



RIAZISARA

www.riazisara.ir **سایت ویژه ریاضیات**

**درسنامه ها و جزوه های ریاضی
سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور
نمونه سوالات امتحانات ریاضی
نرم افزارهای ریاضیات**

...

ریاضی سرا در تلگرام: (@riazisara)

<https://t.me/riazisara>



ریاضی سرا در اینستاگرام: (@riazisara.ir)

<https://www.instagram.com/riazisara.ir>



همه‌هنگی کلاس خصوصی آنلاین ریاضی ۰۹۲۲۰۶۳۳۰۶۲

بنام خداوند بخشنده مهربان

درسنامه و نکات کلیدی فصل دوم ریاضی هشتم به همراه مثال و تمرین از مبتدی تا پیشرفته

یادآوری: پیش از یادگیری اعداد اول، ابتدا باید اعداد طبیعی را یادآور شویم. اعداد طبیعی عبارتند از:

۱. ۲. ۳. ۴. ۵. ۶. ...

تعریف: شمارنده چیست؟

عدد ۲۴ را در نظر بگیرید. می دانیم که حاصل ضرب های زیر برابر ۲۴ است:

$$1 \times 24 = 24$$

$$2 \times 12 = 24$$

$$3 \times 8 = 24$$

$$4 \times 6 = 24$$

به این اعداد، شمارنده های عدد ۲۴ می گویند. یعنی:

شمارنده های ۲۴: ۱. ۲. ۳. ۴. ۶. ۸. ۱۲. ۲۴

این یعنی شمارنده های عدد ۲۴، اعدادی هستند که ۲۴ بر آنها بخشپذیر است.

حال اعداد طبیعی را با توجه به شمارنده های آنها، به سه دسته تقسیم می کنیم:

دسته اول: اعدادی که فقط دو شمارنده دارند. مانند عدد ۷ که اعداد ۱ و ۷ شمارنده آن هستند. (1×7)

دسته دوم: اعدادی که بیشتر از دو شمارنده دارند. مانند عدد ۸ که اعداد ۱ و ۲ و ۴ و ۸ شمارنده آن هستند. (2×8)

(1×8 و ۴)

دسته سوم: عدد یک که فقط یک شمارنده دارد و آن همان عدد یک است. ($1 \times 1 = 1$)

دسته اول، اعداد اول و دسته دوم، اعداد مرکب نام دارند. پس اعداد اول، اعدادی هستند که فقط بر خودشان و یک بخشپذیر هستند.

نکته: عدد ۱، تنها عدد طبیعی است که نه اول است نه مرکب؛ چون فقط یک شمارنده دارد. پس این جمله که «اعداد طبیعی یا اولند یا مرکب»، صحیح نیست.

اعداد اول عبارتند از:

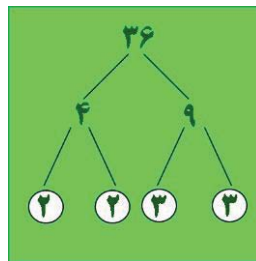
$$\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \dots\} = \text{اعداد اول}$$

نکته: تنها عدد اول زوج عدد ۲ می باشد. زیرا هر عدد زوج دیگر، بجز خودش و عدد یک، حداقل عدد ۲ را نیز بعنوان شمارنده خواهد داشت. پس تمام اعداد زوج بجز عدد ۲، مرکب هستند.

مثلا عدد ۸ چون زوج است، بجز خودش و عدد یک، بر ۲ نیز بخشپذیر است. پس ۲ نیز یکی دیگر از شمارنده های آن است. یعنی عدد ۸ بیشتر از دو شمارنده دارد، پس مرکب است. همه اعداد زوج این چنین اند. (بجز ۲)

نکته: تمام اعداد طبیعی حداقل یک **شمارنده اول** دارند. (بجز عدد یک)

نکته: هر عدد مرکب را می توان بصورت حاصل ضرب چند عدد اول نوشت. بعنوان مثال عدد ۳۶ را با استفاده از تجزیه درختی بصورت زیر نوشت:



$$36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^2 \times 3^2$$

پس برای تعیین شمارنده های اول یک عدد می توان از روش تجزیه درختی استفاده نمود.

