یارب نظر تو برنگردد، برگشتن روزگار سهل است...

ترکیبیات:

هدف این بخش این است که چگونه بدون شمارش بتوانیم بشماریم و مقدمه ای بر احتمال است.

تعریف $n!$ (n فاکتوریل):

حاصل ضرب اعداد طبیعی از n تا ۱ را n فاکتوریل می گوییم و آن را با $n!$ نمایش می دهیم.

$$n! = n\underbrace{(n-1)\overbrace{(n-2)(n-3)\cdots\times 3\times 2\times 1}^{(n-2)!}}_{(n-1)!} = n(n-1)! = n(n-1)(n-2)! = \cdots$$

نکته ۱: هر فاکتوریل را با قیافه های مختلف می توانیم بنویسیم.

$$6! = 6\times 5! = 6\times 5\times 4! = 6\times 5\times 4\times 3! = 6\times 5\times 4\times 3\times 2! = 6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1$$

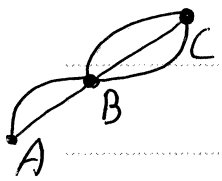
نکته ۲: برای ساده کردن کسرها یا معادلاتی که شامل فاکتوریل هستند کافیست عدد فاکتوریل بزرگتر را آن قدر باز کنیم تا عدد فاکتوریل کوچکتر ساخته شود. مثال:

$$\frac{9!}{7!} = \frac{9\times 8\times 7!}{7!} = 9\times 8 = 72$$

نکته ۳: فاکتوریل های حفظی:

$0! = 1 \quad 1! = 1 \quad 2! = 2 \quad 3! = 6 \quad 4! = 24 \quad 5! = 120$

تعریف اصل ضرب: اگر بخواهیم چند عمل یکی بعد از دیگری انجام شود و بین آنها کلمه "و" گفته شود از این اصل استفاده می کنیم. مثال فرض کنید که در شکل زیر بخواهیم از شهر A به شهر C برویم آنگاه تعداد مسیر های متفاوت برابر است با $2\times3=6$.



$A \rightarrow B \rightarrow C$ (از A به B و از B به C)

نکته ۱: برای محاسبه تعداد اعداد ساخته شده با شرایط یک مسأله با استفاده از اصل ضرب به موارد زیر دقت می کنیم.

(۱) اگر تکرار ارقام مجاز باشد، ترتیب شمارش حالت های رقم گذاری در خانه های یکان، دهگان، صدگان و ... مهم نیست.

(۲) اگر تکرار ارقام مجاز نباشد از جایی شروع به شمارش حالت های رقم گذاری می کنیم که محدودیت در آنجا می باشد و به ترتیب اولویت پیش می رویم.

مثال: چند عدد شش رقمی با ارقام ۲، ۱ و ۰ وجود دارد؟ تکرار ارقام مجاز است.
با توجه به اصل ضرب هر کدام از خانه ها را شمارش کرده و می نویسیم و در پایان با یکدیگر ضرب می کنیم.

$2\times3\times3\times3\times3\times3=486$

صفر در این خانه نمی تواند باشد (۲ و ۱)

مثال: در آزمون ۳ سؤالی، هر سؤال یک تست چهار گزینه ای است. اگر قرار باشد در هر سؤال فقط یک گزینه علامت زده شود، به چند طریق مختلف ممکن است پاسخنامه پر شود؟

پاسخ: برای پاسخ گویی به هر سوال [۴ گزینه ای] ۴ حالت وجود دارد. چون در این آزمون باید به ۳ سوال پاسخ دهیم به این نتیجه می رسیم که باید سه عمل انتخاب را پشت سر هم انجام دهیم. پس طبق اصل ضرب:

$$\underset{\text{تست اول}}{\overset{\text{حالات}}{4}} \times \underset{\text{تست دوم}}{\overset{\text{حالات}}{4}} \times \underset{\text{تست سوم}}{\overset{\text{حالات}}{4}} = 4^3 = 64$$

مثال: عبارت $(x+y+z)(a+b)(c+d)$ پس از محاسبه چند جمله دارد؟

پاسخ: برای ساختن هر جمله باید ابتدا از هر کدام از پرانتزها جمله ای را انتخاب کرده و سپس در هم ضرب کنیم. از پرانتز اول به ۳ حالت، از پرانتز دوم به ۲ حالت و از پرانتز سوم به ۲ حالت می توانیم جمله انتخاب نماییم. پس طبق اصل ضرب:

$$3 \times 2 \times 2 = 12 = \text{جواب}$$

مثال: چند تابع یک به یک از مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$ به مجموعه $\{1, 2, \dots, 10\}$ قابل تعریف است؟

پاسخ: (تابع یک به یک، که علاوه بر آنکه در هیچ دو زوج مرتب مولفه اول یکسان نباشد در هیچ دو زوج مرتب مولفه های دوم یکسان نیز نباشد) پس مولفه اول ثابت است.

$$\{(1, \underset{\text{۱۰ حالت}}{\bigcirc}), (2, \underset{\text{۹ حالت}}{\bigcirc}), (3, \underset{\text{۸ حالت}}{\bigcirc}), \dots, (10, \underset{\text{۱ حالت}}{\bigcirc})\} \Longrightarrow 10! = \text{جواب}$$

مثال: با ارقام ۰ و ۲ و ۳ و ۵ چند عدد چهار رقمی مضرب ۵ و بدون تکرار ارقام می توان نوشت؟

نکته: هرگاه در بین ارقام داده شده صفر وجود داشت و تعداد اعداد زوج یا مضرب ۵ (بخش پذیر بر ۵) را خواسته و شرط عدم مجاز بودن تکرار ارقام تاکید شده بود (تا اینجا شد ۳ شرط) مساله را در دو حالت زیر حل می کنیم:

حالت ① رقم صفر در یکان باشد یا حالت ② رقم صفر در یکان نباشد

+

پاسخ مثال: چون ۳ شرط موجود در نکته در این سوال وجود دارد مساله را دو حالت می کنیم

① صفر در یکان باشد: حالت $6 = ① \times ① \times ② \times ③$

(به ترتیب: یکان، دهگان، صدگان، هزارگان — یکان: صفر قرار دارد)

یا

② صفر در یکان نباشد: (یعنی ۵ در خانه یکان باشد)

حالت $4 = ① \times ① \times ② \times ②$

(یکان: ۵ قرار دارد)

حاصل = جمع حالت ۱ و ۲ = $6+4 = \underline{10}$

تعریف جایگشت:

جایگشت یعنی ترتیب قرار گرفتن

مثلاً فرض کنید ۵ نفر بخواهند روی ۵ صندلی بنشینند نفر اول ۵ انتخاب دارد و نفر بعدی ۴ انتخاب و ... و نفر ۵ ام یک انتخاب دارد

پس تعداد حالات $5!$ است و در حالت کلی جایگشت n شی $= n!$

مثال: جایگشت قرار گرفتن اعداد ۱و۲و۳و۴ برابر است با !۴

نکته ۱: اگر بخواهیم n شی را کنار هم جایگشت دهیم به طوری که چند شی مشخص در کنار هم باشند، آن چند شی را به هم می بندیم و یک شی در نظر می گیریم. حال اگر در جایگشت اشیا در کنار هم ترتیبی ذکر نشود جایگشت خود این اشیا را نیز در جواب به دست آمده ضرب می کنیم.

تذکر: اگر اشیا یکسانی بخواهند در کنار هم باشند جایگشت آنها یک حالت است.

مثال: تعداد جایگشت های حروف کلمه «computer» که در آن سه حرف c,m,o به صورت com قرار گیرند را حساب کنید.

بسته

$\boxed{com}, p, u, t, e, r \Longrightarrow$ جایگشت ۶ شی $\times \underbrace{1}$ $= 6! \times 1 = 720$

شی ۱، شی ۲، شی ۳، شی ۴، شی ۵، شی ۶

داخل بسته (شی ۱)

نکته ۲: اگر بخواهیم n شی را کنار هم جایگشت دهیم به طوری که دو شی مشخص در کنار هم نباشند، می توانیم تعداد کل حالت ها را به دست آورده و از آن حالت های نامطلوب را کم کنیم. (متمم)

مثال: تعداد جایگشت های حروف کلمه "system" به طوری که s ها کنار هم نباشند چقدر است؟

حالت های مطلوب = کل حالت ها − حالت های نامطلوب $= \dfrac{6!}{2!} - \underbrace{5! \times 1}$ $= 240$

دو s کنار هم باشند

$2!$ تعداد تکرار s می باشد.

نکته ۳: هرگاه در جایگشت n شی، n_1 تای آن مثل هم، n_2 تای دیگر مثل هم و ...

باشد آنگاه جایگشت برابر است با $\dfrac{n!}{n_1! \times n_2! \cdots \times n_k!}$

مثال: جایگشت اعداد $\{1,1,2,2,2,3,4\}$ $= \dfrac{7!}{\underbrace{2!}_{\text{تکرار } 1} \times \underbrace{3!}_{\text{تکرار } 2}}$

نکته ۴: اگر بخواهیم اعضای دو گروه را به طور یکی در میان کنار هم جایگشت دهیم باید تعداد اعضای دو گروه با هم برابر بوده و یا یکی از گروه ها از دیگری یک عضو بیشتر داشته باشد که دو حالت به صورت زیر است:

(۱) اگر تعداد اعضای دو گروه یکسان باشد مثلاً ۴ پسر و ۴ دختر $\xrightarrow{\text{جواب}}$ $2 \times 4! \times 4!$

(۲) اگر تعداد اعضای دو گروه یکی اختلاف داشت مثلاً ۴ پسر و ۳ دختر $\xrightarrow{\text{جواب}}$ $4! \times 3!$

نکته ۵: چیدن و مقام گرفتن، در سوالات جایگشت است.

فرمول انتخاب r شی از n شی $= P(n,r) = P_r^n = \dfrac{n!}{(n-r)!}$

مثال: $P(4,3) = \dfrac{4!}{(4-3)!}$ ، $P(7,2) = \dfrac{7!}{(7-2)!} = \dfrac{7!}{5!}$

تعریف ترکیب:

تعداد حالات انتخاب r شی از بین n شی که ترتیب آنها مهم نباشد را ترکیب می گویند و برابر است با $\binom{n}{r}$.

و مقدار آن طبق فرمول زیر به دست می آید. $\binom{n}{r} = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$

مثال: تعداد حالات انتخاب ۳ نفر از بین ۱۰ نفر برای اعضای یک کمیته برابر است با $\frac{10!}{3!\,7!} = \frac{10!}{3!\,(10-3)!} = \binom{10}{3}$

نکته ۱: فرمول های مهم: $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n \quad , \quad \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

$$\binom{n}{☁} = \binom{n}{\bigcirc} \Rightarrow \begin{cases} ☁ = \bigcirc \\ \text{یا} \\ ☁ + \bigcirc = n \end{cases} \xrightarrow{\text{مثال}} \binom{5}{2} = \binom{5}{3}$$

نکته ۲: انتخاب چند نفر برای تیم، گروه، تشکل هیئتی و ... معمولا ترکیب است

مثال: به چند طریق می توان یک شورای ۴ نفره متشکل از ۱۰ خانواده [شامل زن و مرد] تشکیل داد به طوری که از هر خانواده تنها زن یا شوهر به عنوان شورا باشد.

پاسخ: ابتدا از بین ۱۰ خانواده ۴ خانواده انتخاب کرده و سپس از هرکدام از خانواده ها (شامل زن و شوهر) یک نفر به تصادف انتخاب می کنیم.

$$\underbrace{\binom{10}{4}}_{\text{۴ خانواده از ۱۰ تا}} \times \underbrace{\binom{2}{1}}_{\text{انتخاب زن یا شوهر}} \times \underbrace{\binom{2}{1}}_{''} \times \underbrace{\binom{2}{1}}_{''} \times \underbrace{\binom{2}{1}}_{''} = \binom{10}{4} \times 16$$

نکته ۳: حداقل یکی از n تا یعنی یکی یا دوتا یا ... یا n تا و در این سؤالات می توان از کل حالات بخش انتخاب ۰ تا از n تا را کم کرده

حداقل یکی = کل − $\left\{\begin{matrix}\text{هیچی} \\ \text{از n تا}\end{matrix}\right.$

تعریف تعداد زیرمجموعه های k عضوی یک مجموعه n عضوی :

برای همه این ها فقط فرمول زیر را بلد باشی!

$$\text{تعداد کل زیرمجموعه ها} = 2^n = \underbrace{\binom{n}{0}}_{\text{تعداد زیرمجموعه های ۰ عضوی}} + \underbrace{\binom{n}{1}}_{\text{تعداد زیرمجموعه های ۱ عضوی}} + \binom{n}{2} + \cdots + \underbrace{\binom{n}{k}}_{\text{تعداد زیرمجموعه های } k \text{ عضوی}} + \cdots + \underbrace{\binom{n}{n}}_{\text{تعداد زیرمجموعه های } n \text{ عضوی}}$$

نکته ۱: تعداد حالات انتخاب k شیء از n شیء شامل m عضو خاص برابر با $\binom{n-m}{k-m}$ است.

نکته ۲: تعداد حالات انتخاب k شیء از n شیء فاقد m عضو خاص برابر با $\binom{n-m}{k}$ است.

مثال: تعداد زیرمجموعه های سه عضوی مجموعه $A : \{a, b, c, d, e, f\}$

الف) شامل عضو a باشند. $\binom{6-1}{3-1} = \binom{5}{2}$

ب) شامل عضو a نباشند. $\binom{6-1}{3} = \binom{5}{3}$

احتمال :

فضای نمونه ای (S) : مجموعه تمام نتایج ممکن از یک آزمایش تصادفی را فضای نمونه گویند مثلاً در پرتاب تاس فضای نمونه $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

نکته ۱: هرگاه یک سکه را n بار پرتاب کنیم $n(S) = 2^n$ و هرگاه یک تاس را n بار پرتاب کنیم $n(S) = 6^n$ است.

نکته ۲: هرگاه کیسه ای محتوی n مهره متمایز باشد و بخواهیم از این کیسه k مهره به تصادف خارج کنیم تعداد اعضای فضای نمونه برابر با $n(S) = \binom{n}{k}$ است.

پیشامد (A): زیرمجموعه از فضای نمونه است که حالات مطلوب مساله باشد مثلاً در پرتاب تاس پیشامد زوج بودن: $A = \{2, 4, 6\}$

تعریف احتمال:

$$\text{احتمال وقوع پیشامد } A = \frac{n(A)}{n(S)} = P(A) = \frac{\text{تعداد اعضای پیشامد } A}{\text{تعداد اعضای فضای نمونه ای } S}$$

نکته ۱: عدد احتمال همواره عددی بین صفر و یک است یعنی $0 \leq P(A) \leq 1$

مثال: از مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$ یکی به طور تصادفی انتخاب می کنیم. احتمال اینکه این عدد اول باشد چقدر است.

$n(S) = \{1, 2, 3, \dots, 10\} = 10$

$n(A) = \{2, 3, 5, 7\} = 4$

$$\longrightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{10}$$

نکته ۲: در پرتاب دو تاس‌ها یکدیگر حفظ حالات زیر بسیار کمک می‌کند:

مجموع ۲ تاس

۱۲ ⟵ (۶,۶) ۱ حالت

۱۱ ⟵ (۵,۶)(۶,۵) ۲ حالت

۱۰ ⟵ (۴,۶)(۵,۵)(۶,۴) ۳ حالت

۹ ⟵ (۳,۶)(۴,۵)(۵,۴)(۶,۳) ۴ حالت

۸ ⟵ (۲,۶)(۳,۵)(۴,۴)(۵,۳)(۶,۲) ۵ حالت

۷ ⟵ (۱,۶)(۲,۵)(۳,۴)(۴,۳)(۵,۲)(۶,۱) ۶ حالت

۶ ⟵ (۱,۵)(۲,۴)(۳,۳)(۴,۲)(۵,۱) ۵ حالت

۵ ⟵ (۱,۴)(۲,۳)(۳,۲)(۴,۱) ۴ حالت

۴ ⟵ (۱,۳)(۲,۲)(۳,۱) ۳ حالت

۳ ⟵ (۱,۲)(۲,۱) ۲ حالت

۲ ⟵ (۱,۱) ۱ حالت

* تعداد کل حالات ۳۶ حالت است

نکته ۳: اگر سکه‌ای را n بار پرتاب کنیم احتمال اینکه دقیقاً "k بار رو" یا "k بار پشت" بیاید برابر است با $\frac{\binom{n}{k}}{2^n}$.

