

حل المسائل فصول صفر و اول

درس حساب دیفرانسیل و انتگرال

دورهٔ پیش دانشگاهی - رشتهٔ علوم ریاضی

به کوشش استاد پرویز رضایی

مدرس دوره ضمن خدمت دروس ریاضی ۱، ریاضی ۲، حسابان و حساب دیفرانسیل و انتگرال (در استان فارس)



دانلود از سایت ریاضی سرا

www.riazisara.ir

Subject:

Year. Month. Date. ()

حل تمرین در کلاس ص ۵

$$(-x) + x = 0 \quad \text{من داریم برای هر عدد حقیقی و دلخواه مانند } x \text{ داریم} \quad (1)$$

$$(-x) + (-(-x)) = 0 \quad \text{از طرفی } (-x) \text{ نیز یک عدد حقیقی است پس داریم}$$

فابراین دو عدد x و $(-x)$ هر دو قرینه $(-x)$ هستند در نتیجه $(-x) = x$ زیرا

هر عدد فقط یک عضو قرینه دارد.

$$x = x + 0 = x + (y + (-y)) = (x + y) + (-y) = (y + z) + (-y) \quad (2)$$

فرضی جمله شرکت پذیری عضو قرینه (عقودتی)

$$= (z + y) + (-y) = z + (y + (-y)) = z + 0 = z \Rightarrow x = z$$

عضو قرینه قرینه خاصیت شرکت پذیری خاصیت جابجایی

حل تمرین در کلاس ص ۷

$$xy = x(y - z + z) = x(y - z) + xz \quad (*) \quad (1)$$

$$xy - xz = (x(y - z) + xz) - xz = x(y - z) + (xz + (-xz))$$

(۱) جمله شرکت پذیری

$$= x(y - z) + 0 = x(y - z)$$

قرینه فشرده

(۲) فرض کنید $xy = 0$ و $x \neq 0$ ثابت می‌کنیم $y = 0$

$$y = 1y = (x^{-1}x)y = x^{-1}(xy) = x^{-1}(0) = 0$$

عکس: فرض کنیم $a = 0$

$$ab = 0 \cdot b = 0 \cdot b + 0 = 0 \cdot b + (b + (-b)) = (0b + 1b) + (-b) = (0 + 1)b + (-b) = b + (-b) = 0$$

یا اینکه

فصل های صفر و یک

Subject:

Year. Month. Date. ()

$$\text{الف) } 3x + 5 \leq 1 \Rightarrow 3x \leq -4 \Rightarrow x \leq -\frac{4}{3} \quad (*)$$

$$\text{ج. م. م} = (-\infty, -\frac{4}{3}]$$

$$\text{ب) } 5x - 3 \leq 7 - 3x \Rightarrow 8x \leq 10 \Rightarrow x \leq \frac{5}{4}$$

$$\text{ج. م. م} = (-\infty, \frac{5}{4}]$$

$$\text{ج) } x^2 < 9 \Rightarrow |x| < 3 \Rightarrow -3 < x < 3 \quad \text{ج. م. م} = (-3, 3)$$

$$\text{د) } \frac{1}{x-2} < 3 \Rightarrow \frac{1}{x-2} - 3 < 0 \Rightarrow \frac{1-3(x-2)}{x-2} < 0 \Rightarrow \frac{5-3x}{x-2} < 0$$

x	$-\infty$	$\frac{2}{3}$	2	$+\infty$
$3x-5$	-	0	+	+
$x-2$	+	+	0	-
P	-	+	-	-

$$\text{ج. م. م} = (-\infty, \frac{2}{3}) \cup (2, +\infty)$$

$$\text{الف) } |x-2| \leq 2 \Rightarrow -2 \leq x-2 \leq 2 \Rightarrow 0 \leq x \leq 4 \quad (*)$$

$$\text{ج. م. م} = [0, 4]$$

$$\text{ب) } |2x+5| < 1 \Rightarrow -1 < 2x+5 < 1 \Rightarrow -6 < 2x < -4 \Rightarrow -3 < x < -2$$

$$\text{ج. م. م} = (-3, -2)$$

$$\text{ج) } \left| 2 - \frac{x}{2} \right| < \frac{1}{2} \Rightarrow \left| \frac{x}{2} - 2 \right| < \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} < \frac{x}{2} - 2 < \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\frac{3}{2} < \frac{x}{2} < \frac{5}{2} \Rightarrow 3 < x < 5 \quad \text{ج. م. م} = (3, 5)$$

ASEM4N

Subject:

Year. Month. Date. ()

الف) (*)

$$x(y-y) = 0 \Rightarrow xy + x(-y) = 0 \Rightarrow x(-y) = -(xy) \quad (*)$$

$$(x-x)y = 0 \Rightarrow xy + (-x)y = 0 \Rightarrow (-x)y = -(xy) \quad (**)$$

$$(*) \text{ و } (**) \Rightarrow x(-y) = -(xy) = (-x)y$$

$$(-x)(-y) = - (x(-y)) = - (-(xy)) = xy \quad \text{ب)}$$

حل تمرین در کلاس ص ۱۶

نامگذاری مثلثی برای سه عدد a و a و a به صورت زیر است

$$|a + a + a| \leq |a| + |a| + |a|$$

$$\text{اثبت: } |a + a + a| = |a + (a + a)| \leq |a| + |a + a| \leq |a|$$

$$+ |a| + |a|$$

در حالت کلی، نامگذاری مثلثی به صورت زیر است.

$$|a + a + \dots + a| \leq |a| + |a| + \dots + |a|$$

$$\text{حل سؤال ۱۶} \quad \text{الف) } \frac{5}{x-1} < \frac{-2}{x} \Rightarrow \frac{5}{x-1} + \frac{2}{x} < 0 \Rightarrow \frac{5x+2(x-1)}{x(x-1)} < 0$$

x	$-\infty$	0	$\frac{2}{5}$	1	$+\infty$
$5x+2$	-	-	0	+	+
x^2-x	+	0	-	+	+
P	-	+	-	-	+

ASEM4N

$$\text{ج. م. م} = (-\infty, 0) \cup (\frac{2}{5}, 1)$$

$$\frac{1}{x^2} < \frac{1}{10^4} \Rightarrow x^2 > 10^4 \Rightarrow |x| > 10^2 \Rightarrow x > 100 \text{ یا } x < -100 \quad (4)$$

$$\text{جواب نهایی} = ((-\infty, -100) \cup (100, +\infty)) \cap (2, +\infty) = (100, +\infty)$$

$$\sqrt{x^2 - 9} < \frac{1}{10^2} \Rightarrow x^2 - 9 < \frac{1}{10^4} \Rightarrow x^2 < 9 + \frac{1}{10^4} \Rightarrow \quad (5)$$

$$|x| < \sqrt{9 + \frac{1}{10^4}} \Rightarrow -\sqrt{9,0001} < x < \sqrt{9,0001}$$

$$\text{جواب نهایی} = (-\sqrt{9,0001}, \sqrt{9,0001}) \cap (2, 4) = (2, \sqrt{9,0001})$$

بخط دراز می شود $\rightarrow (2, \sqrt{9,0001})$

(A) روش اول: سه حالت زیر را در نظر می گیریم و

$$a < x < b$$

حالت اول: $a < b$

$$-b < a < x < b \Rightarrow |x| < b \text{ در اینجا } \max\{|a|, |b|\} = |b| = b$$

$$a < x < b$$

حالت دوم: $a, b < 0$

$$\max\{|a|, |b|\} = |a| = -a$$

$$a < x < b < -a \Rightarrow a < x < -a \Rightarrow |x| < -a \Rightarrow |x| < |a|$$

حالت سوم: $a < 0, b > 0$

$$\text{فرض می کنیم که } |a| \leq |b| \text{ یعنی } -a \leq b \text{ در این صورت داریم}$$

ASEM4N

$$\text{ت) } |2x - 1| < 2 \Rightarrow -2 < 2x - 1 < 2 \Rightarrow 0 < 2x < 3 \Rightarrow$$

$$\frac{0}{2} < x < \frac{3}{2} \quad 2 \cdot 0 = \left(\frac{0}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

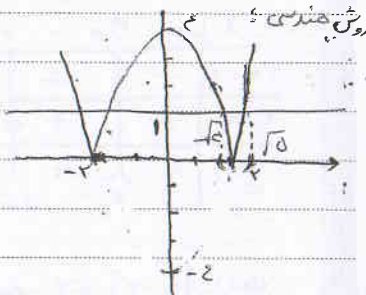
$$|x^2 - 4| < 1 \Rightarrow -1 < x^2 - 4 < 1 \Rightarrow 3 < x^2 < 5 \Rightarrow \quad (6)$$

$$\sqrt{3} < |x| < \sqrt{5} \Rightarrow \sqrt{3} < x < \sqrt{5} \text{ یا } -\sqrt{5} < x < -\sqrt{3}$$

$$\text{جواب نهایی} = ((\sqrt{3}, \sqrt{5}) \cup (-\sqrt{5}, -\sqrt{3})) \cap \left(\frac{19}{10}, \frac{21}{10}\right) = \left(\frac{19}{10}, \frac{21}{10}\right)$$

$$(\sqrt{3}, \sqrt{5}) \cap (1, 9, 2, 1) = (1, 9, 2, 1)$$

y=1



$$|x^2 - 9| < \frac{1}{1000} \Rightarrow -\frac{1}{1000} < x^2 - 9 < \frac{1}{1000} \Rightarrow 9 - \frac{1}{1000} < x^2 < 9 + \frac{1}{1000} \quad (7)$$

$$\Rightarrow \frac{8999}{1000} < x^2 < \frac{9001}{1000} \Rightarrow \sqrt{\frac{8999}{1000}} < |x| < \sqrt{\frac{9001}{1000}}$$

$$-\sqrt{\frac{8999}{1000}} < x < \sqrt{\frac{9001}{1000}} \text{ یا } -\sqrt{\frac{9001}{1000}} < x < -\sqrt{\frac{8999}{1000}}$$

$$\text{جواب نهایی} = ((\sqrt{\frac{8999}{1000}}, \sqrt{\frac{9001}{1000}}) \cup (-\sqrt{\frac{9001}{1000}}, -\sqrt{\frac{8999}{1000}})) \cap (2, 4)$$

$$= (\sqrt{\frac{8999}{1000}}, \sqrt{\frac{9001}{1000}})$$

ASEM4N

Subject:

Year. Month. Date. ()

$$-b < a < x < b \Rightarrow |x| < b \Rightarrow |x| < \max\{|a|, |b|\}$$

و در حالتی که $|a| > |b|$ به طریق مشابه است.