مثال: آیا هزار و پنجاه و سومین عدد اول، بر ۱۲ بخشپذیر است؟

پاسخ: خیر؛ زیرا هر عدد اول جز بر خودش و یک بر هیچ عدد دیگری بخشپذیر نیست.

مثال: مجموع دو عدد اول، ۲۱ است. آن دو عدد را بیابید.

پاسخ: عدد ۲۱ فرد است و هر عدد فرد را می توان بصورت حاصل جمع عددی زوج و عددی فرد نوشت؛ از آنجا

که می دانیم تنها عدد زوج اول، عدد ۲ می باشد، یعنی یکی از آن دو عدد، ۲ می باشد. پس ۲۱ را بصورت

حاصل جمع $21 = 19 + 2$ می نویسیم. پس جواب سوال عبارتست از : ۲ و ۱۹.

مثال: اگر حاصل ضرب دو عدد اول، ۱۹۴ باشد، حاصل جمع آن ها را بیابید.

پاسخ: زمانی که حاصل ضرب دو عدد، زوج می شود، دو حالت وجود دارد:

- (۱) هر دو عدد زوج باشند. این حالت پاسخ سوال نیست؛ زیرا تنها عدد زوج اول، عدد ۲ است و عدد زوج اول دیگری وجود ندارد تا پاسخ سوال باشد.
- (۲) یک عدد زوج و دیگری فرد باشد. در اینصورت واضح است که عدد زوج اول، عدد ۲ بوده و عدد دیگر از تقسیم ۱۹۴ بر ۲ حاصل می شود. پس دو عدد اول عبارتند از: ۲ و ۹۷. همچنین حاصل جمع این دو عدد برابرست: $۹۷ + ۲ = ۹۹$

ب م م

ب م م، خلاصه شده عبارت «بزرگترین مقسوم علیه (شمارنده) مشترک» است. ب م م دو عدد a و b را بصورت (a, b) نمایش می دهیم.

برای یافتن ب م م دو عدد دو روش را معرفی می کنیم:

- (۱) روش اول: شمارنده های آن ها را نوشته و بزرگترین شمارنده مشترک را انتخاب کنیم.

مثال: ب م م ۱۲ و ۱۸ را بیابید.

پاسخ: ابتدا شمارنده های آن ها را می نویسیم:

۱۲: ۱. ۲. ۳. ۴. ۶. ۱۲

۱۸: ۱. ۲. ۳. ۶. ۹. ۱۸

چنانچه مشاهده می کنید، اعداد ۱، ۲، ۳ و ۶ شمارنده های مشترک ۱۲ و ۱۸ هستند. اما بزرگترین آن

ها عدد ۶ است؛ پس ب م م ۱۲ و ۱۸، عدد ۶ است و می نویسیم: $(۱۲, ۱۸) = ۶$

تمرین: ب م م اعداد ۱۵ و ۱۴ را بیابید.

- (۲) روش دوم: ابتدا دو عدد را به روش درختی تجزیه کرده، سپس آن ها را بصورت ضرب اعداد اول می نویسیم و عدد های مشترک، با کمترین تکرار را در هم ضرب می کنیم. (این روش برای اعداد بزرگتر کاربرد دارد).

مثال: ب م م اعداد ۱۲ و ۱۸ را بیابید.

$$۱۲ = ۲ \times ۲ \times ۳$$

$$۱۸ = ۲ \times ۳ \times ۳$$

پاسخ: می دانیم

حال با توجه به این که اعداد ۲ و ۳ با یک تکرار، بصورت مشترک در میان شمارنده های ۱۲ و ۱۸ وجود دارند، پس

$$۲ \times ۳ = ۶ \text{ ، ب م م اعداد } ۱۲ \text{ و } ۱۸ \text{ می باشد. پس } (۱۲، ۱۸) = ۶$$

تمرین: ب م م اعداد ۱۴ و ۱۵ را بیابید.

مثال: ب م م اعداد ۶ و ۸ و ۱۲ را بیابید.