نکته ۴: اگر خانواده‌ای دارای n فرزند باشد احتمال اینکه دقیقاً "k پسر" یا "k دختر" باشد برابر است با $\frac{\binom{n}{k}}{2^n}$

مثال: در پرتاب دو تاس احتمال اینکه مجموع ۲ تاس از ۱۰ بیشتر باشد کدام است؟

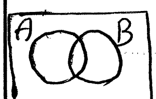
پاسخ: $A =$ (مجموع ۱۱) یا (مجموع ۱۲)

۲ حالت + ۱ حالت = ۳ حالت $= n(A)$

$n(S)$ فضای نمونه‌ای برابر است با ۳۶ حالت پس $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{3}{36}$

مثال: در یک خانواده ۶ فرزندی احتمال اینکه دقیقاً یک پسر وجود داشته باشد چقدر است؟

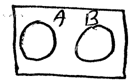
$$P(A)=\frac{\binom{6}{1}}{2^6}=\frac{6}{64}$$



قوانین جمع احتمالات: اگر A و B دو پیشامد باشند:

$$\underbrace{P(A\cup B)}_{\text{احتمال رخداد A یا B}}=P(A)+P(B)-\underbrace{P(A\cap B)}_{\text{احتمال رخداد A و B باهم}}$$

شرط: ناسازگار $\rightarrow P(A\cap B)=0$



شرط: مستقل $\rightarrow P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$

کی و از کجا بفهمیم از کدوم فرمول بریم؟ طبق نکات زیر

نکته ۱: فرمول کلی را برای تمام سوالات می‌نویسیم

اگر در صورت سؤال «یا» برای جدا کردن دو عمل مختلف بیاید $P(A\cup B)$ را می‌خواهد و هر وقت «و» برای جدا کردن بیاید $P(A\cap B)$ را می‌خواهد همچنین کلمه حداقل یکی هم $P(A\cup B)$ می‌باشد.

نکته ۲: پیشامدها در صورتی ناسازگارند که بین آنها حالت مشترکی نباشد مثلاً در یک خانواده ۴ فرزندی که ۳ فرزند پسر دارد ترتیب بچه‌ها با یک خانواده که ۲ فرزند پسر دارد هیچگاه یکی نمی‌شود پس ناسازگارند.

نکته ۳: اگر A و B ناسازگار باشند آنگاه (A', B) یا (A, B') سازگارند.

نکته ۴: مستقل بودن را خودمان باید تشخیص دهیم ولی اگر در سؤالی مطمئن شدیم ناسازگار نیستند و $P(A\cap B)$ را نداده بود و فقط $P(A), P(B)$ را داشتیم حتماً مستقل هستند در کتاب درسی موارد زیر به عنوان پیشامد مستقل آمده است. قبولی افراد در دانشگاه، بهبودی بیماری پس از جراحی، تولد و وفات و پرتاب سکه و تاس!

نکته ۵: اگر A و B مستقل باشند آنگاه (A', B) و (A, B') و (A', B') هم مستقل اند.

مثال: در پرتاب یک جفت تاس احتمال آن که دو تاس یکسان ظاهر شوند یا مجموع شان بزرگتر از ۹ باشد چقدر است؟

$$n(S)=6^2=36$$

$$\begin{cases} \text{دو تاس یکسان}=A=\{(1,1)(2,2)(3,3)(4,4)(5,5)(6,6)\} \Rightarrow n(A)=6 \\ \text{مجموع بالای ۹}=B=\{(4,6)(5,5)(6,4)(5,6)(6,5)(6,6)\} \Rightarrow n(B)=6 \end{cases}$$

$$A\cap B=\{(5,5),(6,6)\} \Rightarrow 2=n(A\cap B)$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{6}{36}+\frac{6}{36}-\frac{2}{36}=\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$$

مثال: در پرتاب یک جفت تاس احتمال آنکه مجموع اعداد رو شده برابر ۴ یا ۹ باشد کدام است؟

$n(S) = ۳۶$

$$\begin{cases} \text{مجموع ۴ باشد} = A = \{(۱,۳)(۲,۲)(۳,۱)\} \longrightarrow P(A) = \frac{۳}{۳۶} \\ \text{مجموع ۹ باشد} = B = \{(۳,۶)(۴,۵)(۵,۴)(۶,۳)\} \longrightarrow P(B) = \frac{۴}{۳۶} \end{cases}$$

$$\xrightarrow[P(A\cap B)=۰]{\text{اشتراک ندارند (ناسازگار)}} P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B) = P(A)+P(B) \Rightarrow$$

$$P(A\cup B) = \frac{۳}{۳۶} + \frac{۴}{۳۶} = \frac{۷}{۳۶}$$

مثال: در پرتاب دو تاس احتمال آن که هر دو عدد رو شده اول باشند چقدر است؟

$$\text{عدد اول باشد} = A = \{۲,۳,۵\} \to P(A) = \frac{۳}{۶}$$

$$\text{عدد اول باشد} = B = \{۲,۳,۵\} \to P(B) = \frac{۳}{۶}$$

$$\longrightarrow P(A\cap B) = \frac{۳}{۶} \times \frac{۳}{۶} = \frac{۹}{۳۶} = \frac{۱}{۴}$$

احتمال شرطی: احتمال رخ دادن A به شرطی که B رخ داده شود را به صورت $P(A|B)$ نمایش می دهیم و داریم:

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{n(A\cap B)}{n(B)}$$

نکته ۱: [روش تستی حل] برای حل این گونه سوالات شرط مسئله

را روی فضای نمونه‌ای اعمال می‌کنیم (کلمه بعد از شرط و $n(s)$ شود) سپس در فضای نمونه‌ای جدید به دنبال خواسته‌ی مسأله می‌گردیم. مثلاً اگر بگوید احتمال عدد اول بودن تاس به شرطی که عدد زوج باشد ۲ تا ۵ فضای نمونه‌ای $\{2,4,6\}$ $n(s)=$ ۳ می‌باشد و پیشامد $\{2\}$ می‌باشد.

نکته ۲: در سؤالاتی که کلماتی مانند «می‌دانیم که»، «فرض کنید»، «اگر» می‌آید و در ادامه آن خبری درباره‌ی آزمایش بیاید و سپس احتمال وقوع چیزی را بخواهند از احتمال شرطی استفاده می‌کنیم.

نکته ۳: (انتخاب بدون جایگذاری) فرض کنید انتخاب مهره از کیسه به صورت پی در پی (یکی پس از دیگری، یک به یک، متوالیاً) باشد در هر مرحله از تعداد کل مهره‌ها و از تعداد مهره‌هایی که هم‌رنگ مهره‌ی خارج شده‌اند، یکی کم می‌شود و جواب احتمال‌ها را در هم ضرب می‌کنیم. مثلاً در کیسه‌ای شامل سه مهره سفید و چهار مهره سیاه، اگر سه مهره متوالیاً خارج کنیم احتمال این که اولی سفید، دومی سیاه و سومی سفید باشد برابر است با:

$$\underset{\text{اولی سفید}}{\frac{3}{7}} \times \underset{\text{دومی سیاه}}{\frac{4}{6}} \times \underset{\text{سومی سفید}}{\frac{2}{5}} = \text{جواب}$$

نکته ۴: (انتخاب با جایگذاری) فرض کنید در هر مرحله تعداد کل مهره‌ها ثابت می‌ماند، در حقیقت برداشتن مهره‌ها (چون برمی‌گردند) تأثیری

بر تعداد کل آن ها ندارد در این حالت قبلی ها بر روی بخش بعدی اثری ندارند مثلاً در کیسه ای شامل ۴ مهره سیاه و ۳ مهره سفید اگر سه مهره متوالی با جایگذاری خارج کنیم احتمال اینکه اولی سفید، دومی سیاه و سومی سفید باشد برابر است با:

$$\frac{3}{7} \times \frac{4}{7} \times \frac{3}{7}$$

سومی سفید دومی سیاه اولی سفید

مثال: کارمندان اداره ای مطابق جدول زیر توزیع شده اند. احتمال آن که کارمندی مرد، تحصیلات دانشگاهی داشته باشد چقدر است؟

	مرد	زن
دانشگاهی	۱۵	۱۰
کمتر از دانشگاهی	۹۰	۸۰

پاسخ: می توان فضای نمونه را مرد بودن گرفت یعنی $n(S)=105$

و بعد احتمال تحصیلات دانشگاهی داشتن برابر است با $P(A) = \frac{15}{105}$

احتمال کل (نمودار درختی):

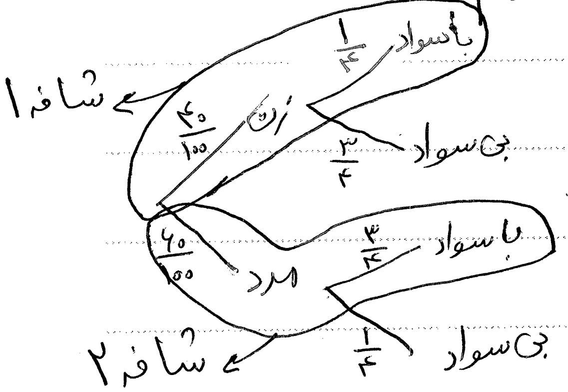
مسائلی که از چند بخش مختلف تشکیل شده و احتمال هر قسمت در مسائل داده می شود و احتمال کل را می خواهد قانون احتمال کل می گویند در این نوع مسائل دو یا چند احتمال تو در تو دخالت دارند و بهترین روش رسم نمودار درختی است.

نکته: راه شناخت این مسائل این است که در اکثر مسائل کلماتی به کار می رود که متضاد هم هستند مانند: زن - مرد، باسواد - بی سواد و ...

نکته ۲: اگر در صورت مسائل چند جسم (n) کیسه بود و راجع به احتمال انتخاب از هر کدام چیزی نگفته بود احتمال آنها با هم برابر است و مقدار آن $\frac{1}{n}$ می باشد مثلاً برای ۲ جسم می شود $\frac{1}{2}$.

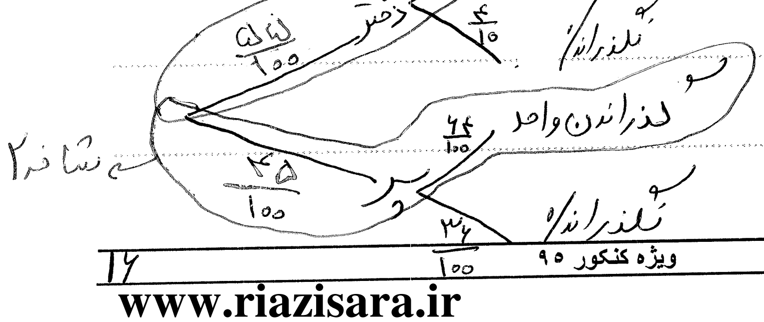
روش حل احتمال درختی:

احتمال هر شاخه را روی آن می نویسیم و در انتها اعداد روی شاخه ها را در هم ضرب می کنیم و سپس جواب شاخه ها را با هم جمع می کنیم مثال احتمال باسواد بودن برابر است با:



$$\Rightarrow \underbrace{\left(\frac{40}{100}\times\frac{1}{4}\right)}_{\text{شاخه ۱}} + \underbrace{\left(\frac{60}{100}\times\frac{3}{4}\right)}_{\text{شاخه ۲}}$$

مثال: ۵۵ درصد دانشجویان دختر و باقی پسر هستند. ۶۰ درصد دختران و ۶۴ درصد پسران، تمام واحدهای درسی خود را گذرانده اند. چند درصد کل دانشجویان تمام واحدهای درسی را گذرانده اند؟



شاخه ۱ + شاخه ۲

$$\left(\frac{55}{100}\times\frac{6}{10}\right)+\left(\frac{45}{100}\times\frac{64}{100}\right)=61.8\%$$

متغیر تصادفی:

اگر در آزمایش عددی منحصر به فرد به هر نتیجه آزمایش نسبت دهیم این عدد را متغیر تصادفی می نامیم و آن را با حروف بزرگ X ، Y ، ... نشان می دهیم. مثلاً وقتی سکه ای را پرتاب می کنیم فضای نمونه ای $S=\{$ر ، پ$\}$ است. اگر متغیر تصادفی X تعداد «رو» آمدن باشد داریم:

$X =$ تعداد رو آمدن $\Longrightarrow X = 0 , 1$

صفر بار رو آمدن (پشت بیاید) — ۱ بار رو آمدن

جدول توزیع احتمال متغیر تصادفی:

جدول توزیع احتمال یک متغیر تصادفی جدولی است که در آن تمام مقادیر متغیر تصادفی و احتمال وقوع هر یک آورده شده است. یعنی در یک ردیف X ها با مقادیر ممکن آورده می شود و در ردیف بعدی احتمال هر کدام آورده می شود مثلاً فرض کنید یک سکه را ۳ بار پرتاب کنیم و X تعداد رو آمدن باشد آنگاه جدول به صورت زیر خواهد بود.

X	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{\binom{3}{0}}{2^3}$	$\frac{\binom{3}{1}}{2^3}$	$\frac{\binom{3}{2}}{2^3}$	$\frac{\binom{3}{3}}{2^3}$

$\Longrightarrow$

X	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

نکته: همواره مجموع سطر دوم (مجموع کل احتمال ها) برابر با ۱ است.

تذکر: سرعت در حل تست های این بخش نقش مهمی دارد.

مثال: در جدول توزیع احتمال زیر $P(X=2)$ چقدر است؟

X	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	a	$\frac{1}{8}$

$\xrightarrow{\text{طبق تعدیل}} \frac{1}{8}+\frac{3}{8}+a+\frac{1}{8}=1 \rightarrow \boxed{a=\frac{3}{8}}$

پس $P(X=2)=\frac{3}{8}$ می باشد.

مثال: سکه ای را ۵ بار پرتاب می کنیم. اگر متغیر تصادفی X را برابر با تعداد «رو» ها تعریف کنیم. حاصل $P(X=2)$ کدام است؟

X را تعداد رو آمدن تعریف کرده ایم، وقتی سؤال $X=2$ را خواسته است یعنی ۲ بار رو بیاید، پس کافی است احتمال دو بار رو آمدن در ۵ بار پرتاب سکه را حساب کنیم.

$$X=2 \longrightarrow P(X=2)=\frac{\binom{5}{2}}{2^5}=\frac{10}{32}=\frac{5}{16}$$

توزیع دوجمله ای:

برخی آزمایش ها فقط دو حالت دارند.

برای حل این مسائل یک حالت را پیروزی و دیگری را شکست در نظر می گیریم. حال اگر پیروزی را با P و شکست را با $(1-P)$ نشان دهیم و یک

آزمایش را n بار انجام دهیم تا به k بار پیروزی برسیم از فرمول زیر استفاده می کنیم.

$$P(\text{بار پیروزی در } n \text{ بار } k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}$$

برای مثال اگر احتمال پیروزی $\frac{1}{4}$ و شکست $\frac{3}{4}$ باشد احتمال ده بار پیروزی در ۱۵ بار انجام آزمایش برابر است با $\binom{15}{10}\left(\frac{1}{4}\right)^{10}\left(\frac{3}{4}\right)^{5}$

نکته ۱: همه سؤالات این بخش ۲ حالته هستند.

نکته ۲: یک راه شناسایی در کنکور این است که همیشه این سؤالات آخرین سؤال احتمال کنکور هستند.

نکته ۳: اگر در صورت سؤال "حداقل" یا "حداکثر" استفاده شد باید چند بار از این فرمول استفاده کنیم.

نکته ۴: اگر احتمال پیروزی $\frac{1}{2}$ و شکست $\frac{1}{2}$ باشد آنگاه می توان فرمول زیر را جایگزین آن کرد.

$$P(\text{بار پیروزی در } n \text{ بار } k) = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}$$

مثال: دانش آموزی به هر یک از ۵ پرسش ۴ گزینه ای به تصادف پاسخ می دهد. با کدام احتمال فقط به ۳ پرسش باید صحیح داده است؟

احتمال درست پاسخ دادن = پیروزی = $\frac{1}{5} = p$

تعداد انجام آزمایش = $n = 5$

تعداد پیروزی = $k = 3$

$$\Rightarrow \binom{5}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^3\underbrace{\left(\frac{4}{5}\right)^2}_{(1-\frac{1}{5})}$$

حل تمرین های مهم کتاب:

مساله ۱: خانواده ای دارای ۴ فرزند است مطلوب است:

الف - فضای نمونه ای مربوط به جنسیت فرزندان این خانواده:

روش تشریحی: نمودار درختی بکشیم و بعد کل مجموعه S را بنویسیم:

$S=\{$(پ و پ و پ و پ)(پ و پ و پ و د)(د و پ و پ و پ) ...... (د و د و د و د)$\}=16$

روش تستی: $n(S)=2^n=2^4=16 \longrightarrow \boxed{n=4}$

ب - احتمال آن که این خانواده ۲ پسر و ۲ دختر داشته باشد.

روش تشریحی: طبق الف $\leftarrow n(S)=16$

$n(A)=\{$(د و پ و پ و د)(پ و د و د و پ)(د و پ و د و پ)(د و د و پ و پ)(پ و پ و د و د)(پ و د و پ و د)$\} \Rightarrow n(A)=6$

$\longrightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$

روش تستی: سوال خواسته دقیقاً ۲ پسر از ۴ فرزند باشد پس $P(A)=\frac{\binom{4}{2}}{2^4}=\frac{3}{8}$

ج - احتمال آن که تعداد پسرها بیشتر از تعداد دخترها باشد.