بررسی عکس قضیه: خیر. مثال نقض $a=2$, $b=-5$, $x=1$, فرض

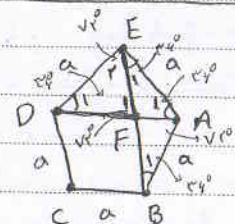
$x < \max\{|a|, |b|\}$ درست است ولی $a < x < b$ برقرار نمی باشد.

(4) برهان خلف: فرض کنید برای هر h نامی $a < h$ برقرار باشد ولی $a \neq h$

بی $a > 0$ و درنتیجه $\frac{a}{r} > 0$ فرض می کنیم. $h = \frac{a}{r}$

$$a < h \Rightarrow a < \frac{a}{r} \Rightarrow ra < a \Rightarrow r < 1 \quad \#$$

فرض خلف باطل است و حکم برقرار است.



$$(10) \quad \text{اندازه هزارم داخلی} = \frac{2 \times 180}{5} = 108$$

طول ضلع را a و طول قطر را d فرض می کنیم.

$$AB = AE \Rightarrow \hat{E}_1 = \hat{B}_1 = 24^\circ \quad \hat{E}_1 = \hat{F}_1 \Rightarrow DE = DF = a$$

$$AE = ED \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{D}_1 = 24^\circ \Rightarrow AF = d - a$$

$$\hat{A}_1 = \hat{B}_1 = 24^\circ \quad \hat{E}_1 = \hat{F}_1 = 24^\circ \quad \text{شکل}$$

$$\Rightarrow d^2 - ad - a^2 = 0 \Rightarrow \left(\frac{d}{a}\right)^2 - \left(\frac{d}{a}\right) - 1 = 0 \Rightarrow \frac{d}{a} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{نسبت طلایی}$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

Subject:

Year. Month. Date. ()

$$(11) \quad \text{فرض می کنیم } \sqrt{3} \text{ گویا باشد و } \sqrt{3} = \frac{a}{b} \text{ که در آن } (a, b) = 1 \text{ داریم.}$$

$$\sqrt{3} = \frac{a}{b} \Rightarrow 3 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow a^2 = 3b^2 \quad (*)$$

طرف سمت چپ این معادله باید بر 3 بخش پذیر باشد زیرا طرف سمت راست بر 3 بخش پذیر است، چون

a^2 مضرب 3 است پس باید a مضرب 3 باشد یعنی $a = 3a'$ با جایگزینی در (*) داریم

$$3a'^2 = 3b^2 \Rightarrow a'^2 = 3b^2 \Rightarrow 9a'^2 = 3b^2 \Rightarrow b^2 = 3a'^2 \quad (**)$$

b مضرب 3 باشد یعنی $b = 3b'$ و این تناقض است با فرض $(a, b) = 1$ ، پس فرض

خلف باطل است و حکم اثبات شده است.

روز دوم: می دانیم در معادله $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0 = 0$

$a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{Q}$ اگر $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ جواب معادله باشد $a_i | p$ و $a_i | q$

از طرفی می دانیم $\sqrt{3}$ جواب معادله $x^2 - 3 = 0$ است پس اگر این معادله جواب گویا

باشد $\frac{p}{q}$ داشته باشد باید $3 | p$ و $1 | q$.

$$3 | p \rightarrow p = \pm 3$$

$$1 | q \rightarrow q = \pm 1$$

$$\frac{p}{q} = 3, -3, 1, -1$$

همگی نام از این اعداد در معادله صدق نمی کند پس معادله جواب گویا ندارد یعنی $\sqrt{3}$ جواب آن

است گویا نیست.

A3EM4N

A3EM4N

در این تمرینات هدف، فقط حدس زدن به کمک چینه چینه است.

الف) $1, 2, 4, 8, \dots, 2^{n-1}, \dots$

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{r^n}{r^{n-1}} = r > 1 \Rightarrow \frac{a_n}{a_{n-1}} > 1 \Rightarrow a_n > a_{n-1} \quad \forall n \geq r$$

ج) $\frac{1}{r}, \frac{1}{q}, \frac{1}{rv}, \dots, \frac{1}{rn}, \dots$

فرضی است زیرا

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(\frac{1}{k})^{n+1}}{(\frac{1}{k})^n} = \frac{1}{k} < 1 \implies \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \implies a_{n+1} < a_n$$

جمله مثبتانه

$$2.1 \quad r, \frac{r}{r}, \frac{r}{r}, \dots, \frac{n+1}{n},$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+r}{n+1} - \frac{n+1}{n} = \frac{n^r + rn - n^r - rn - 1}{n(n+1)} = \frac{-1}{n^r + n} < 0$$

2) $r, \left(\frac{r}{p}\right)^r, \left(\frac{r}{p}\right)^{r^2}, \dots, \left(\frac{n+1}{n}\right)^n, \dots$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(\frac{n+r}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{\left(\frac{n+r}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}} \times \left(\frac{n+1}{n}\right) = \left(\frac{n+r}{n+1}\right)^{n+1} \left(\frac{n+1}{n}\right)$$

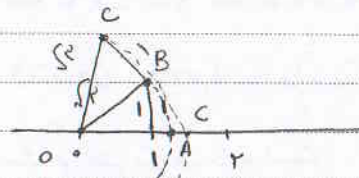
$$= \left(1 - \frac{1}{(n+1)^r}\right) \left(\frac{n+1}{n}\right) \geq \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(\frac{n+1}{n}\right) = 1 \Rightarrow$$

۱۲) فرض کنید \log^r عددی گویا باشد
 $\log^r = \frac{a}{b} \Rightarrow 10^{\frac{a}{b}} = r \Rightarrow 10^a = r^b$ (*)

رقم بیان عدد نسبت به شمارش (*) شماره هفتاد و پنج است در صورتی که رقم بیان عدد هفتاد و پنج است

۱۔ ۲۔ ۳۔ ۴۔ ۵۔ ۶۔ ۷۔ ۸۔ ۹۔ ۱۰۔ ۱۱۔ ۱۲۔ ۱۳۔ ۱۴۔ ۱۵۔ ۱۶۔ ۱۷۔ ۱۸۔ ۱۹۔ ۲۰۔ ۲۱۔ ۲۲۔ ۲۳۔ ۲۴۔ ۲۵۔ ۲۶۔ ۲۷۔ ۲۸۔ ۲۹۔ ۳۰۔ ۳۱۔ ۳۲۔ ۳۳۔ ۳۴۔ ۳۵۔ ۳۶۔ ۳۷۔ ۳۸۔ ۳۹۔ ۴۰۔ ۴۱۔ ۴۲۔ ۴۳۔ ۴۴۔ ۴۵۔ ۴۶۔ ۴۷۔ ۴۸۔ ۴۹۔ ۵۰۔ ۵۱۔ ۵۲۔ ۵۳۔ ۵۴۔ ۵۵۔ ۵۶۔ ۵۷۔ ۵۸۔ ۵۹۔ ۶۰۔ ۶۱۔ ۶۲۔ ۶۳۔ ۶۴۔ ۶۵۔ ۶۶۔ ۶۷۔ ۶۸۔ ۶۹۔ ۷۰۔ ۷۱۔ ۷۲۔ ۷۳۔ ۷۴۔ ۷۵۔ ۷۶۔ ۷۷۔ ۷۸۔ ۷۹۔ ۸۰۔ ۸۱۔ ۸۲۔ ۸۳۔ ۸۴۔ ۸۵۔ ۸۶۔ ۸۷۔ ۸۸۔ ۸۹۔ ۹۰۔ ۹۱۔ ۹۲۔ ۹۳۔ ۹۴۔ ۹۵۔ ۹۶۔ ۹۷۔ ۹۸۔ ۹۹۔ ۱۰۰۔

تَبَاقُصٌ اسْتِ و فَرْضٌ خَلْفُ طَل اسْتِ و حُكْمُ اَشْيَاءٍ سَدَّةٌ اسْتِ .



$$OA = \sqrt{r}$$

$$0 < \varepsilon \sqrt{f}$$

روش دیگر تقریب ۸. عرض کنید $k = \max\{|a|, |b|\}$ داریم

$$k \geq |a|, \quad k \geq |b|$$

از طرف دیگر $-|a| \leq a \leq |a|$, $-|b| \leq b \leq |b|$
 $-|a| \leq -k$

$$-k \leq -a \leq a < b \leq |b| \leq k \Rightarrow -k < x < k \Leftrightarrow |x| < k$$

$$\Rightarrow |u| < \max \{ |a|, |b| \}$$

(۶) دنباله $a_n = \frac{1}{11} + \frac{1}{10^{n+2}}$ بین دو عدد $\frac{1}{11}$ و $\frac{1}{10}$ قرار دارد.

(۷) $\left\{ 1 + \left(\frac{1}{4}\right)^n \right\}$ و $\frac{5}{2}, \frac{5}{4}, \frac{9}{8}, \frac{17}{16}, \dots$ (الف)

این دنباله نزولی است زیرا $a_{n+1} - a_n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} - \left(\frac{1}{4}\right)^n = \left(\frac{1}{4}\right)^n \left(\frac{1}{4} - 1\right) < 0$

البته در اینجا هدف حدس زدن است در سایر موارد نیز به همین طریق است.

