



سایت ویژه ریاضیات [www.riazisara.ir](http://www.riazisara.ir)

درسنامه ها و جزوه های دروس ریاضیات

دانلود نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نمونه سوالات و پاسخنامه کنکور

دانلود نرم افزارهای ریاضیات

...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

<https://telegram.me/riazisara>

(@riazisara)



مهدی جعفری کیا

ناحیه چهار مشهد

[www.mclass.ir](http://www.mclass.ir)

ID: @jafarikia CH: @mclass

# بسم الله الرحمن الرحيم

جزوه یچ کنکور یچ ریاضیات عموم یچ چهارم تجربی

## فهرست

فصل اول: احتمال.....صفحه ۱

### فصل دوم: توابع و معادلات

بخش اول: معادله درجه دوم.....صفحه ۱۹

بخش دوم: دنباله.....صفحه ۲۶

بخش سوم: توابع.....صفحه ۴۲

بخش چهارم: مثلثات.....صفحه ۸۳

فصل سوم: مشتق و کاربردها.....صفحه ۹۸

فصل چهارم: انتگرال.....صفحه ۱۳۴

فصل پنجم: منحنیهای درجه دوم.....صفحه ۱۵۳

((امام علی علیه السلام : عاقلترین مردم کسی است که در امور زندگیش بهتر

برنامه‌ریزی کند و در اصلاح آفرتش بیشتر همت نماید.))

## فصل اول (احتمال)

## فصل اول (احتمال)

الف. پدیده‌ی تصادفی: به پدیده طبیعی یا آزمایشی که نتیجه‌ی آن از قبل مشخص نباشد، پدیده تصادفی می‌گوییم.

ب. فضای نمونه‌ای: به تعداد کل حالت‌هایی که برای یک پدیده تصادفی ممکن است رخ دهد، فضای نمونه‌ای می‌گوییم و آن را با حرف  $S$  نشان می‌دهیم.

مثال ۱: فضای نمونه‌ای پرتاب دو سکه را بنویسید.

مثال ۲: فضای نمونه‌ای پرتاب سه سکه را بنویسید.

مثال ۳: فضای نمونه‌ای پرتاب دو سکه و یک تاس پند عضو دارد؟

مثال ۴: فضای نمونه‌ای جنسیت فرزندان یک خانواده با ۴ فرزند پند عضو دارد؟

مثال ۵: فضای نمونه‌ای پرتاب ۳ سکه و ۲ تاس پند عضو دارد؟

ج. پیشامد تصادفی: هر زیرمجموعه از یک فضای نمونه‌ای یک پدیده تصادفی را پیشامد تصادفی می‌گوییم.

مثال ۶: تمام اعداد دو رقمی که می‌توان با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ روی کارت‌های مجزا می‌نویسیم. یک کارت را به تصادف خارج می‌کنیم.

الف) فضای نمونه‌ای را بنویسید. ب) پیشامد آن که عدد کمتر از ۴۰ باشد را بنویسید. پ) پیشامد اول بودن عدد را بنویسید.

د. تعریف احتمال: احتمال وقوع پیشامد  $A$  را با  $P(A)$  نشان می‌دهیم. این احتمال از تقسیم تعداد حالات ممکن وقوع این پیشامد بر

$$\text{تعداد کل اعضای فضای نمونه‌ای حاصل می‌شود. } P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

مثال ۷: دو تاس را پرتاب می‌کنیم. احتمال آن را بیابید که یکی از اعداد رو شده دو برابر دیگری باشد.

مثال ۸: کیسه‌ای شامل ۳ مهره ی سفید، ۶ مهره ی سبز و ۵ مهره ی سفید است. ۳ مهره به تصادف خارج می‌کنیم. احتمال هم‌رنگ بودن دقیقاً دو مهره را بیابید.