روش تشریحی: طبق الف $\leftarrow n(S)=16$

$n(A) = ۵$ → $A = \{$(پ و د و پ و پ)(د و پ و پ و پ)(پ و پ و پ و پ)(پ و پ و پ و د)(پ و پ و د و پ)$\}$ → $P(A) = \frac{۵}{۱۶} = \frac{n(A)}{n(S)}$

روش تست: تعداد پسر از دختر بیشتر یعنی دقیقاً ۳ پسر از ۴ تا یا دقیقاً ۴ پسر از ۴ تا.

$$\frac{\binom{۴}{۳}}{۲^۴} + \frac{\binom{۴}{۴}}{۲^۴} = \frac{۴}{۲^۴} + \frac{۱}{۲^۴} = \frac{۵}{۲^۴} = \frac{۵}{۱۶}$$

مسأله ۲: در یک خانواده ۴ فرزندی احتمال آن که فرزندان یکی در میان پسر باشند و یا خانواده ۲ فرزند پسر داشته باشد.

$A = \{$(پ و د و د و پ)(پ و پ و د و د)(پ و د و پ و د)(د و پ و پ و د)(د و پ و د و پ)(د و د و پ و پ)$\}$

$B = \{$(پ و د و پ و د)(د و پ و د و پ)$\}$

$A \cap B = \{$(پ و د و پ و د)(د و پ و د و پ)$\}$

$$\longrightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۶}{۱۶}$ $\quad P(B) = \frac{۲}{۱۶}$ $\quad P(A \cap B) = \frac{۲}{۱۶}$

$$\longrightarrow P(A \cup B) = \frac{۶}{۱۶} + \frac{۲}{۱۶} - \frac{۲}{۱۶} = \frac{۶}{۱۶} = \frac{۳}{۸}$$ = جواب

تذکر: خیلی از بخش های این سوال با روش تست سوال قبل حل می‌شن.

مسأله ۳: در یک خانواده سه فرزندی مطلوب است احتمال آن که فقط دو فرزند اول پسر باشند.

روش تشریحی:

$S=\{$(د,د,د)(پ,د,د)(د,پ,د)(پ,پ,د)(د,د,پ)(پ,د,پ)(د,پ,پ)(پ,پ,پ)$\}$

$\longrightarrow n(S)=8$

$A=\{$(د,پ,پ)$\} \Rightarrow n(A)=1$

$P($فقط دو فرزند اول پسر$) = P($فرزند اول پسر$) \times P($فرزند دوم پسر$) \times P($فرزند سوم دختر$)$

$P(\quad) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

روش تستی: می‌توانستیم $n(S)$ را با فرمول به صورت $2^n = 2^3$ حساب کنیم.

مساله ۴: اگر ۴۰٪ ژن‌های تعیین کننده عامل RH خون منفی باشد، مطلوبست احتمال آن که RH خون فردی منفی نباشد.

نکته: RH خون فردی منفی نباشد یعنی ژن پدر یا مادر و یا هر دو منفی نباشد.

۴۰٪ منفی $\longrightarrow$ ۶۰٪ مثبت

پس ۳ حالت در نظر می‌گیریم.

$P($RH خون پدر مثبت و RH خون مادر مثبت$) = \frac{60}{100} \times \frac{60}{100} = \frac{36}{100}$

$P($RH خون پدر مثبت و RH خون مادر منفی$) = \frac{60}{100} \times \frac{40}{100} = \frac{24}{100}$

$P($RH خون پدر منفی و RH خون مادر مثبت$) = \frac{40}{100} \times \frac{60}{100} = \frac{24}{100}$

$P($جواب$) = \frac{36}{100} + \frac{24}{100} + \frac{24}{100} = \frac{84}{100}$

مساله ۵: با مفروضات مساله ۴، احتمال آنکه در خانواده‌ای دو فرزند از لحاظ خونی دارای یک نوع RH باشند چقدر است؟ $(P(RH^-)=0/16)$

نکته: ژن ها از یکدیگر مستقل هستند.

P (هردو فرزند RH منفی دارند) $=$ $\underbrace{P(\text{اولی RH منفی})}_{\text{در کتاب ۰/۱۲ نوشته شده}}$ $\times$ P(دومی RH منفی) $= \frac{16}{100} \times \frac{16}{100} = 0/0256$

$P(RH^+) = 1 - P(RH^-) = 1 - 0/16 = 0/84$

P(هردو فرزند RH مثبت دارند) $=$ P(اولی RH مثبت) $\times P$(دومی RH مثبت) $= \frac{84}{100} \times \frac{84}{100} = 0/7056$

P(هردو دارای یک نوع RH) $=$ P(هردو منفی) $+$ P(هردو مثبت)

P(جواب) $= 0/0256 + 0/7056 = 7312$

نکته: هردو RH^+ با هردو RH^- ناسازگارند.

مساله ۶: اگر فرزند اول خانواده‌ای دارای RH مثبت باشد احتمال آن که فرزند دوم دارای RH منفی باشد چقدر است؟ (RH خون فرزندان را مستقل فرض کنید)

چون RH خون فرزندان مستقل است پس کافیست فقط منفی بودن RH فرزند دوم را حساب کنیم یعنی منفی بودن RH خون فرزند دوم ربطی به مثبت یا منفی بودن RH خون فرزند اول ندارد پس

P(منفی RH) $= \frac{40}{100} \times \frac{40}{100} = 0/16$

مساله ۷: خانواده‌ای دارای سه فرزند است. مطلوبست احتمال آن که RH خون هر سه فرزند یکی نباشد؟ با توجه به مسائل قبلی خون احتمال $RH^+ = 0/84$ و $RH^- = 0/16$ می باشد. می توانیم تمام حالات را بنویسیم و در هم ضرب کنیم ولی این روش محاسبات زیادی دارد.

P(RH خون هر سه فرزند یکی نباشد) $= 0/40$

روش سریع تر: اصل متمم: P(RH خون هر سه فرزند یکی نباشد) $= 1 - P$(هر سه فرزند یکی باشد)

P(جواب) $= 1 - \left[\left(\frac{84}{100} \times \frac{84}{100} \times \frac{84}{100}\right) + \left(\frac{16}{100} \times \frac{16}{100} \times \frac{16}{100}\right)\right] = 0/40$

مساله ۸ : خانواده‌ای دارای چهار فرزند است، مطلوبست احتمال آن که فرزند اول و دوم پسر و فرزند سوم و چهارم دختر باشد.

$S=\{(پ,پ,پ,پ),(د,پ,پ,پ),\ldots\ldots,(د,د,د,د)\} \Rightarrow n(S)=16$

$A=\{(پ,پ,د,د)\} \Rightarrow n(A)=1$

$\longrightarrow P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{1}{16}$

روش تستی : می‌توان $n(S)$ را طبق فرمول به دست آورد $n=4 \Rightarrow n(S)=2^4=16$

مساله ۹ : کارمندان اداره‌ای مطابق جدول زیر توزیع شده‌اند، احتمال آنکه کارمند مردی تحصیلات دانشگاهی داشته باشد چقدر است؟

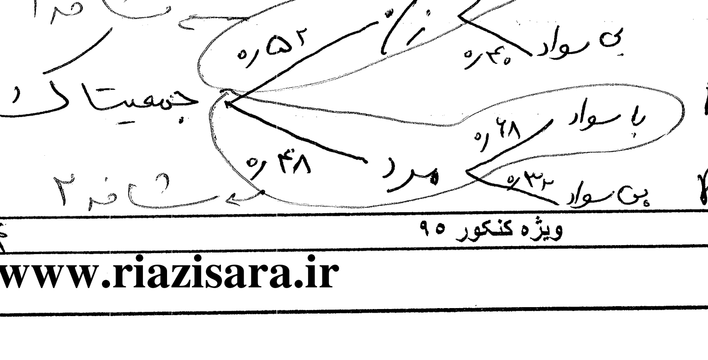
		جنسیت	
		زن	مرد
تحصیلات	دانشگاهی	۱۰	۱۵
	کمتر	۸۰	۹۰

$P(\text{تحصیلات دانشگاهی} \mid \text{مرد بودن}) = \dfrac{P(\text{تحصیلات دانشگاهی} \cap \text{مرد بودن})}{P(\text{مرد بودن کارمند})}$

$\longrightarrow \text{جواب} = \dfrac{\frac{15}{195}}{\frac{105}{195}} = \dfrac{15}{105}$

روش دوم : بدون فرمول به صورت تستی می‌توان آن را حل کرد در درسنامه نوشته شده است.

مساله ۱۰ : ۵۲٪ جمعیت کشوری را زنان و ۴۸٪ بقیه را مردان تشکیل می‌دهند اگر ۶۰٪ زنان و ۶۸٪ مردان باسواد باشند، چند درصد افراد این جامعه باسوادند.



$P(\text{جواب}) = P(\text{شاخه ۱}) + P(\text{شاخه ۲})$

$P(\text{جواب}) = \left(\dfrac{52}{100}\times\dfrac{60}{100}\right)+\left(\dfrac{48}{100}\times\dfrac{68}{100}\right)=\%64$

$P(\text{جواب}) = \%64$

روش دوم: اگر $P(E_1)$ احتمال زنان باسواد و $P(E_2)$ احتمال مردان باسواد باشند داریم

$$P(E)=P(E_1)P(E|E_1)+P(E_2)P(E|E_2)=\frac{52}{100}\times\frac{60}{100}+\frac{48}{100}\times\frac{68}{100}=\frac{6384}{1000}=64\%$$

مسئله ۱۱: جعبه ای ۳ مهره سفید و ۵ مهره سیاه دارد. از این جعبه چهار مهره با هم و به تصادف خارج می کنیم. اگر X تعداد مهره های سفید خارج شده باشد، جدول توزیع احتمال X را بنویسید

۱) $\begin{cases} \text{0 سفید} \\ \text{4 سیاه} \end{cases} \longrightarrow P(X=0)=\dfrac{\binom{5}{4}}{\binom{8}{4}}=\dfrac{5\times4\times3\times2}{8\times7\times6\times5}=\dfrac{1}{14}$

۲) $\begin{cases} \text{1 سفید} \\ \text{3 سیاه} \end{cases} \longrightarrow P(X=1)=\dfrac{\binom{3}{1}\binom{5}{3}}{\binom{8}{4}}=\dfrac{3}{7}$

۳) $\begin{cases} \text{2 سفید} \\ \text{2 سیاه} \end{cases} \longrightarrow P(X=2)=\dfrac{\binom{3}{2}\binom{5}{2}}{\binom{8}{4}}=\dfrac{3}{7}$

۴) $\begin{cases} \text{3 سفید} \\ \text{1 سیاه} \end{cases} \longrightarrow P(X=3)=\dfrac{\binom{3}{3}\binom{5}{1}}{\binom{8}{4}}=\dfrac{1}{14}$

$X=x_i$	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{14}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{14}$

روش تستی: [می توان احتمال ها را سریع حساب کرد و در جدول نوشت]

مسأله ۱۲: نوعی بذر ذرت تهیه شده است که ادعا می‌شود ۹۰٪ بذرها جوانه خواهند زد. اگر ۲۰ دانه از این ذرت‌ها را در شرایط مناسب و یکسان بکاریم، مطلوبست تعیین توزیع تعداد بذرهایی که جوانه می‌زنند و سپس احتمال آن که فقط ۱۸ دانه جوانه بزنند.

$p =$ پیروزی $= \frac{9}{10} = \frac{90}{100} =$ احتمال جوانه زدن٪

تعداد آزمایش $= 20 = n$ تعداد موفقیت $= 18 = k$

$$\longrightarrow P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \Rightarrow \binom{20}{18}\left(\frac{9}{10}\right)^{18}\left(1-\frac{9}{10}\right)^{2} = \frac{20! \times 9^{18}}{18! \times 2! \times 10^{20}}$$

مسأله ۱۳: به دانش آموزی ۱۰ سوال تستی چهار گزینه‌ای داده‌ایم. اگر او به سوال‌ها به تصادف جواب بدهد، احتمال آنکه

الف - به ۷ سوال پاسخ صحیح بدهد چقدر است؟

$k = 7$ ← تعداد موفقیت و $n = 10 =$ تعداد مراحل آزمایش و   احتمال پیروزی $= \frac{1}{4} = p$

$$\binom{10}{7}\left(\frac{1}{4}\right)^7\left(1-\frac{1}{4}\right)^3 = \binom{10}{7}\left(\frac{1}{4}\right)^7\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{3240}{4^{10}}$$

ب - حداقل به ۷ سوال پاسخ صحیح بدهد چقدر است؟

حداقل ۷ یعنی ۷ یا ۸ یا ۹ یا ۱۰ ←

$$\begin{cases} P(X=7) = \binom{10}{7}\left(\frac{1}{4}\right)^7\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{3240}{4^{10}} \\ P(X=8) = \binom{10}{8}\left(\frac{1}{4}\right)^8\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{405}{4^{10}} \\ P(X=9) = \binom{10}{9}\left(\frac{1}{4}\right)^9\left(\frac{3}{4}\right)^1 = \frac{30}{4^{10}} \\ P(X=10) = \binom{10}{10}\left(\frac{1}{4}\right)^{10}\left(\frac{3}{4}\right)^0 = \frac{1}{4^{10}} \end{cases}$$

$$\longrightarrow P(\text{جواب}) = \frac{3240}{4^{10}} + \frac{405}{4^{10}} + \frac{30}{4^{10}} + \frac{1}{4^{10}} = \frac{3676}{4^{10}}$$

مسأله ۱۴: در خانواده‌ای با چهار فرزند، احتمال آن که RH خون فرزندان یک در میان مثبت باشد چقدر است؟ [فرض کنید $P(RH^+)=0/84$ و $P(RH^-)=0/16$]

$$P(\text{یک در میان مثبت } RH \text{ خون}) = \begin{cases} P(RH^+)P(RH^-)P(RH^+)P(RH^-) \\ + \\ P(RH^-)P(RH^+)P(RH^-)P(RH^+) \end{cases}$$

$$\Rightarrow P(\text{جواب}) = (0/84 \times 0/16 \times 0/84 \times 0/16) + (0/16 \times 0/84 \times 0/16 \times 0/84) = 0/036$$

مسأله ۱۵: احتمال آن که حسن دیر به مدرسه برسد ۰/۲ است، احتمال آن که در یک هفته دو روز دیر برسد چقدر است؟

$p = 0/2 =$ پیروزی

$n = 7 =$ تعداد کل مراحل

$k = 2$ تعداد روزهای موفقیت

$$P(n=2) = \binom{7}{2}(0/2)^2(1-0/2)^5 = 0/0055$$

معادله درجه دوم:

یک چند جمله‌ای به صورت $y=ax^2+bx+c$ می‌باشد که برای به دست آوردن محل برخورد آن با محور x ها (ریشه) کافی است y را برابر صفر قرار دهیم، همچنین شکل این نمودار سهمی می‌باشد.

روش‌های حل معادله درجه دوم $ax^2+bx+c=0$

1) $c=0 \longrightarrow$ فاکتورگیری $\xrightarrow{\text{مثال}} 2x^2-200x=0 \Rightarrow x(2x-200)=0 \begin{cases} x=0 \\ x=10 \end{cases}$

2) $b=0 \longrightarrow$ خاصیت ریشه زوج $\xrightarrow{\text{مثال}} \begin{cases} 2x^2-200=0 \Rightarrow x^2=100 \Rightarrow x=\mp 10 \\ x^2+1=0 \Rightarrow x^2=-1 \end{cases}$ ریشه ندارد

3) تجزیه $\xrightarrow{\text{مثال}} x^2-5x+6=0 \Rightarrow (x-2)(x-3)=0 \begin{cases} x=2 \\ x=3 \end{cases}$

4) $a+b+c=0 \longrightarrow \begin{cases} x_1=1 \\ x_2=\frac{c}{a} \end{cases} \xrightarrow{\text{مثال}} 7x^2+3x-10=0 \begin{cases} x=1 \\ x=\frac{-10}{7} \end{cases}$

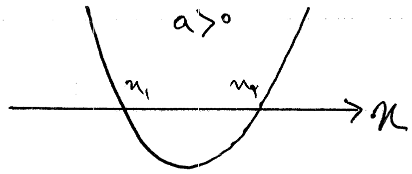
5) $a+c=b \longrightarrow \begin{cases} x_1=-1 \\ x_2=-\frac{c}{a} \end{cases} \xrightarrow{\text{مثال}} x^2+100x+99=0 \begin{cases} x=-1 \\ x=-99 \end{cases}$

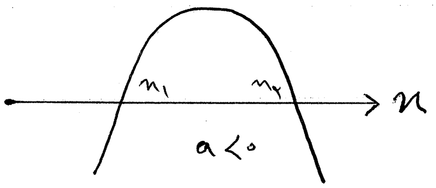
6) $\Delta=b^2-4ac \longrightarrow$

- الف) $\Delta>0 \xrightarrow{\text{۲ ریشه}} x_1,x_2=\frac{-b\mp\sqrt{\Delta}}{2a}$
- ب) $\Delta=0 \xrightarrow{\text{ریشه مضاعف}} x_1=x_2=\frac{-b}{2a}$
- پ) $\Delta<0 \xrightarrow{\text{بدون ریشه}}$ هم‌علامت a

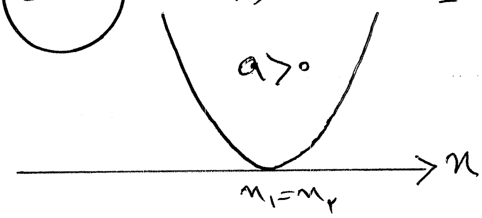
تحلیل حالت ۶:

الف- $\Delta>0$ ⟵ معادله ۲ ریشه دارد ⟵ محور x را در ۲ نقطه قطع می‌کند

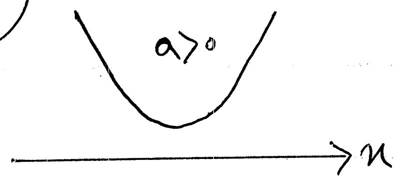




ب- $\Delta=0$ ⟵ معادله ۱ ریشه مضاعف دارد ⟵ در یک نقطه به محور x مماس می‌شود

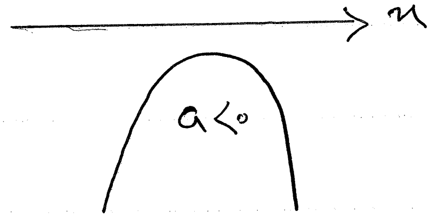


ج- $\Delta<0$ ⟵ معادله ریشه ندارد ⟵ محور x را قطع نمی‌کند



همواره مثبت (بالای محور x)

همواره منفی (زیر محور x)



تحلیل حالت ۲:

اگر $b=0$ باشد ۲ تا علامت $\frac{c}{a}$ تعیین کننده است.