۶: ۱. ۲. ۳. ۶

۸: ۱. ۲. ۴. ۸

۱۲: ۱. ۲. ۳. ۴. ۶. ۱۲

در نتیجه: $(۶، ۸، ۱۲) = ۲$

تعریف: دو عدد را متباین یا نسبت به هم اول می گوئیم، هرگاه ب م م آن ها برابر یک باشد.

مثال: آیا اعداد ۸ و ۹ نسبت به هم اول هستند؟

پاسخ: بله، زیرا:

۸: ۱. ۲. ۴. ۸

۹: ۱. ۳. ۹

مشاهده می کنیم که بزرگترین و تنها شمارنده ۸ و ۹، عدد یک است، پس این دو عدد نسبت به هم اول هستند.

چند نکته درباره ب م م اعداد

(۱) هر دو عدد متوالی (پست سر هم) نسبت به هم اول هستند. (پس از تدریس مبحث غربال، علت این موضوع را بیان خواهیم نمود.

مثال: اعداد ۸ و ۹ نسبت به هم اول هستند؛ زیرا متوالی هستند.

(۲) هر دو عدد اول مختلف، همیشه نسبت به هم اول هستند. زیرا غیر از خودشان و یک شمارنده دیگری ندارند. یعنی تنها شمارنده مشترک آن ها عدد یک است.

مثال: ب م م ۱۳ و ۱۷ را بیابید.

پاسخ: چون این دو عدد، اول هستند، پس $1 = (13, 17)$.

(۳) ب م م عدد یک و هر عدد طبیعی، برابر یک است. زیرا فقط عدد یک میان شمارنده های آن ها مشترک است. مثلاً $1 = (1, 15^{87})$

نکته مهم: یکی از مهم ترین کاربردهای ب م م دو عدد، ساده کردن کسرها می باشد. بدین صورت که صورت و مخرج هر کسر به ب م م دو عدد قابل تقسیم هستند و ب م م آن ها بزرگترین عددی است که صورت و مخرج به آن ساده می شوند.

پس اگر صورت و مخرج کسری نسبت به هم اول باشند، آن کسر ساده نخواهد شد.

مثال: کسر $\frac{12}{18}$ را ساده کنید.

پاسخ: می دانیم که صورت و مخرج این کسر به اعداد مختلفی ساده می شوند؛ اما از آنجا که ب م م این دو عدد، ۶ می باشد، پس عدد ۶ بزرگترین عددی است که می توان صورت و مخرج این کسر را به آن تقسیم کرد و پس از این تقسیم، کسر ساده تر نخواهد شد. یعنی: $\frac{12}{18} = \frac{2}{3}$.

مثال: کسر زیر را ساده کنید.

$$\frac{123321}{1 + 123321}$$

پاسخ: این کسر ساده نمی شود. زیرا صورت و مخرج آن دو عدد متوالی بوده و نسبت به هم اول هستند.

ک م م

ک م م، مختصر شده عبارت «کوچکترین مضرب مشترک» است. وقتی می خواهیم ک م م دو عدد را بدست آوریم، ابتدا مضارب دو عدد را نوشته، سپس کوچکترین مضرب مشترک آن ها که اولین مضرب مشترکشان است را انتخاب می کنیم. ک م م دو a و b را بصورت $[a, b]$ نمایش می دهیم.

مثال: ک م م دو عدد ۱۲ و ۱۸ را بیابید.

پاسخ: ابتدا مضارب ۱۲ و ۱۸ را می نویسیم:

$$۱۲ \text{ مضارب } : ۱۲, ۲۴, ۳۶, ۴۸, ۶۰, \dots$$

$$۱۸ \text{ مضارب } : ۱۸, ۳۶, ۵۴, ۷۲, ۹۰, \dots$$

مشاهده می شود که اولین و کوچکترین مضرب مشترک دو عدد ۱۸ و ۱۲، عدد ۳۶ می باشد. پس می نویسیم:

$$[۱۲, ۱۸] = ۳۶$$

روش دوم برای محاسبه ک م م دو عدد: ابتدا دو عدد را تجزیه کرده و آن ها را بصورت ضرب شمارنده های اول می نویسیم، سپس عددهای مشترک با بیشترین تکرار را در عدد غیرمشترک ضرب می کنیم.

