حل المسائل فصول صفر و اول

درس حساب دیفرانســیل و انتگرال

دورهٔ پیش دانشگاهی - رشتهٔ علوم ریاضی

به کوشش استاد پرویز رضایی

مدرس دوره ضمن خدمت دروس ریاضی۱، ریاضی۲، حسابان و حساب دیفرانسیل و انتگرال (در استان فارس)

فصل های صفر و یک

Subject:

Year. Month. Date. ( )

حل تمرین در کلاس ص ۵

(۱) می دانیم برای هر عدد حقیقی و دلخواه مانند x داریم $(-x) + x = 0$

از طرفی $(-x)$ نیز یک عدد حقیقی است پس داریم $(-x) + (-(-x)) = 0$

بنابراین دو عدد x و $-(-x)$ هر دو قرینه $(-x)$ هستند در نتیجه $x = -(-x)$ زیرا

هر عدد فقط یک عضو قرینه دارد.

(۲)

$$x = x + 0 = x + (y + (-y)) = (x+y) + (-y) = (y+z) + (-y)$$

(عضو خنثی) عضو قرینه، شرکت پذیری، فرض مسئله

$$= (z + y) + (-y) = z + (y + (-y)) = z + 0 = z \Rightarrow x = z$$

خاصیت جابجایی، خاصیت شرکت پذیری، قرینه، عضو خنثی

حل تمرین در کلاس ص ۷

(۱)

$$xy = x(y - z + z) = x(y-z) + xz \quad (*)$$

$$xy - xz = (x(y-z) + xz) - xz = x(y-z) + (xz + (-xz))$$

رابطه (*)، شرکت پذیری

$$= x(y-z) + 0 = x(y-z)$$

قرینه، خنثی

(۲) فرض کنید $xy = 0$ و $x \neq 0$ ثابت می کنیم $y = 0$.

$$y = 1y = (x^{-1}x)y = x^{-1}(xy) = x^{-1}(0) = 0$$

عکس: فرض کنیم $a = 0$،

روش اول

$$ab = 0b = 0b + 0 = 0b + (b + (-b)) = (0b + 1b) + (-b) = (0+1)b + (-b) = b + (-b) = 0$$

روش دوم

یا اینکه

$$0b = (0+0)b = 0b + 0b \xrightarrow{\text{عضو خنثی، متعمم جمع}} 0b = 0$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

(۳) الف)

$x(y-y)=0 \Rightarrow xy+x(-y)=0 \Rightarrow x(-y)=-(xy)$ (*)

$(x-x)y=0 \Rightarrow xy+(-x)y=0 \Rightarrow (-x)(y)=-(xy)$ (**)

(*) , (**) $\Rightarrow x(-y)=-(xy)=(-x)y$

ب) $(-x)(-y)=-(x(-y))=-(-(xy))=xy$

حل تمرین در کلاس صفحه ۱۶

نامساوی مثلثی برای سه عدد a_1 و a_2 و a_3 به صورت زیر است

$$|a_1+a_2+a_3| \le |a_1|+|a_2|+|a_3|$$

اثبات: $|a_1+a_2+a_3| = |a_1+(a_2+a_3)| \le |a_1|+|a_2+a_3| \le |a_1|+|a_2|+|a_3|$

در حالت کلی، نامساوی مثلثی به صورت زیر است:

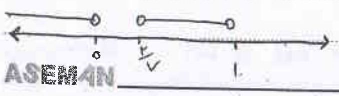
$$|a_1+a_2+\dots+a_n| \le |a_1|+|a_2|+\dots+|a_n|$$

حل مسائل صفحه ۱۶

(۱) $\frac{5}{x-1} < \frac{-2}{x} \Rightarrow \frac{5}{x-1}+\frac{2}{x}<0 \Rightarrow \frac{5x+2x-2}{x(x-1)}<0$

$\Rightarrow \frac{7x-2}{x(x-1)}<0$

x	$-\infty$	0		$\frac{2}{7}$		1	$+\infty$
$7x-2$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
x^2-x	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
	$-$	ت.ن	$+$	0	$-$	ت.ن	$+$



ج.م = $(-\infty,0)\cup(\frac{2}{7},1)$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

(۲)

الف) $3x+5\le 8 \Rightarrow 3x\le 3 \Rightarrow x\le 1$

ج.م = $(-\infty,1]$

ب) $5x-3\le 7-3x \Rightarrow 8x\le 10 \Rightarrow x\le \frac{5}{4}$

ج.م = $(-\infty,\frac{5}{4}]$

ج) $x^2<9 \Rightarrow |x|<3 \Rightarrow -3<x<3$ ج.م = $(-3,3)$

د) $\frac{1}{2-x}<3 \Rightarrow \frac{1}{2-x}-3<0 \Rightarrow \frac{1-6+3x}{2-x}<0 \Rightarrow \frac{3x-5}{2-x}<0$

x	$-\infty$	$\frac{5}{3}$		2	$+\infty$
$3x-5$	$-$	0	$+$		$+$
$2-x$	$+$		$+$	0	$-$
P	$-$	0	$+$	ت.ن	$-$

ج.م = $(-\infty,\frac{5}{3})\cup(2,+\infty)$

(۳)

الف) $|x-2|\le 2 \Rightarrow -2\le x-2\le 2 \Rightarrow 0\le x\le 4$

ج.م = $[0,4]$

ب) $|2x+5|<1 \Rightarrow -1<2x+5<1 \Rightarrow -6<2x<-4 \Rightarrow -3<x<-2$

ج.م = $(-3,-2)$

ج) $|2-\frac{x}{2}|<\frac{1}{2} \Rightarrow |\frac{x}{2}-2|<\frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2}<\frac{x}{2}-2<\frac{1}{2} \Rightarrow$

$\frac{3}{2}<\frac{x}{2}<\frac{5}{2} \Rightarrow 3<x<5$ ج.م = $(3,5)$

Subject :
Year. Month. Date. ( )

ت) $|3x-7|<2 \Rightarrow -2<3x-7<2 \Rightarrow 5<3x<9 \Rightarrow$

$\frac{5}{3}<x<3 \qquad$ ج.م $=\left(\frac{5}{3},3\right)$

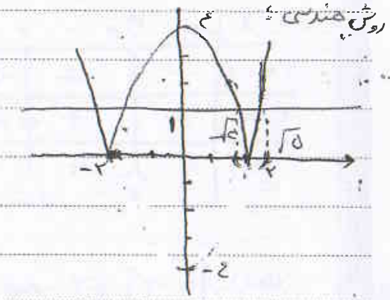
۴) $|x^2-4|<1 \Rightarrow -1<x^2-4<1 \Rightarrow 3<x^2<5 \Rightarrow$

$\sqrt{3}<|x|<\sqrt{5} \Rightarrow \sqrt{3}<x<\sqrt{5}$ یا $-\sqrt{5}<x<-\sqrt{3}$