الف- $\frac{c}{a}>0$ ⟵ معادله ریشه ندارد

ب- $\frac{c}{a}<0$ ⟵ معادله ریشه دارد

نکته ۱: اگر معادله درجه دومی ریشه مضاعف صفر داشته باشد باید $\boxed{c=b=0}$

نکته ۲: توجه به تمامی بخش‌های معادله درجه دوم مثل ضریب x^2، علامت Δ، و شرط خواسته شده در مسأله و در پایان اشتراک تمامی شرط‌ها الزامی است.

مثال: به ازای کدام مجموعه مقادیر m، معادله درجه دوم $2x^2+(m+1)x+\frac{1}{2}m+2=0$ فاقد ریشه‌ی حقیقی است؟

$$\underbrace{2}_{a}x^2+\underbrace{(m+1)}_{b}x+\underbrace{\frac{1}{2}m+2}_{c}=0$$

پاسخ: شرط فاقد ریشه بودن $\Delta<0$ می‌باشد پس:

$$\Delta<0 \Rightarrow (m+1)^2-4(2)\left(\frac{1}{2}m+2\right)=(m^2+2m+1)-4m-16=\underbrace{(m-5)(m+3)}_{-3<m<5}<0$$

جواب $= -3<m<5$

مثال: به ازای کدام مقادیر a، معادله درجه دوم $2x^2+ax+a-\frac{3}{2}=0$ دارای دو ریشه حقیقی متمایز می‌باشد؟

$$\underbrace{2}_{a}x^2+\underbrace{a}_{b}x+\underbrace{a-\frac{3}{2}}_{c}=0$$

پاسخ: باید $\Delta>0$ باشد پس:

$$\Delta>0 \xrightarrow{b^2-4ac} a^2-4(2)\left(a-\frac{3}{2}\right)>0 \longrightarrow \underbrace{a^2-8a+12}_{(a-2)(a-6)}>0 \Rightarrow$$

a		2		6	
معادله	+	0	−	0	+

جواب $= a>6$ یا $a<2$

تذکر: در جدول تعیین علامت از سمت راست با علامت بزرگترین درجه شروع می‌کنیم $(+)$ و هر بار که به ریشه رسیدیم علامت تغییر می‌کند.

در این مثال

روابط بین ضرایب و ریشه‌ها:

معادله‌ی درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ را در نظر بگیرید اگر α و β ریشه‌های این معادله باشند مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها از فرمول‌های زیر به دست می‌آیند.

مجموع ریشه‌ها $S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a}$ | حاصل‌ضرب ریشه‌ها $P = \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a}$

روابط فرعی و مهم:

مجموع مجذور ریشه‌ها: $\alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P$

مجموع مکعب ریشه‌ها: $\alpha^3 + \beta^3 = S^3 - 3SP$

قدرمطلق تفاضل ریشه‌ها: $|\alpha - \beta| = \sqrt{S^2 - 4P} = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$

نکته ۱: هرگاه در سؤالی یک رابطه متقارن بین ریشه‌ها خواسته شد به کمک S و P حتماً می‌توانیم آن را به دست آوریم فقط کافی است که از اتحادها، خواص کسرها و... بهره بگیریم [رابطه‌ای را متقارن گویند که اگر جای α و β عوض شود باز مقدار معادله تغییری نکند]

نکته ۲: هرگاه در سؤالی یک مقدار مجهول k از ما خواسته شد و فقط یک رابطه بین ریشه‌ها داده شد ابتدا S و P را به دست می‌آوریم و از هر کدام که عدد شد مقدار ۲ ریشه را به دست می‌آوریم و در پایان در معادله مجهول می‌گذاریم.

نکته ۳: ریشه‌ها تنها مقادیری هستند که در معادله صدق می‌کنند و اگر در سؤالی به عبارتی ناآشنا برخورد کردیم که شبیه صورت سؤال بود از این خاصیت استفاده می‌کنیم.

مثال: در معادله‌ی $x^2 - 5x - 1 = 0$ حاصل $\frac{x_1}{x_2^2} + \frac{x_2}{x_1^2}$ کدام است؟

$S = \frac{-(-5)}{1} = 5$

$P = \frac{-1}{1} = -1$

پاسخ: طبق نکته ۱ عبارت متقارن است پس از کد ها کمک می‌گیریم:

$$\frac{x_1}{x_2^2} + \frac{x_2}{x_1^2} = \frac{x_1^3 + x_2^3}{x_1^2 \times x_2^2} = \frac{S^3 - 3SP}{(P)^2} = \frac{125 - 3(5)(-1)}{(-1)^2} = 140$$

مثال: به ازای کدام مقدار m یکی از ریشه های معادله $x^2-mx+4=0$ دو واحد از ریشه دیگر بیشتر است؟

روش اول: به کمک نکته ۲ و تشکیل S و P و $\boxed{\alpha=\beta+2}$

روش دوم: چون یکی از ریشه ها ۲ واحد از دیگری بیشتر است پس تفاضل آنها ۲ می باشد.

$$\text{تفاضل ریشه}=2 \longrightarrow \frac{\sqrt{\Delta}}{a}=2 \Longrightarrow \frac{\sqrt{m^2-16}}{1}=2 \Longrightarrow m^2-16=4 \Longrightarrow m=\pm 2\sqrt{5}$$

نکته ۴: هرگاه در حل مسائل S و P در متن تست واژه «حقیقی» دیده شود باید Δ ی معادله درجه دوم را محاسبه کرده و کنترل کنیم که منفی نباشد.

نکته ۵: اگر $a=c$ باشد آنگاه یکی از ریشه ها عکس دیگری است. $(\alpha=\frac{1}{\beta})$

نکته ۶: اگر $a=-c$ باشد آنگاه یکی از ریشه ها عکس و قرینه دیگری است. $(\alpha=\frac{-1}{\beta})$

نکته ۷: اگر در معادله درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ یک ریشه k برابر ریشه دیگر باشد $(\alpha=k\beta)$ داریم

$$\frac{b^2}{ac}=\frac{(k+1)^2}{k}$$

مثال: به ازای کدام مقدار m، معادله $mx^2+5x+m^2-6=0$ دو ریشه حقیقی و معکوس هم دارد؟

$$\underbrace{m}_{a}x^2+\underbrace{5}_{b}x+\underbrace{m^2-6}_{c}=0 \xrightarrow{\text{دو ریشه عکس یکدیگرند}} a=c$$

$$\longrightarrow m^2-6=m \Longrightarrow \begin{cases} m=3 \xrightarrow{\Delta<0 \text{ می شود}} \text{غ ق ق} \\ m=-2 \xrightarrow{\Delta>0 \text{ می شود}} \text{ق ق} \end{cases}$$

بحث روی علامت ریشه ها:

$\Delta>0 \longrightarrow$

- $\frac{c}{a}<0 \longrightarrow$ دو ریشه حقیقی مختلف علامت
- $\frac{c}{a}>0 \longrightarrow$
  - $\frac{-b}{a}>0$ دو ریشه حقیقی مثبت
  - $\frac{-b}{a}<0$ دو ریشه حقیقی منفی

نکته ۱: شرط وجود دو ریشه حقیقی مختلف علامت آن است که $\frac{c}{a}<0$ باشد.

نکته ۲: شرط وجود دو ریشه حقیقی متمایز مثبت آن است که $\frac{c}{a}>0$ و $\frac{-b}{a}>0$ باشد.

نکته ۳: شرط وجود دو ریشه حقیقی متمایز منفی آن است که $\frac{c}{a}>0$ و $\frac{-b}{a}<0$ باشد.

نکته ۴: شرط وجود دو ریشه صفر و مثبت آن است که $c=0$ و $\frac{-b}{a}>0$ باشد.

نکته ۵: شرط وجود دو ریشه صفر و مثبت آن است که $c=0$ و $\frac{-b}{a}<0$ باشد.

نکته ۶: شرط وجود یک ریشه مضاعف

- مثبت آن است که $\Delta=0$ و $\frac{-b}{2a}>0$ باشد.
- منفی آن است که $\Delta=0$ و $\frac{-b}{2a}<0$ باشد.
- صفر آن است که $b=c=0$ باشد.

تشکیل معادله درجه دوم جدید:

فرض می کنیم α و β ریشه ها باشند

آنگاه $S=\alpha+\beta$, $P=\alpha\beta$ می باشد و معادله برابر است با: $x^2-Sx+P=0$

نکته ۱: اگر یک معادله به ما داده شود و یک معادله دیگر از ما خواسته شود و یا ۲ معادله یکی با ضرایب معلوم و یکی با ضرایب مجهول داده شود آنگاه همیشه با نوشتن روابط بین ریشه هایشان و قرار دادن یک عبارت به صورت ای که $\boxed{x \text{ مجهول برحسب}}$ x معلوم در معادله معلوم مقدارهای مجهول را می یابیم

مثال: معادله‌ای بنویسید که ریشه‌هایش یک واحد از ریشه‌های $x^2-x-1=0$ بیشتر باشد.

$\underbrace{x^2-x-1=0}_{\text{معادله معلوم (۲)}}$

$$\boxed{X_{\text{مجهول}} = x_{\text{معلوم}} + 1}$$

$$\boxed{x_{\text{معلوم}} = X_{\text{مجهول}} - 1} \quad (1)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} (x-1)^2-(x-1)-1 = x^2-2x+1-x+1-1 = x^2-3x+1=0$$

مثال: اگر هر یک از ریشه‌های معادله‌ی $3x^2+ax+b=0$ دو برابر معکوس هر ریشه از معادله $4x^2-7x+3=0$ باشد a کدام است؟

$\underbrace{4x^2-7x+3=0}_{\text{معادله معلوم}}$　　$\underbrace{3x^2+ax+b=0}_{\text{معادله مجهول}}$

طبق صورت سؤال　$X_{\text{مجهول}} = \dfrac{2}{x_{\text{معلوم}}} \Longrightarrow x_{\text{معلوم}} = \dfrac{2}{X_{\text{مجهول}}}$

$$\longrightarrow 4\left(\frac{2}{X}\right)^2 - 7\left(\frac{2}{X}\right) + 3 = 0 \Longrightarrow \frac{16}{X^2} - \frac{14}{X} + 3 = 0 \Rightarrow \times(x^2)$$

چون باید x^2 در صورت باشد

$\underbrace{3x^2-14x+16=0}_{\text{جواب}}$　　$3x^2+ax+b=0$

پس $a=-14$ و $b=16$ می‌باشد.

نکته: اگر معادله به صورت $a\square^2+b\square+c$ باشد ابتدا با تغییر متغیر $t=\square$ آن را به معادله درجه دوم تبدیل کرده و حل می‌کنیم و توجه به علامت بسیار مهم است مثلاً اگر $t=x^2$ باشد و مقدار $t=-1$ شود آنگاه قابل قبول نیست.

نکته ۱: در معادله‌ی درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ اگر b را قرینه کنیم معادله‌ای به دست می‌آید که ریشه‌هایش قرینه‌ی ریشه‌های معادله‌ی مفروض است.

نکته ۲: در معادله‌ی درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ اگر جای a و c را عوض کنیم معادله‌ای حاصل می‌شود که ریشه‌هایش عکس ریشه‌های معادله مفروض است.

نکته ۳: در معادله درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ اگر جای a و c را عوض کنیم و b را قرینه کنیم معادله‌ای حاصل می‌شود که ریشه‌هایش عکس و قرینه ریشه‌های معادله مفروض است.

نکته ۴: اگر b را در k و c را در k^2 ضرب کنیم معادله‌ای حاصل می‌شود که ریشه‌هایش k برابر ریشه‌های معادله مفروض است.

مثال: معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌هایش معکوس ریشه‌های معادله $3x^2+11x-1=0$ کدام است؟

پاسخ: باید جای عدد ثابت و ضریب x^2 را عوض کنیم: $-x^2+11x+3=0$

مثال: تعداد ریشه‌های گویای معادله $x^4-4x^2+3=0$ کدام است؟

$$\overset{1}{\boxed{x^2=t}} \Longrightarrow (x^2)^2-4(x^2)+3=0 \xrightarrow{1} t^2-4t+3=0 \Rightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=3 \end{cases}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} t=x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1 & \text{قابل قبول (گویا)} \\ t=x^2=3 \Rightarrow x=\pm\sqrt{3} & \text{غیر قابل قبول (غیر گویا)} \end{cases}$$

ویژگی های تابع درجه دوم $y=ax^2+bx+c$

۱. نام این منحنی سهمی قائم است و دامنه آن $\mathbb{R}$ می باشد.

۲. اگر ضریب x^2 مثبت باشد $(a>0)$ سهمی رو به بالا و دارای مینیمم است.

۳. اگر ضریب x^2 منفی باشد $(a<0)$ سهمی رو به پایین و دارای ماکزیمم است.

۴. هر سهمی یک راس [مینیمم یا ماکزیمم] دارد که مختصات آن $S=\left(\underbrace{\frac{-b}{2a}}_{\text{طول}}, \underbrace{\frac{-\Delta}{4a}}_{\text{عرض}}\right)$

نکته: عرض منحنی از $y\left(\frac{-b}{2a}\right)$ نیز به دست می آید.

۵. هر سهمی فقط یک محور تقارن به معادله $x=\frac{-b}{2a}$ دارد.

۶. هر سهمی یک خط مماس به معادله $y=\frac{-\Delta}{4a}$ دارد.

گذشتن از ناحیه های مختصات:

۱- سهمی بالای محور x ها (از ناحیه اول و دوم می گذرد) $\begin{cases} a>0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$ ← مماس شدن

۲- سهمی پایین محور x ها (از ناحیه سوم و چهارم می گذرد) $\begin{cases} a<0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$ ← مماس شدن

۳- سهمی فقط از ناحیه ۱ نمی گذرد. $\left(a<0 \,،\, \frac{c}{a} \geq 0 \,،\, \frac{-b}{a}<0\right)$

۴- سهمی فقط از ناحیه ۲ نمی گذرد. $\left(a<0 \,،\, \frac{c}{a} \geq 0 \,،\, \frac{-b}{a}>0\right)$

۵- سهمی فقط از ناحیه ۳ نمی گذرد. $\left(a>0 \,،\, \frac{c}{a} \geq 0 \,،\, \frac{-b}{a}>0\right)$

۶- سهمی فقط از ناحیه ۴ نمی گذرد. $\left(a>0 \,،\, \frac{c}{a} \geq 0 \,،\, \frac{-b}{a}<0\right)$

۷- سهمی از ۴ ناحیه می گذرد. $\left(\frac{c}{a}<0\right)$

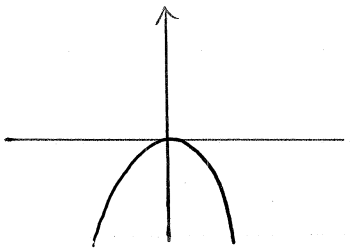
۱- برای رسم $f(x \pm a)$ به کمک $f(x)$ آن را a واحد به چپ (راست) انتقال می دهیم.

۲- برای رسم $f(x) \pm b$ به کمک $f(x)$ آن را b واحد به بالا (پایین) انتقال می دهیم.