## ه. قوانین احتمال:

قانون جمع احتمالات: اگر  $A$  و  $B$  دو پیشامد از فضای نمونه‌ای  $S$  باشند، احتمال وقوع  $A$  یا  $B$  به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

متمم پیشامد: پیشامد اتفاق نیفتادن پیشامد  $A$  را متمم آن می‌نامیم و با  $A'$  نشان می‌دهیم و داریم:  $P(A') = 1 - P(A)$

نکته ۱۰: در حالت کلی داریم  $p(\emptyset) = 0$  ،  $P(S) = 1$  و برای هر پیشامد  $A$  داریم  $0 \leq P(A) \leq 1$

مثال ۹: اگر  $A$  و  $B$  دو پیشامد از فضای نمونه‌ای  $S$  باشند و داشته باشیم  $P(A) = \frac{1}{3}$  و  $P(B) = \frac{1}{5}$  و احتمال وقوع لااقل یکی از آن‌ها رخ دهد برابر  $\frac{3}{4}$  باشد، احتمال وقوع همزمان هر دو را بیابید.

مثال ۱۰: اگر ۲۵٪ جرایم در روز و ۱۸٪ جرایم درون شهر اتفاق بیافتد و تنها ۱۰٪ در مومه شهر و در روز اتفاق بیافتد، چند درصد جرایم درون شهر و در شب اتفاق می‌افتد؟

تست ۱: در کیسه‌ای ۳ مهره‌ی سیاه، ۴ مهره‌ی قرمز و ۳ مهره‌ی آبی وجود دارد. از این کیسه ۳ مهره به تصادف خارج می‌کنیم. احتمال این که حداقل دو مهره هم‌رنگ باشند، کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{6}$  (۲)  $\frac{2}{4}$  (۳)  $\frac{3}{3}$  (۴)  $\frac{7}{10}$

تست ۲: در آزمایشگاهی ۵ موش سفید و ۶ موش سیاه موجود است. به تصادف ۳ موش از بین آن‌ها خارج می‌کنیم. با کدام احتمال لااقل یکی از موش‌ها سفید است؟

- (۱)  $\frac{8}{11}$  (۲)  $\frac{9}{11}$  (۳)  $\frac{28}{33}$  (۴)  $\frac{29}{33}$

تست ۳: از جعبه‌ای که شامل ۵ مهره‌ی سبز و ۴ مهره‌ی آبی و ۲ مهره‌ی زرد می‌باشد، سه مهره به تصادف خارج می‌کنیم، احتمال وقوع کدام پیشامد از بقیه کم‌تر است؟

- (۱) هر ۳ مهره سبز باشد. (۲) هر ۳ مهره هم‌رنگ باشند. (۳) حداقل ۱ مهره آبی باشد. (۴) حداکثر ۲ مهره سبز باشد.

تست ۴: در یک عدد سه رقمی بدون صفر، احتمال این که لااقل دو رقم یکسان باشند، کدام است؟

- (۱)  $\frac{25}{81}$  (۲)  $\frac{11}{27}$  (۳)  $\frac{17}{36}$  (۴)  $\frac{49}{81}$

تعریف: اگر  $A$  و  $B$  دو پیشامد از فضای نمونه‌ای  $S$  باشند و با هم نتوانند رخ دهند، این دو پیشامد ناسازگار نامیده می‌شوند. در این صورت خواهیم داشت  $A \cap B = \emptyset$  و لذا داریم  $P(A \cap B) = 0$ . پس در این مورد قاعده جمع احتمالات به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

((شش رمز موفقیت در کارها از دیدگاه امام علی(ع):))

مثال ۱۱: در یک خانواده با چهار فرزند احتمال آنکه فرزندان سه پسر و یک دختر باشند را بیابید.

مثال ۱۲: در یک خانواده با چهار فرزند احتمال آنکه حداقل سه پسر و یک دختر باشند را بیابید.