مثال: ک م م دو عدد ۱۲ و ۱۸ را بیابید.

$$۱۲ = ۲ \times ۲ \times ۳$$

$$۱۸ = ۲ \times ۳ \times ۳$$

عدد ۲ و ۳ هر دو مشترک هستند و بیشترین تکرار هر کدام دو بار است. پس ک م م دو عدد برابر است با:

$$۲ \times ۲ \times ۳ \times ۳ = ۳۶$$

چند نکته درباره ک م م دو عدد:

(۱) از ک م م برای مخرج مشترک گیری استفاده می شود.

مثال: حاصل عبارت زیر را بدست آورید.

$$\frac{5}{12} + \frac{7}{18} = \frac{15 + 14}{36} = \frac{29}{36}$$

توضیح مثال: چون ۳۶، ک م م ۱۲ و ۱۸ می باشد، پس آن را بعنوان مخرج مشترک انتخاب کرده و صورت ها را براساس آن محاسبه می کنیم.

$$(۲) \quad ک م م هر عدد با خودش برابر همان عدد است. مثال: $[۱۴۰۲.۱۴۰۲] = ۱۴۰۲$$$

$$(۳) \quad ک م م هر عدد با یک، برابر همان عدد است. مثال: $[۸۸۸.۱] = ۸۸۸$$$

$$(۴) \quad ک م م دو عدد اول برابر است با حاصل ضرب آن دو عدد. مثال: $[۵.۱۱] = ۵۵$$$

نکته: حاصل ضرب دو عدد طبیعی دلخواه برابر است با حاصل ضرب ب م م در ک م م آن دو عدد. بعنوان مثال برای دو ۱۲ و ۱۸ داریم:

$$۱۲ \times ۱۸ = (۱۲. ۱۸) \times [۱۲. ۱۸]$$

$$\rightarrow ۱۲ \times ۱۸ = ۶ \times ۳۶$$

$$\rightarrow ۲۱۶ = ۲۱۶$$

تعیین اعداد اول به روش غربال

روش غربال برای تعیین اعداد اول: این روش که به روش غربال اراتوستن^۱ مشهور است، با استفاده از حذف عددهای غیراول، به روش زیر به جدا کردن اعداد اول می پردازد. مراحل روش غربال اراتوستن برای غربال اعداد ۱ تا ۱۱ (هر عدد دلخواه):

- (۱) ابتدا همه اعداد خواسته شده را به ترتیب می نویسیم.
- (۲) عدد ۱ را خط می زنیم؛ زیرا نه اول است نه مرکب.
- (۳) چون عدد ۲ اول است، دور آن خط می کشیم، سپس همه مضارب دیگر آن را خط می زنیم. (چون مضارب هر عدد بجز خود آن عدد حتما مرکب هستند).
- (۴) چون عدد ۳ اول است، دور آن خط می کشیم، سپس همه مضارب دیگر آن را خط می زنیم.
- (۵) چون عدد ۵ اول است، دور آن خط می کشیم، سپس همه مضارب دیگر آن را خط می زنیم.
- (۶) چون عدد ۷ اول است، دور آن خط می کشیم، سپس همه مضارب دیگر آن را خط می زنیم.
- (۷) این کار را تا زمانی انجام می دهیم که توان دوم عدد اولی که دور آن خط کشیده ایم، در میان اعداد نباشد.
- (۸) اعدادی که دور آن ها خط کشیده ایم، اول هستند.

^۱Eratosthenes

مثال: می خواهیم اعداد ۱ تا ۴۰ را غربال کنیم:

ابتدا اعداد را به ترتیب می نویسیم. بهتر است نوشتن اعداد بصورت مرتب و در ردیف های ۱۰ تایی صورت پذیرد. برای نظم بهتر آن ها را در جدول می نویسیم:

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰
۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷	۲۸	۲۹	۳۰
۳۱	۳۲	۳۳	۳۴	۳۵	۳۶	۳۷	۳۸	۳۹	۴۰

ما به دنبال پیدا کردن اعداد اول هستیم، پس عدد ۱ را که نه اول است نه مرکب، خط می زنیم. همیشه در غربال عددی که از یک شروع می شوند، اولین عددی که خط می خورد، عدد یک است.

