



www.riazisara.ir **سایت ویژه ریاضیات**

درسنامه ها و جزوه های دروس ریاضیات

دانلود نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نمونه سوالات و پاسخنامه کنکور

دانلود نرم افزارهای ریاضیات

...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

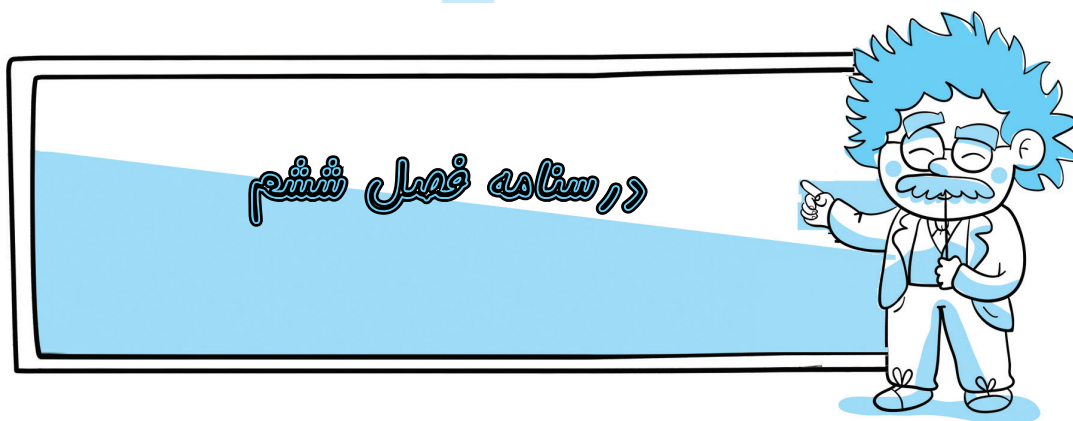
<https://telegram.me/riazisara>

[@riazisara](https://t.me/riazisara)



فصل ششم
سطح و حجم

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir



مجموعه های هندسی



با نگاه به اطراف خود اجسامی را می بینیم که یا طبیعی اند و یا ساخته دست انسان می باشند. همه اجسامی که می بینیم دارای حجم می باشند.

حجم ها را می توان به دو دسته هندسی و غیر هندسی تقسیم کرد.

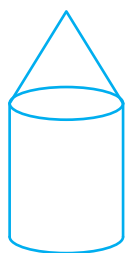
حجم های هندسی: دارای شکل ها و ویژگی های مشخص و تعریف شده هستند. مانند: مکعب، استوانه و مخروط و ...

حجم های غیر هندسی: شکل های مشخص و تعریف شده ای ندارند. مانند: ماشین اسباب بازی و یک تکه سنگ و فنجان و ...

حجم های هندسی به سه دسته تقسیم می شوند:

نام حجم	مثال
حجم های منشوری	
حجم های هرمی	
حجم های کروی	

حجم‌های ترکیبی هندسی: برخی از حجم‌های هندسی ترکیبی از حجم منشوری، هرمی و کروی هستند، که به آنها حجم‌های ترکیبی می‌گوییم.



ترکیبی از منشور و هرم



ترکیبی از منشور و -کره

حجم‌های منشوری: حجم‌های منشوری حجم‌هایی هستند که دو قاعده موازی دارند و این قاعده‌ها از دو شکل هم‌نهشت تشکیل شده‌اند. و هر برشی موازی قاعده‌ها، شکلی هم‌نهشت با قاعده‌ها می‌سازد.

منشور چندپهلوی: حجم منشوری که قاعده‌های آن چندضلعی است، منشور چندپهلوی گفته می‌شود.

استوانه: حجم منشوری که قاعده‌های آن دایره می‌باشد، استوانه می‌گوییم.

قاعده منشوری: در یک منشور چندپهلوی، به دو سطح بالا و پائین منشور که دو چندضلعی مساوی هستند قاعده منشور می‌گوییم.

وجه جانبی: بدنه یک منشور چندپهلوی از تعدادی مستطیل یا متوازی‌الاضلاع تشکیل شده است، که به آنها وجه‌های جانبی منشور یا پهلوه‌ای منشور می‌گوییم. منشور را با تعداد پهلوه‌ای آن نام می‌بریم.

یال منشور: محل برخورد هر دو وجه را یال می‌گوییم.

نکته ۱ تعداد یال‌های منشور سه برابر تعداد اضلاع قاعده منشور است.

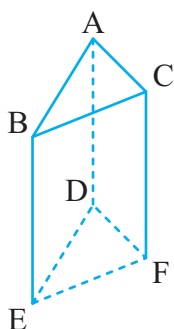


رأس منشور: به نقطه برخورد هر یال با قاعده منشور رأس می‌گوییم. به بیان دیگر به نقطه برخورد هر سه سطح رأس می‌گوییم.

نکته ۲ تعداد رأس‌های منشور دو برابر تعداد اضلاع قاعده منشور است.



مثال ۱ در حجم مقابل نام منشور، قاعده‌ها، وجه‌های جانبی، رأس‌ها و یال‌ها را بنویسید:



پاسخ: نام منشور: منشور سه پهلوی



قاعده‌ها ← ۲ قاعده: $\triangle ABC$ و $\triangle DEF$

رأس‌ها ← ۶ رأس: A, B, C, D, E, F

وجه‌های جانبی ← ۳ وجه جانبی: ABED, ADFC, CBEF

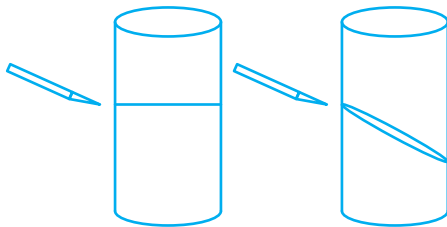
یال‌ها ← ۹ یال: AB, AC, BC, EF, DE, DF, AD, BE, CF

مثال ۲ منشوری ۵۰ رأس دارد. این منشور چند یال دارد:



تعداد اضلاع قاعده $50 \div 2 = 25$

تعداد یال ها $3 \times 25 = 75$

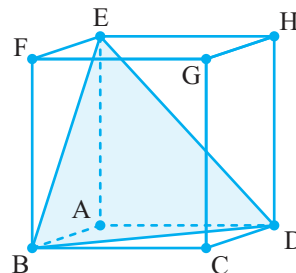
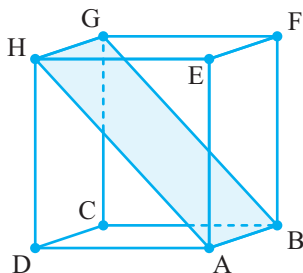
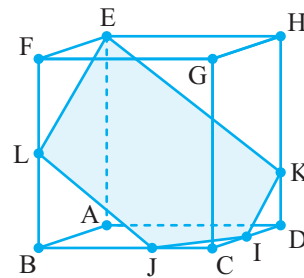
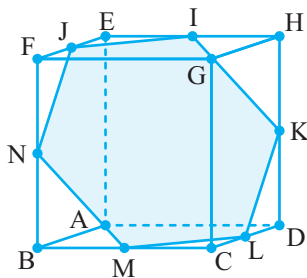


مقطع زوئ: اگر یک منشور را با یک چاقو برش بزنیم و سطح برش خورده را رنگ کرده و روی یک کاغذ بزنیم، اثر آن به شکل های هندسی مانند: مربع، مستطیل، دایره، بیضی و دیده می شود. به این کار «مقطع زدن» می گویند.

مثال ۳ سطح مقطع یک مکعب به چه شکل هایی می تواند باشد؟

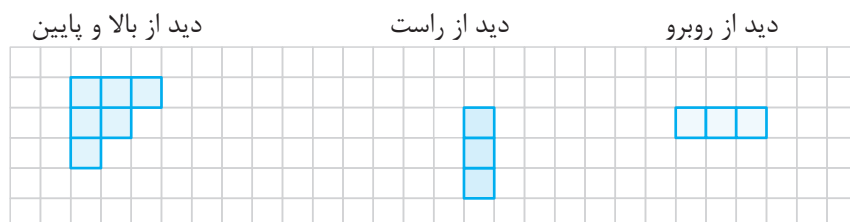
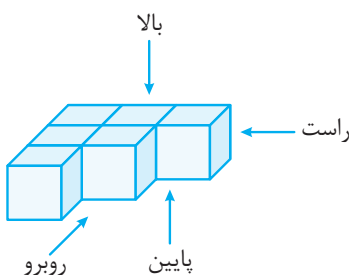


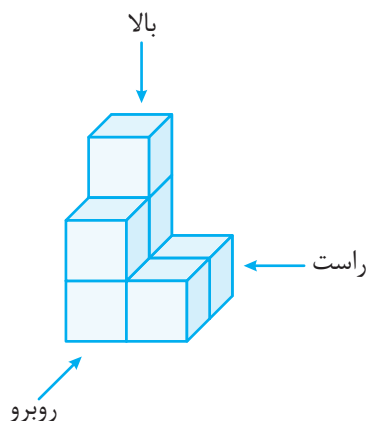
پاسخ: سطح مقطع یک مکعب می تواند به شکل مثلث و چهارضلعی (مربع، مستطیل، لوزی، متوازی الاضلاع، دوزنقه) و پنج ضلعی و شش ضلعی باشد.