دنباله کراندار است زیرا $\frac{1}{4} < a_n < \frac{5}{2}$

جملات دنباله حول عدد ۱ جمع می شوند.

(ب) $\left\{ \frac{n^2}{2^n} \right\}$

$\frac{1}{2}, 1, \frac{9}{8}, 1, \frac{25}{32}, \dots$

دنباله غیر یکنوا است زیرا $a_2 > a_1$ (غیر نزولی) و $a_3 > a_2$ (غیر صعودی)

دنباله کراندار است، زیرا $0 < a_n \leq \frac{9}{8}$

جملات دنباله حول صفر جمع می شوند.

(ج) $\left\{ 1 + (-1)^n \right\}$

$0, 2, 0, 2, \dots$

دنباله غیر یکنوا است زیرا $a_1 < a_2$ (غیر نزولی) و $a_2 > a_3$ (غیر صعودی)

دنباله کراندار است زیرا $0 \leq a_n \leq 2$

جملات فرد حول صفر (در صفر) و جملات زوج حول ۲ (در ۲) جمع می شوند.

(د) $\left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\}$ و $\frac{425}{206}, \frac{64}{27}, \frac{9}{4}, 2, \dots$

صعودی است در ترتیب صفت ۲۴ صفت $>$ اثبات شد.

کراندار است به مثابه کتاب مراجع شود. (حققت)

دنباله هاب عدد ۳ نزدیک می شوند.

حل ترتیب در کلاس ص ۲۵

صعودی است. $\{n+1\}$ و $2, 4, 6, \dots$

صعودی است $a_{n+1} - a_n = (n+2) - (n+1) = 1 > 0$

جملات حول عدد خاصی نزدیک نمی شوند.

(ب) $\{(-1)^n\}$ و $1, -1, 1, -1, \dots$

غیر یکنوا است و جملات فرد حول عدد ۱- و جملات زوج حول ۱ جمع می شوند.

(ج) $\left\{ \frac{n}{n+1} \right\}$ و $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$

صعودی است.

$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{(n+2)(n+1)} > 0$

جملات حول عدد ۱ جمع می شوند.

(حالت شهرور است)

(د) $\left\{ 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right\}$

$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{8}, \frac{7}{16}, \dots$

غیر یکنوا

جملات حول عدد ۱ جمع می شوند.

(۳) دنباله $\left\{ \frac{1}{n} \right\}$

(۵) دنباله $\{(-1)^n\}$

(۴) دو جمله a_n و a_m که $n \neq m$ را در نظر بگیریم، $\frac{1}{n} \neq \frac{1}{m} \Rightarrow a_n \neq a_m$

(۵) برای هر $n \in \mathbb{N}$ اعداد $\frac{1}{10} - \frac{1}{10^{n+2}}$ بین دو عدد $\frac{1}{10}$ و $\frac{1}{11}$ قرار دارد.

Subject:

Year. Month. Date. ()

$$d) \left\{ \cos \frac{n\pi}{2} \right\} \quad 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, \dots$$

غیر یکنوا است اما کراندار است $-1 \leq a_n \leq 1$

$$e) \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \right\} \quad 4, \left(\frac{4}{3}\right)^2, \left(\frac{4}{2}\right)^3, \left(\frac{4}{1}\right)^4, \dots$$

تقریبی است زیرا

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2}} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}} \times \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)} = \left(\frac{n+1/n}{n+1/n+1}\right)^{n+1} \times \frac{n+1}{n+2}$$

$$= \left(\frac{n^2 + n + 1}{n^2 + 2n}\right)^{n+1} \times \frac{n+1}{n+2} = \left(1 + \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \times \frac{n+1}{n+2} \geq \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \left(\frac{n+1}{n+2}\right) = 1$$

$$\Rightarrow \frac{a_n}{a_{n+1}} \geq 1 \xrightarrow{\text{ضرب در } a_{n+1}} a_n \geq a_{n+1}$$

کراندار است زیرا تقریبی و هر حد آن مثبت است $0 < a_n \leq a$

$$\textcircled{A} \quad \frac{1}{1}, \frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \frac{4}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots$$

$$b_1 = 1, \quad b_2 = 5, \quad b_3 = 1, \quad b_4 = 1, \quad b_5 = 15, \quad \forall n \geq 2, \quad b_n = a_n$$

اگر دنباله $\{a_n\}$ کراندار باشد دنباله $\{b_n\}$ هم کراندار می باشد.

اگر دنباله $\{a_n\}$ یکنوا باشد در مورد صعودی و یا نزولی بودن $\{b_n\}$ چیزی نمی توان گفت، مثلاً در

این جا $\{a_n\}$ صعودی است ولی $\{b_n\}$ غیر یکنوا است.

اگر جمله n ام دنباله $\{a_n\}$ حول عددی جمع شوند، دنباله $\{b_n\}$ حول همان عدد جمع شوند، زیرا جمع شدن حول

یک عدد مربوط به دم دنباله است.

ASEM4N

دانلود از سایت ریاضی سرا

Subject:

Year. Month. Date. ()

$$\forall n \geq 2: \quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 1 \quad \textcircled{9}$$

۱) روش اول: اگر به تعریف کراندار بودن دنباله در صفحه ۲۴ توجه کنیم و ساده کاملاً روشن است زیرا

اگر $\{a_n\}$ کراندار باشد عددی مانند M وجود دارد که برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم $-M \leq a_n \leq M$

یعنی $|a_n| \leq M$ کافی است $M = M$.

و برعکس اگر برای هر $n \in \mathbb{N}$ داشته باشیم $|a_n| \leq M$ یعنی $-M \leq a_n \leq M$ کافی است

$M = M$ در نظر گرفته شود. پس $-M \leq a_n \leq M$ ، یعنی $\{a_n\}$ کراندار است.

روش دوم: فرض می کنیم $\{a_n\}$ کراندار باشد و M و m به ترتیب کرانهای بالا و پایین آن باشند

$$\text{در این صورت داریم} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad m \leq a_n \leq M, \quad \text{با فرض} \quad M = \max\{|m|, |M|\}$$

$$\text{داریم} \quad |a_n| \leq M \quad (\text{طبق تمرین ۸ ص ۱۷}).$$

از صرافت دیگر ضمیمه واقعی است.

$$\textcircled{11} \quad a_n = \frac{2^n}{n+1} \quad |a_n - 2| = \left| \frac{2^n}{n+1} - 2 \right| = \left| \frac{2^n - 2(n+1)}{n+1} \right| = \frac{2}{n+1}$$

$$|a_1 - 2| = 1, \quad |a_2 - 2| = \frac{2}{3}, \quad |a_3 - 2| = \frac{2}{4}, \dots$$

$$|a_n - 2| < \frac{1}{10000} \Rightarrow \frac{2}{n+1} < \frac{1}{10000} \Rightarrow n+1 > 20000 \Rightarrow n > 19999$$

$$\Rightarrow M = 20000$$

ASEM4N

www.riazisara.ir

Subject :

Year. Month. Date. ()

(۱۳) این مجموعه حذف خواهد شد. و اگر دنباله زوجانی به صورت زیر تعریف شود.

دنباله زوجانی، دنباله ای است که همگرا نباشد و حد آن $+\infty$ یا $-\infty$ شود.

جواب سؤال : $\{(-1)^n\}$ یا $\{\sin n\}$ زوجانی و گرا ندارد است.

$\{(-1)^n \sqrt{n}\}$ یا $\{(-1)^n n\}$ زوجانی هستند ولی بی گرا هستند.

جواب پرسش ها : ۴۷

(۱) الف : نادرست است. زیرا ممکن است دنباله ای اصلی بگردد و بی دنباله جدیدی بگردد باشد.

(صغری) $1, 2, 3, 4, 5, \dots, n, \dots$

(بزرگ) $0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots, n, \dots$

در مورد گراننداری تغییر حاصل نمی شود.

ب) نادرست است زیرا ممکن است C عدد صحیح باشد.

(صغری) $1, 2, 3, \dots, n, \dots$

$C = -1$

(زوجی) $-1, -2, -3, \dots, -n, \dots$

ج) نادرست است. زیرا در این صورت اگر $\{ \frac{1}{n} \}$ زوجانی است ولی $\{ \frac{5}{n} \}$ هم زوجانی است.

فکر کنیم، در این قسمت است که صورت گرفته باشد چرا که (بزرگ) در صورت سؤال باید زوجی

ASEM4N

باشد که باز هم نادرست است $C < 0$ اختیار نمود.

دانلود از سایت ریاضی سرا

Subject :

Year. Month. Date. ()

$\left\{ \frac{1}{n} \right\} \rightarrow \left\{ \frac{-1}{n} \right\}$
زوجی صغری

$\{n\} \rightarrow \{-n\}$
زوجی زوجی

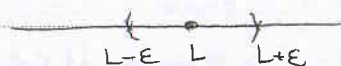
(۲) درست است.

حل سؤال در کلاس ۳۴

(۱) زیرا جملات آن حول عددی مانند L جمع می شوند یعنی در واقع اگر به مرکز L و به هر شعاع

درخواهیم مانند ϵ یک حصار انتخاب کنیم جملات دنباله از طرف چپ وارد شده و از طرف راست

خارج می شوند.



$$\epsilon = 1 \rightarrow L-1 \leq n+1 \leq L+1 \Rightarrow \frac{L}{2} - 1 < n < \frac{L}{2} \quad \#$$

$$a_n = \begin{cases} \frac{n+1}{2} & n \text{ فرد} \\ -\frac{n}{n+2} & n \text{ زوج} \end{cases} \quad \text{ف} \quad a_n = \left(\frac{1-(-1)^n}{2} \right) \left(\frac{n+1}{2} \right) + \left(\frac{1+(-1)^n}{2} \right) \left(\frac{-n}{n+2} \right)$$

همگرا $b_n = a_n = \frac{-n}{n+2} \rightarrow$ زیرا دنباله

وگرا $c_n = a_n = \frac{n+1}{2} \rightarrow$ زیرا دنباله

ASEM4N

حالت دوم: $k \geq M$ در این صورت قرار می دهیم $P=1$.

$$n \geq P \Rightarrow n \geq 1 \Rightarrow n+k \geq 1+k \geq M \Rightarrow n+k \geq M \Rightarrow \left| \frac{a}{n+k} - L \right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \left| \frac{a}{n} - L \right| < \varepsilon$$

نکته: از این تعریف در جابه حدودی های بازگشتی (تقریب ۲ و تقریب ۳ و تقریب ۱۳ و تقریب ۵۲)

و همچنین تقریب های مانند تقریب ۱۰ و تقریب ۵۲ استفاده می کنیم

تقریب ۳ (منفی ۳۸ حذف شده است و همین سوال در تقریب ۱۳ آمده است.)