جواب نهایی مسأله $=\left((\sqrt{3},\sqrt{5})\cup(-\sqrt{5},-\sqrt{3})\right)\cap\left(\frac{19}{10},\frac{21}{10}\right)=\left(\frac{19}{10},\frac{21}{10}\right)$

روش هندسی :

$(\sqrt{3},\sqrt{5})\cap(1/9,2/1)=(1/9,2/1)$



۵) $|x^2-9|<\frac{1}{1000} \Rightarrow \frac{-1}{1000}<x^2-9<\frac{1}{1000} \Rightarrow 9-\frac{1}{1000}<x^2<9+\frac{1}{1000}$

$\Rightarrow \frac{8999}{1000}<x^2<\frac{9001}{1000} \Rightarrow \sqrt{\frac{8999}{1000}}<|x|<\sqrt{\frac{9001}{1000}} \Rightarrow$

$\sqrt{\frac{8999}{1000}}<x<\sqrt{\frac{9001}{1000}}$ یا $-\sqrt{\frac{9001}{1000}}<x<-\sqrt{\frac{8999}{1000}}$

جواب نهایی مسأله $=\left((\sqrt{8/999},\sqrt{9/001})\cup(-\sqrt{9/001},-\sqrt{8/999})\right)\cap(2,4)$

$=(\sqrt{8/999},\sqrt{9/001})$

Subject :
Year. Month. Date. ( )

۶) $\frac{1}{x^2}<\frac{1}{10^4} \Rightarrow x^2>10^4 \Rightarrow |x|>10^2 \Rightarrow x>100$ یا $x<-100$

جواب نهایی مسأله $=\left((-\infty,-100)\cup(100,+\infty)\right)\cap(3,+\infty)=(100,+\infty)$

۷) $\sqrt{x^2-9}<\frac{1}{10^2} \Rightarrow x^2-9<\frac{1}{10^4} \Rightarrow x^2<9+\frac{1}{10^4} \Rightarrow$

$|x|<\sqrt{9+\frac{1}{10^4}} \Rightarrow -\sqrt{9/0001}<x<\sqrt{9/0001}$

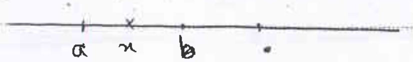
جواب نهایی مسأله $=\left(-\sqrt{9/0001},\sqrt{9/0001}\right)\cap(2/9,3/1)=(2/9,\sqrt{9/0001})$

به خاطر دامنه $\Longrightarrow (3,\sqrt{9/0001})$

۸) روش اول : سه حالت زیر را در نظر می‌گیریم :

حالت اول : $a,b\geq 0$

$-b<a<x<b \Rightarrow |x|<b$ در نتیجه $\max\{|a|,|b|\}=|b|=b$. در اینصورت



حالت دوم : $a,b<0$

در اینصورت $\max\{|a|,|b|\}=|a|=-a$

$a<x<b<-a \Rightarrow a<x<-a \Rightarrow |x|<-a \Rightarrow |x|<|a|$

حالت سوم : $a<0,\ b>0$

فرض می‌کنیم که $|a|\leq|b|$ یعنی $-a\leq b$ در اینصورت داریم

(روش دوم این تمرین در صفحه بعد آمده است)

Subject :
Year. Month. Date. ( )

$-b < a < x < b \Rightarrow |x| < b \Rightarrow |x| < \max\{|a|,|b|\}$

و در حالتی که $|a| \geq |b|$ به طریق مشابه است .

بررسی عکس قضیه : خیر مثال نقض $a=2$ و $b=5$ و $x=1$ ، فرض

$x < \max\{|a|,|b|\}$ درست است ولی نامساوی $a < x < b$ برقرار نمی باشد

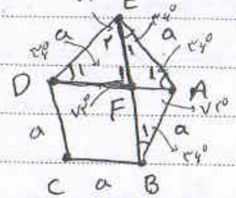
---

(۹) برهان خلف : فرض کنید برای هر $h > 0$ نامساوی $0 \leq a < h$ برقرار باشد ولی $a \neq 0$

پس $a > 0$ و در نتیجه $\frac{a}{2} > 0$ ، فرض می کنیم $h = \frac{a}{2}$.

$a < h \Rightarrow a < \frac{a}{2} \Rightarrow 2a < a \Rightarrow 2 < 1$ #

فرض خلف باطل است و حکم برقرار است .



(۱۰) اندازه هر زاویه داخلی $= \frac{3 \times 180}{5} = 108$

طول ضلع را a و طول قطر را d فرض می کنیم ،

$AB = AE \Rightarrow \hat{E}_1 = \hat{B}_1 = 36^\circ$ $\qquad \hat{E}_2 = \hat{F}_1 \Rightarrow DE = DF = a$

$AE = ED \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{D}_1 = 36^\circ$ $\qquad \Rightarrow AF = d - a$

$\hat{A}_1 = \hat{B}_1 = 36^\circ$
$\hat{E}_1 = \hat{E}_1 =$ مشترک
$\xrightarrow{\text{زز}} \overset{\Delta}{AEF} \sim \overset{\Delta}{BEA} \Rightarrow \frac{a}{d-a} = \frac{d}{a} \Rightarrow d^2 - ad = a^2$

$\Rightarrow d^2 - ad - a^2 = 0 \Rightarrow \left(\frac{d}{a}\right)^2 - \left(\frac{d}{a}\right) - 1 = 0 \xrightarrow{\frac{d}{a}=x}$

ASEMAN

$\Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ = نسبت گرفت
$\Delta = 5$

Subject :
Year. Month. Date. ( )

(۱۱) فرض می کنیم $\sqrt{3}$ گویا باشد و $\sqrt{3} = \frac{a}{b}$ که در آن $(a,b) = 1$ ، داریم

$\sqrt{3} = \frac{a}{b} \Rightarrow 3 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow a^2 = 3b^2$ (*)

طرف سمت چپ این معادله باید بر ۳ بخشپذیر باشد زیرا طرف سمت راست بر ۳ بخشپذیر است ، چون

a^2 مضرب ۳ است پس باید a مضرب ۳ باشد یعنی $a = 3a'$ ، با جایگذاری در (*) داریم

برابر (*)
$a^2 = 3b^2 \Rightarrow 9a'^2 = 3b^2 \Rightarrow b^2 = 3a'^2$ (**) به طریق مشابه با آنچه بیان شد باید b^2 و لذا

b مضرب ۳ باشد یعنی $b = 3b'$ ، و این تناقض است با فرض $(a,b)=1$ ، پس فرض

خلف باطل است و حکم اثبات شده است .

روش دوم : می دانیم در معادله ای مانند $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 = 0$ که

$a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ اگر $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ ، جواب معادله باشد باید $a_0 | p$ و $a_n | q$ ،

از طرفی می دانیم $\sqrt{3}$ جواب معادله $x^2 - 3 = 0$ است پس . اگر این معادله جواب گویایی

مانند $\frac{p}{q}$ داشته باشد باید $3|p$ و $1|q$.