+	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰
۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷	۲۸	۲۹	۳۰
۳۱	۳۲	۳۳	۳۴	۳۵	۳۶	۳۷	۳۸	۳۹	۴۰

چون عدد ۲ اول است، دور آن خط می کشیم، سپس همه مضرب های دیگر آن را چون مرکب هستند، خط می زنیم. برای وضوح بیشتر، خانه های خط خورده بوسیله عدد ۲ را زرد رنگ می کنیم.

+	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰
۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷	۲۸	۲۹	۳۰
۳۱	۳۲	۳۳	۳۴	۳۵	۳۶	۳۷	۳۸	۳۹	۴۰

اولین عددی که بوسیله عدد ۲ خط می خورد، عدد ۴ است. این یعنی عددی قبل از ۴ وجود ندارد که توسط عدد ۲ خط بخورد.

چون عدد ۳ اول است، دور آن خط می کشیم، سپس همه مضرب های دیگر آن را چون مرکب هستند، خط می زنیم. برای وضوح بیشتر، خانه های خط خورده بوسیله عدد ۳ را سبز رنگ می کنیم.

+	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰
۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷	۲۸	۲۹	۳۰
۳۱	۳۲	۳۳	۳۴	۳۵	۳۶	۳۷	۳۸	۳۹	۴۰

اولین عددی که بوسیله عدد ۲ خط می خورد، عدد ۴ است. چون عدد ۶ قبلا توسط عدد ۲ خط خورده است. این یعنی عددی قبل از ۹ وجود ندارد که توسط عدد ۳ خط بخورد.

چون عدد ۵ اول است، دور آن خط می کشیم، سپس همه مضرب های دیگر آن را چون مرکب هستند، خط می زنیم. برای وضوح بیشتر، خانه های خط خورده بوسیله عدد ۵ را آبی رنگ می کنیم.

+	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	+
۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰
۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷	۲۸	۲۹	۳۰
۳۱	۳۲	۳۳	۳۴	۳۵	۳۶	۳۷	۳۸	۳۹	۴۰

اولین عددی که بوسیله عدد ۵ خط می خورد، عدد ۲۵ است. زیرا مضارب قبلی ۵ یعنی ۱۰، ۱۵، ۲۰ توسط اعداد ۲ و ۳ خط خورده اند. این یعنی عددی قبل از ۲۵ وجود ندارد که توسط عدد ۵ خط بخورد.

پس از عدد ۵ نوبت به عدد ۷ می رسد. بنظر شما اولی عددی که بوسیله عدد ۷ خط می خورد، کدام است؟ یک بار دیگر جملات قرمز رنگ درج شده زیر هر جدول را مرور می کنیم:

اولین عددی که بوسیله عدد ۲ خط می خورد، عدد ۴ است.

اولین عددی که بوسیله عدد ۳ خط می خورد، عدد ۹ است.

اولین عددی که بوسیله عدد ۵ خط می خورد، عدد ۲۵ است.

با توجه به این نکات انتظار می رود، اولین عددی که توسط عدد ۷ خط می خورد، عدد ۴۹ باشد. اما از آنجا که عدد ۴۹ در میان عددهای جدول وجود ندارد، یعنی غربال پایان یافته و تمامی اعداد باقیمانده، اول هستند.

(جملات آبی رنگ زیر هر جدول را مجددا بخوانید.)

پس جدول نهایی بصورت زیر است:

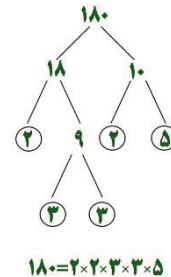
+	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	+
۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰
۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷	۲۸	۲۹	۳۰
۳۱	۳۲	۳۳	۳۴	۳۵	۳۶	۳۷	۳۸	۳۹	۴۰

تکرار یک نکته مهم: اولین عددی که بوسیله یک عدد اول خط می خورد، توان دوم همان عدد است.

تمرین: اعداد ۱ تا ۵۰ را غربال کنید.