نمایش مختلف یک جسم: اگر یک حجم هندسی را از جهت های مختلف (روبرو، بالا، سمت راست و پائین) نگاه کنیم، ممکن است شکل های هندسی متفاوتی دیده شود.

مثال ۴ حجم های زیر از چهار نما به شکل های زیر دیده می شود:

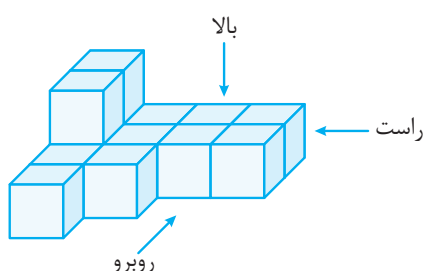
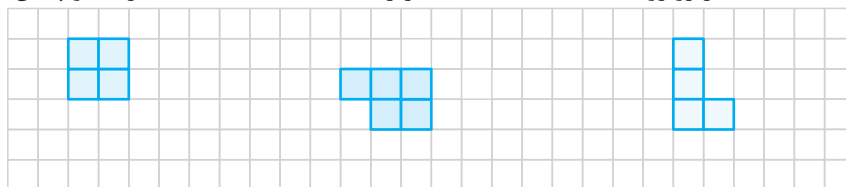




دید از بالا و پایین

دید از راست

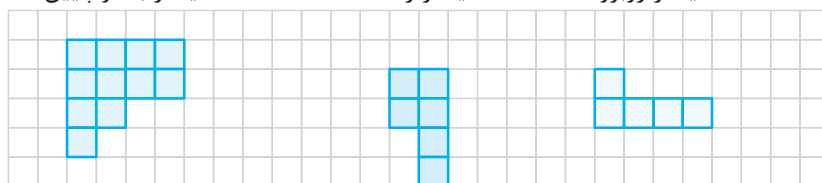
دید از روبرو



دید از بالا و پایین

دید از راست

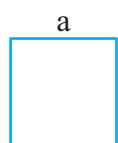
دید از روبرو



محاسبه حجم‌های منشوری

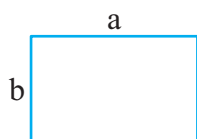


برای محاسبه حجم‌های منشوری، از رابطه $v = s.h$ یا ارتفاع منشور $\times$ مساحت قاعده = حجم استفاده می‌کنیم. قاعده یک منشور می‌تواند یک شکل هندسی یا ترکیبی از چند شکل هندسی باشد. در این قسمت مساحت اشکال مختلف را یادآوری می‌کنیم.



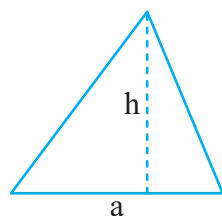
مساحت مربع: اگر ضلع مربع را با a و مساحت آن را با s نشان دهیم. خواهیم داشت:

$$s = a \times a = a^2 \text{ و خودش } \times \text{ یک ضلع} = \text{مساحت مربع}$$



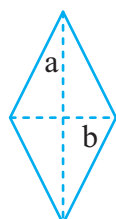
مساحت مستطیل: اگر طول و عرض مستطیل را به ترتیب با a و b نشان دهیم. خواهیم داشت:

$$s = a \times b = ab \text{ و عرض } \times \text{ طول} = \text{مساحت مستطیل}$$



مساحت مثلث: اگر در یک مثلث ارتفاع را با h و قاعده را با a نشان دهیم خواهیم داشت:

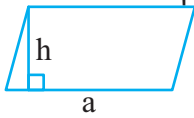
$$s = \frac{a \times h}{2} = \frac{1}{2}ah \text{ و ارتفاع } \times \text{ قاعده} = \text{مساحت مثلث}$$



مساحت لوزی: اگر در یک لوزی قطر بزرگ و کوچک را به ترتیب با a و b نشان دهیم. خواهیم داشت:

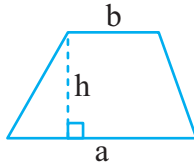
$$s = \frac{a \times b}{2} = \frac{1}{2}ab \text{ و قطر کوچک } \times \text{ قطر بزرگ} = \text{مساحت لوزی}$$

مساحت متوازی الاضلاع: اگر در یک متوازی الاضلاع ارتفاع را با h و قاعده را با a نشان دهیم. خواهیم داشت:



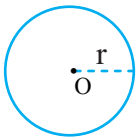
$$s = a \times h = ah \quad \text{و} \quad \text{ارتفاع} \times \text{قاعده} = \text{مساحت متوازی الاضلاع}$$

مساحت ذوزنقه: اگر در یک ذوزنقه قاعده‌ها به ترتیب با a و b و ارتفاع را با h نشان دهیم، خواهیم داشت:



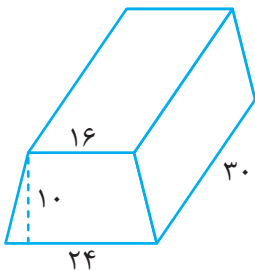
$$s = \frac{(a+b) \times h}{2} = \frac{1}{2}(a+b)h \quad \text{و} \quad \text{ارتفاع} \times \frac{\text{مجموع دو قاعده}}{2} = \text{مساحت ذوزنقه}$$

مساحت دایره: اگر در یک دایره شعاع را با r و عدد پی را با π نشان دهیم، خواهیم داشت:



$$s = r \times r \times \pi = \pi r^2 \quad \text{و} \quad \text{شعاع} \times \text{شعاع} \times 3/14 = \text{مساحت دایره}$$

مثال ۵: حجم شکل مقابل را محاسبه کنید:



$$s = \frac{(16+24) \times 10}{2} = 200 \text{ cm}^2$$

$$v = s \times h = 200 \times 30 = 6000 \text{ cm}^3$$



نکته ۴: مکعبی که طول هر یال آن a باشد حجم آن از رابطه $v = a \times a \times a = a^3$ به دست می‌آید.



مثال ۶: حجم مکعبی که طول هر یال آن ۷ سانتی‌متر می‌باشد را به دست آورید:

$$v = 7 \times 7 \times 7 = 343 \text{ cm}^3$$



نکته ۵: اگر ابعاد مکعب مستطیلی به صورت a و b و c باشد، حجم آن از رابطه $v = a \times b \times c$ به دست می‌آید.



مثال ۷: حجم مکعب مستطیلی به ابعاد ۳ و ۵ و ۷ دسی‌متر را به دست آورید:

$$v = 3 \times 5 \times 7 = 105 \text{ dm}^3$$



نکته ۶: حجم یک استوانه به شعاع قاعده r و ارتفاع h از رابطه $v = \pi \times r \times r \times h = \pi r^2 h$ به دست می‌آید.



مثال ۸: حجم استوانه‌ای به شعاع قاعده ۱ متر و ارتفاع ۲ متر را به دست آورید:

$$v = \pi \times 1^2 \times 2 = 2\pi = 2 \times 3/14 = 6/7 \text{ m}^3$$



نکته ۷ اگر طول ضلع مکعبی n برابر شود حجم آن n^3 برابر می شود.



مثال ۹ اگر طول ضلع مکعبی را ۳ برابر کنیم حجم آن چند برابر می شود؟



برابر $3 \times 3 \times 3 = 27$

پاسخ:



نکته ۸ برای بیان حجم از واحدهای مترمکعب، لیتر، سانتی متر مکعب، دسی متر مکعب، میلی متر مکعب و ... استفاده می شود که برای تبدیل این واحدها به هم، می توان از جدول زیر استفاده کرد:



۱ متر مکعب = ۱۰۰۰ لیتر	۱ سی سی = ۱۰۰۰ میلی متر مکعب	۱ لیتر = ۱۰۰۰ سانتی متر مکعب
۱ متر مکعب = ۱۰۰۰ دسی متر مکعب	۱ سی سی = ۱ سانتی متر مکعب	۱ لیتر = ۱۰۰۰ سی سی
۱ متر مکعب = ۱۰۰۰۰۰۰ سی سی	۱ سی سی = یک میلی لیتر	۱ لیتر = ۱ دسی متر مکعب
۱ متر مکعب = ۱۰۰۰۰۰۰ سانتی متر مکعب		
۱ لیتر = ۱۰۰۰ میلی لیتر		

مثال ۱۰ حجم مکعبی به ضلع ۵۰ سانتی متر، چند دسی متر مکعب است؟



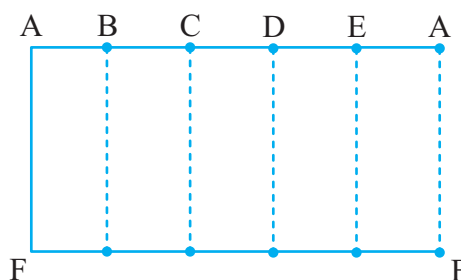
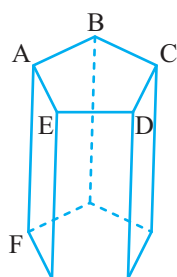
$50 \times 50 \times 50 = 125000 \text{ cm}^3$ = حجم مکعب

لیتر یا دسی متر مکعب $125000 \div 1000 = 125$

پاسخ:



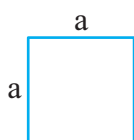
مساحت جانبی حجم های منشوری: منشور پنج پهلوی زیر را در نظر بگیرید که قاعده ندارد. این منشور را از روی یال AF می بریم و آن را روی صفحه می گسترانیم. شکلی که ساخته می شود با مساحت جانبی منشور مساوی است.