$3|p \rightarrow p = \pm 3$
$1|q \rightarrow q = \pm 1$ $\qquad \frac{p}{q} = 3, -3, -1, 1$

هیچ کدام از این اعداد در معادله صدق نمی کند پس معادله جواب گویا ندارد یعنی $\sqrt{3}$ که جواب آن

است گویا نیست .

ASEMAN

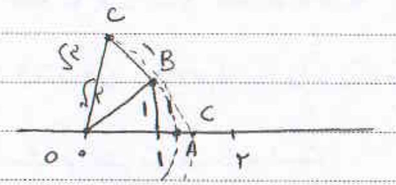
Subject:
Year. Month. Date. ( )

(۱۲) فرض کنید $\log 3$ عددی گویا باشد

$$\log 3 = \frac{a}{b} \Rightarrow 10^{\frac{a}{b}} = 3 \Rightarrow 10^a = 3^b \quad (*)$$

رقم یکان عدد سمت چپ تساوی (*) همواره صفر است در صورتی که رقم یکان عدد سمت راست تساوی با ۳ یا ۹ یا ۷ یا ۱ می‌باشد. پس این دو عدد برابر نمی‌باشند که این یک تناقض است و فرض خلف باطل است و حکم اثبات شده است.

(۱۳)



$OA = \sqrt{2}$

$OC = \sqrt{3}$

روش دیگر تمرین ۸: فرض کنید $k = \max\{|a|,|b|\}$ داریم

$k \geq |a|$, $k \geq |b|$

$-|a| \leq -k$

از طرفی می‌دانیم $-|a| \leq a \leq |a|$, $-|b| \leq b \leq |b|$

$$-k \leq -|a| \leq a < x < b \leq |b| \leq k \Rightarrow -k < x < k \Rightarrow |x| < k$$

$$\Rightarrow |x| < \max\{|a|,|b|\}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

حل تمرین در کلاس ص ۲۴:

در این تمرینات هدف، فقط حدس زدن به کمک چند جمله است.

الف) $1, 2, 4, 8, \dots, 2^{n-1}, \dots$

a_n ها مثبت‌اند

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{2^n}{2^{n-1}} = 2 > 1 \Rightarrow \frac{a_n}{a_{n-1}} > 1 \Rightarrow a_n > a_{n-1} \quad \forall n \geq 2$$

صعودی است

ب) $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots, \frac{1}{3^n}, \dots$

نزولی است زیرا

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(1/3)^{n+1}}{(1/3)^n} = \frac{1}{3} < 1 \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \Rightarrow a_{n+1} < a_n$$

جملات مثبت‌اند

ج) $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \dots, \frac{n+1}{n}, \dots$

نزولی است زیرا

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+2}{n+1} - \frac{n+1}{n} = \frac{n^2+2n-n^2-2n-1}{n(n+1)} = \frac{-1}{n^2+n} < 0$$

د) $2, \left(\frac{3}{2}\right)^2, \left(\frac{4}{3}\right)^3, \dots, \left(\frac{n+1}{n}\right)^n, \dots$

صعودی است زیرا

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}} \times \left(\frac{n+1}{n}\right) = \left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)^{n+1}\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}\left(\frac{n+1}{n}\right) \underset{\text{برنولی}}{\geq} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(\frac{n+1}{n}\right) = 1 \Rightarrow$$

صعودی است

تمام جملات مثبت‌اند

حل تمرین در کلاس صـ ۲۵

(۱) الف) $\{n+1\}$ $\quad 2, 3, 4, \ldots$ صعودی است.

$a_{n+1} - a_n = (n+2)-(n+1) = 1>0 \Rightarrow$ صعودی است

جملات حول عدد خاصی نزدیک نمی‌شوند.

ب) $\{(-1)^n\}$ $\quad -1, 1, -1, 1, \ldots$

غیر یکنوا است و جملات فرد حول عدد ۱- و جملات زوج حول ۱ جمع می‌شوند

ج) $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ $\quad \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$

صعودی است.

$a_{n+1}-a_n = \frac{n+1}{n+2}-\frac{n}{n+1} = \frac{1}{(n+2)(n+1)} >0$

جملات حول عدد ۱ جمع می‌شوند.
(حالت شهودی است)

د) $\left\{1+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$

غیر یکنوا $\quad \frac{1}{2}, \frac{5}{4}, \frac{7}{8}, \frac{17}{16}, \ldots$

جملات حول عدد ۱ جمع می‌شوند.

(۲) دنباله $\{(-1)^n\}$ $\qquad$ (۳) دنباله $\left\{\frac{1}{n}\right\}$

(۴) دو جمله a_n , a_m که $n\neq m$ را در نظر بگیریم، $n\neq m \Rightarrow \frac{1}{n}\neq\frac{1}{m} \Rightarrow a_n\neq a_m$

(۵) به ازای هر $n\in N$ ، اعداد $\frac{1}{10}-\frac{1}{10^{n+2}}$ بین دو عدد $\frac{1}{10}$ و $\frac{1}{11}$ قرار دارد.

(۶) جملات دنباله $a_n = \frac{1}{11}+\frac{1}{10^{n+2}}$ بین دو عدد $\frac{1}{10}$ و $\frac{1}{11}$ قرار دارد.

(۷) الف) $\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$ $\quad \frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{9}{8}, \frac{17}{16}, \ldots$

این دنباله نزولی است زیرا $a_{n+1}-a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{-1}{2}\right)<0$

البته در اینجا هدف حدس زدن است در سایر موارد نیز به همین طریق است.

دنباله کراندار است زیرا $1<a_n<\frac{3}{2}$

جملات دنباله حول عدد ۱ جمع می‌شود.

ب) $\left\{\frac{n^2}{2^n}\right\}$ $\quad \frac{1}{2}, 1, \frac{9}{8}, 1, \frac{25}{32}, \ldots$

دنباله غیر یکنوا است زیرا $a_2>a_1$ (غیر نزولی) و $a_3>a_4$ (غیر صعودی)

دنباله کراندار است، زیرا $0<a_n\leq\frac{9}{8}$

جملات دنباله حول صفر جمع می‌شوند

ج) $\{1+(-1)^n\}$ $\quad 0, 2, 0, 2, \ldots$

دنباله غیر یکنوا است زیرا $a_1<a_2$ (غیر نزولی) و $a_2>a_3$ (غیر صعودی)

دنباله کراندار است زیرا $0\leq a_n\leq 2$

جملات فرد حول صفر (روی صفر) و جملات زوج حول ۲ (روی صفر) جمع می‌شوند.

د) $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ $\quad 2, \frac{9}{4}, \frac{64}{27}, \frac{625}{256}, \ldots$

صعودی است در تمرین صـ ۲۴ قسمت د اثبات شد.

کراندار است به صـ ۴۸ کتاب مراجعه شود. (هفته ۴)

دنباله حول عدد e نزدیک می‌شوند.