نکته ۱۱: اگر  $A$  و  $B$  دو پیشامد از فضای نمونه‌ای  $S$  باشند و وقوع هر یک در دیگری تأثیری نداشته باشد، این دو پیشامد مستقل نامیده می‌شوند. در این صورت داریم:  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$  (شرط استقلال دو پیشامد).

مثال ۱۳: احتمال مبتلا شدن فردی با دیابت  $\frac{1}{5}$  و احتمال مبتلا شدن به سل  $\frac{1}{1000}$  است، احتمال مبتلا شدن فردی به لااقل یکی از این دو بیماری را بیابید.

مثال ۱۴: اگر ۴۰ درصد ژن‌های تعیین کننده عامل  $RH$  فون منفی باشد، مطلوب است احتمال آنکه فردی  $RH$  فون منفی داشته باشد.

مثال ۱۵: احتمال آنکه در یک خانواده سه فرزندی، اولین فرزند با  $RH$  منفی سومین فرزند خانواده باشد را بیابید.

مثال ۱۶: احتمال آنکه در یک خانواده سه فرزندی،  $RH$  فون هر سه فرزند یکی نباشد را بیابید.

مثال ۱۷: احتمال آنکه در یک خانواده دو فرزندی، الف)  $RH$  فون هر دو فرزند یکی باشد. ب) فرزند دوم دارای  $RH$  فون منفی باشد. را بیابید.

مثال ۱۸: احتمال آنکه در یک خانواده چهار فرزندی،  $RH$  فون فرزندان یکی در میان منفی باشد را بیابید.

نکته ۱۲: احتمال آنکه در یک خانواده  $n$  نفری  $k$  فرزند پسر(دختر) باشند برابر  $\frac{\binom{n}{k}}{p^n}$  است.

مسئله: خانواده‌ای دارای ۴ فرزند است، مطلوب است:  
الف - فضای نمونه‌ای مربوط به جنسیت فرزندان این خانواده  
ب - احتمال آنکه این خانواده ۲ پسر و ۲ دختر داشته باشد.  
ج - احتمال آنکه تعداد پسرها بیش از تعداد دخترها باشد.

۱. داشتن هدف: (کسی که به امور غیر مهم بپردازد، مسائل مهم تر را ضایع می سازد)

مثال ۱۹: در یک خانواده با سه فرزند احتمال آن را بیابید که:

الف) هر سه هم جنس باشند. ب) دقیقاً یکی از فرزندان دختر باشد. پ) لااقل یکی از فرزندان پسر باشد.

مثال ۲۰: مادری صاحب سه فرزند است. احتمال آن که دو فرزند اول پسر باشند چقدر است؟ مطلوب است احتمال آن که فقط دو فرزند اول پسر باشند.

تست ۵: اگر  $A$  و  $B$  دو پیشامد مستقل باشند و  $P(A) = \frac{1}{3}$  و  $P(B) = \frac{1}{4}$ ، حاصل  $P(A \cup B)$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{4}{12}$  (۲)  $\frac{5}{12}$  (۳)  $\frac{6}{12}$  (۴)  $\frac{7}{12}$

تست ۶: اگر  $A$  و  $B$  دو پیشامد مستقل ناتهی باشند و  $P(A \cap B) = [P(A)]^2$  باشد،  $P(A')$  کدام است؟

(۱)  $P(A)$  (۲)  $P(A) \times P(B)$

(۳)  $1 - P(A) \times P(B)$  (۴)  $1 - P(B)$

تست ۷: اگر  $A$  و  $B$  دو پیشامد مستقل از هم باشند و داشته باشیم  $P(A) = \frac{1}{3}$  و  $P(A \cup B) = \frac{5}{6}$ ، آن گاه  $P(B')$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{3}{4}$  (۲)  $\frac{1}{4}$  (۳)  $\frac{2}{3}$  (۴)  $\frac{1}{2}$

تست ۸: اگر  $P(A) = \frac{1}{4}$ ،  $P(B) = \frac{1}{3}$  و  $A$  و  $B$  مستقل باشند،  $P(A \cup B')$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{3}$  (۲)  $\frac{1}{2}$  (۳)  $\frac{2}{3}$  (۴)  $\frac{5}{6}$