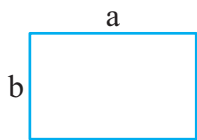
محاسبه مساحت جانبی منشوره: برای محاسبه مساحت جانبی حجم های منشوری از رابطه زیر استفاده می کنیم:

$s_{\text{جانبی}} = p \times h$ یا ارتفاع $\times$ محیط قاعده = مساحت جانبی

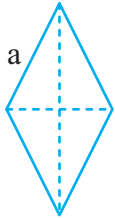
برای محاسبه مساحت جانبی حجم های منشوری نیاز به محاسبه محیط قاعده داریم. در زیر به یادآوری محیط اشکال هندسی می پردازیم:



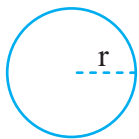
$p = a \times 4 = 4a$ و $4 \times \text{یک ضلع} = \text{محیط مربع}$



$p = 2(a + b)$ و $2 \times (\text{مجموع طول و عرض}) = \text{محیط مستطیل}$

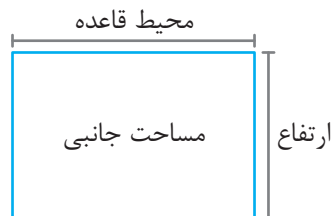
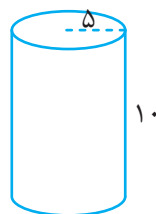


$p = a \times 4 = 4a$ و $4 \times \text{یک ضلع} = \text{محیط لوزی}$



$p = 2\pi r$ و $\text{عدد پی} \times \text{قطر} = \text{محیط دایره}$

مثال ۱۱ مساحت جانبی استوانه‌ای به شعاع قاعده ۵ و ارتفاع ۱۰ سانتی‌متر را محاسبه کنید:



$$\text{محیط قاعده استوانه (دایره)} = 5 \times 2 \times 3.14 = 31.4 \text{ cm}^2$$

$$\text{مساحت جانبی} = 31.4 \times 10 = 314 \text{ cm}^2$$

مثال ۱۲ مساحت جانبی یک منشور پنج‌پهلوی که اندازه هر ضلع آن ۲ سانتی‌متر و ارتفاع آن ۱۲ سانتی‌متر است را به‌دست آورید:



$$p = \text{محیط قاعده} = 5 \times 2 = 10 \text{ cm}$$

$$s = p.h = 10 \times 12 = 120 \text{ cm}^2$$

مساحت جانبی یک مکعب که a اندازه یال آن است همواره از رابطه زیر به‌دست می‌آید:



$$s_{\text{جانبی}} = 4 \times a \times a$$

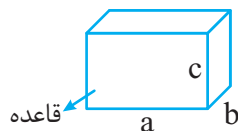
مثال ۱۳ مساحت جانبی مکعبی که اندازه هر یال آن ۵ cm است را محاسبه کنید؟



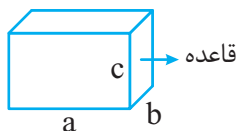
$$\text{مساحت جانبی} = 4 \times 5 \times 5 = 100 \text{ cm}^2$$



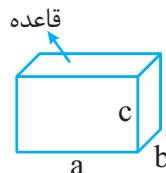
نکته ۱) در مکعب مستطیل مهم است که بدانیم قاعده چه ابعادی دارد پس با توجه به شکل‌های زیر برای مساحت جانبی سه حالت ایجاد می‌شود:



$$s_{\text{جانبی}} = 2(a + c) \times b$$



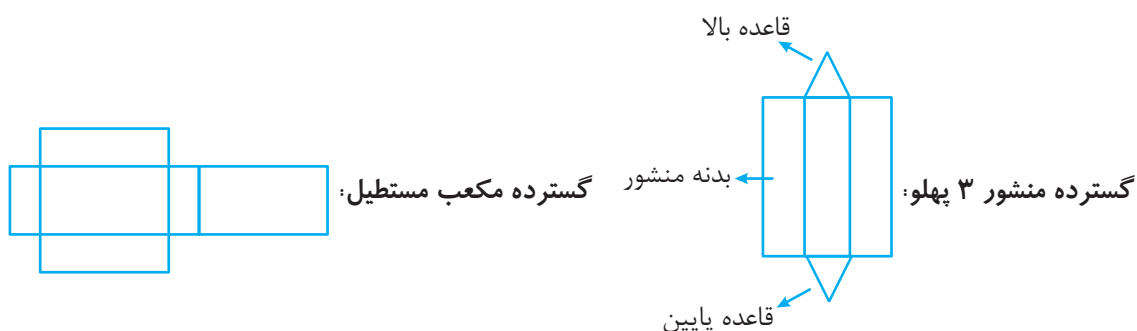
$$s_{\text{جانبی}} = 2(b + c) \times a$$



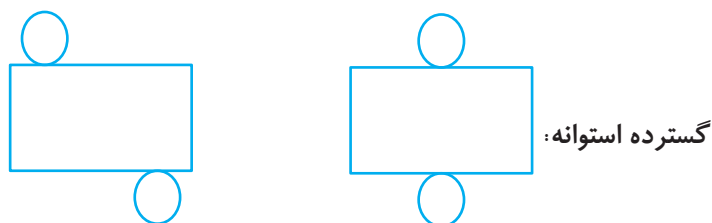
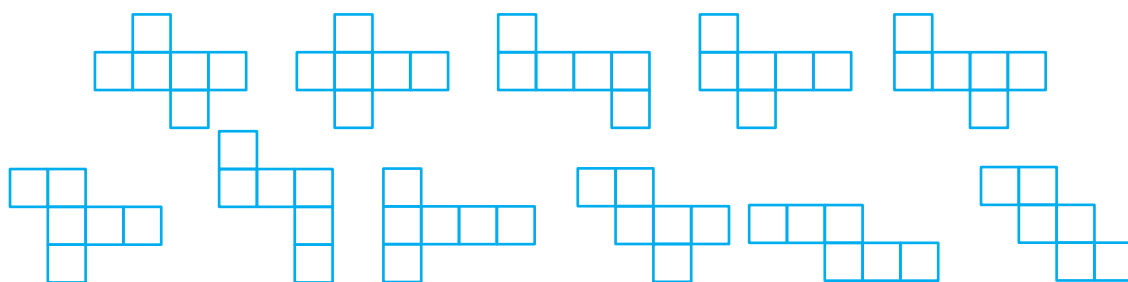
$$s_{\text{جانبی}} = 2(a + b) \times c$$

نکته ۲) بین همه مکعب مستطیل‌ها با مساحت جانبی ثابت، بیشترین حجم را مکعب دارد.

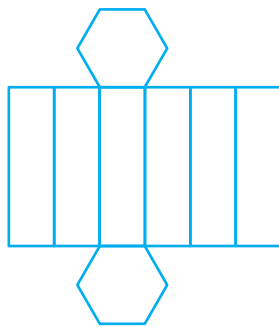
گسترده مهم‌های منشوری:



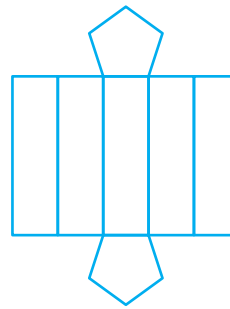
گسترده مکعب: شکل‌های مختلفی برای گسترده مکعب می‌توان در نظر گرفت:



گسترده استوانه:



گسترده منشور ۶ پهلو:

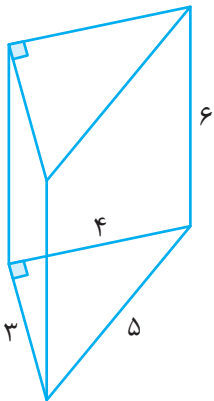


گسترده منشور ۵ پهلو:

مساحت کل منشور: برای به دست آوردن مساحت کل یک منشور کافی است مساحت جانبی منشور را با مساحت دو قاعده جمع کرد.

$$\text{مساحت کل} = \text{مساحت جانبی منشور} + (\text{مساحت قاعده} \times 2)$$

مثال ۱۴: در شکل مقابل مساحت کل منشور را محاسبه کنید: (واحدها بر حسب سانتی متر می باشند)



$$p = 4 + 3 + 5 = 12 \text{ cm}$$

$$S_{\text{جانبی}} = 12 \times 6 = 72 \text{ cm}^2$$

$$S_{\text{جانبی}} = \frac{4 \times 3}{2} = 6 \text{ cm}^2$$

$$S_{\text{جانبی}} = 72 + (2 \times 6) = 84 \text{ cm}^2$$



نکته ۱۲: اگر ضلع مکعبی n برابر شود مساحت جانبی و مساحت کل آن n^2 برابر و حجم آن n^3 برابر می شود.