Subject :

Year. Month. Date. ( )

ه) $\left\{\cos \frac{n\pi}{2}\right\}$ $\quad 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, \dots$

غیر یکنوا است اما کراندار است $-1 \leq a_n \leq 1$.

ز) $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$ $\quad 4, \left(\frac{3}{2}\right)^3, \left(\frac{4}{3}\right)^4, \left(\frac{5}{4}\right)^5, \dots$

نزولی است زیرا

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}} = \frac{(1+1/n)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}} \times \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)} = \left(\frac{n+1/n}{n+2/n+1}\right)^{n+1} \times \frac{n+1}{n+2}$$

$$= \left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right)^{n+1} \times \frac{n+1}{n+2} = \left(1+\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \times \frac{n+1}{n+2} \geq \left(1+\frac{1}{n+1}\right)\left(\frac{n+1}{n+2}\right) = 1$$

$$\Longrightarrow \frac{a_n}{a_{n+1}} \geq 1 \xrightarrow{\text{جملات } \oplus \text{ است}} a_n \geq a_{n+1}$$

کراندار است زیرا نزولی و همه جملات آن مثبت است $0 < a_n \leq a_1$

---

(۸) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots$

$b_1 = 1 \;,\; b_2 = 5 \;,\; b_3 = 1 \;,\; b_4 = 1 \;,\; b_5 = -15 \quad , \quad \forall n \geq 6 \quad b_n = a_n$

اگر دنباله‌ی $\{a_n\}$ کراندار باشد دنباله $\{b_n\}$ هم کراندار می باشد .

اگر دنباله‌ی $\{a_n\}$ یکنوا باشد ، درمورد صعودی و یا نزولی بودن $\{b_n\}$ چیزی نمی‌توان گفت ، مثلاً در

این جا $\{a_n\}$ صعودی است ولی $\{b_n\}$ غیریکنوا است .

اگر جملات دنباله‌ $\{a_n\}$ حول عددی جمع شوند ، دنباله‌ی $\{b_n\}$ حول همان عدد جمع می‌شوند ، زیرا جمع شدن حول

یک عدد مربوط به دُم دنباله است .

Subject :

Year. Month. Date. ( )

(۹) $\forall n \geq 3 \;:\; a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad , \quad a_2 = 1 \;,\; a_1 = 1$

---

(۱۰) روش اول : اگر به تعریف کرانداری دنباله در صفحه ۲۴ توجه کنیم ، مساله کاملاً روشن است زیرا

اگر $\{a_n\}$ کراندار باشد عددی باشد u وجود دارد که برای هر $n \in N$ داریم $-u \leq a_n \leq u$

یعنی $|a_n| \leq u$ ، کافی است $u = M$.

و برعکس اگر برای هر $n \in N$ داشته باشیم $|a_n| \leq M$ یعنی $-M \leq a_n \leq M$ ، کافی است

$M = u$ درنظر گرفته شود . پس $-u \leq a_n \leq u$ ، یعنی $\{a_n\}$ کراندار است .

روش دوم : فرض می‌کنیم $\{a_n\}$ کراندار باشد و M و m به ترتیب کرانهای بالا و پایین آن باشند

در اینصورت داریم $m \leq a_n \leq M$ ، $\forall n \in N$ ، با فرض $M = \max\{|m|,|k|\}$

داریم $|a_n| \leq M$ (طبق تمرین ۸ ص ۱۷) .

از طرف دیگر خیلی واضح است .

---

(۱۱) $a_n = \frac{2n}{n+1} \qquad |a_n - 2| = \left|\frac{2n}{n+1} - 2\right| = \left|\frac{-2}{n+1}\right| = \frac{2}{n+1}$

$|a_1 - 2| = 1 \;,\; |a_2 - 2| = \frac{2}{3} \;,\; |a_3 - 2| = \frac{2}{4} \;, \dots$

$|a_n - 2| < \frac{1}{10000} \Rightarrow \frac{2}{n+1} < \frac{1}{10000} \Rightarrow n+1 > 20000 \Rightarrow n > 19999$

$\Longrightarrow M = 20000$

۱۲) این تمرین حذف خواهد شد، و اگر دنباله نوسانی به صورت زیر تعریف شود.

« دنباله نوسانی، دنباله ای است که همگرا نباشد و حد آن $+\infty$ یا $-\infty$ نشود »

جواب سؤال: $\{(-1)^n\}$ یا $\{\sin n\}$ نوسانی و کراندار است.

$\{(-1)^n n\}$ یا $\{(-1)^n \sqrt{n}\}$ نوسانی هستند ولی بی کران هستند.

جواب پرسش های تستی: ص ۲۷

۱) الف: نادرست است، زیرا ممکن است دنباله ی اصلی یکنوا باشد ولی دنباله جدید غیر یکنوا باشد.

$1, 2, 3, 4, 5, \dots, n, \dots$ (صعودی)

$0, 2, 0, 2, 5, 6, \dots, n, \dots$ (غیر یکنوا)

درمورد کرانداری تغییری حاصل نمی شود.

ب) نادرست است زیرا ممکن است c عدد منفی باشد.

$1, 2, 3, \dots, n, \dots$ (صعودی)

$c = -1$

$-1, -2, -3, \dots, -n, \dots$ (نزولی است)

ج) نادرست است
دنباله جدید شاید نزولی باشد، اگر $c>0$ باشد. مثلاً دنباله $\{\frac{1}{n}\}$ نزولی است ولی $\{\frac{5}{n}\}$ هم نزولی است.

فکر می کنم، در این قسمت اشتباه صورت گرفته، بنظر بجای کلمه (نیز) در صورت سؤال باید نزولی باشد که باز هم نادرست است کافی است $c<0$ اختیار شود.

د) درست است،

$\{\frac{1}{n}\} \longrightarrow \{\frac{-1}{n}\}$
نزولی — صعودی

$\{n\} \longrightarrow \{-2n\}$
صعودی — نزولی

حل تمرین در کلاس ص ۳۴

۱) زیرا جملات آن حول عددی مانند L جمع نمی شوند یعنی در واقع اگر به مرکز L و به هر شعاع دلخواهی مانند ε یک همسایگی انتخاب کنیم جملات دنباله از طرف چپ وارد شده و از طرف راست خارج می شوند.

$L-\varepsilon \quad L \quad L+\varepsilon$

$\varepsilon = 1 \rightarrow L-1 < 2n+1 < L+1 \Rightarrow \frac{L}{2} - 1 < n < \frac{L}{2}$ #

۲)
$$a_n = \begin{cases} \frac{n+1}{2} & n \text{ فرد} \\ \frac{-n}{n+2} & n \text{ زوج} \end{cases}$$
یا
$$a_n = \left(\frac{1-(-1)^n}{2}\right)\left(\frac{n+1}{2}\right) + \left(\frac{1+(-1)^n}{2}\right)\left(\frac{-n}{n+2}\right)$$

زیردنباله $b_n = a_{2n} = \frac{-n}{n+2} \longrightarrow$ همگرا

زیردنباله $c_n = a_{2n-1} = \frac{n+1}{2} \longrightarrow$ واگرا

حل تمرین در کلاس ص ۳۸

① $a_n = \frac{n-1}{n}$ ، $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots \longrightarrow 1$

حدس می‌زنیم به عدد یک همگرا باشد.