نکته: برای اینکه بدانیم، یک عدد در روش غربال توسط چه عددی خط می خورد، باید آن عدد را به عوامل اول تجزیه کنیم، سپس کوچکترین عامل را بعنوان خط زننده عدد موردنظر انتخاب کنیم.
مثال: در غربال اعداد ۱ تا ۱۰۰۰، عدد ۱۸۰ توسط کدام عدد خط میخورد؟
پاسخ: ابتدا ۱۸۰ را تجزیه می کنیم:

چنانکه مشاهده می کنیم، کوچکترین عامل عدد ۲ می باشد. پس ۱۸۰ بوسیله عدد ۲ خط خورده است.
همچنین می توان گفت، چون ۱۸۰ عددی زوج است، پس حتما توسط عدد ۲ خط خورده است.



مثال: بدون اینکه اعداد ۶۰ تا ۸۰ را غربال کنید، به سوالات زیر پاسخ دهید.

الف) اولین عددی که خط می خورد، کدام است؟

پاسخ: چون اعداد از یک شروع نمی شوند، پس اولین عددی که خط می خورد، مضرب ۲ می باشد. اولین مضرب ۲ در میان این اعداد عدد ۶۰ است. پس اولین عددی که خط می خورد، عدد ۶۰ است.

ب) آیا عدد ۸۰ آخرین عددی است که خط میخورد؟

پاسخ: خیر؛ زیرا ۸۰ آخرین عدد از مضرب های عدد ۲ است که خط می خورد و پس از آن مضرب های عدد ۳ خط می خورد.

ج) دومین عدد از مضرب های عدد ۳ که خط می خورد، کدام است؟

پاسخ: اولین مضرب ۳ در میان اعداد ۶۰ تا ۸۰، عدد ۶۰ است. (زیرا: $60 = 3 \times 20$) اما این عدد توسط ۲ خط می خورد. پس از عدد ۶۰، عدد ۶۳ دومین مضرب ۳ در میان این اعداد می باشد. (زیرا $63 = 3 \times 21$). مضرب بعدی عدد ۳، عدد ۶۶ است که زوج بوده و توسط عدد ۲ خط می خورد. پس از آن عدد ۶۹ می باشد، که توسط ۳ خط می خورد و این دومین عددی است که توسط عدد ۳ خط می خورد.

نکته مهم: برای این که تشخیص دهیم یک عدد اول است یا خیر، باید ابتدا بدانیم که آن عدد توسط چه اعدادی ممکن است خط بخورد.

به عنوان مثال عدد ۴۷ نمی تواند توسط عدد ۷ خط بخورد، زیرا اولین عددی که توسط عدد ۷ خط می خورد، عدد ۴۹ است. پس عدد ۴۷ توسط یکی از اعداد اول قبل از ۷، یعنی ۲ یا ۳ یا ۵ ممکن است خط بخورد. اگر توسط هیچ یک از این اعداد خط نخورد، یعنی اول است. برای این که بدانیم ۴۷ توسط این اعداد خط می خورد

یا خیر، باید ۴۷ را به تک تک این اعداد تقسیم کنیم. اگر باقیمانده هیچکدام از تقسیم ها صفر نشد، یعنی اول است؛ در غیر اینصورت مرکب خواهد بود.

$$\begin{array}{r} 47 \quad | \quad 2 \\ -4 \quad | \quad 23 \\ \hline 7 \\ -6 \\ \hline 01 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 47 \quad | \quad 3 \\ -3 \quad | \quad 15 \\ \hline 17 \\ -15 \\ \hline 02 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 47 \quad | \quad 5 \\ -45 \quad | \quad 9 \\ \hline 02 \end{array}$$

چون عدد ۴۷ بر هیچ یک از اعداد ۲ و ۳ و ۵ بخشپذیر نبود، پس مضرب هیچکدام نبوده و خط نمی خورد. یعنی اول است.

همچنین می توان از روش دیگری برای تعیین اعداد اولی که باید عدد خواسته شده را بر آن ها تقسیم کنیم، استفاده کرد. در این روش عدد موردنظر را بر اعداد اول کوچکتر از جذرش تقسیم می کنیم.