تقریب ۴:

الف) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{n-1} = 0 \Rightarrow$ حد را به صفر است.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{N} \ni \forall n \geq M \Rightarrow \left| \left(\frac{1}{n}\right)^{n-1} \right| < \varepsilon$$

$$\left(\frac{1}{n}\right)^{n-1} < \varepsilon \Leftrightarrow \log \frac{1}{n} > \log \frac{\varepsilon}{\frac{1}{n}} \Rightarrow n > 1 + \log \frac{\varepsilon}{\frac{1}{n}}$$

$$n > 2 + \left\lceil \log \frac{\varepsilon}{\frac{1}{n}} \right\rceil \text{ کافی است}$$

ب)

این دنباله و آنرا است زیرا جملات آن بی کران از بالا نیست و حول عدد خاصی نمی گزرد و از بالا به پایین است.

$$\{ \log n \}$$

این دنباله و آنرا است زیرا جملات آن حول عدد خاصی جمع نمی شوند و از بالا به پایین است.

ASEM4N

حل تقریب در کلاس ۳۸

$$a_n = \frac{n-1}{n} \rightarrow \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots$$

حدس می زنیم به عدد یک همگرا باشد.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{N} \ni \forall n \geq M \Rightarrow \left| \frac{n-1}{n} - 1 \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{n-1-n}{n} \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$$

کافی است $M > \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1$ اختیار شود.

۲) فرض می کنیم $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$

فرض ۱: $\forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{N} \ni \forall n \geq M \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$

فرض ۲: $\exists K \in \mathbb{N} \text{ s.t. } a_{n+K} = b_n$

حکم: $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists P \in \mathbb{N} \ni \forall n \geq P \Rightarrow |b_n - L| < \varepsilon$$

فرض می کنیم ε داده شده باشد در این صورت آن را در فرض ۱ قرار می دهیم تا M بدست آید

دو حالت زیر را در نظر می گیریم

حالت اول: $M > K$ در این صورت قرار می دهیم $P = M - K$ در این صورت

$$n \geq P \Rightarrow n \geq M - K \Rightarrow n + K \geq M \Rightarrow \left| \frac{a}{n+K} - L \right| < \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{b}{n} - L \right| < \varepsilon$$

ASEM4N

$$\frac{2}{1.2}, \frac{3}{1.6}, \frac{4}{1.6}, \dots$$

② جملات دنباله به صورت

جملات دنباله افزایش می یابند و به $+\infty$ و ابرای شوند.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{1.6} = +\infty$$

$$\forall k > 0. \exists M \in \mathbb{N} \Rightarrow \forall n > M \Rightarrow \frac{n+1}{1.6} > k$$

$$\frac{n+1}{1.6} > k \Leftrightarrow n+1 > 1.6k \Leftrightarrow n > 1.6k - 1$$

کافی است $M \geq [1.6k - 1] + 1$ اختیار شود.

توضیح: در تمرینات ۲ و ۳ هدف این است که بیان کند که هر چه جملات ابتدایی بیشتر

کمی برای رفتن به $-\infty$ یا $+\infty$ دارند ولی در نهایت آن جملات اصلی (دُم دنباله) به $-\infty$ یا $+\infty$ گرایش پیدا خواهند کرد.

حل مسائل ص ۴۱

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+1}{n} = \infty \quad (الف)$$

$$\forall k > 0. \exists M \in \mathbb{N} \Rightarrow \forall n > M \Rightarrow \frac{n^2+1}{n} > k \quad (1)$$

$$\frac{n^2+1}{n} > k \Leftrightarrow \frac{n^2}{n} > k \Leftrightarrow n > k$$

ساده

کافی است $M \geq [k] + 1$

$$\left\{ \frac{1}{n} \right\}$$

با افزایش n ، جملات دنباله $\left\{ \frac{1}{n} \right\}$ به طرف صفر (از سمت راست) گرایش پیدا می کنند.

و چون پایه شمارش $\frac{1}{n}$ است، جملات دنباله n و $\frac{1}{n}$ همگرا هستند و هر دو به 0 می رسند.

حل تمرین در کلاس من (معاون نمونه کتاب حل کرده است)

$$(1) \text{ جملات دنباله } \{n^2\} \text{ به صورت } 1, 4, 9, 16, 25, 36, \dots$$

جملات دنباله افزایش یافته و به $+\infty$ و ابرای شوند. پس $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = \infty$ زیرا

$$\forall k > 0. \exists M \in \mathbb{N} \Rightarrow \forall n > M \Rightarrow n^2 > k$$

$$n^2 > k \Leftrightarrow n > \sqrt{k} \quad \text{کافی است } M \geq [\sqrt{k}] + 1 \text{ انتخاب شود.}$$

(۲)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1000 - n^2) = -\infty$$

جملات دنباله به صورت $999, 996, 991, \dots$ است و جملات کاهش

یافته و به $-\infty$ و اگر است. یعنی

$$\forall k > 0. \exists M \in \mathbb{N} \Rightarrow \forall n > M \Rightarrow a_n < -k$$

$$a_n < -k \Leftrightarrow 1000 - n^2 < -k \Leftrightarrow n^2 > 1000 + k \Leftrightarrow n > \sqrt{1000 + k}$$

کافی است $M \geq [\sqrt{1000 + k}] + 1$ اختیار شود.

Subject:

Year. Month. Date. ()

$$\text{فرض } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \quad \forall k > 0 \quad \exists p \in \mathbb{N} \Rightarrow \forall n \geq p \Rightarrow a_n > k \quad (2)$$

$$\text{حکم } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists M \in \mathbb{N} \Rightarrow \forall n \geq M \Rightarrow \left| \frac{1}{a_n} - 0 \right| < \varepsilon$$

فرض کنید $\varepsilon > 0$ داده شده باشد. فرض به جای k قرار می دهیم $k = \frac{1}{\varepsilon}$ درست آید یا فرض

$$M \geq p \quad \text{حاصل شده است زیرا}$$

$$n \geq M \Rightarrow n \geq p \Rightarrow a_n > k \Rightarrow a_n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{a_n} < \varepsilon$$

$$\left| \frac{1}{a_n} - 0 \right| < \varepsilon$$

(3) فرض داریم $a_n > 0$ و صحت

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M \in \mathbb{N} \Rightarrow \forall n \geq M \Rightarrow \left| \frac{1}{a_n} - 0 \right| < \varepsilon$$

$$\text{حکم: } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$$

$$\forall k > 0 \quad \exists p \in \mathbb{N} \Rightarrow \forall n \geq p \Rightarrow a_n > k$$

فرض می کنیم $k > 0$ داده شده باشد. در فرض به جای ε قرار می دهیم $\varepsilon = \frac{1}{k}$ $M \in \mathbb{N}$

حاصل شود، قرار می دهیم $p \geq M$

$$n \geq p \Rightarrow n \geq M \Rightarrow \frac{1}{a_n} < \varepsilon \Rightarrow a_n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow a_n > k$$

ASEMAN

Subject:

Year. Month. Date. ()

(ب) عرض می کنیم این حد موجود باشد و مقدار آن عدد حقیقی L باشد یعنی

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{n^2+1}{n} = L$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M \in \mathbb{N} \Rightarrow \forall n \geq M \Rightarrow \left| (-1)^n \frac{n^2+1}{n} - L \right| < \varepsilon$$

با فرض $\varepsilon = 1$ داریم

$$\exists M_0 \in \mathbb{N} \Rightarrow \forall n \geq M_0 \Rightarrow \left| (-1)^n \frac{n^2+1}{n} - L \right| < 1$$

اعداد بزرگتر یا مساوی M_0 شامل اعداد زوج و فرد است.

$$\text{if } n = \text{زوج} \Rightarrow \left| \frac{n^2+1}{n} - L \right| < 1$$

$$\text{if } n = \text{فرد} \Rightarrow \left| \frac{n^2+1}{n} + L \right| < 1$$

$$\frac{n^2}{n} < \frac{n^2+1}{n} \Rightarrow \left| \frac{n^2+1}{n} - L \right| < 1 \Rightarrow \frac{n^2+1}{n} - L < 1 \Rightarrow \frac{n^2+1}{n} < L+1$$

زیرا اعداد طبیعی زوج از بالا کراندار نیستند # $n < L+1$

(روش دوم) اگر دنباله ای همگرا باشد باید هر زیر دنباله ای از آن نیز همگرا باشد، بنابراین

$\left\{ \frac{n^2+1}{n} \right\}$ از آن دارد نظر بگیریم در صحت الف گفتیم این دنباله به $+\infty$ واگرا است پس

این دنباله نمی تواند همگرا به عدد حقیقی مانند L شود.