مثال ۱۵: اگر ضلع مکعبی را سه برابر کنیم، حجم، مساحت جانبی و مساحت کل آن چند برابر می شود؟

$$\text{برابر} \quad 3 \times 3 = 9 = \text{مساحت کل و مساحت جانبی}$$

$$\text{برابر} \quad 3 \times 3 \times 3 = 27 = \text{حجم}$$

مثال ۱۶: اگر اضلاع مکعبی را نصف کنیم، حجم و مساحت جانبی و مساحت کل آن چند برابر می شود؟

$$\text{برابر} \quad \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8} = \text{مساحت کل و مساحت جانبی}$$

$$\text{برابر} \quad \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8} = \text{حجم}$$

نکته ۱۳: اگر طول و عرض و ارتفاع یک مکعب مستطیل عدد طبیعی باشند مساحت کل آن عددی زوج است.

$$S_{\text{جانبی}} = 2ab + 2ac + 2bc = 2(ab + ac + bc) \rightarrow \text{هر مضرب طبیعی ۲، زوج است}$$

حاصل ضرب مساحت های سه وجه متمایز یک مکعب مستطیل با مجذور حجم آن برابر است.

$$ab \times ac \times bc = a^2 b^2 c^2 = (abc)^2$$

مثال ۱۷ مساحت وجه‌های یک مکعب مستطیل ۷، ۲۸ و ۲۵ سانتی‌متر مربع است. حجم مکعب مستطیل را حساب کنید:



پاسخ:



$$(abc)^2 = ab \times ac \times bc = 7 \times 28 \times 25 = 7^2 \times 5^2 \times 7^2 = (7 \times 5 \times 7)^2 \longrightarrow abc = 7 \times 5 \times 7 = 7 \times 5 \times 7 = 245 \text{ cm}^3$$

مکعب مستطیل‌های با حجم ثابت، وقتی کوچک‌ترین مساحت کل را دارند که مکعب باشند.

نکته ۱۵



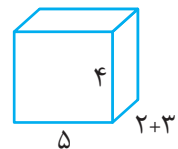
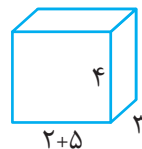
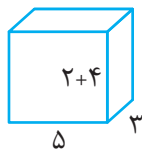
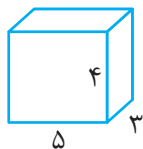
نکته ۱۶ اگر بخواهیم عدد دلخواهی را به یکی از ابعاد مکعب مستطیل اضافه کنیم، کم‌ترین افزایش حجم زمانی حاصل می‌شود که آن عدد را به بزرگ‌ترین بعد اضافه کنید.



مثال ۱۸ مکعب مستطیلی به ابعاد ۳ و ۴ و ۵ دسی‌متر داریم. به کدام بعد آن ۲ دسی‌متر اضافه کنیم که حجم آن کم‌ترین افزایش را داشته باشد؟



پاسخ:



$$V = 3 \times 4 \times 5 = 60 \text{ لیتر}$$

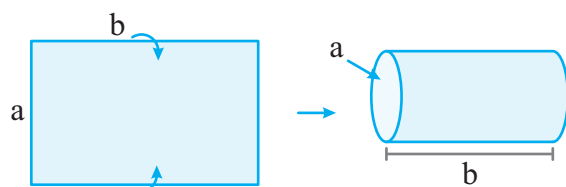
$$V = 3 \times 6 \times 5 = 90 \text{ لیتر}$$

$$V = 5 \times 4 \times 5 = 100 \text{ لیتر}$$

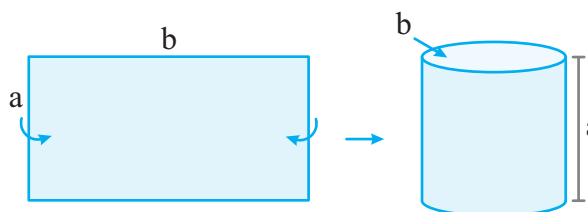
$$V = 3 \times 4 \times 7 = 84 \text{ لیتر}$$

اگر ۲ دسی‌متر به بعد بزرگ‌تر مکعب مستطیل یعنی ۵ دسی‌متر اضافه کنید حجم آن ۲۴ لیتر اضافه می‌شود که کم‌ترین افزایش حجم را دارد.

مهم و سطح:



اگر یک مستطیل به طول و عرض مشخص را از طول آن لوله کنیم طول مستطیل برابر با ارتفاع استوانه و عرض مستطیل برابر با محیط قاعده استوانه می‌باشد.



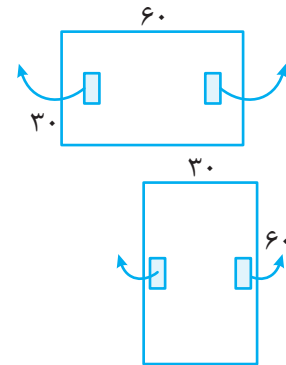
اگر یک مستطیل به طول و عرض مشخص را از عرض آن لوله کنیم عرض مستطیل برابر با ارتفاع استوانه و طول مستطیل برابر با محیط قاعده استوانه می‌باشد.

مثال ۱۹ مستطیلی به ابعاد ۶۰ و ۳۰ سانتی‌متر را یک‌بار از طول و یک‌بار از عرض آن لوله می‌کنیم. حجم شکل حاصل را در دو حالت به دست آورده و با هم مقایسه کنید: چه نتیجه‌ای می‌گیرید: ($\pi \approx 3$)



$$\text{محیط قاعده استوانه} = 60 \rightarrow 2\pi r = 60 \rightarrow 2 \times 3 \times r = 60 \rightarrow r = 10 \text{ cm}$$

$$v = \pi \times r \times r \times h = 3 \times 10 \times 10 \times 30 = 9000 \text{ cm}^3$$



$$\text{محیط قاعده استوانه} = 30 \rightarrow 2\pi r = 30 \rightarrow 2 \times 3 \times r = 30 \rightarrow r = 5 \text{ cm}$$

$$v = \pi \times r \times r \times h = 3 \times 5 \times 5 \times 60 = 4500 \text{ cm}^3$$

حجم استوانه در حالت اول بیشتر از حالت دوم است در نتیجه اگر بخواهیم با یک مستطیل استوانه‌ای بسازیم که حجم آن بیشتر باشد باید ارتفاع منشور با عرض مستطیل برابر باشد.

دوران و تشکیل حجم: با دوران یک سطح حول یک محور (خط) در فضا، حجم ساخته می‌شود. اگر یک مستطیل را حول طول یا حول عرض آن دوران دهیم، استوانه تشکیل می‌شود که حجم‌های این دو حالت دوران، برابر نخواهند بود. (طول و عرض مستطیل برابر نیستند)

کتاب ۱۷



در حالت کلی آن ضلع مستطیل که حولش دوران انجام می‌شود، ارتفاع استوانه و ضلع دیگر، شعاع قاعده استوانه است.

مثال ۲۰ مستطیل ABCD را یک‌بار حول طول و یک‌بار حول عرضش دوران داده و حجم شکل‌های حاصل از این دو دوران را حساب کنید: حجم‌های حاصل را با هم مقایسه کنید: ($\pi \approx 3$)



الف) دوران حول طول: استوانه‌ای به ارتفاع ۲۰ cm و شعاع قاعده ۱۰ cm ایجاد می‌گردد.

$$v = \pi \times r \times r \times h = 3 \times 10 \times 10 \times 20 = 6000 \text{ cm}^3$$

ب) دوران حول عرض: استوانه‌ای به ارتفاع ۱۰ cm و شعاع قاعده ۲۰ cm ایجاد می‌گردد.

$$v = \pi \times r \times r \times h = 3 \times 20 \times 20 \times 10 = 12000 \text{ cm}^3$$

با توجه به حجم استوانه‌ها می‌توان نتیجه گرفت اگر مستطیلی را حول عرضش دوران دهیم حجم آن بیشتر خواهد شد.

نکته ۱۸



۱) از دوران یک مثلث قائم الزاویه، حول هر ضلع قائمه آن، مخروط به دست می آید.

۲) از دوران یک مثلث قائم الزاویه حول وتر آن دو مخروط، با قاعده یکسان و به هم چسبیده در قاعده به دست می آید.

۳) از دوران نیم دایره حول قطرش، کره به دست می آید.

۴) از دوران یک ربع دایره حول شعاع آن، نیم کره به دست می آید.

۵) از دوران لوزی حول هر قطر آن، دو مخروط برابر و به هم چسبیده در قاعده به دست می آید.