تست ۹: اگر دو پیشامد  $A$  و  $B$  مستقل از هم و  $P(B) = 2P(A)$  و  $P(A \cup B) = \frac{5}{8}$  باشد، آن گاه  $P(B)$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{4}$  (۲)  $\frac{1}{2}$  (۳)  $\frac{5}{4}$  (۴)  $\frac{5}{6}$

۲. داشتن همت: (قیمت و ارزش آدمی به قدر همت اوست)

تست ۱۰: اگر  $P(A) = 0.3$ ،  $P(B) = 0.8$  و  $P(A \cup B) = 0.86$  باشد، آن‌گاه دو پیشامد A و B نسبت به هم چه وضعیتی دارند؟

- (۱) ناسازگار (۲)  $A \subset B$  (۳) متمم (۴) مستقل

تست ۱۱: - چهار دانش‌آموز یک کلاس که بر یک نیمکت نشسته باشند با کدام احتمال ماه تولد حداقل دو نفر آنان یکسان است؟

- (۱)  $\frac{19}{48}$  (۲)  $\frac{41}{96}$  (۳)  $\frac{23}{48}$  (۴)  $\frac{55}{96}$  (سراسری تجربی خارج از کشور ۹۶)

### مسئله کتاب:

- ۱- اگر ۴۰٪ زن‌های تعیین‌کننده عامل RH خون منفی باشند، مطلوب است احتمال آن که RH خون فردی منفی نباشد.  
 ۲- با مفروضات مسئله بالا مطلوب است احتمال آن که در خانواده‌ای دو فرزند از لحاظ خونی دارای یک نوع RH باشند.

- ۳- اگر فرزند اول خانواده‌ای دارای RH مثبت باشد احتمال آن که فرزند دوم دارای RH منفی باشد چقدر است؟ (RH خون فرزندان را مستقل فرض کنید).  
 ۴- خانواده‌ای دارای سه فرزند است. مطلوب است احتمال آن که RH خون هر سه فرزند یکی نباشد.  
 ۵- خانواده‌ای دارای چهار فرزند است، مطلوب است احتمال آن که فرزند اول و دوم پسر و فرزند سوم و چهارم دختر باشند.

### و. احتمال شرطی:

اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند ( $P(B) > 0$ )، در این صورت احتمال وقوع A به شرطی که بدانیم پیشامد B نیز رخ داده

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

است از رابطه مقابل مناسبه می‌شود

مثال ۲۱: اگر  $P(A \cap B) = \frac{1}{5}$  و  $P(A) = \frac{1}{3}$  باشد،  $P(A|B)$  را بیابید.



۳. داشتن دوست فوب، ((کسی که فود را از تجربه‌ها بی نیاز بداند، سرانجام [امور] را نخواست دید.))

مثال ۲۲: اگر  $A$  و  $B$  دو پیشامد مستقل از فضای نمونه‌ای  $S$  باشند و  $P(A) = 0/3$  و  $P(B) = 0/2$  باشند،  $P(A|B)$  را بیابید.

مثال ۲۳: کیسه‌ای شامل ۳ مهره سفید و ۴ مهره سبز است. دو مهره پشت سر هم و بدون جایگذاری خارج می‌کنیم. اگر بدانیم مهره اول سفید است، احتمال سبز بودن مهره دیگر را بیابید.

مثال ۲۴: کیسه‌ای شامل ۳ مهره سفید و ۴ مهره سبز است. سه مهره پشت سر هم و بدون جایگذاری خارج می‌کنیم. اگر بدانیم مهره اول سفید است، احتمال سبز بودن دو مهره دیگر را بیابید.