ASEMAN

$$\forall n \geq T \Rightarrow n \geq M \Rightarrow \left| \frac{1}{a_n} - 0 \right| < \frac{1}{k} \Rightarrow \frac{1}{a_n} < \frac{1}{k} \Rightarrow a_n > k$$

$$\varepsilon) \lim_{n \rightarrow \infty} C_n = \frac{3}{2}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M \in \mathbb{N} \Rightarrow \forall n \geq M \Rightarrow \left| \frac{3n^2+1}{2n^2+1} - \frac{3}{2} \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{3n^2+1}{2n^2+1} - \frac{3}{2} \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{19}{2n^2+1} < \varepsilon \Leftrightarrow 2n^2+1 > \frac{19}{\varepsilon}$$

$$\Leftrightarrow 2n^2 > \frac{19}{\varepsilon} - 1 \Leftrightarrow n^2 > \frac{19}{2\varepsilon} - \frac{1}{2} \Leftrightarrow n > \sqrt{\frac{19}{2\varepsilon} - \frac{1}{2}}$$

کافی است $M \gg \left[\sqrt{\frac{19}{2\varepsilon} - \frac{1}{2}} \right] + 1$.
 وقتی M را در زیر رادیکال می‌نویسیم، کافی است
 $M=1$ اختیار شود.

حل بهترین در کلاس ص ۴۳

(فرض بر نائقی بودن مجموعه‌ها می‌باشد)

۱) درست است مانند نمونه‌های زیر $A = \{1, 2, 4\}$ ، B کوچکترین کران بالا است.

۲) $B = [1, 2]$ ، C کوچکترین کران بالا است.

۳) $C = (-1, 2)$ ، B و C کوچکترین کران بالا است.

البته باید داشت که بیان شود کوچکترین کران بالا در کدام مجموعه قرار دارد مثلاً مجموعه $A = \{9 \in \mathbb{Q} : 9^2 < 2\}$

کرانه‌دار است دلی کوچکترین کران بالا آن که $\sqrt{2}$ است عقده نیست

۲) درست است مانند الف (فرض بر نائقی بودن مجموعه‌ها است)

۳) درست است نتیجه آن از بهترین او ۲ است.

۴) درست است ، مثل ۱. $A = [1, 2]$ ، $B = [1, 4]$ اختیار شود.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \exists M \in \mathbb{N} \Rightarrow \forall n \geq M \Rightarrow \left| \frac{1}{a_n} - 0 \right| < \varepsilon$$

در فرض ε قرار دهیم $\varepsilon = \frac{1}{k}$ ، $T = M$ فرض آید فرض $\varepsilon = \frac{1}{k}$ ، $T = M$ فرض آید فرض

(۴) قرار دهیم $\varepsilon = \frac{1}{k}$ ، $T = M$ فرض آید فرض $\varepsilon = \frac{1}{k}$ ، $T = M$ فرض آید فرض

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$$

$$a_n = \frac{\Delta n^2 - 2n + 1}{2n + 1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \quad \forall k > 0 \exists M \in \mathbb{N} \Rightarrow \forall n \geq M \Rightarrow a_n > k$$

$$a_n > k \Leftrightarrow \frac{\Delta n^2 - 2n + 1}{2n + 1} > k \Leftrightarrow \frac{\Delta n^2 - 2n}{2n + 1} > k \Leftrightarrow \frac{\Delta n^2 - 2}{2} > k$$

$$\Leftrightarrow \Delta n^2 - 2 > 2k \Leftrightarrow \Delta n^2 > 2k + 2$$

$$n > \frac{2k + 2}{\Delta}$$

کافی است $M \gg \left[\frac{2k + 2}{\Delta} \right] + 1$ اختیار شود.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 1}{2n^2 + 1} = 0$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M \in \mathbb{N} \Rightarrow \forall n \geq M \Rightarrow \left| \frac{n^2 - 1}{2n^2 + 1} - 0 \right| < \varepsilon$$

$$\frac{n^2 - 1}{2n^2 + 1} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{n^2}{2n^2} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{2} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} < 2$$

$$n > \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{کافی است } M \gg \left[\frac{1}{\varepsilon} \right] + 1 \text{ اختیار شود.}$$

Subject:

Year. Month. Date. ()

ب) اگر $\emptyset \neq A \subseteq B$ و $k \in B$ یک گزیده یا پس B باشد k که گزیده یا پس A نیز می باشد

حل تقریب در کلاس ص ۴۵

① این دنباله نزولی و از پایین کراندار است پس طبق قضیه همگراست. دالت

با افزایش n کسر $\frac{1}{n^2+1}$ به عدد صفر نزدیک می شود و بنابراین دنباله به عدد ۱ همگرا است

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2+1}\right) = 1 \quad \text{بنابراین} \quad |a_n - 1| = \left|1 + \frac{1}{n^2+1} - 1\right| = \frac{1}{n^2+1}$$

{تقریباً به اینها احوال میرود دنباله ها ملحق شده است}

دنباله صعودی و از بالا کراندار است پس همگراست. ر ب $\left\{1 - \frac{1}{n}\right\}$

دنباله $\frac{1}{n}$ با افزایش n به صفر نزدیک می شود و

$$|a_n - 1| = \left|1 - \frac{1}{n} - 1\right| = \frac{1}{n}$$

فاصله جلات دنباله تا عدد یک با افزایش n کمتر شده و بنابراین

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1$$

② چند جمله از دنباله را می نویسیم

$$1, \sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \dots$$

این دنباله صعودی است زیرا

$$p(n): a_n \leq a_{n+1}$$

ASEM4N

$$p(n): 1 \leq \sqrt{2} \Rightarrow a_1 \leq a_2 \quad \text{①}$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

Subject:

Year. Month. Date. ()

$$p(k): a_k \leq a_{k+1} \quad a_k \leq a_{k+1} \Rightarrow 4 + a_k \leq 4 + a_{k+1}$$

$$p(k+1): a_{k+1} \leq a_{k+2} \Rightarrow \sqrt{4 + a_k} \leq \sqrt{4 + a_{k+1}}$$

$$\Rightarrow a_{k+1} \leq a_{k+2} \quad \text{①}$$

پس این گزاره برای هر عدد طبیعی n درست است.

چون دنباله صعودی است پس برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم $a_1 \leq a_n$ کافی است ثابت

$$a_n < 3 \quad \text{کنیم برابر هر } n \in \mathbb{N}$$

$$p(n): 1 < 3 \Rightarrow a < 3 \quad \text{②}$$

$$p(k): a_k < 3 \quad a_k < 3 \Rightarrow a_k + 1 < 4 \Rightarrow$$

$$p(k+1): a_{k+1} < 3 \quad \sqrt{4 + a_k} < 3 \Rightarrow a_{k+1} < 3 \quad \text{①}$$

پس گزاره برای هر عدد طبیعی n درست است.

دنباله $\{a_n\}$ بگویند و کراندار است بنابراین ۱، دنباله همگرا است و حد آن را l

می نامیم و طبق قضیه ۲ داریم $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$ در نتیجه

$$a_{n+1} = \sqrt{4 + a_n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{4 + a_n} \Rightarrow l = \sqrt{4 + l}$$

$$\Rightarrow l^2 = 4 + l \Rightarrow l^2 - l - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} l = 3 \checkmark \\ l = -2 \times \end{cases}$$

ASEM4N

واقع است که هم جملات دنباله مثبت است. دنباله صعودی است. در ضمن دنباله به عدد ۵ همگراست.

$$\text{دب) } b_n = \frac{2n}{n^2+1}$$

دنباله کراندار است زیرا $0 < a_n \leq 1$

تمام جملات دنباله مثبت اند. دنباله نزولی است. و همگرا به صفر است.

$$\text{ج) } c_n = 4 + \frac{(-1)^n}{n}$$

$$3, \frac{9}{2}, \frac{11}{3}, \frac{14}{4}, \dots$$

دنباله غیر کراندار است، ولی کراندار است زیرا

$$3 \leq a_n \leq \frac{9}{2}$$

تمام جملات دنباله مثبت اند زیرا $3 \leq a_n \leq \frac{9}{2}$ ، $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 4$ همگرا به ۴ است

$$\text{د) } d_n = \sin \frac{1}{n}$$

دنباله کراندار است زیرا $-1 \leq \sin \frac{1}{n} \leq 1$



جملات دنباله همگی مثبت اند زیرا $0 < \frac{1}{n} \leq 1$ پس $\sin \frac{1}{n} > 0$

دنباله نزولی است زیرا $\left\{ \frac{1}{n} \right\}$ نزولی و \sin در ناحیه اول صعودی است و ترکیب آن نزولی است.

دنباله همگرا به صفر است. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{n} = 0$

$$\text{ه) } a_n = \frac{n^2-1}{n}$$

دنباله بی کران است زیرا جملات آن به $+\infty$ و $-\infty$ میل می کند.

جمله اول دنباله صفر است و سایر جملات مثبت است.

ASEM4N

دنباله صعودی است زیرا n و $\frac{1}{n}$ هر دو صعودی اند پس جمع آن ها صعودی است.

حل تمرین در کلاس ص ۴۹

$$\text{الف) } a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{rn}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right)^r = e^r \quad (1)$$

$$\text{ب) } b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{rn} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right)^r = e^r$$

$$\text{ج) } c_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{r}} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right)^{\frac{1}{r}} = e^{\frac{1}{r}} = \sqrt[r]{e}$$

$$e \approx 2,718281828 \quad (2)$$

$$\left(1 + \frac{1}{10}\right)^{100} \approx 2,704813829 \quad (3)$$

حل سؤالات ص ۵۲

$$a_n = \frac{5n^2}{n^2+1}$$

(1)

$$a_n = \frac{5n^2+5-5}{n^2+1} = 5 - \frac{5}{n^2+1}$$

با افزایش n ، دنباله به ۵ همگرا می شود و بنا بر این دنباله a_n به عدد ۵ نزدیک می شود.