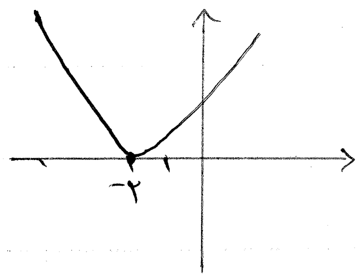
تمرین های کتاب : (بخش اول)

مساله ۱: به روش انتقال نمودار توابع زیر را رسم کنید.

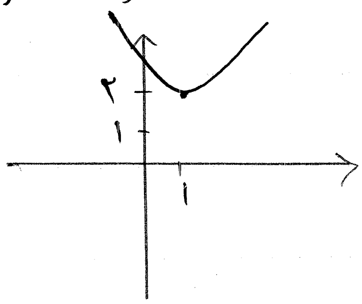
الف) $g(x) = -x^2$



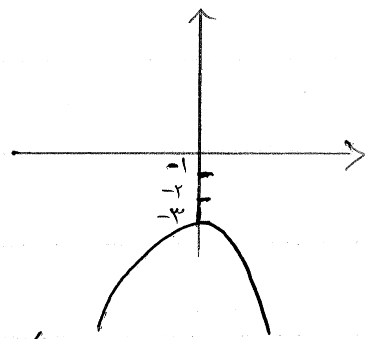
ب) $h(x) = (x+2)^2$



ج) $s(x) = (x-1)^2+2$



د) $t(x) = -x^2-3$



مساله ۲: نمودارهای توابع زیر را رسم کنید [رسم با دانش آموز]

الف) $y=3x^2+6x$

مختصات راس $(-1,-3)$ جهت رو به بالا $\rightarrow \cup$

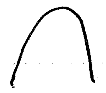
ب) $y=-2x^2+2x-1$

مختصات راس $(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$ جهت رو به پایین $\rightarrow \cap$

ج) $y=9x^2+6x+1$

مختصات راس $(-\frac{1}{3},0)$ جهت رو به بالا $\rightarrow \cup$

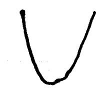
د) $y = (2-x)(4+x) = -x^2 - 2x + 8$

مختصات راس $= (-1,9)$ — جهت رو به پایین 

ه) $y = 2x^2 + 3$

مختصات راس $= (0,3)$ — جهت رو به بالا 

و) $y = 2x^2 - 3x + 4$

مختصات راس $= \left(\frac{3}{4}, \frac{23}{8}\right)$ — جهت رو به بالا 

مساله ۳: شخصی که در لبه فوقانی ساختمانی به ارتفاع ۸۰ متر ایستاده است توپی را با سرعت اولیه ۲۰ متر بر ثانیه به سوی بالا پرتاب می کند. بعد از t ثانیه ارتفاع توپ از سطح زمین برابر است با $h = -5t^2 + 20t + 80$. نمودار این تابع را رسم کنید. با استفاده از این نمودار به سوالات زیر پاسخ دهید:

الف) توپ پس از چند ثانیه به زمین می خورد؟

سهمی دارای نقطه ماکزیمم به مختصات $(2,100)$ می باشد که از نقطه $(0,80)$ عبور می کند.

$$h=0 \longrightarrow -5t^2 + 20t + 80 = 0 \Rightarrow t_{1,2} = 2 \pm 2\sqrt{5}$$

پس توپ بعد از $2+2\sqrt{5}$ ثانیه به زمین می خورده

ب) ماکزیمم ارتفاع توپ چقدر است؟ و بعد از چند ثانیه به ماکزیمم ارتفاع می رسد؟

$$t = \frac{-20}{-10} = 2$$

ماکزیمم ارتفاع توپ $h(2) = -5(2)^2 + 20(2) + 80 = 100$

ج) بعد از چند ثانیه پس از پرتاب توپ به سطح بالای ساختمان برمی گردد؟

$$80=-5t^2+20t+80 \Rightarrow t=0,4$$

پس در لحظه $t=4$ به سطح بالای ساختمان برمی‌گردد.

د) دامنه این تابع را تعیین کنید. اگر رسم کنیم بین دو ریشه جواب مسأله است.

پس $[0, 2+2\sqrt{5}]$

مسأله ۴: محیط مستطیلی ۱۰۰ متر است. طول و عرض آن را چنان تعیین کنید که مساحت مستطیل ماکزیمم شود.

نکته: درصورتی مساحت مستطیل ماکزیمم است که طول و عرض آن برابر باشد.

روش تشریحی:

$$\underbrace{S=xy}_{1} \quad , \quad 2\times(x+y)=100 \Rightarrow y=50-x$$

$$(1) \rightarrow xy=x\times(50-x)=-x^2+50x \Rightarrow \frac{-b}{2a}=25 \rightarrow \begin{cases} x=25 \\ y=25 \end{cases}$$

روش تستی: $x=y$ است پس $4x=100 \Rightarrow x=25$

مسأله ۵: کمترین مقدار تابع $f(x)=x+\frac{4}{x}$ را به ازای مقادیر مثبت x تعیین کنید.

روش تشریحی:

$$f(x)=x+\frac{4}{x} \Rightarrow y=x+\frac{4}{x} \Rightarrow xy=x^2+4$$

$$x^2-xy+4=0 \Rightarrow x=\frac{-b}{2a}=\frac{y}{2} \Rightarrow y=2x$$

$$2x=x+\frac{4}{x} \Rightarrow x^2=4 \xrightarrow{x>0} x=2 \quad , \quad f(x)=2+\frac{4}{2}=4$$

روش تستی:

$$x+\frac{a}{x} \geqslant 2\sqrt{x\times\frac{a}{x}} \quad , \quad x+\frac{4}{x} \geqslant 2\sqrt{x\times\frac{4}{x}}=4$$

مسأله ۶ : معادله‌ای درجه دوم بنویسید که جواب های آن دو عدد زیر باشند.

الف) ۴ و ۳-

$S = 4+(-3)=1 \qquad P=(4)(-3)=-12 \Rightarrow \boxed{x^2-x-12=0}$

ب) $\frac{3}{2}$ و $\frac{2}{3}$

$S=\frac{2}{3}+\frac{3}{2}=\frac{13}{6} \qquad P=(\frac{2}{3})(\frac{3}{2})=1 \Rightarrow \boxed{x^2-\frac{13}{6}x+1=0}$

ج) $2-\sqrt{2}\,,\,2+\sqrt{2}$

$S=(2-\sqrt{2})+(2+\sqrt{2})=4 \quad P=(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})=2 \quad \boxed{x^2-4x+2=0}$

مسأله ۷ : مقدار m را چنان تعیین کنید که حاصل ضرب جواب‌های معادله‌ی $-mx^2+3x+m-1=0$ برابر ۲- باشد. (α و β ریشه ها)

$\alpha . \beta = -2 \longrightarrow \frac{c}{a}=-2 \Rightarrow \frac{m-1}{-m}=-2 \Rightarrow \boxed{m=-1}$

مسأله ۸ : مقدار a را چنان تعیین کنید که جواب های معادله‌ی $2x^2-5x+a=0$ معکوس یکدیگر باشند.

روش تستی : طبق نکات باید عدد ثابت و ضریب x^2 برابر باشد پس $a=2$

مسأله ۹ : معادله‌ی سهمی را بنویسید که محور طول ها را در ۲+ و ۲- و عرض ها را در ۲+ قطع کند.

فرم کلی $\Rightarrow y=a(x-\alpha)(x-\beta)$

$\longrightarrow y=a(x-2)(x+2) \xrightarrow{(0,2)} 2=-4a \Rightarrow a=-\frac{1}{2}$

معادله $= -\frac{1}{2}x^2+2$

مساله ۱۵: معادله درجه دومی بنویسید که جواب های آن معکوس جواب های $x^2+3x-5=0$ باشد.

طبق نکات گفته شده باید جای ضریب x^2 و عدد ثابت جابه جا شود پس حاصل برابر است با: $-5x^2+3x+1=0$ می باشد.

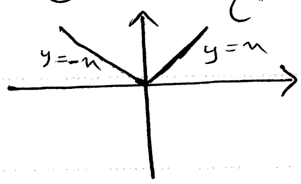
تعریف تابع قدر مطلق :

هروقت نماد قدر مطلق اطراف یک عبارت یا عدد بیاید آن را مثبت می کند. [ماموریت آن مثبت کردن است]، روش کار قدر مطلق به این صورت است که عدد مثبت را به همان صورت بیرون می دهد و عدد منفی را در یک منفی ضرب می کنیم پس می توانیم از این قانون برای حذف قدر مطلق بهره ببریم.

$$|a| = \begin{cases} a & a \geq 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$$

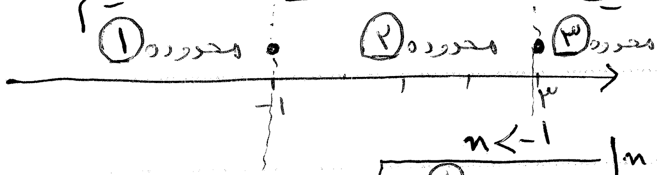
مثال: ساده ترین تابع قدر مطلق $f(x)=|x|$ می باشد که به صورت زیر می باشد.

$$f(x) = y = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$



نکته: همواره باید در سؤالات قدر مطلق را حذف کنیم و برای این کار لازم است علامت داخل قدر مطلق در بخش های بزرگتر و کوچکتر از ریشه را بیابیم و اگر چند ریشه موجود بود باید IR را با این ریشه ها تفکیک حدود کنیم.

مثال: $y = \overbrace{|x+1|}^{\text{ریشه } -1} - \overbrace{|x-3|}^{\text{ریشه } 3}$



$$|x+1|-|x-3| \begin{cases} \xrightarrow[\text{محدوده ۱}]{x<-1} \underbrace{|x+1|}_{-} - \underbrace{|x-3|}_{-} = -(x+1)+(x-3) = -4 \\ \xrightarrow[\text{محدوده ۲}]{-1 \leq x \leq 3} \underbrace{|x+1|}_{+} - \underbrace{|x-3|}_{-} = (x+1)+(x-3) = 2x-2 \\ \xrightarrow[\text{محدوده ۳}]{x>3} \underbrace{|x+1|}_{+} - \underbrace{|x-3|}_{+} = (x+1)-(x-3) = 4 \end{cases}$$

نکته ۲: اگر در حل تست ها بخواهیم در فاصله مشخص، علامت داخل قدر مطلق را پی برده و آن را برداریم می توانیم در این فاصله یک عدد دلخواه انتخاب و در عبارت قدر مطلق جایگذاری کنیم و به علامت داخل قدر مطلق پی ببریم.

مثال: با شرط $-1<x<0$ حاصل $|2-x|-|x|$ کدام است؟

$$x=-\frac{1}{2} \longrightarrow \underbrace{\left|2-\left(-\frac{1}{2}\right)\right|}_{+}-\underbrace{\left|-\frac{1}{2}\right|}_{-} \Rightarrow 2-x-(-x)=2$$

قوانین قدر مطلق:

فرجه زوج

① $\sqrt[2k]{\bigcirc}=|\bigcirc|$

② $|\bigcirc|=|\oslash| \Rightarrow \bigcirc=\mp\oslash$

③ $|\bigcirc|\leq a \longrightarrow -a\leq\bigcirc\leq a$

④ $|\bigcirc|\geq a \longrightarrow \begin{cases}\bigcirc\geq a\\ \bigcirc\leq -a\end{cases}$

⑤ $|x+y|\leq|x|+|y|$

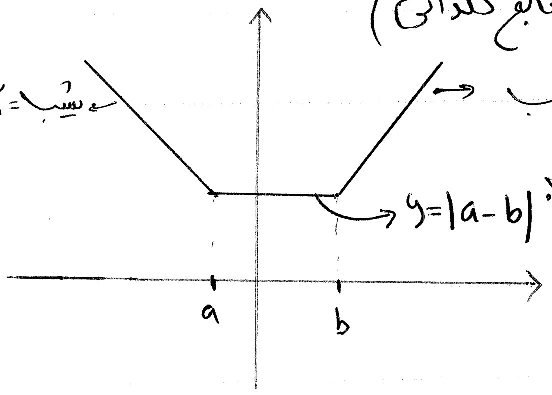
⑥ $|x-y|\geq|x|-|y|$

⑦ $|x^n|=|x|^n \longrightarrow |x^2|=x^2=|x|^2$

⑧ $\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|}$

⑨ $2|x+y+z|\leq|x+y|+|x+z|+|y+z|$

رسم نمودار توابع $y=|x-a|+|x-b|$ (تابع گلدانی)



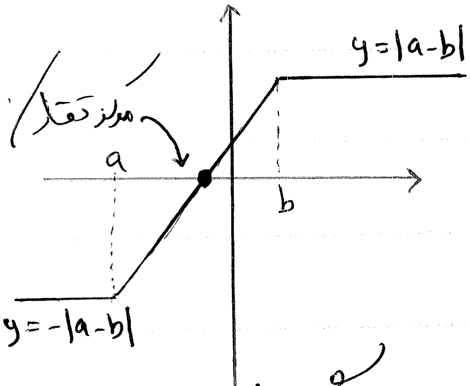
کف گلدان در فاصله $[a,b]$ قرار گرفته و عرض آن $|a-b|$ است.

شیب دیواره های گلدان ۲ و -۲ است.

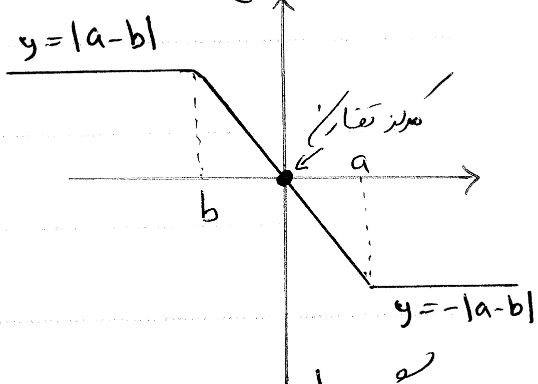
خط $x=\frac{a+b}{2}$ محور تقارن قائم منحنی است.

دامنه تعریف تابع $D_f=\mathbb{R}$ و برد آن $R_f=[|a-b|,+\infty)$ است.

رسم نمودار تابع $y=|x-a|-|x-b|$ (تابع Z شکل):



اگر $a<b$



اگر $a>b$

تابع یک مرکز تقارن به مختصات $(\frac{a+b}{2},0)$ دارد.

نکته کلی: برای رسم توابع قدر مطلقی دیگر ابتدا خود تابع را می کشیم و سپس بعضی بخش ها را حذف و یا قرینه می کنیم برای مثال $y=|f(x)|$ همانطور که واضح است این تابع هم x مثبت و هم x منفی می گیرد ولی y آن همیشه مثبت است پس $y=f(x)$ را رسم و بخش های زیر محور x را حذف و قرینه آنها را در بالای محور x می کشیم.

حل معادلات قدر مطلق:

1) $|☁| = ▨$ $\longrightarrow$ ۱- ابتدا ریشه ☁ را می یابیم

۲- ☁ را در بازه ها می نویسیم و برابر ▨ می گذاریم.

۳- ریشه های قابل قبول را می یابیم.

مثال: $|4x-5| = 2x+3$

$4x-5=0 \rightarrow x=\frac{5}{4}$ ریشه $\longrightarrow$
$$\begin{cases} x \geq \frac{5}{4}: & 4x-5=2x+3 \Rightarrow x=4 \geq \frac{5}{4} \checkmark \\ x < \frac{5}{4}: & -(4x-5)=2x+3 \Rightarrow x=\frac{1}{3} < \frac{5}{4} \checkmark \end{cases}$$

2) $|x-a|+|x-b| = k$ (عدد) $\longrightarrow$ ۱- $k>|a-b|$ معادله دو ریشه داره.

۲- $k=|a-b|$ معادله بی شمار ریشه داره

۳- $k<|a-b|$ معادله ریشه نداره.

نکته مهم: اگر معادله گلدانی ۲ ریشه داشت مجموع دو ریشه برابر است با: $a+b$

3) $|x-a|-|x-b| = k$ (عدد) $\longrightarrow$ ۱- $|k|>|a-b|$ معادله ریشه ندارد.

۲- $|k|=|a-b|$ معادله بی شمار ریشه دارد

۳- $|k|<|a-b|$ معادله یک ریشه دارد.

نکته: برای حل معادلات قدرمطلق از خواص و قوانین گفته شده و به توان ۲ رساندن طرفین استفاده می کنیم.

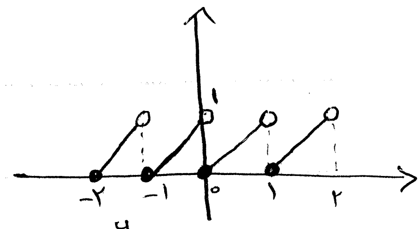
تعریف جزء صحیح (براکت):

جزء صحیح x اولین (یا بزرگترین) عدد صحیح کوچکتر یا مساوی x است و به صورت $y=[x]$ نشان می دهیم، دامنه تعریف آن $\mathbb{R}$ و برد آن $\mathbb{Z}$ می باشد یعنی خروجی همیشه عدد صحیح است.