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists M\in N \ni \forall n\geq M \Rightarrow \left|\frac{n-1}{n}-1\right|<\varepsilon$$

$$\left|\frac{n-1-n}{n}\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n}<\varepsilon \Leftrightarrow n>\frac{1}{\varepsilon}$$

کافی است $M \geq \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$ اختیار شود.

② فرض می‌کنیم $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

فرض ۱: $\forall\varepsilon>0\ \exists M\in N \ni \forall n\geq M \Rightarrow |a_n - L|<\varepsilon$

فرض ۲: $\exists K\in N$ s.t. $a_{n+K}=b_n$

حکم: $\lim_{n\to\infty} b_n = l$

$$\forall\varepsilon>0\ \exists P\in N \ni \forall n\geq P \Rightarrow |b_n - l|<\varepsilon$$

فرض می‌کنیم $\varepsilon>0$ داده شده باشد در اپسیلون آن را در فرض ۱ قرار می‌دهیم تا M بدست آید

دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم

حالت اول: $M>K$ ، در اپسیلون قرار می‌دهیم $P=M-K$ در اپسیلون

$$n\geq P \to n\geq M-K \to n+K\geq M \to |a_{n+K}-L|<\varepsilon \Rightarrow |b_n - L|<\varepsilon$$

حالت دوم: $K\geq M$ در اپسیلون قرار می‌دهیم $P=1$.

$$n\geq P \Rightarrow n\geq 1 \Rightarrow n+K\geq 1+K > M \Rightarrow n+K\geq M \Rightarrow |a_{n+K}-L|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow |b_n - L|<\varepsilon$$

نکته: از این تمرین در محاسبه حد دنباله‌های بازگشتی (تمرین ۲ ص ۴۵ و تمرین ۱۳ ص ۵۲) و همچنین تمرین‌های مانند تمرین ۱۰ ص ۵۲ استفاده می‌کنیم

تمرین ۳ (صفحه ۳۸ حذف شده است، همین سوال در تمرین ۱۳ ص ۵۲ آمده است.)

تمرین ۴:

الف) $\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}$ $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=0 \Rightarrow$ همگرا به صفر است

$$\forall\varepsilon>0\ \exists M\in N \ni \forall n\geq M \Rightarrow \left|\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right|<\varepsilon$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}<\varepsilon \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} > \log_{\frac{1}{3}}\varepsilon \Rightarrow n>1+\log_{1/3}\varepsilon$$

کافی است $M\geq 2+\left[\log_{1/3}\varepsilon\right]$

ب) $\{3^n\}$

این دنباله واگرا است زیرا جملات آن بی‌کران افزایش می‌یابد و حول عدد خاصی جمع نمی‌شود و واگرا به $+\infty$ است

ج) $\{\log n\}$

این دنباله واگرا است زیرا جملات آن حول عدد خاصی جمع نمی‌شوند و واگرا به $+\infty$ است

Subject :

Year. Month. Date. ( )

α

$\Rightarrow \left\{ \log \frac{1}{n} \right\}$

با افزایش n ، جملات دنباله ی $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ به طرف صفر (از سمت راست) گرایش پیدا می کند

و چون پایه لگاریتم ۱۰ است ، جملات دنباله ی $\log \frac{1}{n}$ بی کران کاهش می یابند . و واگرا به $-\infty$ می شود

حل تمرین در کلاس ص (بعنوان نمونه کتاب حل کرده است)

(۱) جملات دنباله $\{n^2\}$ به صورت روبرو است $1, 4, 9, 25, 36, \dots$

جملات دنباله ، افزایش یافته و به $+\infty$ واگرا می شود، یعنی $\lim_{n\to\infty} n^2 = \infty$ زیرا

$$\forall k>0 \quad \exists M\in\mathbb{N} \ni \forall n\geq M \Rightarrow n^2>k$$

$$n^2>k \iff n>\sqrt{k}$$

کافی است $M\geq[\sqrt{k}]+1$ انتخاب شود.

(۲)

$$\lim_{n\to\infty} (1000-n^2) = -\infty$$

جملات دنباله به صورت $999, 996, 991, \dots$ است و جملات کاهش یافته و به $-\infty$ واگرا است ، یعنی

$$\forall k>0 \quad \exists M\in\mathbb{N} \ni \forall n\geq M \Rightarrow a_n<-k$$

$$a_n<-k \iff 1000-n^2<-k \iff n^2>1000+k \iff n>\sqrt{1000+k}$$

کافی است $M\geq\left[\sqrt{1000+k}\right]+1$ اختیار شود.

ASEMAN

Subject :

Year. Month. Date. ( )

(۳) جملات دنباله به صورت $\frac{2}{10^6}, \frac{3}{10^6}, \frac{4}{10^6}, \dots$

جملات دنباله افزایش می یابند و به $+\infty$ واگرا می شوند.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{10^6} = +\infty$$

$$\forall k>0 \quad \exists M\in\mathbb{N} \ni \forall n\geq M \Rightarrow \frac{n+1}{10^6}>k$$

$$\frac{n+1}{10^6}>k \iff n+1>10^6 k \iff n>10^6 k-1$$

کافی است $M\geq[10^6 k-1]+1$ اختیار شود.

توضیح: در تمرینات ۲ و ۳ ، هدف این است که بیان کند گرچه جملات ابتدایی سرعت کمی برای رفتن به $-\infty$ یا $+\infty$ دارند ولی در نهایت آن جملات اصلی (دم دنباله) به $-\infty$ یا $+\infty$ گرایش پیدا خواهند کرد.

