqrt{2}$

$A\left(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$B\left(-\sqrt{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$

③ الف)

$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-0}{x-0}=1 \Longrightarrow$ خط مماس وجود دارد $A(0,0)$

$y-0=1(x-0) \Longrightarrow y=x$ معادله خط مماس بر منحنی

ب)

$$m=\lim_{x\to 0}\frac{|\sin x|-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{|\sin x|}{x}=\begin{cases}1 & x>0\\ -1 & x<0\end{cases}$$

خط مماس در $x=0$ وجود ندارد

④ الف)

$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{|x|-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x-1}=1 \Longrightarrow m=1$

خط مماس وجود دارد

$A(1,1)$ $y-1=1(x-1) \longrightarrow y=x$ معادله خط مماس

ب)

$$\lim_{x\to 1}\frac{|x^2-1|-0}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{|x^2-1|}{x-1}=\begin{cases}2 & x\to 1^+\\ -2 & x\to 1^-\end{cases}$$