دنباله کراندار است زیرا $\frac{5}{2} \leq a_n \leq 5$

ASEM4N

Subject: _____
 Year. _____ Month. _____ Date. _____

همه جملات دنباله \oplus است.

$$\frac{1}{p} < \cos \frac{(-1)^n}{n} \Rightarrow \frac{1}{p} n < n \cos \frac{(-1)^n}{n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} n \cos \frac{(-1)^n}{n} = \infty$$

یعنی وگرنه است. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = +\infty \quad \forall k > 0, \exists M \in \mathbb{N} \rightarrow \forall n \geq M \Rightarrow \sqrt{n} > k$

کافی است $M \geq [k^2] + 1$ اختیار شود. $\sqrt{n} > k \Leftrightarrow n > k^2$ (۱۰)

فرض کنید $a_n = \sqrt{n}$ و $b_n = \sqrt{n+1}$ پس داریم $b_n = a_{n+1}$ طبق

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = +\infty$$

$$\text{الف) } a_n = \frac{n^2-1}{n} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n - \frac{1}{n}\right) = \infty - 0 = \infty \quad (11)$$

$$\text{ب) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n (n+1)}{n} = \text{وجود ندارد} \Rightarrow \text{وگرنه است و} \Rightarrow \text{وجود ندارد}$$

جملات زوج به 1 همگرا است و جملات فرد به -1 همگرا است.

$$\text{ج) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n+1}} = +\infty \Rightarrow \text{وگرنه به } +\infty \text{ است}$$

$$100 a_n = 402 + a_n \Rightarrow a_n = \frac{402}{99} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{402}{99} \quad (12)$$

$$\text{فکری کنیم!} \Rightarrow \text{دنباله به صورت } 100 a_n = 402 + a_n \Rightarrow a_n = \frac{402}{99}$$

ASEM4N

Subject: _____
 Year. _____ Month. _____ Date. _____

دنباله به $+\infty$ وگرنه است.

$$\text{و) } b_n = \frac{\sin n}{n}$$

جملات دنباله کراندار است زیرا

$$-1 \leq \sin n \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{\sin n}{n} \rightarrow 0$$

پس جمله اول \oplus و سه جمله بعدی منفی است.

واقع است که با این روند \oplus و \ominus دنباله غیر یکپوشا است.

دنباله به صفر همگرا است.