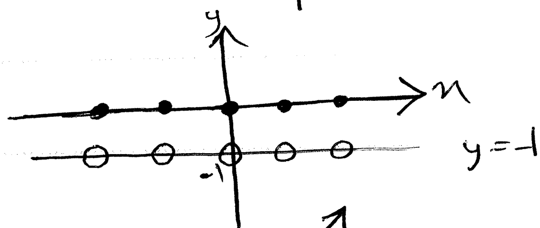
۱) $[x]=n \xrightarrow{n\in\mathbb{Z}} n\leq x<n+1$

۲) $[☁]=n \xrightarrow{n\in\mathbb{Z}} n\leq ☁<n+1$

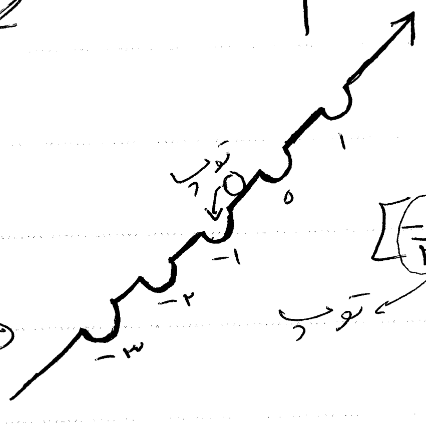
۳) $0\leq ☁-[☁]<1$ ⟵ نمودار مهم است ⟶



۴) $[☁]+[-☁]=\begin{cases}0 & ,☁\in\mathbb{Z}\\ -1 & ☁\notin\mathbb{Z}\end{cases}$



۵) $[x+n]=[x]+n \quad (n\in\mathbb{Z})$



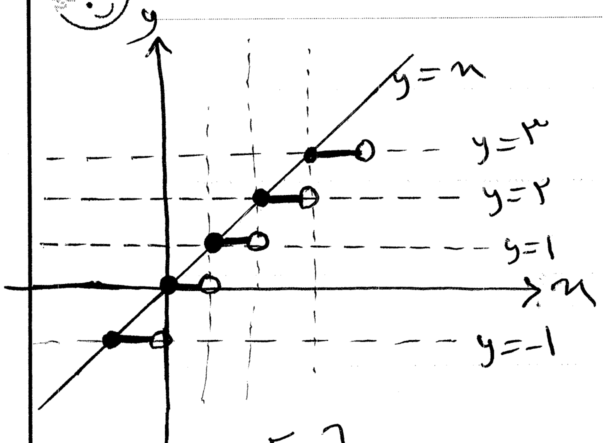
$[-\frac{1}{2}]=-1$

چاله ای که افتاد ← توپ

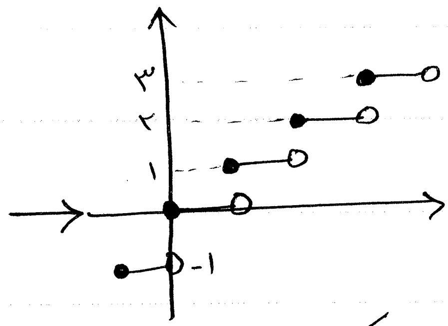
۶) روش تشخیص مقدار براکت ⟶

۷) $[x+y]=\begin{cases}[x]+[y] & 0\leq P_x+P_y<1\\ [x]+[y]+1 & 1\leq P_x+P_y<2\end{cases}$ (P_x و P_y بخش اعشاری x و y)

رسم نمودار تابع $y=[f(x)]$: ابتدا تابع $f(x)$ را رسم می کنیم حال خطوط $y=n$ ($n\in\mathbb{Z}$) را به فاصله یک واحد یک واحد رسم کرده و محل تلاقی آن با محور x ها را تصویر می کنیم. و بخش هایی که بین $y=n$ و $y=n+1$ را روی $y=n$ می اندازیم.



$y=[x]$



شکل نهایی
(پلکانی)

نکته ۱: برای رسم نمودار $y=f(ax)$ کافی است طول نقاط نمودار f را در $\frac{1}{a}$ ضرب کنیم.

نکته ۲: برای رسم نمودار $y=af(x)$ کافی است عرض نقاط نمودار f را در a ضرب کنیم.

نکته ۳: برای رسم نمودار $y=[nx]$ یک نمودار پلکانی می کشیم که طول هر پله اگر n مثبت باشد $\frac{1}{|n|}$ و ارتفاع پله ها ۱ واحد است.

ادامه جواب تمرین ها:

مسئله ۱۱: عبارت های زیر را بدون قدر مطلق بنویسید.

الف) $|۲-\sqrt{۲}| = ۲-\sqrt{۲}$

ب) $|۱-\sqrt{۳}| = \sqrt{۳}-۱$

ج) $|a^۲+1| = a^۲+1$

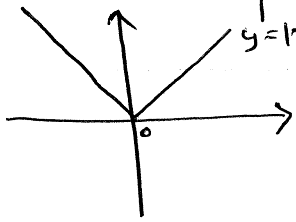
د) $|-(x-1)^۲-۳| = (x-1)^۲+۳$

مثال ۱۲: اگر $1<x<3$ حاصل عبارت $|x-1|+|x-3|$ را به دست آورید.

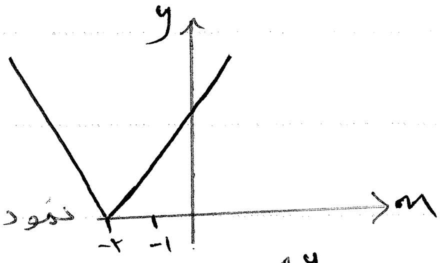
$$|x-1|+|x-3| \xrightarrow{1<x<3} x-1+(-(x-3)) = x-1-x+3=2$$

روش: یک عدد بین ۱ و ۳ می دهیم (مثلاً ۲) قدر مطلق اول مثبت و دوم منفی می شود پس دومی را در یک منفی ضرب می کنیم.

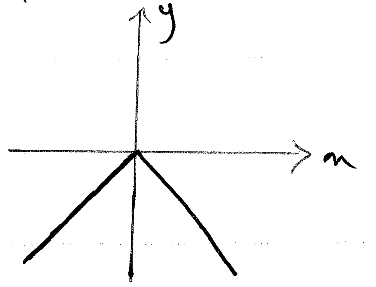
مثال ۱۳: در یک صفحه مختصات نمودار تابع $f(x)=|x|$ را رسم کرده و با استفاده از آن نمودار توابع زیر را در همان صفحه رسم کنید.



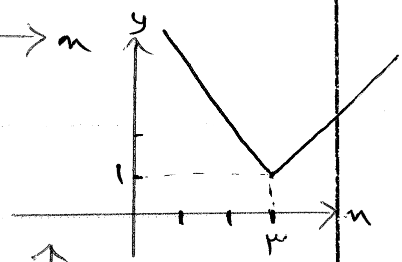
الف) $|x+2|$ ⟵ نمودار ۲ واحد به چپ



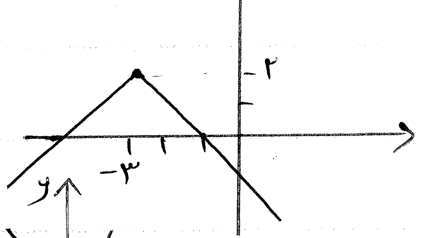
ب) $-|x|$ ⟵ نمودار برعکس شود



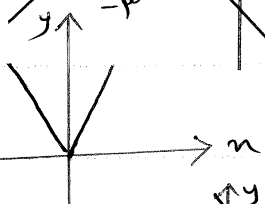
ج) $|x-3|+1$ ⟵ ۳ واحد به راست و ۱ واحد بالا



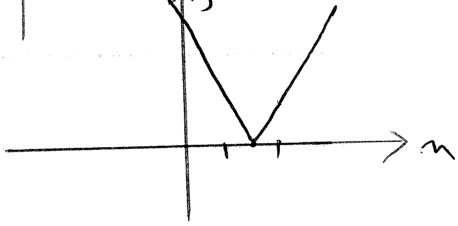
د) $2-|x+3|$ ⟵ ۳ واحد به چپ، برعکس شود، ۲ واحد بالا



ه) $|2x|=2|x|$ ⟵ دهنه بسته تر شود



و) $|2x-3|=2|x-\frac{3}{2}|$ ⟵ $\frac{3}{2}$ به راست و دهنه بسته



مسئله ۱۴: با استفاده از ویژگی های قدرمطلق نشان دهید: $-|x| \le x \le |x|$

تذکر: این بخش یک قانون حفظی است ولی در ادامه اثبات آن را می نویسیم.

اگر $x \ge 0$ باشد می دانیم $x=|x|$ و $-|x| \le x$ (۱)، و اگر $x<0$ باشد می دانیم $x=-|x|$ و $x<|x|$ (۲) و می توانیم بگوییم در هر دو بخش رابطه $-|x| \le x \le |x|$ برقرار است.

مسئله ۱۵: اگر $|x|>a$ و $a>0$ نشان دهید $x<a$ یا $x>-a$ و برعکس.

این سوال اشتباه است و نتیجه گرفته شده غلط می باشد.

$|x|>a \longrightarrow x>a$ یا $x<-a$

مسئله ۱۶: با استفاده از $-|x| \le x \le |x|$ نشان دهید: $-|x|-|y| \le x+y \le |x|+|y|$

و نتیجه بگیرید $|x+y| \le |x|+|y|$ (رابطه نامساوی مثلثی)

$$\begin{cases} -|x| \le x \le |x| \\ -|y| \le y \le |y| \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع کنیم}} \underbrace{-|x|-|y| \le x+y \le |x|+|y|}_{1}$$

$$\xrightarrow{1} -(|x|+|y|) \le x+y \le |x|+|y| \xrightarrow{\text{خواص قدرمطلق}} |x+y| \le |x|+|y|$$

مسئله ۱۶: می توان نشان داد رابطه ی نامساوی مثلثی برای هر تعداد عدد حقیقی برقرار است. برای سه عدد حقیقی x_1 و x_2 و x_3 نشان دهید:

$$|x_1+x_2+x_3| \le |x_1|+|x_2|+|x_3|$$

$$|x_1+x_2+x_3| = |\underbrace{(x_1+x_2)}_{a} + \underbrace{x_3}_{b}| \le |x_1+x_2|+|x_3| \le |x_1|+|x_2|+|x_3|$$

مساله ۱۷: معادله ها و نامعادله های زیر را حل کنید.

الف) $|2x-1|=3 \xrightarrow{\text{طبق قانون}} 2x-1=\mp 3$

$2x-1=3 \Rightarrow \boxed{x=2}$ $\qquad$ $2x-1=-3 \Rightarrow \boxed{x=-1}$

ب) $\dfrac{1}{|x+5|}=2 \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} |x+5|=\dfrac{1}{2}$ (1)

$$(1)\begin{cases} x+5=\dfrac{1}{2} \Rightarrow x=\dfrac{-9}{2} \\ x+5=-\dfrac{1}{2} \Rightarrow x=\dfrac{-11}{2} \end{cases}$$

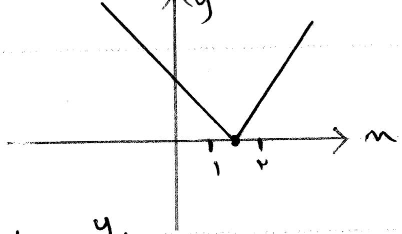
ج) $\left|x+\dfrac{2}{3}\right|\le 1 \xRightarrow{\text{خواص}} -1\le x+\dfrac{2}{3}\le 1 \xRightarrow{\left(-\frac{2}{3}\right)} \dfrac{-5}{3}\le x\le \dfrac{1}{3}$

د) $\dfrac{3}{|x|}<1 \xrightarrow{\text{خواص نامساوی}} \dfrac{|x|}{3}>1 \Rightarrow |x|>3 \Rightarrow \begin{cases} x>3 \\ x<-3 \end{cases}$

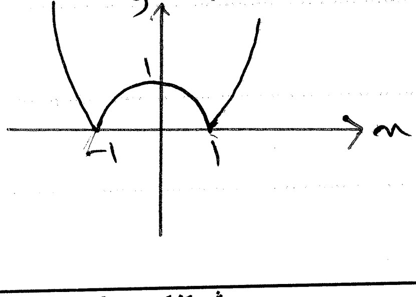
ه) $|2x+1|=|x-2| \xrightarrow{\text{خواص}} 2x+1=\mp(x-2) \Rightarrow \begin{cases} 2x+1=x-2 \Rightarrow x=-3 \\ 2x+1=-(x-2) \Rightarrow x=\dfrac{1}{3} \end{cases}$

مساله ۱۸: نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید.

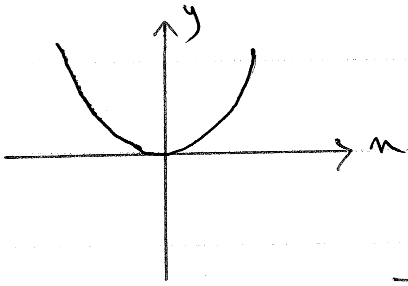
الف) $y=|3-2x|$



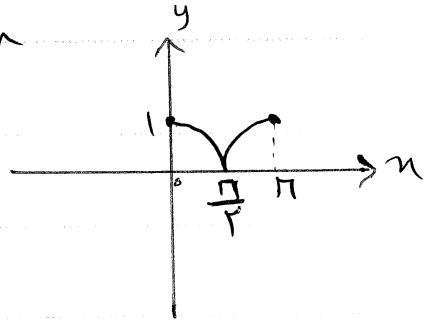
ب) $y=|1-x^2|$



ج) $y = |x^3|$

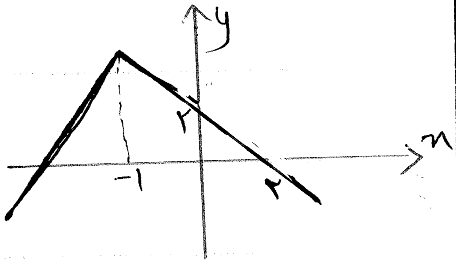


د) $y = |\cos x| \ , \ 0 \leq x \leq \pi$

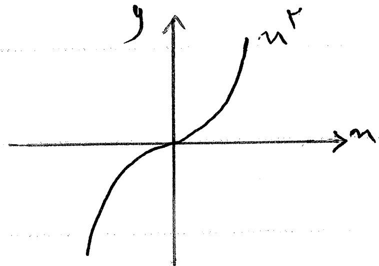


مسأله ۱۹: هر یک از توابع زیر را به صورت یک تابع چندضابطه‌ای بنویسید سپس نمودار هر یک را رسم کنید.

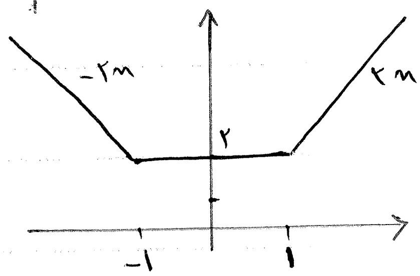
الف) $y = 3 - |x+1| = \begin{cases} -x+2 & x \geq -1 \\ x+4 & x < -1 \end{cases}$



ب) $y = x|x| = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$

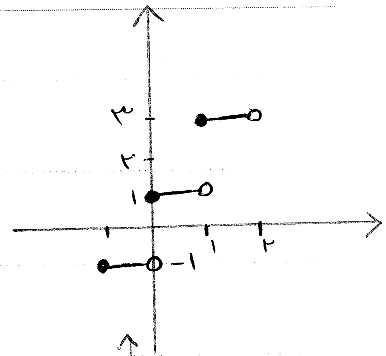


ج) $y = |x-1| + |x+1| = \begin{cases} 2x & x \geq 1 \\ 2 & -1 < x < 1 \\ -2x & x \leq -1 \end{cases}$



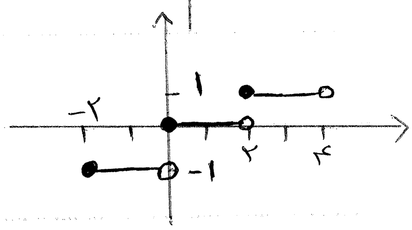
مسأله ۲۰: نمودارهای توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y=2[x]+1 \rightarrow y=\begin{cases} -1 & -1\le x<0 \\ 1 & 0\le x<1 \\ 3 & 1\le x<2 \end{cases}$

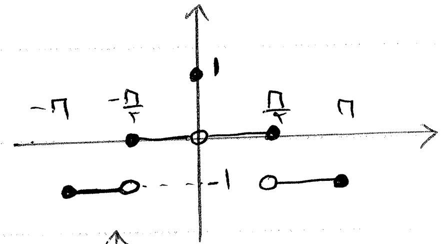


ب) $y=\left[\frac{x}{2}\right] \rightarrow \begin{cases} -1 & -2\le x<0 \\ 0 & 0\le x<2 \\ 1 & 2\le x<4 \end{cases}$

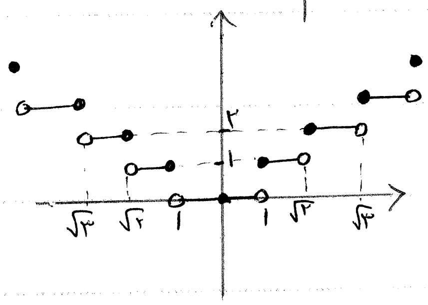
پله‌ها ۲ واحدی اند



ج) $y=[\cos x] \quad -\pi\le x\le \pi$

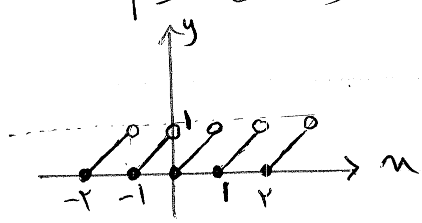


د) $y=[x^2] \quad -2\le x\le 2$



مسئله ۲۱: نمودار تابع $x-[x]$ را رسم کنید.