نکته ۱۹



اگر مستطیلی را به طول a و عرض b یک بار حول طول و یک بار حول عرض آن دوران دهیم، نسبت حجم و همچنین نسبت مساحت کل استوانه های ایجاد شده در دو حالت از روابط زیر به دست می آید:

$$\frac{\text{حجم طول ضلع } a}{\text{حجم طول ضلع } b} = \frac{V_a}{V_b} = \frac{a}{b} \quad \frac{\text{مساحت کل طول ضلع } a}{\text{مساحت کل طول ضلع } b} = \frac{S_a}{S_b} = \frac{a}{b}$$

مثال ۱۹ مستطیلی به ابعاد ۳ و ۵ را یک بار حول طول و یک بار حول عرضش دوران می دهیم.



الف) نسبت حجم جسم اول به حجم جسم دوم چقدر است؟

ب) نسبت مساحت کل جسم اول به مساحت کل جسم دوم چقدر است؟

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{3}{5} \quad \frac{S_1}{S_2} = \frac{3}{5}$$



نکته ۲۰ اگر مستطیل را حول ضلع کوچک ترش (عرض آن) دوران دهیم، بزرگ ترین استوانه ساخته می شود.



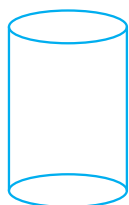
نکته ۲۱ در صورتی که محیط قاعده و ارتفاع دو جسم منشوری با هم برابر باشند حجم جسمی بیش تر

است که قاعده آن محور تقارن بیش تری داشته باشد، به عبارتی حجم جسمی بیش تر است که

قاعده آن محور تقارن های بیشتری داشته باشد.



مثال ۲۲ در دو حجم منشوری زیر محیط قاعده برابر $۶/۲۸$ سانتی متر و ارتفاع هر دو ۲ سانتی متر می باشد. حجم کدام یک بیش تر است؟

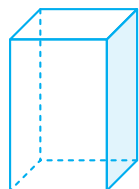


$$\text{قطر} = ۶/۲۸ \div ۳/۱۴ = ۲ \text{ cm}$$

$$\text{محیط قاعده استوانه} = \text{قطر} \times ۳/۱۴ = ۶/۲۸$$

$$۱۲/۵۶ = ۴ \times \text{یک ضلع} = \text{محیط قاعده مکعب مستطیل (مربع)}$$

$$\text{حجم استوانه} = ۲ \times ۲ \times ۳/۱۴ = ۲۵/۱۲$$



$$\text{یک ضلع} = ۱۲/۵۶ \div ۴ = ۳/۱۴ \text{ cm}$$

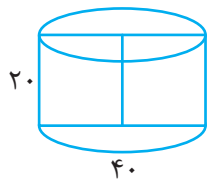
$$\text{حجم مکعب مستطیل} = ۳/۱۴ \times ۳/۱۴ \times ۲ = ۱۹/۷۱۹۲ \text{ cm}^3$$



همچنین می‌توان با توجه به نکته (۲۱)، گفت: حجم استوانه بیش‌تر از حجم مکعب مستطیل است. زیرا قاعده استوانه دایره است و بی‌شمار محور تقارن دارد ولی قاعده مکعب مستطیل بالا مربع است و چهار محور تقارن دارد.

نکته ۲۲ زمانی که مستطیل را حول محوری که از وسط عرضش می‌گذرد دوران بدهیم، در این حالت طول برابر با ارتفاع استوانه و شعاع قاعده برابر نصف عرض می‌باشد.

مثال ۲۳ مستطیلی به ابعاد ۴۰ و ۲۰ سانتی‌متر را حول پاره‌خطی که وسط طول‌های آن را به هم وصل می‌کند دوران می‌دهیم، حجم حاصل از این دوران را به دست آورید:



$$s = \pi r^2 = 3/14 \times 20 \times 20 = 1256 \text{ cm}^2$$

$$v = s.h = 1256 \times 20 = 25120 \text{ cm}^3$$

پاسخ:

نکته ۲۳ از دوران ۳۶۰ درجه یک مستطیل حول طول یا عرضش یک استوانه کامل ایجاد می‌شود ولی اگر آن مستطیل را با کم‌تر از ۳۶۰ درجه دوران بدهیم حجم حاصل را می‌توانیم با استفاده از تناسب محاسبه کنیم.

مثال ۲۴ مستطیلی به طول ۵ سانتی‌متر و عرض ۴ سانتی‌متر را حول عرضش به اندازه ۳۰ درجه دوران می‌دهیم. حجم حاصل چه قدر است؟ ($\pi \approx 3$)

این حجم برای دوران ۳۶۰ درجه است $\rightarrow 75 \times 4 = 300 \text{ cm}^3$ و $75 \text{ cm}^2 = 3 \times 5 \times 5$ مساحت قاعده

$$\frac{\text{درجه}}{\text{حجم}} = \frac{360}{300} = \frac{30}{x} \rightarrow x = \frac{300 \times 30}{360} = 25 \text{ cm}^2$$

نکته ۲۴ اگر با تعدادی مکعب به ابعاد یک واحد، مکعب بزرگ‌ترین به ضلع n واحد بسازیم و سطح مکعب بزرگ را رنگ کنیم:

$$(n-2) \times (n-2) \times (n-2)$$

تعداد مکعب‌هایی که رنگ نمی‌شوند:

$$6 \times (n-2) \times (n-2)$$

تعداد مکعب‌هایی که یک وجه آنها رنگ می‌شوند:

$$12 \times (n-2)$$

تعداد مکعب‌هایی که دو وجه آنها رنگ می‌شوند:

تا ۸

تعداد مکعب‌هایی که سه وجه آنها رنگ می‌شوند:

مثال ۲۵ با ۱۲۵ مکعب کوچک یک مکعب بزرگ ساخته‌این. تمام وجوه آن را رنگ می‌زنیم و سپس مکعب‌ها را از هم جدا می‌کنیم. چند مکعب رنگی حداقل یک وجه رنگ شده دارند؟

پاسخ: برای این کار کافی است محاسبه کنیم چند مکعب اصلاً رنگ ندارند، بنابراین بقیه مکعب‌ها حداقل یک وجه رنگی دارند.



$$V = 125 \Rightarrow \text{ضلع مکعب} = 5 \Rightarrow n = 5$$

$$3 \times 3 \times 3 = 27 \text{ اصلاً رنگ نشده‌اند}$$

$$125 - 27 = 98$$

نکته ۲۵: برای برش مکعبی به ضلع n و تبدیل به مکعب‌هایی به ضلع یک، حداقل تعداد برش‌های لازم برابر است با: $3 \times (n - 1)$ ، به شرط آن که امکان جابه‌جا کردن مکعب‌ها را نداشته باشیم.

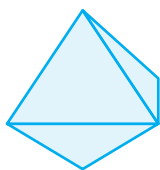


مثال ۲۶: برای تبدیل مکعب $5 \times 5 \times 5$ به مکعب‌های $1 \times 1 \times 1$ ، حداقل چند برش لازم است؟

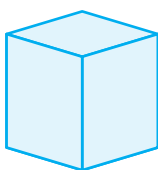


$$3 \times (5 - 1) = 12$$

چندوجهی‌های منتظم: یک چندوجهی را منتظم می‌گوییم هرگاه، وجه‌های آن، چندضلعی منتظم مساوی باشند. تنها ۵ چندوجهی منتظم وجود دارد که عبارتند از:



هشت وجهی منتظم



شش وجهی منتظم



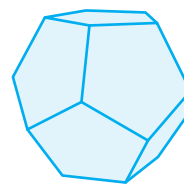
چهاروجهی منتظم

(با چهار وجه به شکل مثلث متساوی‌الاضلاع) (با شش وجه مربع شکل) (با هشت وجه به شکل مثلث متساوی‌الاضلاع)



بیست وجهی منتظم

(با بیست وجه به شکل مثلث متساوی‌الاضلاع)



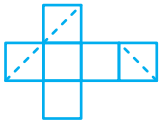
دوازده وجهی منتظم

(با دوازده وجه به شکل پنج ضلعی منتظم)

آزمون شماره ۱۰



۱- یک مکعب توسط چاقو برش خورده است. در شکل زیر گسترده این مکعب نشان داده شده و محل برش با نقطه چین مشخص شده است. این مقطع چه شکلی دارد؟



- (۱) مستطیل (۲) مثلث قائم الزاویه (۳) مثلث متساوی الاضلاع (۴) مربع

۲- کدام گزینه صحیح است؟

- (۱) حجم‌های منشوری دارای یک قاعده می‌باشند.
 (۲) حجم‌های هرمی یک نوع حجم غیرهندسی می‌باشند.
 (۳) سطح مقطع یک منشور شش پهلوی، یک شش ضلعی می‌باشد.
 (۴) حجم‌های هندسی به سه دسته کره و مخروطی و هرمی تقسیم می‌شوند.
- ۳- دو مکعب مستطیل چوبی داریم. از گوشه یکی از آن دو، مکعبی به حجم یک سانتی‌متر مکعب جدا می‌کنیم، سپس هر دو مکعب مستطیل را رنگ می‌کنیم. مقدار رنگ مصرف شده برای کدام بیشتر است؟

- (۱) رنگ مصرفی برای هر دو مساوی است. (۲) رنگ مصرفی در مکعب کامل بیشتر است.
 (۳) رنگ مصرفی در مکعب ناقص بیشتر است. (۴) رنگ مصرفی بستگی به ابعاد مکعب مستطیل دارد.