تست ۱۲: - از بین ۳ کارت سفید و ۴ کارت سبز یکسان، به تصادف یک کارت بدون جایگذاری بیرون می‌آوریم. سپس کارت دوم را خارج می‌کنیم. با کدام احتمال هر دو کارت هم‌رنگ هستند؟ (سراسری تجربی ۹۱)

$$\frac{2}{7} \quad (1) \quad \frac{5}{14} \quad (2) \quad \frac{3}{7} \quad (3) \quad \frac{4}{7} \quad (4)$$

تست ۱۳: - در کیسه‌ای ۴ مهره‌ی آبی و ۳ مهره‌ی سبز و ۲ مهره‌ی قرمز وجود دارد، سه مهره به تصادف و پی‌درپی و بدون جایگذاری از این کیسه خارج می‌کنیم. چه قدر احتمال دارد مهره‌ی اول آبی، دومی سبز و سومی آبی باشد؟ (تمرین کتاب درسی)

$$\frac{1}{7} \quad (1) \quad \frac{1}{14} \quad (2) \quad \frac{1}{21} \quad (3) \quad \frac{3}{14} \quad (4)$$

نکته ۱۳: داریم  $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{n(A \cap B)}{n(S)}}{\frac{n(B)}{n(S)}} = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$  لذا بدون در نظر گرفتن فرمول احتمال شرطی و با محدود کردن فضای نمونه‌ای به شرط سوال، می‌توانیم به مل مسایل بپردازیم.

مثال ۲۵: با توجه به جدول زیر احتمال آنکه کارمند زنی تمصیلات دانشگاهی نداشته باشد را بیابید.

	زن	مرد
دانشگاهی	۹	۷
کمتر از دانشگاهی	۱۲	۱۰

۴. استفاده از تجربه ها: (( کسی که دنبال هدفی عالی است و برای رسیدن به آن باید از گردنه های پر پیچ و خم عبور کند تا بر مشکلات پیروز شود، باید

بداند که در این راه نیازمند تجربه است. ))

نتیجه: اگر  $A$  و  $B$  دو پیشامد مستقل از فضای نمونه ای  $S$  باشند، آنگاه داریم:  $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A)$ .

مثال ۲۶: در یک خانواده سه فرزندى احتمال دفتر بودن فرزند سوم یک خانواده چیست در صورتی که بدانیم دو فرزند اول پسرند؟

تست ۱۴: - در جعبه ای ۶ مهره سفید و ۹ مهره سیاه موجود است. دو مهره متوالیاً و بدون جایگذاری از آن بیرون می آوریم. با کدام احتمال

(سراسری تجربی ۹۲)

بدون توجه به اولین مهره، دومین مهره خارج شده سفید است؟

$$\frac{5}{14} \quad (1) \quad \frac{3}{7} \quad (2) \quad \frac{2}{5} \quad (3) \quad \frac{3}{5} \quad (4)$$

تست ۱۵: - در آزمایشگاهی ۵ موش سفید و ۳ موش سیاه نگهداری می شوند. به تصادف متوالیاً سه موش را از بین آن ها انتخاب می شود. با کدام

(سراسری تجربی ۸۸)

احتمال اولین موش، سفید و سومین موش، سیاه است؟

$$\frac{11}{56} \quad (1) \quad \frac{17}{56} \quad (2) \quad \frac{13}{56} \quad (3) \quad \frac{15}{56} \quad (4)$$

تست ۱۶: از بین ۱۸ کارت که روی آن ها اعداد ۱ الی ۱۸ نوشته شده است، دو کارت را به طور متوالی و با جایگذاری برمی داریم. احتمال آن که

هر دو عدد رو شده فرد باشند، کدام است؟

$$\frac{6}{11} \quad (1) \quad \frac{15}{374} \quad (2) \quad \frac{28}{153} \quad (3) \quad \frac{1}{14} \quad (4)$$

قانون احتمال کل: فرض کنید  $E_1$  و  $E_2$  و  $E_3$  و ... و  $E_n$  پیشامدهایی از فضای نمونه ای  $S$  باشند به طوری که  $\bigcup_{i=1}^n E_i = S$  و همچنین دو به دو

ناسازگار نیز باشند، در این صورت برای هر پیشامد دلفواه نظیر  $E$  داریم:  $P(E) = \sum_{i=1}^n P(E_i)P(E|E_i)$ .