پاسخ: $(0\le x-[x]<1)$ با توجه به قوانین و شکل موجود در جزوه می‌کشیم.



مسئله ۲۲: اگر $x\notin Z$ و $f(x)=[x+2]+[-x]$ نشان دهید $f(x)=1$

$$[x+2]+[-x]=[x]+2+[-x]\overset{x\notin Z}{=\!=}\underbrace{[x]+[-x]}_{-1}+2=-1+2=\boxed{1=f(x)}$$

مسأله ۲۳: با استفاده از نامساوی $4n^2+4n+1 > 4n^2+2n+1 > 4n^2$ نشان دهید

$$n\in N : \left[\sqrt{4n^2+2n+1}\right] = 2n$$

پاسخ: $4n^2 < 4n^2+2n+1 < 4n^2+4n+1$

$$(2n)^2 < 4n^2+2n+1 < (2n+1)^2$$

از طرفین جذر بگیریم $\longrightarrow$

$$\sqrt{(2n)^2} < \sqrt{4n^2+2n+1} < \sqrt{(2n+1)^2}$$

$$\underbrace{2n} < \sqrt{4n^2+2n+1} < \underbrace{2n+1}$$

۲ عدد متوالی می باشند

$$\longrightarrow \left[\sqrt{4n^2+2n+1}\right] = 2n$$

مسأله ۲۴: معادله های زیر را حل کنید.

الف) $[x-3]=4$

$\longrightarrow [x]-3=4$

$[x]=7$

$7\le x<8$

ب) $[1-2x]=-5$

$[-2x]+1=-5$

$[-2x]=-6$

$-6\le -2x<-5$

$\frac{5}{2} < x \le 3$

مسأله ۲۵: فرض کنیم x و y دو عدد حقیقی باشند ثابت کنید:

$$[x+y]=[x]+[y] \qquad [x+y]=[x]+[y]+1$$

پاسخ: (صفحه بعد)

$0 \le k , k' < 1 \xrightarrow{\text{به طوری که}} y=[y]+k' \quad , \quad x=[x]+k$

بنا براین $x+y=[x]+[y]+k+k'$ می دانیم $0\le k , k'<1$ هستند لذا $0\le k+k'<2$ خواهد بود. اگر $k+k'\ge 1$ باشد نتیجه می گیریم $[x+y]=[x]+[y]+1$ و اگر $k+k'<1$ باشد $[x+y]=[x]+[y]$ ، پس حکم ثابت شد.

تعریف دنباله:

هر تعداد از اعداد که آن ها را پشت سر هم نوشته باشیم، تشکیل یک دنباله از اعداد را می دهند. هر عدد از دنباله را یک جمله دنباله می نامیم.

نکته ۱: در دنباله ها ورودی n در جمله عمومی از $N=\{1,2,3,...\}$ می باشد ولی مقدار خروجی هر عددی می تواند باشد مثلاً اگر جمله عمومی $u_n=n^2-4n$ باشد چند جمله اول به صورت زیر می باشد.

n	1	2	3	4	5	...
u_n	-3	-4	-3	0	5	...

$u_1 \quad u_2$

مثال: دنباله $\{n^2-11n+24\}$ چند جمله منفی دارد؟

$$u_n = n^2-11n+24=(n-3)(n-8)<0 \longrightarrow 3<n<8 \xrightarrow{n\in N} \{4,5,6,7\}$$

۴ جمله منفی است.

دنباله های مهم:

۱) دنباله های ثابت: در این دنباله همگی جملات برابر با عدد ثابتی هستند.

چند مثال مهم: $\{n+[-n]\}$ $\quad (-1)^{2n}$ $\quad \{\sin n\pi\}$ $\quad (1^n)$

۲) دنباله های متناوب: در این دنباله، جمله ها به طور متناوب بین دو یا چند عدد تغییر می کنند

چند مثال مهم $\{\cos n\pi\}$ $\quad \{\cos \frac{n\pi}{2}\}$ $\quad (-1)^n$

۳) دنباله های چندضابطه ای: در این دنباله به ازای مقادیر مختلف n، دو یا چند ضابطه تعریف می شود مانند

$$a_n = \begin{cases} n^2 & \text{فرد } n \\ \frac{3n+1}{n-5} & \text{زوج } n \end{cases}$$

نکته مهم: در دنباله های شامل جز صحیح و دنباله های مثلثاتی حتماً چند جمله اول را می نویسیم تا متوجه بشویم دنباله ثابت یا نوسانی است.

نکته کاربردی: چند دنباله پرکاربرد:

1) $a_n = n$ دنباله اعداد طبیعی

2) $a_n = 2n-1$ دنباله اعداد طبیعی فرد

3) $a_n = 2n$ دنباله اعداد طبیعی زوج

حد دنباله:

منظور از حد دنباله، حد جمله عمومی در $+\infty$ است یعنی $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n$

نکته: برای محاسبه حد دنباله، تمام نکاتی که در حد در بی نهایت یاد گرفتیم را باید بلد باشیم

(یادآوری: $\frac{\infty}{\text{عدد}} = \infty$ و $\frac{\text{عدد}}{\infty} = 0$ (صفر حدی))

تعریف همگرایی دنباله:

اگر حد دنباله برابر با مقدار مشخصی مانند L باشد یعنی داشته باشیم $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = L$ می گوییم دنباله به عدد L همگرا است، در غیر این صورت دنباله واگرا است.

نکته : چند یادآوری از حد :

① $\lim\limits_{n\to\infty}(an^n+bn^{n-1}+\dots+c)=\lim\limits_{n\to\infty}an^n \longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n}{4n^2+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2}{4n^2}=\frac{2}{4}$

② $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{an^n+bn^{n-1}+\dots+c}{a'n^m+b'n^{m-1}+\dots+c}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{an^n}{a'n^m}\begin{cases}\infty & n>m\\ \frac{a}{a'} & n=m\\ 0 & n<m\end{cases}$

③ $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{an^2+bn+c}=\lim\sqrt{a}\left(n+\frac{b}{2a}\right) \longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4n^2+7}}{x}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2(n)}{n}=2$

④ $a>1\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}a^n=+\infty\\ \lim\limits_{n\to-\infty}a^n=0\end{cases} \qquad 0<a<1\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}a^n=0\\ \lim\limits_{n\to-\infty}a^n=+\infty\end{cases}$

⑤ زور دنباله‌ها : $\log_a^n<n^k<a^n<n!<n^n$

← اگر یک تابع کسری داشتیم و زور مخرج بیشتر بود حد برابر صفر و اگر زور صورت بیشتر بود و اگرا هستیم

⑥ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$

⑦ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{bn+c}\right)^{a'n+b'}=e^{(\frac{a}{b}\cdot a')} \longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{3n}\right)^{4n+7}=e^{\frac{8}{3}}$

چند دنباله مهم: [بررسی واگرایی - همگرایی]

$(-1)^n \xrightarrow{\text{متناوب}}$ واگرا

$\sqrt{n} \longrightarrow$ واگرا

$\sin\frac{\pi}{n+1} \longrightarrow$ همگرا

$tg\frac{\pi}{n+1} \longrightarrow$ همگرا

$\cot\frac{\pi}{n+1} \longrightarrow$ واگرا

$\cos\frac{\pi}{n+1} \longrightarrow$ همگرا

* هر دنباله متناوب واگرا است.

دنباله صعودی، نزولی، یکنوا (یکنواخت):

$\forall n\in N: \ u_n \le u_{n+1}$ یا $u_{n+1}-u_n \ge 0 \longrightarrow$ دنباله u_n صعودی

$\forall n\in N: \ u_n \ge u_{n+1}$ یا $u_{n+1}-u_n \le 0 \longrightarrow$ دنباله u_n نزولی

نکته: دنباله ثابت، هم صعودی و هم نزولی است.

نکته: دنباله نوسانی غیریکنوا است.

نکته:

$u_n=\frac{an+b}{cn+d}$

- $\xrightarrow{\text{ریشه مخرج} > 1}$ غیریکنوا
- $\xrightarrow{\text{ریشه مخرج} \not> 1}$ یکنوا
  - $\xrightarrow{ad-bc}$ صعودی
  - $\xrightarrow{ad-bc}$ نزولی

دنباله از بالا کران دار: اگر α عدد حقیقی ثابتی باشد، به طوری که همواره $u_n \le \alpha$

دنباله از پایین کران دار: اگر α عدد حقیقی ثابتی باشد، به طوری که همواره $\alpha \le u_n$

دنباله کران دار: دنباله‌ای که هم از بالا و هم از پایین کران دار باشد دنباله کران دار است.

تابع صعودی و نزولی :

تابع صعودی است. $x_1 < x_2 \longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

* تابع با افزایش مقدار x (از سمت چپ به راست برویم) افزایش یابد یا ثابت بماند.

تابع نزولی است. $x_1 < x_2 \longrightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

* تابع با افزایش مقدار x (از سمت چپ به راست برویم) کاهش یابد یا ثابت بماند.

تابع اکیداً صعودی است. $x_1 < x_2 \longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$

* تابع با افزایش مقدار x (از سمت چپ به راست برویم) افزایش یابد.

تابع اکیداً نزولی است. $x_1 < x_2 \longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$

* تابع با افزایش مقدار x (از سمت چپ به راست برویم) کاهش یابد.

نکته ۱: تابع اکیداً صعودی و اکیداً نزولی، تابع اکیداً یکنوا نامیده می‌شوند.

نکته ۲: تابع ثابت، هم صعودی است و هم نزولی. [اکیداً نیست]

تابع وارون (تابع معکوس):

اگر تابع $y = f(x)$ یک به یک باشد وارون آن نیز تابع است. در این صورت تابع f وارون پذیر می‌باشد. وارون تابع f را با f^{-1} نشان می‌دهیم. برای به دست آوردن ضابطه معکوس ابتدا x را برحسب y به دست آورده و سپس جای x و y را عوض می‌کنیم پس نمودار تابع f و f^{-1} نسبت به خط $y = x$ قرینه یکدیگر اند.

مثال: تابع وارون $f(x)=\sqrt{x-1}$ را بنویسید.

$$y=\sqrt{x-1} \xrightarrow{\text{توان ۲}} y^2=x-1 \longrightarrow y^2+1=x \xrightarrow{\text{جای } x \text{ و } y \text{ عوض}} f^{-1}: y=x^2+1$$

مثال: تابع وارون $y=\frac{1}{x^3}$ را بنویسید.

$$y=\frac{1}{x^3} \longrightarrow x^3=\frac{1}{y} \xrightarrow{\text{جذر به فرجه ۳}} \sqrt[3]{x^3}=\sqrt[3]{\frac{1}{y}} \Rightarrow x=\sqrt[3]{\frac{1}{y}}$$

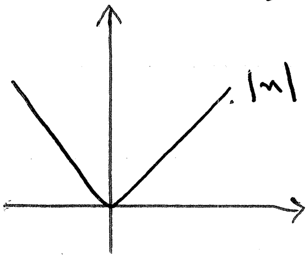
$$\xrightarrow{\text{جای } x \text{ و } y \text{ عوض}} f^{-1}: y=\sqrt[3]{\frac{1}{x}}=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

نکته ۱: دو نمودار f و f^{-1} نسبت به خط $y=x$ قرینه‌اند پس اگر نقطه‌ای مانند $(a,b)\in f$ باشد آنگاه $(b,a)\in f^{-1}$ می‌باشد. این روش عددگذاری برای رد کردن بسیاری از گزینه‌ها مناسب است.

نکته ۲: $D_f=R_{f^{-1}}$ و $R_f=D_{f^{-1}}$

نکته ۳: $f^{-1}(f(x))=x$ و $f(f^{-1}(x))=x$

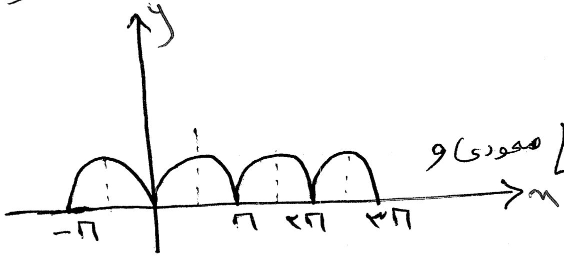
مساله ۲۴ : تعیین کنید تابع $y=|x|$ روی چه بازه هایی صعودی و روی چه بازه هایی نزولی است.



$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

در بازه $[0,+\infty)$ صعودی و در بازه $(-\infty,0]$ نزولی است.

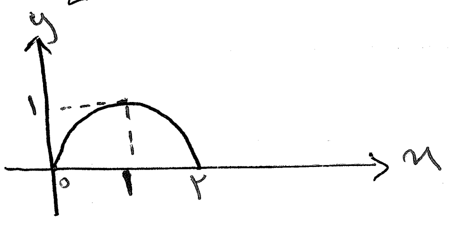
مساله ۲۵ : تعیین کنید تابع $y=|\sin x|$ روی چه بازه هایی صعودی و روی چه بازه هایی نزولی است.



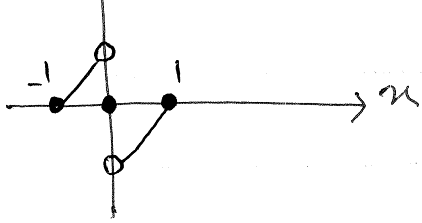
در حالت کلی در بازه های $[2k\pi, 2k\pi+\frac{\pi}{2}]$ صعودی و

در بازه های $[2k\pi+\frac{\pi}{2}, (2k+1)\pi]$ نزولی است.

مساله ۲۶ : روی بازه $[0,2]$ نمودار یک تابع را رسم کنید که روی بازه $[0,1]$ صعودی و روی بازه $[1,2]$ نزولی باشد.



مساله ۲۷ : روی بازه $[-1,1]$ نمودار تابعی را رسم کنید که روی بازه $[-1,0)$ و $(0,1]$ صعودی باشد ولی روی بازه $[-1,1]$ صعودی نباشد.

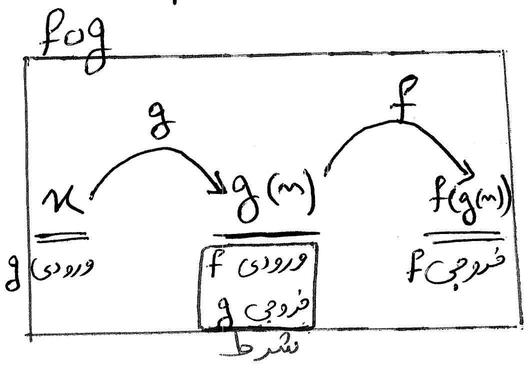


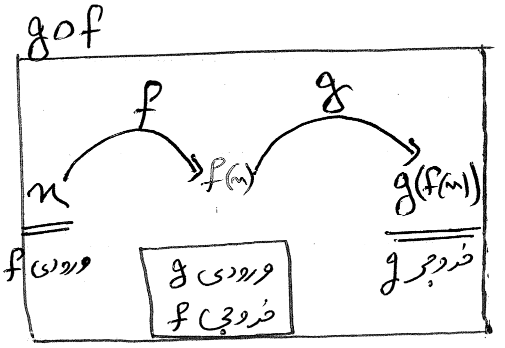
مساله ۲۸ : برای توابع $f(x)=x^2+1$ و $g(x)=\frac{1}{x}$ و $k(x)=2^x$ ترکیب توابع زیر را حساب کنید.

قبل از حل این تمرین دانستن ۲ ماشین زیر لازم است.