۴- تعداد یال‌های یک منشور چند برابر تعداد وجه‌های جانبی آن است؟

- (۱) یک برابر (۲) دو برابر (۳) سه برابر (۴) چهار برابر

۵- شکلی از مکعب‌های کوچک ساخته شده است و از سه جهت به صورت زیر دیده می‌شود، تعداد این مکعب‌ها حداقل چندتا است؟



بالا



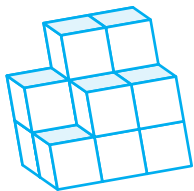
روبرو



راست

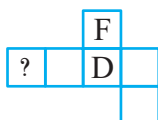
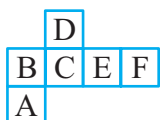
- (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۱۰ (۴) ۱۲

۶- شکل مقابل چند مکعب کوچک کم دارد تا به یک مکعب کامل تبدیل شود؟



- (۱) ۸ (۲) ۱۰ (۳) ۱۲ (۴) ۱۴

۷- شکل‌های داده شده هر دو گسترده یک مکعب هستند. به جای علامت سؤال چه حرفی قرار می‌گیرد؟



- (۱) E (۲) C (۳) A (۴) B

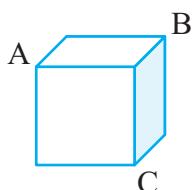
۸- با کدام یک از شکل‌های زیر می‌توان چهاروجهی منتظم ساخت؟

- (۱) مربع (۲) مثلث متساوی‌الساقین (۳) لوزی (۴) مثلث متساوی‌الاضلاع

۹- اگر تمام ابعاد مکعبی را نصف کنیم، آن گاه حجم آن حجم اولیه می‌شود.

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{8}$ (۴) $\frac{1}{16}$

۱۰- می‌خواهیم یک مکعب را طوری برش بزنیم که از نقطه A, B, C بگذرد. شکل قاعده قسمت بریده شده در کدام گزینه آمده است؟



- (۱) مربع (۲) مثلث متساوی‌الاضلاع (۳) مثلث قائم‌الزاویه (۴) مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین

۱۱- درون یک کارتن ۶ جعبه به ابعاد ۱۸، ۱۲ و ۸ سانتی‌متر جای می‌گیرد. حجم این کارتن چند سانتی‌متر مکعب است؟

- (۱) 2880 cm^3 (۲) 10368 cm^3 (۳) 1440 cm^3 (۴) 1728 cm^3

۱۲- استخری به ابعاد ۲۰، ۸ و ۴ متر داریم. در صورتی که $\frac{3}{4}$ این استخر آب داشته باشد چند لیتر دیگر باید در استخر آب بریزیم تا کاملاً پر شود؟

- (۱) ۶۴۰ لیتر (۲) ۱۶۰۰۰۰ لیتر (۳) ۴۸۰۰۰۰ لیتر (۴) ۴۸۰ لیتر

۱۳- ارتفاع مکعب مستطیلی را سه برابر می‌کنیم، حجم آن چند برابر می‌شود؟

- (۱) نه برابر (۲) شش برابر (۳) سه برابر (۴) بیست و هفت برابر

۱۴- مساحت کل مکعبی به ضلع a برابر است با:

- (۱) $6a$ (۲) $6a^2$ (۳) a^2 (۴) a^3

۱۵- حجم مکعبی ۲۷۰۰۰ لیتر است. مساحت کل آن چند مترمربع است؟

- (۱) ۱۶۲ (۲) ۵۴ (۳) ۸۱ (۴) ۲۷

۱۶- اگر شعاع قاعده استوانه‌ای نصف شود:

- (۱) حجم و سطح جانبی آن نصف می‌شود. (۲) حجم آن نصف و سطح جانبی آن ربع می‌شود.
(۳) حجم و سطح جانبی آن ربع می‌شود. (۴) حجم آن ربع و سطح جانبی آن نصف می‌شود.

۱۷- اگر از شیر آبی که خوب بسته نشده است در هر ثانیه ۲ قطره آب بچکد و حجم هر قطره ۰/۵ سانتی‌متر مکعب باشد، در مدت ۵ ساعت چند لیتر آب به هدر می‌رود؟

- (۱) $\frac{2}{4}$ (۲) $\frac{1}{5}$ (۳) $\frac{2}{1}$ (۴) $\frac{1}{8}$

۱۸- مستطیلی به طول 10cm و عرض 8cm را حول یکی از اضلاع آن دوران می‌دهیم. بیش‌ترین حجم ممکن چقدر است؟ ($\pi \approx 3$)

- (۱) 2400cm^3 (۲) 2000cm^3 (۳) 2560cm^3 (۴) 2740cm^3

۱۹- می‌خواهیم درون مکعب مستطیلی به ابعاد ۷۲ و ۴۸ و ۶۰ را با چند مکعب پر کنیم. حداقل چند مکعب لازم است؟

- (۱) ۱۵ (۲) ۳۰ (۳) ۱۲۰ (۴) ۹۶۰

۲۰- با ۸۰۰ کارتن مکعب شکل، بزرگ‌ترین مکعب ممکن را ساخته‌ایم. چند کارتن اضافه می‌آید؟

- (۱) ۷۱ (۲) ۲۰۰ (۳) ۸۱ (۴) ۱۰۰

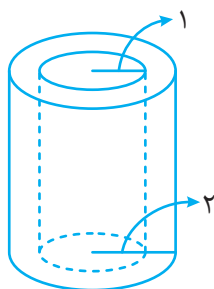
آزمون شماره ۱۱



۱- ابعاد جعبه‌ای ۷، ۶ و ۵ می‌باشد اگر مکعب‌هایی به ابعاد $2 \times 2 \times 2$ را بخواهیم در این جعبه بچینیم حداکثر چند مکعب می‌توان در جعبه جای داد؟

- (۱) ۱۸ (۲) ۱۵ (۳) ۱۷ (۴) ۲۶

۲- دو استوانه به صورت مقابل داخل هم قرار دارد. نسبت مساحت‌های جانبی آنها برابر است با:



- (۱) ۴ (۲) ۲ (۳) 2π (۴) اطلاعات مسأله کافی نیست.

۳- حاصل ضرب دو عدد ۵۶- و حاصل جمع آنها ۱۰- است. تفاضل دو عدد چیست؟

- (۱) -۱۵ (۲) ۱۵ (۳) ۱۸ (۴) -۲۰

$$\frac{-4 + 6 \times 2 - 5 \times 3 - 1}{4 \times 3 + 2 \times (-1) + 3 \times (-2)} = ?$$

۴- حاصل عبارت مقابل کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) -۱

۵- اگر $a = 2b$ و $c = 3a$ باشد، آنگاه حاصل عبارت $a + b + c$ بر حسب a کدام است؟

- (۱) $2a$ (۲) $\frac{a-2}{a}$ (۳) $\frac{a}{2}$ (۴) $\frac{9a}{2}$

۶- در معادله $\frac{1}{10 \times 10 \times 10} = \frac{0.005x}{0.025} - \frac{0.025}{10 \times 10 \times 10}$ مقدار x با کدام گزینه برابر است؟

- (۱) 0.002 (۲) $\frac{24}{5}$ (۳) -۲۰ (۴) 0.02

۷- قرینه عبارت $(2x+1) - (x+3) - 3x$ ، کدام است؟

- (۱) $-6x + 2$ (۲) ۴ (۳) $-6x - 4$ (۴) ۲

۸- نقاط A و B و C و D روی خطی راست هستند و می‌دانیم $\overline{AB} = 13$ و $\overline{BC} = 11$ و $\overline{CD} = 14$ و $\overline{DA} = 12$ می‌باشد فاصله بین دورترین دو نقطه چقدر است؟

- (۱) ۲۶ (۲) ۲۴ (۳) ۲۷ (۴) ۲۵

۹- با توجه به ادعاهای زیر کدام گزینه درست است؟

ادعای اول: تمام مثلث‌ها با محیط ۷ و اندازه اضلاع طبیعی، متساوی‌الساقین هستند.

ادعای دوم: فقط دو مثلث با محیط ۹ و اندازه اضلاع طبیعی وجود دارد.

(۱) ادعای اول درست و ادعای دوم نادرست است. (۲) ادعای اول و دوم هر دو درست است.

(۳) ادعای اول و دوم هر دو نادرست است. (۴) ادعای اول نادرست و ادعای دوم درست است.