مسئله: ۵۲٪ جمعیت کشوری را زنان و ۴۸٪ بقیه را مردان تشکیل می دهند.

الف) اگر ۸ درصد زنان و ۹ درصد مردان تحصیلات دانشگاهی داشته باشند، چند درصد جمعیت این کشور تحصیلات دانشگاهی دارند؟

ب) اگر ۶۰٪ زنان و ۶۸٪ مردان باسواد باشند، چند درصد افراد این جامعه باسوادند؟

۵. مشورت: ((کسی که از افکار دیگران استقبال کند، موارد فطرا می شناسد))

مثال ۲۷: فرض کنیم احتمال انتقال یک نوع بیماری از والدین به فرزند پسر  $1/10$  و به فرزند دختر  $15/10$  باشد. احتمال آن که والدینی که حامل این نوع بیماری اند فرزندی سالم به دنیا بیاورند را بیابید.

مثال ۲۸:  $64\%$  درصد از دانش آموزان یک مدرسه دومی و  $36\%$  درصد سومی هستند. اگر  $10\%$  درصد والدین دومی ها و  $20\%$  درصد والدین سومی ها بالای  $50$  سال سن داشته باشند، چند درصد از والدین دومی ها و سومی ها پایین تر از  $50$  سال سن دارند.

ز. توزیع احتمال:

تعریف: اگر برای متغیر تصادفی  $X$  تمامی مقادیر ممکن را بررسی کنیم، پیچونگی توزیع احتمال را برای این متغیر تصادفی بررسی کرده ایم. معمولا برای جمع بندی راحت تر توزیع احتمال از جدول استفاده می شود.

مثال ۲۹: در جعبه ای  $10$  لامپ است که  $4$  تای آن سالم است. سه لامپ به تصادف خارج می کنیم. اگر متغیر تصادفی  $X$  را ظاهر شدن لامپ های معیوب در این آزمایش بگیریم، فوایم داشت:

X			
P(X)			

مثال ۳۰: در کیسه ای  $9$  مهره است که  $7$  تای آن سبز و بقیه قرمز است. سه مهره به تصادف خارج می کنیم. اگر متغیر تصادفی  $X$  را ظاهر شدن مهره قرمز در نظر بگیریم، جدول توزیع فراوانی متغیر تصادفی  $X$  را بیابید.

X			
P(X)			

مسئله: جعبه‌ای ۳ مهره سفید و ۵ مهره سیاه دارد، از این جعبه چهار مهره با هم و به تصادف خارج می‌کنیم. اگر  $X$  تعداد مهره‌های سفید خارج شده باشد جدول توزیع احتمال  $X$  را بنویسید.

X				
P(X)				

ج. توزیع دو جمله‌ای:

اگر آزمایشی به گونه‌ای باشد که حاصل آن فقط دو حالت برد و بافت را داشته باشد، می‌توانیم از فرمول زیر احتمال رخ دادن  $k$  پیروزی در  $n$  آزمایش را مناسبه کنیم:  $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$  که در آن احتمال وقوع برد در این آزمایش است.

تست ۱۷: ۱۲۸- در یک شرکت ۴۵۰ نفر کار می‌کنند که ۳۰۰ نفر آنان تحصیلات دانشگاهی دارند. اگر ۶ نفر از این کارکنان به تصادف انتخاب شوند، با کدام احتمال ۴ نفر آنان تحصیلات دانشگاهی دارند؟ (۸۵ع)

$$\frac{40}{81} \quad (۴)$$

$$\frac{80}{243} \quad (۳)$$

$$\frac{64}{243} \quad (۲)$$

$$\frac{16}{81} \quad (۱)$$

مثال ۳۱: خانواده‌ای دارای ۴ فرزند است. اگر احتمال سالم بودن فرزند در این خانواده  $\frac{7}{8}$  باشد، احتمال آنرا بیابید که سه فرزند این خانواده سالم باشند.