① $f\circ g(x)$ یعنی $f(g(x))$ ، و $f\circ f(x)$ یعنی $f(f(x))$

② برای حل همیشه باید ۲ ماشین زیر را بلد باشیم





$$f\circ g(x)=f(g(x))=f\left(\frac{1}{x}\right)=\left(\frac{1}{x}\right)^2+1=\frac{1}{x^2}+1$$

$$g\circ f(x)=g(f(x))=g(x^2+1)=\frac{1}{x^2+1}$$

$$f\circ k(x)=f(k(x))=f(2^x)=(2^x)^2+1=2^{2x}+1$$

$$k\circ f(x)=k(f(x))=k(x^2+1)=2^{x^2+1}$$

$$f\circ f\circ k=f(f\circ\ \ (x))=f(\underbrace{f(k(x))}_{\text{از بالا داریم}})=f(2^{2x}+1)=(2^{2x}+1)^2+1$$

مساله ۲۹ : دامنه تابع $f(x)=3x+1$ را به گونه ای محدود کنید که برای تابع $g(x)=\sqrt{1-x}$ ترکیب $g\circ f$ قابل انجام باشد و $g\circ f$ را حساب کنید.

شرط وجود $gof(x)$ این است که $R_f \cap D_g \neq \emptyset$ می‌دانیم $D_g=(-\infty,1]$ است لذا می‌توانیم R_f را $(-\infty,1]$ در نظر بگیریم لذا:

$$3x+1 \leq 1 \Rightarrow x \leq 0 \Rightarrow D_f=(-\infty,0]$$

$$gof(x)=g(f(x))=\sqrt{1-(3x+1)}=\sqrt{-3x}$$

مسأله ۳۰: برای تابع $f(x)=1-\sqrt{x}$ آیا ترکیب fof قابل انجام است؟ دامنه f را به گونه‌ای محدود کنید که fof قابل انجام شود.

پاسخ: قدم اول تعیین دامنه و برد تابع f می‌باشد و شرط تشکیل fof این است که دامنه و برد f برابر باشد پس قسمت برابر را می‌پذیریم.

$D_f = x \geq 0$, $R_f=(-\infty,+1]$

برای تشکیل $fof(x)$ باید $D_f \cap R_f \neq \Phi$ باشد. لذا محدوده مورد نظر $[0,1]$ است.

$$fof(x)=f(1-\sqrt{x})=1-\sqrt{1-\sqrt{x}}$$

مسأله ۳۱: در تابع $y=\frac{ax+1}{x-c}$ آیا می‌توان a و c را به گونه‌ای تعیین کرد که این تابع وارون خود باشد؟

$$y(x-c)=ax+1 \rightarrow xy-yc=ax+1 \Rightarrow xy-ax=1+yc$$

$$\Rightarrow x(y-a)=1+yc$$

$$\Rightarrow x=\frac{1+yc}{y-a}$$

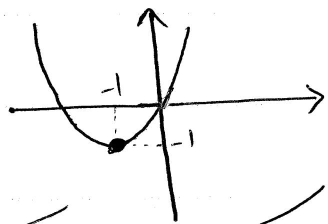
$$\Rightarrow f^{-1}: y=\frac{1+xc}{x-a}$$

پس اگر وارون تابع با خود آن برابر باشد باید $a+(-c)=0$ باشد.

نکته: شرط اینکه معکوس تابع $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ با خود آن برابر شود $\boxed{a+d=0}$

مسأله ۳۲: دامنه تابع $y = x^2 + 2x$ را به گونه‌ای محدود کنید که وارون پذیر باشد و وارون آن را به دست آورید.

$$y = x^2 + 2x \xRightarrow{\text{روش تستی}} y = x^2 + 2x + 1 - 1 = \underbrace{(x+1)^2 - 1}_{\text{رسم}}$$



برای اینکه تابع بالا معکوس پذیر باشد باید یک به یک شود.

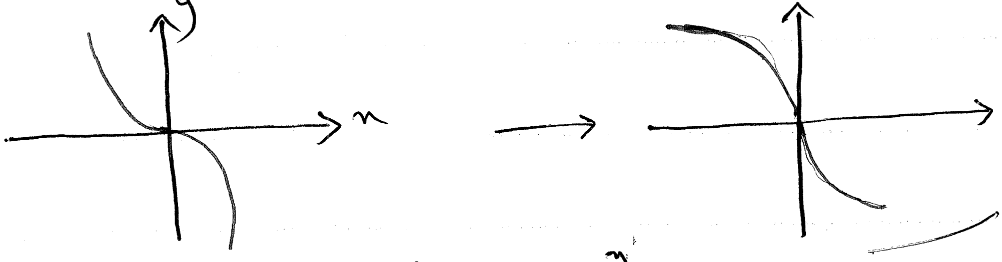
$f^{-1}: \sqrt{x+1} - 1 \qquad (-\infty, -1]$

$f^{-1}: \sqrt{x+1} - 1 \qquad [-1, +\infty)$

f را دو بازه می‌کنیم

مسأله ۳۳: آیا تابع زیر وارون پذیر است؟ وارون آن را به دست آورید.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ -x^2 & 0 < x \end{cases} \longrightarrow f^{-1}(x) = \begin{cases} -\sqrt{x} & x \geq 0 \\ \sqrt{-x} & x < 0 \end{cases}$$



مسأله ۳۴: ثابت کنید تابع $f(x) = \dfrac{2^x - 1}{2^x + 1}$ وارون پذیر است و وارون آن را به دست آورید.

اثبات به کمک تعریف

$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1=x_2$ تعریف یک به یک بودن

$$y=\frac{2^{x_1}-1}{2^{x_1}+1}=\frac{2^{x_2}-1}{2^{x_2}+1} \Rightarrow (2^{x_1}-1)(2^{x_2}+1)=(2^{x_2}-1)(2^{x_1}+1)$$

$$\Rightarrow 2^{x_1+x_2}+2^{x_1}-2^{x_2}-1=2^{x_1+x_2}+2^{x_2}-2^{x_1}-1 \Rightarrow 2^{x_1}+2^{x_1}=2^{x_2}+2^{x_2}$$

$$\Rightarrow 2\times 2^{x_1}=2\times 2^{x_2} \Rightarrow 2^{x_1+1}=2^{x_2+1} \Rightarrow x_1+1=x_2+1 \Rightarrow \boxed{x_1=x_2}$$

پس تابع یک به یک است.

$$y=\frac{2^x-1}{2^x+1} \Rightarrow y(2^x+1)=2^x-1 \Rightarrow 2^x y+y=2^x-1 \Rightarrow 2^x y-2^x=-1-y$$

$$\Rightarrow 2^x(y-1)=-1-y$$

$$\Rightarrow 2^x=\frac{-1-y}{y-1}$$

$$\Rightarrow 2^x=\frac{1+y}{1-y}$$

$$\Rightarrow x=\log_2\frac{1+y}{1-x}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x)=\log_2\frac{1+x}{1-x}$$

۳ بخش بعدی این فصل فقط تمرینات مهم حل شده است.

مسئله ۳۵: مجموع همه عددهای طبیعی مضرب ۷ و کوچکتر از ۱۰۰۰ را بدست آورید.

نکته: تعداد اعداد طبیعی مضرب ۷ و کوچکتر از ۱۰۰۰ برابر است با: $\left[\frac{999}{7}\right]=142$

$7, 14, 21, \dots, 994$

روش تشریحی $\to a_n=a_1+(n-1)d \Rightarrow 994=7+(n-1)7 \Rightarrow n=142$

$$S_{142}=\frac{142}{2}\left[\text{جمله اول}+\text{جمله آخر}\right]=\frac{142}{2}\times[1+1000]=71071$$

مسئله ۳۶: در یک دنباله حسابی جمله پنجم ۱۹- و جمله دهم ۳۱ است. مجموع بیست جمله‌ی ابتدای این دنباله را به دست آورید.

$$(a_{10}-a_5)=5d \Longrightarrow 31-(-19)=5d \Rightarrow 50=5d \Rightarrow \underline{d=10}$$

$$\rightarrow a_5=-19=a_1+4d \Rightarrow -19=a_1+40 \Rightarrow a_1=-59$$

$$S_{20}=\frac{20}{2}\times\left[(2\times a_1)+(n-1)d\right]=\frac{20}{2}\left[2\times(-59)+19(10)\right]=\underline{720}$$

مسئله ۳۷: دنباله‌ی حسابی مشخص کنید که جمله اول آن ۲- بوده و مجموع پنج جمله اول آن، یک سوم مجموع پنج جمله بعدی باشد.

$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=\frac{1}{3}(a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10})$$

$$\Rightarrow 5a_1+10d=\frac{1}{3}(5a_1+35d) \Rightarrow -10+10d=\frac{1}{3}(-10+35d) \rightarrow \underline{d=-4}$$

۲- ، ۶- ، ۱۰- ، ۱۴- ، ۱۸- ، ...

مسئله ۳۸: نشان دهید $1+3+5+\dots+(2n-1)=n^2$

$$\rightarrow\begin{cases} S=1+3+5+\dots+(2n-1) \\ S=(2n-1)+(2n-3)+\dots+3+1 \end{cases}$$

$$2S=\left((2n-1)+1\right)+\left((2n-3)+3\right)+\dots+\left((2n-1)+1\right)$$

$$\rightarrow 2S=\underbrace{2n+2n+\dots+2n}_{\text{تا } n} \Rightarrow 2S=n\times(2n) \Rightarrow \underline{S=n^2}$$

مسئله ۳۹: مجموع شش جمله ابتدای یک دنباله هندسی ۹ برابر مجموع سه جمله ابتدای آن دنباله است. قدر نسبت این دنباله را بیابید.

$$S_6=9S_3 \Rightarrow \frac{a_1(1-q^6)}{1-q}=9\times\frac{a_1(1-q^3)}{1-q} \Rightarrow (1-q^6)=9(1-q^3)$$

$$\rightarrow (1-q^3)(1+q^3)=9(1-q^3) \Rightarrow 1+q^3=9 \Rightarrow q^3=8 \Rightarrow \boxed{q=2}$$

مسأله ۴۰: احمدی خواهد پول های خود را پس انداز کند. او روز اول ۱۰۰۰ تومان در صندوق خود قرار می دهد و قرار می گذارد هر روز ۹۹٪ پول واریزی روز قبل را به صندوق اضافه کند. پس از ۲۰ روز او چقدر پول در صندوق خواهد داشت؟ نشان دهید پول صندوق او هیچگاه از ۱۰۰,۰۰۰ تومان بیشتر نخواهد شد.

$$1000, 990, \ldots \Rightarrow q=\frac{99}{100}$$ حد مجموع

$$S_{20}=\frac{1000(1-(0.99)^{20})}{(1-(0.99))}=100000(1-(0.99)^{20})$$

حداکثر مقدار:

$$S_n \leq 100000 \Rightarrow S_\infty=\frac{1000}{1-\frac{99}{100}}=100000$$

مسأله ۴۱: برای محافظت از تابش های تابش های مضر مواد رادیواکتیو لایه های محافظتی ساخته شده است، که شدت تابش ها پس از عبور از ۱ لایه نصف می شود. حداقل چند لایه باید استفاده کنیم تا شدت تابش ۹۷ درصد کاهش یابد؟

$$\frac{a_1(1-q^n)}{1-q} > \frac{97}{100} \qquad , q=\frac{1}{2} \quad , a_1=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}\times\frac{(1-(\frac{1}{2})^n)}{1-\frac{1}{2}} > \frac{97}{100} \longrightarrow 1-(\frac{1}{2})^n > \frac{97}{100} \Rightarrow \frac{3}{100} > (\frac{1}{2})^n \Rightarrow 2^n > 33.3$$

$$\Rightarrow \boxed{n \geq 6}$$

مسأله ۴۲: با استفاده از دستور محاسبه مجموع جملات دنباله هندسی درستی اتحادهای زیر را نشان دهید.

الف) $x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\dots+x+1)$

روش حل: ابتدا $S=1+x+x^2+\dots+x^{n-1}$ $(n\in N, x\in R)$ را در نظر می‌گیریم

سپس مقدار $xS-S$ را حساب می‌کنیم داریم:

$$xS-S=(x+x^2+\dots+x^n)-(1+x+x^2+\dots+x^{n-1})=x^n-1$$

$$S(x-1)=x^n-1 \Rightarrow S=\frac{x^n-1}{x-1} \Rightarrow (x-1)(1+x+\dots+x^{n-1})=x^n-1$$

ب) $x^n+1=(x+1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\dots+x+1)$

کافی است در قسمت الف به جای x مقدار $(-x)$ را بگذاریم:

$$x^n+1=(x+1)(x^{n-1}-x^{n-2}+x^{n-3}+\dots-x+1)$$

مسأله ۴۳: با استفاده از اتحاد الف در مسأله قبل درستی اتحاد زیر را نشان دهید.

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\dots+ab^{n-2}+b^{n-1})$$

کافی است در قسمت الف سؤال قبل به جای x مقدار $\left(\frac{a}{b}\right)$ بگذاریم:

$$x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\dots+x+1)$$

$$\xrightarrow{x=\frac{a}{b}} \left(\frac{a}{b}\right)^n-1=\left(\frac{a}{b}-1\right)\left(\left(\frac{a}{b}\right)^{n-1}+\dots+\left(\frac{a}{b}\right)+1\right) \xrightarrow{\times b^n} \text{سمت راست = سمت چپ}$$

مسأله ۴۴: بررسی کنید از دنباله های زیر کدام صعودی، کدام نزولی و کدام نه صعودی و نه نزولی هستند.

الف) $a_n=(-1)^{n+1}$ $\longrightarrow$ $\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots \\ +1 & -1 & +1 & \dots \end{matrix}$

$\longrightarrow$ دنباله نوسانی

ب) $a_n=3^{n+1}$ $\quad$ $\frac{a_{n+1}}{a_n}>1 \to 3>1$ / صعودی است $\xrightarrow{\text{نهایت}}$

ج) $u_n=\frac{1}{n^2+1}$ $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\frac{1}{(n+1)^2+1}}{\frac{1}{n^2+1}}=\frac{n^2+1}{n^2+2n+2}<1 \Rightarrow$ نزولی

د) $a_n=\frac{n^2}{2^n}$ $n=1 \Rightarrow a_1=\frac{1^2}{2^1}=\frac{1}{2}$ و $a_2=1$, $a_3=\frac{9}{8}$, $a_4=1$

دنباله نه صعودی است نه نزولی ولی از جمله ۵ به بعد نزولی است

ه) $u_n=\frac{3^n}{n^3} \longrightarrow$ دنباله نه صعودی است نه نزولی ولی از جمله ۳ به بعد صعودی است

و) $u_n=\frac{n(n+1)}{2} \longrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n+2}{n} \longrightarrow \frac{n+2}{n}>1 \longrightarrow$ صعودی است

مسأله ۴۵: دنباله‌ای مثال بزنید که هم صعودی باشد هم نزولی.

پاسخ: هر تابع ثابت هم صعودی و هم نزولی است پس   جواب = {۲، ۲، ۲، ...}

مسأله ۴۶: دو دنباله مثال بزنید که از بالا کراندار بوده ولی از پایین کران دار نباشد.

الف) $a_n=-n : -1,-2,-3,\dots \Rightarrow a_n\leq -1$

ب) $b_n=-\sqrt{n} : -1,-\sqrt{2},-\sqrt{3},\dots \Rightarrow b_n\leq -1$

کران بالای هر ۲ دنباله ۱- است

مسأله ۴۷: دو دنباله مثال بزنید که از پایین کراندار بوده ولی از بالا کران دار نباشد.

الف) $u_n=n : 1,2,3,\dots \Rightarrow$ کران پایین مقدار ۱ می‌باشد

ب) $u_n=\sqrt{n} : 0,1,\sqrt{2},\sqrt{3},\dots \Rightarrow$ کران پایین مقدار ۰ می‌باشد.

مسأله ۴۸: دو دنباله کران دار مثال بزنید.

الف) $u_n=\frac{n-1}{n+2}$

ب) $a_n=\frac{2n-2}{n+3}$

مسأله ۴۹ : دو دنباله مثال بزنید که نه از بالا کران دار باشد نه از پایین.

$a_n=(-2)^n$: $-2, 4, -8, 16, \ldots$

$b_n=(-1)^n \times n$: $-1, 2, -3, 4, \ldots$

مسأله ۵۰ : با استفاده از ماشین حساب ده جمله نخست دنباله $e_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ را حساب کنید. آیا این دنباله کران دار است؟

$e_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow$ کراندار است.

$e_1=2$ $e_2=2{,}250$ $e_3=2{,}370$ $e_4=2{,}441$ $e_5=2{,}448$

$e_6=2{,}521$ $e_7=2{,}546$ $e_8=2{,}565$ $e_9=2{,}581$ $e_{10}=2{,}594$

کران پایین مقدار ۲ و کران بالا مقدار ۳ است

مسأله ۵۱ : پنج جمله نخست دنباله‌ای که جمله عمومی آن $u_n=\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ است را محاسبه کنید. آیا دنباله کران دار است؟

$u_n=\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow n=1 \rightarrow u_1=0$

$n=2 \rightarrow u_2=\frac{1}{4}$

$n=3 \rightarrow u_3=\frac{8}{27}$

این دنباله کران دار است زیرا $0 \le u_n < 1$