حل مسائل ص ۴۱

(۱) الف) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n} = \infty$

$$\forall k>0 \quad \exists M\in\mathbb{N} \ni \forall n\geq M \Rightarrow \frac{n^2+1}{n}>k$$

$$\frac{n^2+1}{n}>k \underset{\text{شرط لازم}}{\Longleftarrow} \frac{n^2}{n}>k \iff n>k$$

کافی است $M\geq[k]+1$

ASEMAN

ب) فرض می‌کنیم این حد موجود باشد و مقدار آن عدد حقیقی L باشد یعنی

(روش اول)

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{n^2+1}{n} = L$$

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists M\in \mathbb{N} \ni \forall n\geq M \Rightarrow \left|(-1)^n\frac{n^2+1}{n}-L\right|<\varepsilon$$

با فرض $\varepsilon=1$ داریم

$$\exists M_0\in \mathbb{N} \ni \forall n\geq M_0 \Rightarrow \left|(-1)^n\frac{n^2+1}{n}-L\right|<1$$

اعداد بزرگتر یا مساوی M_0، شامل اعداد زوج و فرد است،

$$\text{if } n=\text{زوج} \Rightarrow \left|\frac{n^2+1}{n}-L\right|<1$$

$$\text{if } n=\text{فرد} \Rightarrow \left|\frac{n^2+1}{n}+L\right|<1$$

$$\left|\frac{n^2+1}{n}-L\right|<1 \Rightarrow \frac{n^2+1}{n}-L<1 \Rightarrow \frac{n^2+1}{n}<L+1 \xRightarrow{\frac{n^2}{n}<\frac{n^2+1}{n}}$$

$n<L+1$ # زیرا اعداد طبیعی زوج از بالا کراندار نیست

(روش دوم) اگر دنباله‌ای همگرا باشد باید هر زیر دنباله‌ای از آن نیز همگرا باشد، که دنباله‌ی $\left\{\frac{n^2+1}{n}\right\}$ را از آن در نظر می‌گیریم در قسمت الف گفتیم این دنباله به $+\infty$ واگرا است پس این دنباله نمی‌تواند همگرا به عدد حقیقی مانند L شود.

(۲)

فرض $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$ $\quad \forall K>0 \ \exists P\in \mathbb{N} \ni \forall n\geq P \Rightarrow a_n>K$

حکم $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n}=0$ $\quad \forall \varepsilon>0 \ \exists M\in \mathbb{N} \ni \forall n\geq M \Rightarrow \left|\frac{1}{a_n}-0\right|<\varepsilon$

فرض کنید $\varepsilon>0$ داده شده باشد در فرض به جای K قرار می‌دهیم $K=\frac{1}{\varepsilon}$ تا P بدست آید با فرض $M\geq P$ مسأله حل شده است زیرا

$$n\geq M \Rightarrow n\geq P \Rightarrow a_n>K \Rightarrow a_n>\frac{1}{\varepsilon} \xRightarrow{\frac{1}{\varepsilon}>0} \frac{1}{a_n}<\varepsilon \Rightarrow$$

$$\left|\frac{1}{a_n}-0\right|<\varepsilon \quad \blacksquare$$

---

(۳) فرض داریم $a_n>0$ و همچنین

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=0 \qquad \forall \varepsilon>0 \ \exists M\in \mathbb{N} \ni \forall n\geq M \Rightarrow \left|\frac{1}{a_n}-0\right|<\varepsilon$$

حکم: $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$ $\quad \forall K>0 \ \exists P\in \mathbb{N} \ni \forall n\geq P \Rightarrow a_n>K$

فرض می‌کنیم $K>0$ داده شده باشد در فرض به جای ε قرار می‌دهیم $\varepsilon=\frac{1}{K}$، $M\in \mathbb{N}$ حاصل شود، قرار می‌دهیم $P\geq M$.

$$n\geq P \Rightarrow n\geq M \Rightarrow \frac{1}{a_n}<\varepsilon \Rightarrow a_n>\frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow a_n>K \quad \blacksquare$$

روش اول: فرض: $a_n<0$ و $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=0$ ؛ $\forall \varepsilon>0\ \exists M\in N \ni \forall n\geq M \Rightarrow \left|\frac{1}{a_n}-0\right|<\varepsilon$

حکم: $\lim_{n\to\infty} a_n=-\infty$ ؛ $\forall k<0\ \exists T\in N \ni \forall n\geq T \Rightarrow a_n<k$

در فرض به جای ε قرار می‌دهیم $\varepsilon=\frac{-1}{k}$ و M را بدست آورده فرض $T=M$ مسأله حل شده است $\Leftarrow$

(۴) روش دوم) قرار می‌دهیم $b_n=-a_n$ چون $a_n<0$ پس $b_n>0$ پس بنابر تمرین قبل داریم $\lim_{n\to\infty} b_n=+\infty$ و در نتیجه $\lim_{n\to\infty} a_n=-\infty$

(۵) الف) $a_n=\frac{5n^2-3n+11}{2n+1}$

$\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$ ؛ $\forall k>0\ \exists M\in N \ni \forall n\geq k \Rightarrow a_n>k$

کمی طرفین

$a_n>k \Leftrightarrow \frac{5n^2-3n+11}{2n+1}>k \Leftarrow \frac{5n^2-3n}{2n+n}>k \Leftrightarrow \frac{5n-3}{3}>k$

$\Leftrightarrow 5n-3>3k \Leftrightarrow 5n>3k+3 \Leftrightarrow$

$n>\frac{3k+3}{5}$

کافی است $M\geq\left[\frac{3k+3}{5}\right]+1$ اختیار شود.

ب) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-1}{6n^3+1}=0$

$\forall\varepsilon>0\ \exists M\in N \ni \forall n\geq M \Rightarrow \left|\frac{n^2-1}{6n^3+1}-0\right|<\varepsilon$

$\frac{n^2-1}{6n^3+1}<\varepsilon \Leftarrow \frac{n^2}{6n^3}<\varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{6n}<\varepsilon \Leftrightarrow 6n>\frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow$

$n>\frac{1}{6\varepsilon}$ کافی است $M\geq\left[\frac{1}{6\varepsilon}\right]+1$ اختیار شود.

$\forall n\geq T \Rightarrow n\geq M \Rightarrow \left|\frac{1}{a_n}-0\right|<\frac{-1}{k} \Rightarrow \frac{-1}{a_n}<\frac{-1}{k}$

$\Rightarrow \frac{1}{a_n}>\frac{1}{k} \Rightarrow a_n<k$

ج) $\lim_{n\to\infty} c_n=\frac{3}{2}$

$\forall\varepsilon>0\ \exists M\in N \ni \forall n\geq M \Rightarrow \left|\frac{3n^2+1}{2n^2+7}-\frac{3}{2}\right|<\varepsilon$

$\left|\frac{6n^2+2-6n^2-21}{4n^2+14}\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \frac{19}{4n^2+14}<\varepsilon \Leftrightarrow 4n^2+14>\frac{19}{\varepsilon}$

$\Leftrightarrow 4n^2>\frac{19}{\varepsilon}-14 \Leftrightarrow n^2>\frac{19}{4\varepsilon}-\frac{7}{2} \Leftrightarrow n>\sqrt{\frac{19}{4\varepsilon}-\frac{7}{2}}$

کافی است $M\geq\left[\sqrt{\frac{19}{4\varepsilon}-\frac{7}{2}}\right]+1$. توجه کنید اگر در زیر رادیکال منفی شود، کافی است $M=1$ اختیار شود.

حل تمرین در کلاس صفحه ۴۳

الف) (فرض بر ناتهی بودن مجموعه‌ها می‌باشد)

۱) درست است مانند نمونه‌های زیر $A=\{1,2,3,4\}$ ، ۴ کوچکترین کران بالا است.