مثال: عدد ۴۷ اول است یا خیر؟

پاسخ: چون $\sqrt{47} = 6/8$ پس کافی است، عدد ۴۷ را به اعداد اول قبل از ۶ تقسیم کنیم.

مثال: برای این که بفهمیم ۱۲۳ اول است یا خیر، حداکثر چند تقسیم باید انجام دهیم؟

پاسخ: چون $\sqrt{123} = 11/09$ پس برای این که بدانیم عدد ۱۲۳ اول است یا خیر، باید آن را بر اعداد ۲ و ۳ و ۵ و ۷ و ۱۱ تقسیم کنیم. پس حداکثر باید ۵ تقسیم انجام دهیم.

علت ذکر کلمه «حداکثر» در این سوال این است که ممکن است عدد مورد نظر بر یکی از اعداد مثلا عدد ۳ بخشپذیر باشد و این نتیجه می دهد که عدد ۱۲۳ مرکب است. پس دیگر نیاز به انجام تقسیم های دیگر نیست.

با اسکن این کد، روز حذف اعداد مرکب، به وسیله اعداد اول را ملاحظه کنید.



نکته: در روش غربال، پس از عدد ۱، مضارب عدد ۲ (بجز ۲)، سپس مضارب عدد ۳ (بجز ۳)، بعد از آن مضارب عدد ۵ (بجز ۵) و ... خط می خورند.

تمرین: در غربال اعداد ۱ تا ۳۰۰، ترتیب خط خوردن اعداد ۴، ۹، ۳۰۰، ۴۹، ۸۸ را بنویسید.

مثال: در غربال اعداد ۱ تا ۵۰۰ به سوالات زیر پاسخ دهید.

الف) اولین عددی که خط می خورد، کدام است؟

اولین عددی که خط می خورد، عدد ۱ است.

ب) سومین عددی که خط می خورد، کدام است؟

پس از عدد یک، عدد ۴ بعنوان اولین مضرب مرکب عدد ۲ خط می خورد و پس از آن عدد ۶ خط می خورد. پس عدد ۶ سومین عددی است که در این غربال خط می خورد.

ج) دومین عددی که بوسیله عدد ۳ خط می خورد، کدام است؟

اولین عددی که بوسیله عدد ۳ خط می خورد، عدد ۹ و پس از آن عدد ۱۵ است. (زیرا عدد ۱۲ بدلیل زوج بودن توسط ۲ خط می خورد.)

د) اولین عددی که بوسیله ۱۱ خط می خورد، کدام است؟

$$11^2 = 11 \times 11 = 121$$

ه) آخرین عددی که خط می خورد، کدام است؟

به ضرب های زیر توجه نمایید:

$$2 \times 2 = 4 \quad 3 \times 3 = 9 \quad 5 \times 5 = 25 \quad 7 \times 7 = 49 \quad 11 \times 11 = 121$$

$$13 \times 13 = 169 \quad 17 \times 17 = 289 \quad 19 \times 19 = 361 \quad 23 \times 23 = 529$$

با توجه به ضرب های بالا مشخص می شود که ۱۹ آخرین عددی است که مضاربش اعداد را خط می زنند. پس مضارب ۱۹ را بررسی می کنیم و آخرین عدد قبل از ۵۰۰ را که توسط ۱۹ خط می خورد، مشخص می کنیم:

$$19 \times 19 = 361 \quad 19 \times 23 = 437 \quad 19 \times 29 = 551$$

چون ۵۵۱ از محدوده موردنظر بیشتر است پس آخرین عددی که خط می خورد، ۴۳۷ است.

دقت کنید که مضرب های دیگر عدد ۱۹، یعنی ۱۹ ضربدر اعداد مرکب، نمی توانند آخرین عدد خط خورده باشند، چون قبلا توسط عامل های اول همان عدد مرکب خط خورده اند. مثلا $۲۱ \times ۱۹ = ۳۹۹$ توسط عامل اول ۲۱ یعنی عدد ۳ خط خورده است. ($۲۱ = ۳ \times ۷$)

(و) عدد ۵۰۰ بوسیله کدام عدد خط می خورد؟

چون زوج است، پس بوسیله عدد ۲ خط می خورد.