$$\text{ز) } \left\{ n \cos \frac{n\pi}{2} \right\}$$

۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۶، ۱۷، ۱۸، ۱۹، ۲۰، ۲۱، ۲۲، ۲۳، ۲۴، ۲۵، ۲۶، ۲۷، ۲۸، ۲۹، ۳۰، ۳۱، ۳۲، ۳۳، ۳۴، ۳۵، ۳۶، ۳۷، ۳۸، ۳۹، ۴۰، ۴۱، ۴۲، ۴۳، ۴۴، ۴۵، ۴۶، ۴۷، ۴۸، ۴۹، ۵۰، ۵۱، ۵۲، ۵۳، ۵۴، ۵۵، ۵۶، ۵۷، ۵۸، ۵۹، ۶۰، ۶۱، ۶۲، ۶۳، ۶۴، ۶۵، ۶۶، ۶۷، ۶۸، ۶۹، ۷۰، ۷۱، ۷۲، ۷۳، ۷۴، ۷۵، ۷۶، ۷۷، ۷۸، ۷۹، ۸۰، ۸۱، ۸۲، ۸۳، ۸۴، ۸۵، ۸۶، ۸۷، ۸۸، ۸۹، ۹۰، ۹۱، ۹۲، ۹۳، ۹۴، ۹۵، ۹۶، ۹۷، ۹۸، ۹۹، ۱۰۰، ۱۰۱، ۱۰۲، ۱۰۳، ۱۰۴، ۱۰۵، ۱۰۶، ۱۰۷، ۱۰۸، ۱۰۹، ۱۱۰، ۱۱۱، ۱۱۲، ۱۱۳، ۱۱۴، ۱۱۵، ۱۱۶، ۱۱۷، ۱۱۸، ۱۱۹، ۱۲۰، ۱۲۱، ۱۲۲، ۱۲۳، ۱۲۴، ۱۲۵، ۱۲۶، ۱۲۷، ۱۲۸، ۱۲۹، ۱۳۰، ۱۳۱، ۱۳۲، ۱۳۳، ۱۳۴، ۱۳۵، ۱۳۶، ۱۳۷، ۱۳۸، ۱۳۹، ۱۴۰، ۱۴۱، ۱۴۲، ۱۴۳، ۱۴۴، ۱۴۵، ۱۴۶، ۱۴۷، ۱۴۸، ۱۴۹، ۱۵۰، ۱۵۱، ۱۵۲، ۱۵۳، ۱۵۴، ۱۵۵، ۱۵۶، ۱۵۷، ۱۵۸، ۱۵۹، ۱۶۰، ۱۶۱، ۱۶۲، ۱۶۳، ۱۶۴، ۱۶۵، ۱۶۶، ۱۶۷، ۱۶۸، ۱۶۹، ۱۷۰، ۱۷۱، ۱۷۲، ۱۷۳، ۱۷۴، ۱۷۵، ۱۷۶، ۱۷۷، ۱۷۸، ۱۷۹، ۱۸۰، ۱۸۱، ۱۸۲، ۱۸۳، ۱۸۴، ۱۸۵، ۱۸۶، ۱۸۷، ۱۸۸، ۱۸۹، ۱۹۰، ۱۹۱، ۱۹۲، ۱۹۳، ۱۹۴، ۱۹۵، ۱۹۶، ۱۹۷، ۱۹۸، ۱۹۹، ۲۰۰، ۲۰۱، ۲۰۲، ۲۰۳، ۲۰۴، ۲۰۵، ۲۰۶، ۲۰۷، ۲۰۸، ۲۰۹، ۲۱۰، ۲۱۱، ۲۱۲، ۲۱۳، ۲۱۴، ۲۱۵، ۲۱۶، ۲۱۷، ۲۱۸، ۲۱۹، ۲۲۰، ۲۲۱، ۲۲۲، ۲۲۳، ۲۲۴، ۲۲۵، ۲۲۶، ۲۲۷، ۲۲۸، ۲۲۹، ۲۳۰، ۲۳۱، ۲۳۲، ۲۳۳، ۲۳۴، ۲۳۵، ۲۳۶، ۲۳۷، ۲۳۸، ۲۳۹، ۲۴۰، ۲۴۱، ۲۴۲، ۲۴۳، ۲۴۴، ۲۴۵، ۲۴۶، ۲۴۷، ۲۴۸، ۲۴۹، ۲۵۰، ۲۵۱، ۲۵۲، ۲۵۳، ۲۵۴، ۲۵۵، ۲۵۶، ۲۵۷، ۲۵۸، ۲۵۹، ۲۶۰، ۲۶۱، ۲۶۲، ۲۶۳، ۲۶۴، ۲۶۵، ۲۶۶، ۲۶۷، ۲۶۸، ۲۶۹، ۲۷۰، ۲۷۱، ۲۷۲، ۲۷۳، ۲۷۴، ۲۷۵، ۲۷۶، ۲۷۷، ۲۷۸، ۲۷۹، ۲۸۰، ۲۸۱، ۲۸۲، ۲۸۳، ۲۸۴، ۲۸۵، ۲۸۶، ۲۸۷، ۲۸۸، ۲۸۹، ۲۹۰، ۲۹۱، ۲۹۲، ۲۹۳، ۲۹۴، ۲۹۵، ۲۹۶، ۲۹۷، ۲۹۸، ۲۹۹، ۳۰۰، ۳۰۱، ۳۰۲، ۳۰۳، ۳۰۴، ۳۰۵، ۳۰۶، ۳۰۷، ۳۰۸، ۳۰۹، ۳۱۰، ۳۱۱، ۳۱۲، ۳۱۳، ۳۱۴، ۳۱۵، ۳۱۶، ۳۱۷، ۳۱۸، ۳۱۹، ۳۲۰، ۳۲۱، ۳۲۲، ۳۲۳، ۳۲۴، ۳۲۵، ۳۲۶، ۳۲۷، ۳۲۸، ۳۲۹، ۳۳۰، ۳۳۱، ۳۳۲، ۳۳۳، ۳۳۴، ۳۳۵، ۳۳۶، ۳۳۷، ۳۳۸، ۳۳۹، ۳۴۰، ۳۴۱، ۳۴۲، ۳۴۳، ۳۴۴، ۳۴۵، ۳۴۶، ۳۴۷، ۳۴۸، ۳۴۹، ۳۵۰، ۳۵۱، ۳۵۲، ۳۵۳، ۳۵۴، ۳۵۵، ۳۵۶، ۳۵۷، ۳۵۸، ۳۵۹، ۳۶۰، ۳۶۱، ۳۶۲، ۳۶۳، ۳۶۴، ۳۶۵، ۳۶۶، ۳۶۷، ۳۶۸، ۳۶۹، ۳۷۰، ۳۷۱، ۳۷۲، ۳۷۳، ۳۷۴، ۳۷۵، ۳۷۶، ۳۷۷، ۳۷۸، ۳۷۹، ۳۸۰، ۳۸۱، ۳۸۲، ۳۸۳، ۳۸۴، ۳۸۵، ۳۸۶، ۳۸۷، ۳۸۸، ۳۸۹، ۳۹۰، ۳۹۱، ۳۹۲، ۳۹۳، ۳۹۴، ۳۹۵، ۳۹۶، ۳۹۷، ۳۹۸، ۳۹۹، ۴۰۰، ۴۰۱، ۴۰۲، ۴۰۳، ۴۰۴، ۴۰۵، ۴۰۶، ۴۰۷، ۴۰۸، ۴۰۹، ۴۱۰، ۴۱۱، ۴۱۲، ۴۱۳، ۴۱۴، ۴۱۵، ۴۱۶، ۴۱۷، ۴۱۸، ۴۱۹، ۴۲۰، ۴۲۱، ۴۲۲، ۴۲۳، ۴۲۴، ۴۲۵، ۴۲۶، ۴۲۷، ۴۲۸، ۴۲۹، ۴۳۰، ۴۳۱، ۴۳۲، ۴۳۳، ۴۳۴، ۴۳۵، ۴۳۶، ۴۳۷، ۴۳۸، ۴۳۹، ۴۴۰، ۴۴۱، ۴۴۲، ۴۴۳، ۴۴۴، ۴۴۵، ۴۴۶، ۴۴۷، ۴۴۸، ۴۴۹، ۴۵۰، ۴۵۱، ۴۵۲، ۴۵۳، ۴۵۴، ۴۵۵، ۴۵۶، ۴۵۷، ۴۵۸، ۴۵۹، ۴۶۰، ۴۶۱، ۴۶۲، ۴۶۳، ۴۶۴، ۴۶۵، ۴۶۶، ۴۶۷، ۴۶۸، ۴۶۹، ۴۷۰، ۴۷۱، ۴۷۲، ۴۷۳، ۴۷۴، ۴۷۵، ۴۷۶، ۴۷۷، ۴۷۸، ۴۷۹، ۴۸۰، ۴۸۱، ۴۸۲، ۴۸۳، ۴۸۴، ۴۸۵، ۴۸۶، ۴۸۷، ۴۸۸، ۴۸۹، ۴۹۰، ۴۹۱، ۴۹۲، ۴۹۳، ۴۹۴، ۴۹۵، ۴۹۶، ۴۹۷، ۴۹۸، ۴۹۹، ۵۰۰، ۵۰۱، ۵۰۲، ۵۰۳، ۵۰۴، ۵۰۵، ۵۰۶، ۵۰۷، ۵۰۸، ۵۰۹، ۵۱۰، ۵۱۱، ۵۱۲، ۵۱۳، ۵۱۴، ۵۱۵، ۵۱۶، ۵۱۷، ۵۱۸، ۵۱۹، ۵۲۰، ۵۲۱، ۵۲۲، ۵۲۳، ۵۲۴، ۵۲۵، ۵۲۶، ۵۲۷، ۵۲۸، ۵۲۹، ۵۳۰، ۵۳۱، ۵۳۲، ۵۳۳، ۵۳۴، ۵۳۵، ۵۳۶، ۵۳۷، ۵۳۸، ۵۳۹، ۵۴۰، ۵۴۱، ۵۴۲، ۵۴۳، ۵۴۴، ۵۴۵، ۵۴۶، ۵۴۷، ۵۴۸، ۵۴۹، ۵۵۰، ۵۵۱، ۵۵۲، ۵۵۳، ۵۵۴، ۵۵۵، ۵۵۶، ۵۵۷، ۵۵۸، ۵۵۹، ۵۶۰، ۵۶۱، ۵۶۲، ۵۶۳، ۵۶۴، ۵۶۵، ۵۶۶، ۵۶۷، ۵۶۸، ۵۶۹، ۵۷۰، ۵۷۱، ۵۷۲، ۵۷۳، ۵۷۴، ۵۷۵، ۵۷۶، ۵۷۷، ۵۷۸، ۵۷۹، ۵۸۰، ۵۸۱، ۵۸۲، ۵۸۳، ۵۸۴، ۵۸۵، ۵۸۶، ۵۸۷، ۵۸۸، ۵۸۹، ۵۹۰، ۵۹۱، ۵۹۲، ۵۹۳، ۵۹۴، ۵۹۵، ۵۹۶، ۵۹۷، ۵۹۸، ۵۹۹، ۶۰۰، ۶۰۱، ۶۰۲، ۶۰۳، ۶۰۴، ۶۰۵، ۶۰۶، ۶۰۷، ۶۰۸، ۶۰۹، ۶۱۰، ۶۱۱، ۶۱۲، ۶۱۳، ۶۱۴، ۶۱۵، ۶۱۶، ۶۱۷، ۶۱۸، ۶۱۹، ۶۲۰، ۶۲۱، ۶۲۲، ۶۲۳، ۶۲۴، ۶۲۵، ۶۲۶، ۶۲۷، ۶۲۸، ۶۲۹، ۶۳۰، ۶۳۱، ۶۳۲، ۶۳۳، ۶۳۴، ۶۳۵، ۶۳۶، ۶۳۷، ۶۳۸، ۶۳۹، ۶۴۰، ۶۴۱، ۶۴۲، ۶۴۳، ۶۴۴، ۶۴۵، ۶۴۶، ۶۴۷، ۶۴۸، ۶۴۹، ۶۵۰، ۶۵۱، ۶۵۲، ۶۵۳، ۶۵۴، ۶۵۵، ۶۵۶، ۶۵۷، ۶۵۸، ۶۵۹، ۶۶۰، ۶۶۱، ۶۶۲، ۶۶۳، ۶۶۴، ۶۶۵، ۶۶۶، ۶۶۷، ۶۶۸، ۶۶۹، ۶۷۰، ۶۷۱، ۶۷۲، ۶۷۳، ۶۷۴، ۶۷۵، ۶۷۶، ۶۷۷، ۶۷۸، ۶۷۹، ۶۸۰، ۶۸۱، ۶۸۲، ۶۸۳، ۶۸۴، ۶۸۵، ۶۸۶، ۶۸۷، ۶۸۸، ۶۸۹، ۶۹۰، ۶۹۱، ۶۹۲، ۶۹۳، ۶۹۴، ۶۹۵، ۶۹۶، ۶۹۷، ۶۹۸، ۶۹۹، ۷۰۰، ۷۰۱، ۷۰۲، ۷۰۳، ۷۰۴، ۷۰۵، ۷۰۶، ۷۰۷، ۷۰۸، ۷۰۹، ۷۱۰، ۷۱۱، ۷۱۲، ۷۱۳، ۷۱۴، ۷۱۵، ۷۱۶، ۷۱۷، ۷۱۸، ۷۱۹، ۷۲۰، ۷۲۱، ۷۲۲، ۷۲۳، ۷۲۴، ۷۲۵، ۷۲۶، ۷۲۷، ۷۲۸، ۷۲۹، ۷۳۰، ۷۳۱، ۷۳۲، ۷۳۳، ۷۳۴، ۷۳۵، ۷۳۶، ۷۳۷، ۷۳۸، ۷۳۹، ۷۴۰، ۷۴۱، ۷۴۲، ۷۴۳، ۷۴۴، ۷۴۵، ۷۴۶، ۷۴۷، ۷۴۸، ۷۴۹، ۷۵۰، ۷۵۱، ۷۵۲، ۷۵۳، ۷۵۴، ۷۵۵، ۷۵۶، ۷۵۷، ۷۵۸، ۷۵۹، ۷۶۰، ۷۶۱، ۷۶۲، ۷۶۳، ۷۶۴، ۷۶۵، ۷۶۶، ۷۶۷، ۷۶۸، ۷۶۹، ۷۷۰، ۷۷۱، ۷۷۲، ۷۷۳، ۷۷۴، ۷۷۵، ۷۷۶، ۷۷۷، ۷۷۸، ۷۷۹، ۷۸۰، ۷۸۱، ۷۸۲، ۷۸۳، ۷۸۴، ۷۸۵، ۷۸۶، ۷۸۷، ۷۸۸، ۷۸۹، ۷۹۰، ۷۹۱، ۷۹۲، ۷۹۳، ۷۹۴، ۷۹۵، ۷۹۶، ۷۹۷، ۷۹۸، ۷۹۹، ۸۰۰، ۸۰۱، ۸۰۲، ۸۰۳، ۸۰۴، ۸۰۵، ۸۰۶، ۸۰۷، ۸۰۸، ۸۰۹، ۸۱۰، ۸۱۱، ۸۱۲، ۸۱۳، ۸۱۴، ۸۱۵، ۸۱۶، ۸۱۷، ۸۱۸، ۸۱۹، ۸۲۰، ۸۲۱، ۸۲۲، ۸۲۳، ۸۲۴، ۸۲۵، ۸۲۶، ۸۲۷، ۸۲۸، ۸۲۹، ۸۳۰، ۸۳۱، ۸۳۲، ۸۳۳، ۸۳۴، ۸۳۵، ۸۳۶، ۸۳۷، ۸۳۸، ۸۳۹، ۸۴۰، ۸۴۱، ۸۴۲، ۸۴۳، ۸۴۴، ۸۴۵، ۸۴۶، ۸۴۷، ۸۴۸، ۸۴۹، ۸۵۰، ۸۵۱، ۸۵۲، ۸۵۳، ۸۵۴، ۸۵۵، ۸۵۶، ۸۵۷، ۸۵۸، ۸۵۹، ۸۶۰، ۸۶۱، ۸۶۲، ۸۶۳، ۸۶۴، ۸۶۵، ۸۶۶، ۸۶۷، ۸۶۸، ۸۶۹، ۸۷۰، ۸۷۱، ۸۷۲، ۸۷۳، ۸۷۴، ۸۷۵، ۸۷۶، ۸۷۷، ۸۷۸، ۸۷۹، ۸۸۰، ۸۸۱، ۸۸۲، ۸۸۳، ۸۸۴، ۸۸۵، ۸۸۶، ۸۸۷، ۸۸۸، ۸۸۹، ۸۹۰، ۸۹۱، ۸۹۲، ۸۹۳، ۸۹۴، ۸۹۵، ۸۹۶، ۸۹۷، ۸۹۸، ۸۹۹، ۹۰۰، ۹۰۱، ۹۰۲، ۹۰۳، ۹۰۴، ۹۰۵، ۹۰۶، ۹۰۷، ۹۰۸، ۹۰۹، ۹۱۰، ۹۱۱، ۹۱۲، ۹۱۳، ۹۱۴، ۹۱۵، ۹۱۶، ۹۱۷، ۹۱۸، ۹۱۹، ۹۲۰، ۹۲۱، ۹۲۲، ۹۲۳، ۹۲۴، ۹۲۵، ۹۲۶، ۹۲۷، ۹۲۸، ۹۲۹، ۹۳۰، ۹۳۱، ۹۳۲، ۹۳۳، ۹۳۴، ۹۳۵، ۹۳۶، ۹۳۷، ۹۳۸، ۹۳۹، ۹۴۰، ۹۴۱، ۹۴۲، ۹۴۳، ۹۴۴، ۹۴۵، ۹۴۶، ۹۴۷، ۹۴۸، ۹۴۹، ۹۵۰، ۹۵۱، ۹۵۲، ۹۵۳، ۹۵۴، ۹۵۵، ۹۵۶، ۹۵۷، ۹۵۸، ۹۵۹، ۹۶۰، ۹۶۱، ۹۶۲، ۹۶۳، ۹۶۴، ۹۶۵، ۹۶۶، ۹۶۷، ۹۶۸، ۹۶۹، ۹۷۰، ۹۷۱، ۹۷۲، ۹۷۳، ۹۷۴، ۹۷۵، ۹۷۶، ۹۷۷، ۹۷۸، ۹۷۹، ۹۸۰، ۹۸۱، ۹۸۲، ۹۸۳، ۹۸۴، ۹۸۵، ۹۸۶، ۹۸۷، ۹۸۸، ۹۸۹، ۹۹۰، ۹۹۱، ۹۹۲، ۹۹۳، ۹۹۴، ۹۹۵، ۹۹۶، ۹۹۷، ۹۹۸، ۹۹۹، ۱۰۰۰، ۱۰۰۱، ۱۰۰۲، ۱۰۰۳، ۱۰۰۴، ۱۰۰۵، ۱۰۰۶، ۱۰۰۷، ۱۰۰۸، ۱۰۰۹، ۱۰۱۰، ۱۰۱۱، ۱۰۱۲، ۱۰۱۳، ۱۰۱۴، ۱۰۱۵، ۱۰۱۶، ۱۰۱۷، ۱۰۱۸، ۱۰۱۹، ۱۰۲۰، ۱۰۲۱، ۱۰۲۲، ۱۰۲۳، ۱۰۲۴، ۱۰۲۵، ۱۰۲۶، ۱۰۲۷، ۱۰۲۸، ۱۰۲۹، ۱۰۳۰، ۱۰۳۱، ۱۰۳۲، ۱۰۳۳، ۱۰۳۴، ۱۰۳۵، ۱۰۳۶، ۱۰۳۷، ۱۰۳۸، ۱۰۳۹، ۱۰۴۰، ۱۰۴۱، ۱۰۴۲، ۱۰۴۳، ۱۰۴۴، ۱۰۴۵، ۱۰۴۶، ۱۰۴۷، ۱۰۴۸، ۱۰۴۹، ۱۰۵۰، ۱۰۵۱، ۱۰۵۲، ۱۰۵۳، ۱۰۵۴، ۱۰۵۵، ۱۰۵۶، ۱۰۵۷، ۱۰۵۸، ۱۰۵۹، ۱۰۶۰، ۱۰۶۱، ۱۰۶۲، ۱۰۶۳، ۱۰۶۴، ۱۰۶۵، ۱۰۶۶، ۱۰۶۷، ۱۰۶۸، ۱۰۶۹، ۱۰۷۰، ۱۰۷۱، ۱۰۷۲، ۱۰۷۳، ۱۰۷۴، ۱۰۷۵، ۱۰۷۶، ۱۰۷۷، ۱۰۷۸، ۱۰۷۹، ۱۰۸۰، ۱۰۸۱، ۱۰۸۲، ۱۰۸۳، ۱۰۸۴، ۱۰۸۵، ۱۰۸۶، ۱۰۸۷، ۱۰۸۸، ۱۰۸۹، ۱۰۹۰، ۱۰۹۱، ۱۰۹۲، ۱۰۹۳، ۱۰۹۴، ۱۰۹۵، ۱۰۹۶، ۱۰۹۷، ۱۰۹۸، ۱۰۹۹، ۱۱۰۰، ۱۱۰۱، ۱۱۰۲، ۱۱۰۳، ۱۱۰۴، ۱۱۰۵، ۱۱۰۶، ۱۱۰۷، ۱۱۰۸، ۱۱۰۹، ۱۱۱۰، ۱۱۱۱، ۱۱۱۲، ۱۱۱۳، ۱۱۱۴، ۱۱۱۵، ۱۱۱۶، ۱۱۱۷، ۱۱۱۸، ۱۱۱۹، ۱۱۲۰، ۱۱۲۱، ۱۱۲۲، ۱۱۲۳، ۱۱۲۴، ۱۱۲۵، ۱۱۲۶، ۱۱۲۷، ۱۱۲۸، ۱۱۲۹، ۱۱۳۰، ۱۱۳۱، ۱۱۳۲، ۱۱۳۳، ۱۱۳۴، ۱۱۳۵، ۱۱۳۶، ۱۱۳۷، ۱۱۳۸، ۱۱۳۹، ۱۱۴۰، ۱۱۴۱، ۱۱۴۲، ۱۱۴۳، ۱۱۴۴، ۱۱۴۵، ۱۱۴۶، ۱۱۴۷، ۱۱۴۸، ۱۱۴۹، ۱۱۵۰، ۱۱۵۱، ۱۱۵۲، ۱۱۵۳، ۱۱۵۴، ۱۱۵۵، ۱۱۵۶، ۱۱۵۷، ۱۱۵۸، ۱۱۵۹، ۱۱۶۰، ۱۱۶۱، ۱۱۶۲، ۱۱۶۳، ۱۱۶۴، ۱۱۶۵، ۱۱۶۶، ۱۱۶۷، ۱۱۶۸، ۱۱۶۹، ۱۱۷۰، ۱۱۷۱، ۱۱۷۲، ۱۱۷۳، ۱۱۷۴، ۱۱۷۵، ۱۱۷۶، ۱۱۷۷، ۱۱۷۸، ۱۱۷۹، ۱۱۸۰، ۱۱۸۱، ۱۱۸۲، ۱۱۸۳، ۱۱۸۴، ۱۱۸۵، ۱۱۸۶، ۱۱۸۷، ۱۱۸۸، ۱۱۸۹، ۱۱۹۰، ۱۱۹۱، ۱۱۹۲، ۱۱۹۳، ۱۱۹۴، ۱۱۹۵، ۱۱۹۶، ۱۱۹۷، ۱۱۹۸، ۱۱۹۹، ۱۲۰۰، ۱۲۰۱، ۱۲۰۲، ۱۲۰۳، ۱۲۰۴، ۱۲۰۵، ۱۲۰۶، ۱۲۰۷، ۱۲۰۸، ۱۲۰۹، ۱۲۱۰، ۱۲۱۱، ۱۲۱۲، ۱۲۱۳، ۱۲۱۴، ۱۲۱۵، ۱۲۱۶، ۱۲۱۷، ۱۲۱۸، ۱۲۱۹، ۱۲۲۰، ۱۲۲۱، ۱۲۲۲، ۱۲۲۳، ۱۲۲۴، ۱۲۲۵، ۱۲۲۶، ۱۲۲۷، ۱۲۲۸، ۱۲۲۹، ۱۲۳۰، ۱۲۳۱، ۱۲۳۲، ۱۲۳۳، ۱۲۳۴، ۱۲۳۵، ۱۲۳۶، ۱۲۳۷، ۱۲۳۸، ۱۲۳۹، ۱۲۴۰، ۱۲۴۱، ۱۲۴۲، ۱۲۴۳، ۱۲۴۴، ۱۲۴۵، ۱۲۴۶، ۱۲۴۷، ۱۲۴۸، ۱۲۴۹، ۱۲۵۰، ۱۲۵۱، ۱۲۵۲، ۱۲۵۳، ۱۲۵۴، ۱۲۵۵، ۱۲۵۶، ۱۲۵۷، ۱۲۵۸، ۱۲۵۹، ۱۲۶۰، ۱۲۶۱، ۱۲۶۲، ۱۲۶۳، ۱۲۶۴، ۱۲۶۵، ۱۲۶۶، ۱۲۶۷،