$B=[1,2]$ ، عدد ۲ کوچکترین کران بالا است.

$C=(-1,3)$ ، عدد ۳ " " " " .

البته باید داشت به بیان شود کوچکترین کران بالا در کدام مجموعه قرار دارد مثلاً مجموعه $A=\{q\in Q: q^2<2\}$ کراندار است ولی کوچکترین کران بالای آن که $\sqrt{2}$ است عضو Q نیست

۲) درست است مانند الف (فرض بر ناتهی بودن مجموعه‌ها است)

۳) درست است نتیجه‌ای از تمرین ۱ و ۲ است.

۴) درست است، مثلاً $A=[1,2]$ ، $B=[1,4]$ اختیار شود.

ب) اگر $\phi \neq A \subseteq B$ و $k \in B$ یک کران پایین B باشد k یک کران پایین A نیز می باشد

حل تمرین در کلاس صـ ۴۵

الف) $\left\{1+\frac{1}{n^2+1}\right\}$

① این دنباله نزولی و از پایین کراندار است پس طبق قضیه همگرا است.

با افزایش n، کسر $\frac{1}{n^2+1}$ به عدد صفر نزدیک می شود و بنابراین دنباله به عدد ۱ همگرا است

زیرا $|a_n-1| = \left|1+\frac{1}{n^2+1}-1\right| = \frac{1}{n^2+1}$ بنابراین $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2+1}\right) = 1$

{توجه داریم تا اینجا اعمال جبری روی دنباله ها مطرح نشده است}

ب) $\left\{1-\frac{1}{n}\right\}$ دنباله صعودی و از بالا کراندار است پس همگرا است.

دنباله $\frac{1}{n}$ با افزایش جملات به صفر نزدیک می شود،

$$|a_n-1| = \left|1-\frac{1}{n}-1\right| = \frac{1}{n}$$

فاصله جملات دنباله تا عدد یک با افزایش n، کمتر شده و بنابراین

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right) = 0$$

---

② چند جمله از دنباله را می نویسیم

$$1,\ \sqrt{7},\ \sqrt{6+\sqrt{7}},\ \sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{7}}},\ \dots$$

این دنباله صعودی است زیرا

$$P(n):\quad a_n \le a_{n+1}$$

$$P(1):\quad 1 \le \sqrt{7} \Rightarrow a_1 \le a_2 \quad \text{ت}$$

$P(k):\quad a_k \le a_{k+1}$ $\qquad a_k \le a_{k+1} \Rightarrow 6+a_k \le 6+a_{k+1}$

$P(k+1):\quad a_{k+1} \le a_{k+2}$ $\qquad \Rightarrow \sqrt{6+a_k} \le \sqrt{6+a_{k+1}}$

$$\Rightarrow a_{k+1} \le a_{k+2} \quad \text{ت}$$

پس این گزاره برای هر عدد طبیعی n درست است.

چون دنباله صعودی است پس برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم $a_1 \le a_n$. کافی است ثابت کنیم برای هر $n \in \mathbb{N}$، $a_n < 3$

$P(1):\quad 1 < 3 \Rightarrow a_1 < 3$ ت

$P(k):\quad a_k < 3$ $\qquad a_k < 3 \Rightarrow a_k + 6 < 9 \Rightarrow$

$P(k+1):\quad a_{k+1} < 3$ $\qquad \sqrt{6+a_k} < 3 \Rightarrow a_{k+1} < 3$ ت

پس گزاره برای هر عدد طبیعی n درست است.

دنباله ی $\{a_n\}$ یکنوا و کراندار است بنابر قضیه ۱، دنباله همگرا است، حد آن را l می نامیم، طبق تمرین ۲ صـ ۳۶ داریم $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = l$ درنتیجه

$$a_{n+1} = \sqrt{6+a_n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{6+a_n} \Rightarrow l = \sqrt{6+l}$$

$$\Rightarrow l^2 = 6+l \Rightarrow l^2 - l - 6 = 0 \longrightarrow \begin{cases} l = 3 & ✓ \\ l = -2 & ✗ \end{cases}$$ زیرا دنباله صعودی است

Subject
Year. Month. Date. ( )

حل تمرین در کلاس ص ۴۹

الف) $a_n = (1+\frac{1}{n})^{2n}$

① $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^2 = e^2$

ب) $b_n = (1+\frac{1}{n})^{3n}$ $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^3 = e^3$

ج) $c_n = (1+\frac{1}{n})^{\frac{n}{2}}$ $\lim c_n = \lim\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$

② $e \simeq$ ۲٫۷۱۸۲۸۱۸۲۸

③ $(1+0.01)^{100} \simeq$ ۲٫۷۰۴۸۱۳۸۲۹

حل مسائل ص ۵۲

① $a_n = \frac{5n^2}{n^2+1}$

$a_n = \frac{5n^2+5-5}{n^2+1} = 5 - \frac{5}{n^2+1}$

با افزایش n، دنباله‌ی $\frac{5}{n^2+1}$ به صفر نزدیک می‌شود و بنابراین دنباله‌ی a_n به عدد ۵ نزدیک می‌شود.

دنباله کراندار است زیرا $\frac{5}{2} \le a_n \le 5$.

Subject
Year. Month. Date. ( )

واضح است که همه جملات دنباله مثبت است. دنباله صعودی است. در ضمن دنباله به عدد ۵ همگرا است.

ب) $b_n = \frac{2n}{n^2+1}$

دنباله کراندار است زیرا $0 < a_n \le 1$

تمام جملات دنباله مثبت اند. دنباله نزولی است. و همگرا به صفر است.

ج) $c_n = 4 + \frac{(-1)^n}{n}$

$3, \frac{9}{2}, \frac{11}{3}, \frac{17}{4}, \dots$

دنباله غیر یکنوا است، ولی کراندار است زیرا

$3 \le a_n \le \frac{9}{2}$

تمام جملات دنباله مثبت اند زیرا $3 \le a_n \le 9/2$ ، $\lim_{n\to\infty} a_n = 4$ همگرا به ۴ است.

د) $d_n = \sin\frac{1}{n}$

دنباله کراندار است زیرا $-1 \le \sin\frac{1}{n} \le 1$

جملات دنباله همگی مثبت اند زیرا $0 < \frac{1}{n} \le 1$ رادیان پس $\sin\frac{1}{n} > 0$.

دنباله نزولی است زیرا $\{\frac{1}{n}\}$ نزولی و sin در ناحیه اول صعودی است و ترکیب آنها نزولی است.

دنباله همگرا به صفر است. $\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{n} = 0$

هـ) $a_n = \frac{n^2-1}{n}$

دنباله بی کران است زیرا جملات آن به $+\infty$ واگرا است.

جمله اول دنباله صفر است و سایر جملات مثبت است.

دنباله صعودی است زیرا n و $-\frac{1}{n}$ هر دو صعودی اند پس جمع آنها صعودی است.

دنباله به $+\infty$ واگرا است.