مثال ۳۲: اگر ۴۰ درصد زن‌های تعیین کننده عامل RH فون منفی باشد، مطلوب است احتمال آن‌که در یک کلاس ۱۰ نفری ۶ نفر RH فون منفی داشته باشند.

مثال ۳۳: در یک آزمون تستی سه گزینه‌ای با ۸ سوال احتمال آنرا بیابید که دانش‌آموزی به طور تصادفی به ۶ سوال جواب درست دهد.

## مسئله کتاب:

۱- نوعی بذر ذرت تهیه شده است که ادعا می‌شود ۹۰٪ بذرها جوانه خواهند زد. اگر ۲۰ دانه از این ذرت‌ها را در شرایط مناسب و یکسان بکاریم، مطلوب است تعیین توزیع تعداد بذرهایی که جوانه می‌زنند و محاسبه احتمال آن که فقط ۱۸ دانه جوانه بزنند (جواب را ساده نکنید).

۲- به دانش‌آموزی ۱۰ سؤال تستی چهارگزینه‌ای داده‌ایم. اگر او به سؤال‌ها به تصادف جواب بدهد، احتمال آن که

الف - به ۷ سؤال پاسخ صحیح بدهد چقدر است؟

ب - حداقل به ۷ سؤال پاسخ صحیح بدهد چقدر است؟

۳- در خانواده‌ای با چهار فرزند، احتمال آن که RH خون فرزندان یک در میان مثبت باشد

چقدر است؟

۴- احتمال آن که حسن دیر به مدرسه برسد ۰/۰۲ است، احتمال آن که در یک هفته دو روز دیر

برسد چقدر است؟

## تست های کنکور

تست ۱: آزمایش فقط دو نتیجه شکست و پیروزی دارد. احتمال پیروزی  $\frac{3}{4}$  است و  $X$  تعداد پیروزی‌ها در ۱۶ بار تکرار این

آزمایش‌ها است.  $P(0 \leq X \leq 16)$  کدام است؟ (تجربی ۸۵)

$$(1) \left(\frac{3}{4}\right)^{16} \quad (2) 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{16} \quad (3) \left(\frac{3}{4}\right)^{16} \left(\frac{1}{4}\right) \quad (4) 1$$

تست ۲: در آزمایشگاهی ۷ موش نگهداری می‌شوند که بر روی ۳ موش آزمون مهارت انجام شده است، اگر ۲ موش از بین آنان

تصادفی انتخاب شود، با کدام احتمال، لااقل بر روی یکی از آن دو، آزمون انجام شده است؟ (تجربی ۸۵)

$$(1) \frac{10}{21} \quad (2) \frac{4}{7} \quad (3) \frac{5}{7} \quad (4) \frac{16}{21}$$

تست ۳: در آزمایشگاهی ۳ موش سفید و ۵ موش سیاه نگهداری می‌شوند. اگر به‌طور تصادفی ۴ موش از بین آنها جهت

آزمایش برداشته شوند، با کدام احتمال فقط یکی از موش‌های مورد آزمایش، سفید است؟ (تجربی ۸۶)

$$(1) \frac{2}{7} \quad (2) \frac{2}{5} \quad (3) \frac{3}{7} \quad (4) \frac{3}{5}$$

تست ۴: در آزمایشگاهی 5 موش سفید 3 موش سیاه نگهداری می‌شوند. به تصادف متوالیاً سه موش از بین آنها انتخاب می‌شود. با کدام احتمال، اولین موش سفید و سومین موش سیاه است؟ (تجربی ۸۸)