Subject :

Year. Month. Date. ()

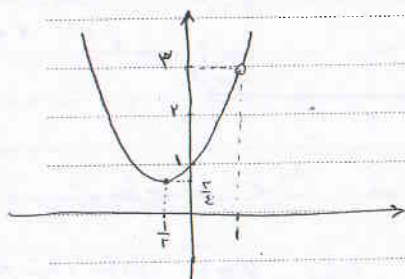
حل تقریبی در کلاس ص ۵۷

$$a_n = 1 - \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} : 0, 9, 99, 999, 9999 \quad (1)$$

$$b_n = 1 + \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} : 2, 1.1, 1.01, 1.001, 1.0001$$

$$f(x) = x^2 + x + 1 \quad (x \neq -1) \quad (2)$$

x	0	99	999	9999	99999	1,000	1,001	1,001	1,001	2
f(x)	1	2,971	2,997.01	2,9997.0001	2,99997.000001	3,000.000001	3,003.000001	3,006.000001	3,009.000001	3,017

با توجه به نمودار مقادیر $f(x)$ در ۳ عدد نزدیک می شود.

$$y = \frac{e^x}{x-1} = x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \frac{3}{x}$$

با توجه به نمودار مقادیر $f(x)$ در ۳ عدد نزدیک می شود.

حل تقریبی در کلاس ص ۶۰

$$a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1.2^n} : 0.5, 0.25, 0.125, 0.0625, 0.03125$$

$$b_n = -\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{-1}{1.2^n} : -0.5, -0.25, -0.125, -0.0625, -0.03125$$

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}-1} = \sqrt{x+1} + 1$$

x	-1	-0.1	-0.01	-0.001	0	0.001	0.01	0.1	1
f(x)	0.5	0.948683298	0.994987437	0.999500025	1	1.000499975	1.005012563	1.019803903	1.414213562

Subject :

Year. Month. Date. ()

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l \quad \text{و جابجایی} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$$

$$100.1 = 99.9 + l \Rightarrow l = \frac{99.9}{99}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = l \quad \text{در این صورت (طبق تمرین ۲ ص ۶۰)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$$

$$l = \frac{bl}{a+l} \Rightarrow al + l^2 = bl \Rightarrow l^2 + (a-b)l = 0 \Rightarrow \begin{cases} l=0 \\ l=b-a \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{r_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^r = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^r = e^r \quad (13)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{r}} = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^{\frac{1}{r}} = e^{\frac{1}{r}} = \sqrt[r]{e}$$