جملات دنباله کراندار است زیرا $b_n = \frac{\sin n}{n}$ (و

$-1 \le \sin n \le 1 \Rightarrow \frac{-1}{n} \le \frac{\sin n}{n} \le \frac{1}{n} \Rightarrow -1 \le \frac{\sin n}{n} \le 1$

سه جمله اول ⊕ و سه جمله بعدی منفی است.

واضح است که با این روند ⊕ و ⊖ دنباله غیر یکنوا است.

دنباله به صفر همگرا است

ز) $\{n\cos\frac{n\pi}{2}\}$ $\quad 0, -2, 0, 4, 0, -6, 0, 8, \ldots$

دنباله کراندار نیست زیرا یک زیر دنباله ای دارد که به $+\infty$ واگرا است و یک زیر دنباله ای دارد که به $-\infty$ واگرا است.

بعضی از جملات ⊕ و بعضی ⊖ و بعضی صفرند.

دنباله غیر یکنوا است.

دنباله واگرا است.

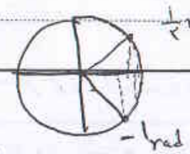
ح) $\{n\sin\frac{n\pi}{2}\}$ $\quad 1, 0, -3, 0, 5, 0, -7, \ldots$

همانند دنباله ی قسمت (ز) می باشد

ط) $\{n\cos\frac{(-1)^n}{n}\}$ دارای جملات ⊕ و صعودی است دنباله ی n صعودی است $\cos\frac{(-1)^n}{n}$

کی فاصله قرب آنها صعودی است.

بی کران است زیرا



$n\cos\frac{(-1)^n}{n} > \frac{n}{2}$

بی کران افزایش می یابد

همه جملات دنباله ⊕ است.

$\frac{1}{2} < \cos\frac{(-1)^n}{n} \Rightarrow \frac{1}{2}n < n\cos\frac{(-1)^n}{n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} n\cos\frac{(-1)^n}{n} = \infty$

(10) یعنی واگرا است. $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n} = +\infty \quad \forall k>0\ \exists M\in N \ni \forall n\ge M \Rightarrow \sqrt{n} > k$

کافی است $M \ge [k^2]+1$ اختیار شود. $\quad \sqrt{n} > k \Leftrightarrow n > k^2$

فرض کنید $a_n = \sqrt{n}$ و $b_n = \sqrt{n+1}$ پس داریم $b_n = a_{n+1}$ طبق

تمرین ۲ صفحه ۳۸ داریم $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

(11) الف) $a_n = \frac{n^2-1}{n} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(n - \frac{1}{n}) = \infty - 0 = \infty$

ب) $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n(n+1)}{n} =$ وجود ندارد ⇐ واگرا است ولی نه به $+\infty$ و نه به $-\infty$

جملات زوج به ۱ همگرا است و جملات فرد به ۱- همگرا است.

ج) $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n+1}} = +\infty \Rightarrow$ واگرا به $+\infty$ است

(12) $100a_n = 452 + a_n \Rightarrow a_n = \frac{452}{99}$ دنباله ثابت $\quad \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{452}{99}$

(فکر کنم با) دنباله به صورت $100\,a_{n+1} = 452 + a_n$ باشد که در اینصورت با فرض اینکه

Subject :
Year. Month. Date. ( )

$\lim_{n\to\infty} a_n = l$ داریم ، $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = l$ (طبق تمرین ۲ ص ۳۸) و بنابراین

$$100l = 452 + l \Rightarrow l = \frac{452}{99}$$

(۱۳) فرض می‌کنیم $\lim_{n\to\infty} P_n = l$ در این صورت (طبق تمرین ۲ ص ۳۸) داریم $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = l$

و لذا داریم

$$l = \frac{bl}{a+l} \Rightarrow al + l^2 = bl \Rightarrow l^2 + (a-b)l = 0 \Rightarrow \begin{cases} l = 0 & \times \\ l = b-a & \checkmark \end{cases}$$

(۱۴)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^2 = \left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^2 = e^2$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}} = \left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

Subject :
Year. Month. Date. ( )

حل تمرین در کلاس ص ۵۷

$a_n = 1 - \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$: ۰ ، ۰/۹ ، ۰/۹۹ ، ۰/۹۹۹ ، ۰/۹۹۹۹

(۱)

$b_n = 1 + \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$: ۲ ، ۱/۱ ، ۱/۰۱ ، ۱/۰۰۱ ، ۱/۰۰۰۱

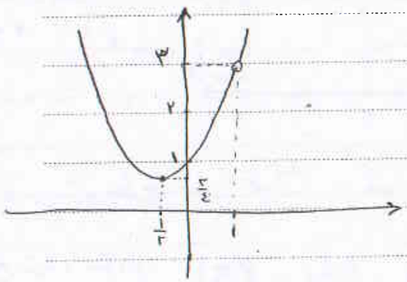
هر دو دنباله به عدد یک همگرا هستند

$f(x) = x^2 + x + 1 \quad (x \neq 1)$

(۲)

x	۰	۰/۹	۰/۹۹	۰/۹۹۹	۰/۹۹۹۹	$\boxed{1}$	۱/۰۰۰۱	۱/۰۰۱	۱/۰۱	۱/۱	۲
$f(x)$	۱	۲/۷۱	۲/۹۷۰۱	۲/۹۹۷۰۰۱	۲/۹۹۹۷۰۰۰۱	ت.ن	۳/۰۰۰۳۰۰۰۱	۳/۰۰۳۰۰۱	۳/۰۳۰۱	۳/۳۱	۷

با توجه به جدول مقادیر $f(x)$ به عدد ۳ نزدیک می‌شود.



$$y = \frac{x^3-1}{x-1} = x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

با توجه به نمودار مقادیر $f(x)$ به عدد ۳ نزدیک می‌شود.

حل تمرین در کلاس ص ۶۰

$a_n = (0/1)^n = \frac{1}{10^n}$: ۰/۱ ، ۰/۰۱ ، ۰/۰۰۱ ، ۰/۰۰۰۱

$b_n = -(0/1)^n = \frac{-1}{10^n}$: ۰/۱- ، ۰/۰۱- ، ۰/۰۰۱- ، ۰/۰۰۰۱-

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}-1} = \sqrt{x+1} + 1$$

با فرض $x \neq 0$

x	۰/۱-	۰/۰۱-	۰/۰۰۱-	۰/۰۰۰۱-	$\boxed{0}$	۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۱	۰/۱
$f(x)$	۱/۹۴۸۶۸۳۲۹۸	۱/۹۹۴۹۸۷۴۳۷	۱/۹۹۹۴۹۹۸۷۴	۱/۹۹۹۹۴۹۹۹۸	ت.ن	۲/۰۰۰۰۴۹۹۹	۲/۰۰۰۴۹۹۸۷۵	۲/۰۰۴۹۸۷۵۶۲	۲/۰۴۸۸۰۸۸۴۸