۱۰- در یک ۵ضلعی منتظم اندازه زاویه تند بین دو نیمساز داخلی که از دو سر یک ضلع رسم می‌شوند چند درجه است؟

- (۱) 64° (۲) 54° (۳) 72° (۴) 36°

۱۱- کدام جمله درست است؟

- (۱) ترکیب n انتقال پی‌درپی یک انتقال است.
(۲) ترکیب ۴ دوران متوالی همیشه یک دوران است.
(۳) ترکیب دو تقارن متوالی یک انتقال است.
(۴) ترکیب دو تقارن متوالی یک تقارن است.

۱۲- چند عدد اول ۲رقمی داریم که هم رقم یکان و هم رقم دهگان آن عدد اول باشد؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۸

۱۳- اگر a و b اعداد طبیعی باشند و $a \times b = c$ آنگاه

- (۱) a و b مضرب‌های c هستند.
(۲) a و b شمارنده‌های c هستند.
(۳) c شمارنده a و b است.
(۴) c دارای ۲ شمارنده است.

۱۴- کوچک‌ترین عدد طبیعی که بر ۳ عدد اول متفاوت بخش‌پذیر باشد کدام است؟

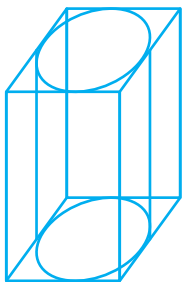
- (۱) ۲۴ (۲) ۶۰ (۳) ۳۰ (۴) ۴۲

۱۵- اگر کوچک‌ترین عدد اول دورقمی را n و بزرگ‌ترین عدد مرکب دورقمی را m بنامیم حاصل $m - n$ چند شمارنده اول دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۶- مستطیلی به طول ۸cm و عرض ۴cm را حول عرضش به اندازه 30° درجه دوران می‌دهیم. حجم حاصل چه قدر است؟ ($\pi \approx 3$)

- (۱) 128cm^3 (۲) 64cm^3 (۳) 67cm^3 (۴) 120cm^3



۱۷- استوانه‌ای در داخل منشوری با قاعده مربع شکل به ضلع ۱۰cm و ارتفاع ۱۶cm محاط شده است. حجم فضای بین استوانه و مکعب کدام است؟

- (۱) 244cm^3 (۲) 344cm^3
(۳) $1079/6\text{cm}^3$ (۴) $1097/6\text{cm}^3$

۱۸- اگر مساحت قاعده منشوری را ۵ برابر و ارتفاع آن را نصف کنیم، حجم آن چند درصد تغییر می‌کند؟

- (۱) ۱۲۵ درصد کاهش (۲) ۲۵۰ درصد افزایش (۳) ۱۵۰ درصد کاهش (۴) ۱۵۰ درصد افزایش

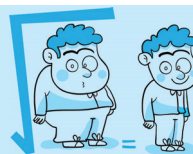
۱۹- کدام گزینه گسترده یک مکعب را نشان نمی‌دهد؟

- (۱) (۲) (۳) (۴)

۲۰- اگر در ساختن مکعب مستطیلی که طول و عرض قاعده آن ۱۰ و ۸ سانتی‌متر است، ۳۷۶ سانتی‌متر مربع مقوا به کار رفته باشد، ارتفاع این مکعب حداکثر چند سانتی‌متر است؟

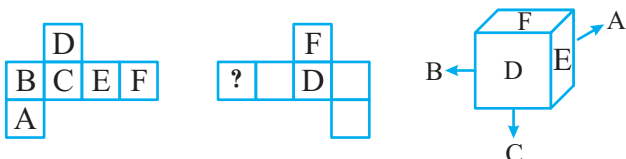
- (۱) ۹cm (۲) ۱۶cm (۳) ۷cm (۴) ۶cm

پاسخ نامه آزمون شماره ۱۰

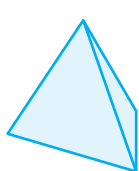


۷- گزینه‌ی (۳) صحیح است.

با توجه به شکل‌های داده شده (A, D), (F, C), (B, E) روبه‌روی هم قرار دارند در نتیجه به‌جای علامت سؤال حرف A قرار می‌گیرد.



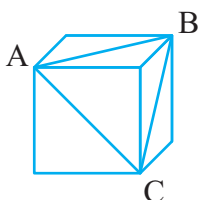
۸- گزینه‌ی (۴) صحیح است.



کوچک‌ترین چندوجهی منتظم، چهاروجهی منتظم است که هر وجه آن از مثلث متساوی‌الاضلاع تشکیل شده است.

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\frac{1}{2}a \times \frac{1}{2}a \times \frac{1}{2}a}{a \times a \times a} = \frac{1}{8}$$

۹- گزینه‌ی (۳) صحیح است.



۱۰- گزینه‌ی (۲) صحیح است.

چون قطرهای هر وجه مکعب برابرند پس مثلث متساوی‌الاضلاع ایجاد می‌شود.

۱۱- گزینه‌ی (۲) صحیح است.

$$(8 \times 18 \times 12) \times 6 = 10368 \text{ cm}^3$$

۱۲- گزینه‌ی (۲) صحیح است.

$$\text{حجم استخر} = 4 \times 8 \times 20 = 640 \text{ m}^3$$

$$640 \times 1000 = 640000 \text{ لیتر}$$

$$1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \text{ حجم باقی‌مانده}$$

$$\frac{1}{4} \times 640000 = 160000 \text{ لیتر}$$

۱۳- گزینه‌ی (۳) صحیح است.

$$a \times b \times c = \text{ارتفاع} \times \text{عرض} \times \text{طول} = \text{حجم اولیه}$$

$$a \times b \times 3a = 3(a \times b \times c) = \text{حجم ثانویه}$$

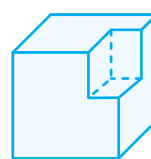
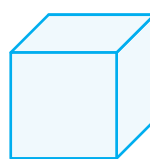
۱- گزینه‌ی (۳) صحیح است.

با تجسم شکل و با توجه به اینکه سه ضلع شکل ایجاد شده با هم برابرند مثلث متساوی‌الاضلاع ایجاد می‌شود.

۲- گزینه‌ی (۳) صحیح است.

حجم‌های هندسی دارای دو قاعده می‌باشند. حجم‌های هرمی یک نوع حجم هندسی می‌باشند. سطح‌های هندسی به سه دسته منشوری و هرمی و مخروط تقسیم می‌شوند.

۳- گزینه‌ی (۱) صحیح است.



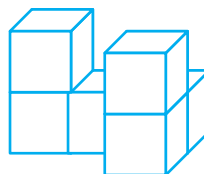
مساحت کل هر دو شکل با هم برابر است پس مقدار رنگ مصرفی برای هر دو مساوی است.

۴- گزینه‌ی (۳) صحیح است.

در یک منشور n پهلوی داریم:

$$\frac{\text{تعداد یال‌ها}}{\text{تعداد وجه‌های جانبی}} = \frac{3n}{n} = 3$$

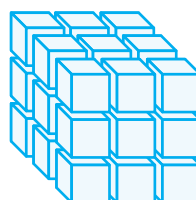
۵- گزینه‌ی (۱) صحیح است.



شکل از ۶ مکعب تشکیل شده است.

۶- گزینه‌ی (۴) صحیح است.

طول کوچک‌ترین مکعبی که می‌توان ساخت ۳ می‌باشد. پس حجم آن باید ۲۷ باشد با توجه به اینکه شکل از ۱۳ مکعب تشکیل شده به ۱۴ مکعب دیگر نیاز داریم.



۴- گزینه‌ی (۲) صحیح است.

راه حل اول:

مساحت دو قاعده + مساحت جانبی = مساحت کل مکعب

$$4a^2 + (2 \times a^2) = 6a^2$$

راه حل دوم:

$$\text{مساحت یک وجه} = a \times a = a^2$$

$$\text{مساحت هر شش وجه} = 6 \times a^2 = 6a^2$$

۵- گزینه‌ی (۲) صحیح است.

$$27000 \div 1000 = 27 \text{ m}^3$$

$$\text{حجم مکعب} = 27 = a^3 \Rightarrow a = 3 \text{ m}$$

$$\text{مساحت کل مکعب} = 6a^2 = 6 \times 3^2 = 54 \text{ m}^2$$

۶- گزینه‌ی (۴) صحیح است.

$$r \text{ شعاع } r, \quad v_1 = \pi r^2 h, \quad s_1 = 2\pi r h$$

$$s_r = 2\pi \frac{r}{4} h = \pi r h$$

$$\Rightarrow s_r = \pi r h \Rightarrow s_r = \frac{1}{2} s_1$$

$$v = \pi \left(\frac{r}{4}\right)^2 h = \frac{1}{4} \pi r^2 h = \frac{1}{4} \times \overbrace{\pi r^2 h}^{v_1} = \frac{1}{4} v_1$$

۷- گزینه‌ی (۴) صحیح است.

$$\text{ثانیه } 1 = 3600 \text{ ساعت}$$

$$\text{ثانیه } 5 = 5 \times 3600 = 18000$$

$$\frac{\text{زمان (ثانیه)}}{\text{حجم (سانتی متر مکعب)}} = \frac{1}{2 \times 0.05} = \frac{18000}{x}$$

$$x = 1800 \text{ cm}^3 \rightarrow 1800 \div 1000 = 1.8 \text{ لیتر}$$

۸- گزینه‌ی (۱) صحیح است.