(ز) عدد ۱۹ بوسیله کدام عدد خط می خورد؟

چون ۱۹ عددی اول است، پس در روند غربال خط نمی خورد.

(ح) عدد ۲۸ کدام عددها را خط می زند؟

چون ۲۸ عددی مرکب است، پس خودش خط می خورد و عددی بواسطه آن خط نمی خورد.

سوال: چرا هر دو عدد متوالی نسبت به هم اولند؟

پاسخ: یادآوری می کنیم که دو عدد زمانی نسبت به هم اولند، که ب م م آن ها برابر یک باشد. حال دو عدد متوالی دلخواه مانند ۷ و ۸ را در نظر می گیریم. واضح است که **عدد یک، شمارنده هر دو عدد می باشد.** همچنین چون از هر دو عدد متوالی یکی زوج و دیگری فرد است، عدد ۲ نمی تواند، شمارنده دو عدد باشد. همینطور می دانیم که فاصله مضارب عدد ۳ از یکدیگر ۳ واحد است. مثلا ۱۲ یکی از مضارب عدد ۳ بوده و مضرب بعدی آن ۱۵ می باشد. پس مضارب ۳ نمی توانند بصورت دو عدد متوالی باشند. این یعنی عدد ۳ شمارنده مشترک دو عدد متوالی نیست. بطور مشابه برای عدد ۵ این گونه است. زیرا بین مضارب ۵، پنج واحد فاصله است. اگر این روند را تا بینهایت ادامه دهیم خواهیم دید، فاصله مضارب اعداد رفته رفته بیشتر می شود و هیچ دو عدد متوالی توسط یک عدد خط نخواهند خورد. نتیجه این سخن این است که **ب م م دو عدد متوالی عدد یک است.**

مثال: پنج عدد بنویسید که بجز ۲ و ۳ شمارنده دیگری نداشته باشند.

پاسخ: اعدادی که فقط از ۲ و ۳ ساخته شده باشند، پاسخ این سوال هستند. برای ساخت این اعداد بطریق زیر عمل می کنیم:

$$۲ \times ۳ = ۶$$

$$۲ \times ۲ \times ۳ = ۱۲$$

$$۲ \times ۲ \times ۳ \times ۳ = ۳۶$$

$$۲ \times ۲ \times ۲ \times ۳ = ۲۴$$

$$۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۳ = ۴۸$$

برخی سوالات و اشتباهات رایج دانش آموزان در درس اعداد اول

(۱) چرا بعد از خط زدن مضرب های عدد ۳، مضرب های عدد ۵ را خط می زنیم و مضرب های عدد ۴ را خط نمی زنیم؟ (و سوالات مشابه اینچنینی)

پاسخ: چون مضربهای عدد ۴، زوج هستند و توسط عدد ۲ خط خورده اند. مثلا عدد ۱۶ با وجود اینکه مضرب ۴ است، اما مضرب عدد ۲ نیز بوده و بوسیله ۲ خط خورده است. همچنین دیگر مضرب های عدد ۴.

بطورکلی در روند غربال نباید مضرب های عدد مرکب را خط بزنیم. زیرا توسط اعداد اول خط میخورند.

(۲) چرا اعداد به ترتیب از کوچک به بزرگ خط نمی خورند؟

پاسخ: چون عدد ۲ اولین عددی است که مضرب هایش را خط می زند، پس تمام اعداد زوج غیر از ۲ بوسیله ۲ خط می خورند. مثلا در غربال اعداد ۱ تا ۱۰۰، عدد ۱۰۰ به عنوان آخرین مضرب عدد ۲ خط می خورد؛ پس از اتمام حذف مضارب عدد ۲ نوبت به عدد ۳ می رسد و اولین عددی که بوسیله عدد ۳ خط می خورد، عدد ۹ می باشد. یعنی عدد ۹ بعد از عدد ۱۰۰ خط میخورد و این بخاطر حذف اعداد زوج توسط عدد ۲ می باشد و

موفق باشید

سجاد بیرانوند

دبیر ریاضی شهرستان بروجرد

آیدی تلگرام: @Sajaadbeiranvand

آبان ۱۴۰۲