در دوران یک مستطیل، اگر آن را حول ضلع کوچک‌تر دوران دهیم، استوانه ایجاد شده حجم بیش‌تری خواهد داشت. یعنی ۸ ارتفاع استوانه و ۱۰ شعاع قاعده این استوانه می‌باشد. در نتیجه داریم:

$$\text{حجم} = 10 \times 10 \times 3 \times 8 = 2400 \text{ cm}^3$$

۹- گزینه‌ی (۳) صحیح است.

ضلع بزرگ‌ترین مکعبی که می‌توانیم با آن مکعب مستطیل را پر کنیم باید بزرگ‌ترین شمارنده مشترک ابعاد مکعب مستطیل باشد.

$$12 = (60, 48, 72)$$

$$\frac{60 \times 48 \times 72}{12 \times 12 \times 12} = 120$$

۲۰- گزینه‌ی (۱) صحیح است.

ابتدا ضلع مکعبی را پیدا می‌کنیم که اگر حجم آن را محاسبه کنیم، نزدیک‌ترین حجم را به ۸۰۰ واحد داشته باشد.

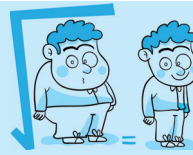
$$9 \text{ ضلع } 9 = 9 \times 9 \times 9 = 729$$

$$10 \text{ ضلع } 10 = 10 \times 10 \times 10 = 1000$$

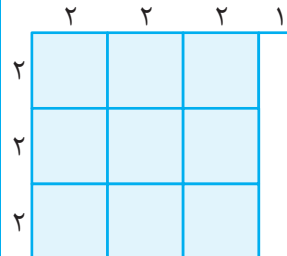
بزرگ‌ترین مکعبی که می‌توان با ۸۰۰ مکعب ساخت مکعبی به ضلع ۹ می‌باشد. در نتیجه:

$$71 = 800 - 729 : \text{تعداد کارتن‌های اضافه}$$

پاسخنامه آزمون شماره ۱۱



۱- گزینه‌ی (۱) صحیح است.



اگر طول و عرض جعبه ۲ و ۶ باشند پس قاعده جعبه مستطیلی به شکل مقابل است.

پس در ردیف اول ۹ مکعب به ابعاد $2 \times 2 \times 2$ جای می‌گیرد چون ارتفاع جعبه ۵ است، ۲ ردیف می‌توان در آن چید.
 $9 \times 2 = 18$

۱۸ مکعب در آن جای می‌گیرد.

۲- گزینه‌ی (۲) صحیح است.

ارتفاع $\times$ محیط قاعده = مساحت جانبی

$$\frac{\text{استوانه بزرگ}}{\text{استوانه کوچک}} = \frac{s_2}{s_1} = \frac{2 \times \pi \times 2 \times h}{2 \times \pi \times 1 \times h} = \frac{2}{1} = 2$$

۳- گزینه‌ی (۳) صحیح است.

از بین ۸ جفت عدد که حاصل ضرب آنها -56 است یعنی:

$$1 \times (-56) = (-1) \times (56) = 2 \times (-28) = (-2) \times 28$$

$$= 4 \times (-14) = (-4) \times 14 = (-7) \times 8 = 7 \times (-8) = -56$$

اعداد ۴ و -14 دارای مجموع -10 می‌باشند بنابراین داریم:

$$4 - (-14) = 4 + 14 = 18$$

۴- گزینه‌ی (۱) صحیح است.

$$\frac{-4 + 6 \times 2 - 5 \times 3 - 1}{\underbrace{4 \times 3}_{12} + \underbrace{2(-1)}_{-2} + \underbrace{3 \times (-2)}_{-6}}$$

$$= \frac{-4 + 12 - 15 - 1}{12 - 2 - 6} = \frac{8 - 16}{10 - 6} \Rightarrow \frac{-8}{4} = -2$$

۵- گزینه‌ی (۴) صحیح است.

$$a = 2b \rightarrow b = \frac{1}{2}a, \quad c = 3a$$

$$\Rightarrow a + b + c = a + \frac{1}{2}a + 3a = \frac{2a + a + 6a}{2} = \frac{9a}{2}$$

۶- گزینه‌ی (۲) صحیح است.

$$0.25 - \frac{1}{10 \times 10 \times 10} = 0.005x$$

با تبدیل عدد اعشاری به کسر خواهیم داشت:

$$\frac{25}{1000} - \frac{1}{1000} = \frac{5}{1000}x \Rightarrow 25 - 1 = 5x$$

$$\Rightarrow 5x = 24 \Rightarrow x = \frac{24}{5}$$

۷- گزینه‌ی (۲) صحیح است.

$$3x - (x + 3) - (2x + 1) = 3x - x - 3 - 2x - 1 = -4$$

$$\Rightarrow (-4) = +4 \text{ قرینه}$$

۸- گزینه‌ی (۴) صحیح است.



با توجه به شکل می‌توان گزینه صحیح را مشخص کرد.

$$DB = 25$$

۹- گزینه‌ی (۱) صحیح است.

در مورد ادعای اول، اضلاع مثلث می‌تواند (۳، ۲، ۲)

و (۱، ۳، ۳) باشند.

در مورد ادعای دوم اندازه اضلاع مثلث فقط اعداد

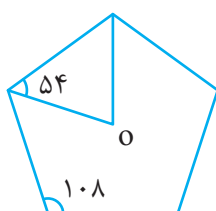
(۳، ۳، ۳) یا (۱، ۴، ۴) یا (۲، ۳، ۴) می‌توانند باشند.

۱۰- گزینه‌ی (۳) صحیح است.

هر زاویه داخلی ۵ضلعی منتظم 108° است، پس

$$\hat{O} = 180^\circ - (2 \times 54^\circ) = 72^\circ$$

خواهیم داشت:



$$\text{حجم استوانه} = \pi r^2 h = 3/14 \times 5^2 \times 16 = 1256 \text{ cm}^3$$

$$\text{حجم منشور} = s \times h = 10^2 \times 16 = 1600 \text{ cm}^3$$

$$\text{حجم فضای بین استوانه و منشور} = 1600 - 1256$$

$$= 344 \text{ cm}^3$$

۱۸- گزینه‌ی (۴) صحیح است.

$$\text{حجم اولیه} \quad v = s.h$$

$$\text{حجم ثانویه} = \Delta s \times \frac{h}{2} = \frac{\Delta}{2} \cdot s.h = 2/5 \times s.h$$

$$\text{درصد} \quad 2/5 \times 100 = 250$$

یعنی حجم آن ۲۵۰ درصد می‌شود و چون ۱۰۰ درصد آن مربوط به حجم اولیه بوده است بنابراین ۱۵۰ درصد افزایش داشته‌ایم.

۱۹- گزینه‌ی (۴) صحیح است.



در شکل روبه‌رو دو وجه رنگ شده روی هم منطبق شده و مکعب تشکیل نمی‌شود.

۲۰- گزینه‌ی (۱) صحیح است.

ارتفاع این مکعب مستطیل را c فرض می‌کنیم.

مساحت کل:

$$= 2(bc + ac + ab) = 2(18c + 10c + 180) = 376$$

$$18c + 180 = \frac{376}{2} = 188$$

$$18c = 188 - 180 = 108 \Rightarrow c = \frac{108}{18} = 6 \text{ cm}$$

۱- گزینه‌ی (۱) صحیح است.

۲- گزینه‌ی (۲) صحیح است.

اعداد عبارت‌اند از: ۲۳, ۳۷, ۵۳, ۷۳

۳- گزینه‌ی (۲) صحیح است.

با یک مثال می‌توان گزینه‌های دیگر را رد کرد.

$$\text{مثال:} \quad 6 \times 8 = 48$$

۴- گزینه‌ی (۳) صحیح است.

کوچک‌ترین سه عدد اول متفاوت ۲ و ۳ و ۵ می‌باشند که از حاصل ضرب آنها عدد ۳۰ به دست می‌آید.

۵- گزینه‌ی (۲) صحیح است.

$$\left. \begin{array}{l} n = 11 \\ m = 99 \end{array} \right\} \Rightarrow m - n = 88 \Rightarrow 88 = 2 \times 2 \times 2 \times 11$$

۱۱ و ۲: شمارنده‌های اول ۸۸

۱۶- گزینه‌ی (۲) صحیح است.

$$\text{مساحت قاعده} = 3 \times 8 \times 8 = 192$$

$$\text{حجم} = 192 \times 4 = 768$$

این حجم برای دوران ۳۶۰ درجه است.

$$\frac{\text{درجه}}{\text{حجم}} = \frac{360}{768} = \frac{30}{x}$$

$$x = \frac{768 \times 30}{360} = 64 \text{ cm}^3$$

۱۷- گزینه‌ی (۲) صحیح است.

۱۰ = ضلع مربع = قطر قاعده استوانه

$$\Rightarrow \text{شعاع قاعده} = 5 \text{ cm}$$