- (1)  $\frac{11}{56}$  (2)  $\frac{17}{56}$  (3)  $\frac{13}{56}$  (4)  $\frac{15}{56}$

تست ۵: دانش‌آموزی به 6 پرسش تستی سه گزینه‌ای، به تصادف پاسخ می‌گوید. احتمال اینکه فقط به 4 پرسش درست بدهد، کدام است؟ (تجربی ۸۸)

- (1)  $\frac{4}{81}$  (2)  $\frac{5}{81}$  (3)  $\frac{16}{243}$  (4)  $\frac{20}{243}$

تست ۶: حروف کلمه‌ی ATAXIA را بریده به طور تصادفی کنار هم قرار می‌دهیم. با کدام احتمال هر سه حرف A کنار هم قرار می‌گیرند؟ (تجربی ۸۹)

- (1)  $\frac{1}{6}$  (2)  $\frac{1}{5}$  (3)  $\frac{1}{4}$  (4)  $\frac{1}{3}$

تست ۷: احتمال انتقال بیماری مسری به افرادی که واکسن زده‌اند،  $0.025$  و احتمال انتقال به افراد دیگر  $0.2$  است.  $\frac{2}{5}$  کارگران یک کارگاه واکسن زده‌اند. اگر فرد حامل بیماری به طور تصادفی با یکی از کارگران ملاقات کند، با کدام احتمال، این بیماری منتقل می‌شود؟ (تجربی ۸۹)

- (1)  $0.13$  (2)  $0.14$  (3)  $0.15$  (4)  $0.16$

تست ۸: از نوعی بذر که ۸۰ درصد آنان جوانه می‌زنند، ۵ عدد کاشته شده است. با کدام احتمال، حداقل دو عدد از آنان جوانه می‌زند؟ (تجربی ۸۹)

- (1)  $0.99328$  (2)  $0.99360$  (3)  $0.94208$  (4)  $0.95120$

تست ۹: در گروه زنان ساکن یک روستا ۶۰ درصد آنان تحصیلات ابتدایی و ۲۵ درصد از آنان مهارت قالی‌بافی دارند. اگر یک فرد از این گروه انتخاب شود با کدام احتمال این فرد تحصیلات ابتدایی یا مهارت قالی‌بافی دارد؟ (تجربی ۹۰)

- (1)  $0.7$  (2)  $0.75$  (3)  $0.8$  (4)  $0.85$

تست ۱۰:

- در یک خانواده‌ی ۴ فرزند با کدام احتمال ۲ فرزند پسر یا ۳ فرزند دختر است؟

(تجربی ۹۰)

$\frac{3}{4}$  (۴)

$\frac{5}{8}$  (۳)

$\frac{9}{16}$  (۲)

$\frac{3}{8}$  (۱)

تست ۱۱:

از بین سه کارت سفید و ۴ کارت سبز یکسان به تصادف یک کارت بدون جاگذاری بیرون می‌آوریم. سپس کارت دوم را خارج

می‌کنیم با کدام احتمال هر دو کارت هم‌رنگ هستند؟

(تجربی ۹۱)

$\frac{4}{7}$  (۴)

$\frac{3}{7}$  (۳)

$\frac{5}{14}$  (۲)

$\frac{2}{7}$  (۱)

تست ۱۲:

در آزمایشگاهی ۶ موش سیاه و ۴ موش سفید موجود است. به طور تصادفی ۲ موش از بین آنها خارج می‌کنیم. X تعداد

موش‌های سفید خارج شده است. بیشترین مقدار در توزیع احتمال آن کدام است؟

(تجربی ۹۱)

$\frac{3}{5}$  (۴)

$\frac{8}{15}$  (۳)

$\frac{7}{15}$  (۲)

$\frac{2}{5}$  (۱)

تست ۱۳:

دو تاس سالم را با هم پرتاب می‌کنیم تا برای اولین بار هر دو عدد رول شده زوج باشند. با کدام احتمال حداکثر در سه پرتاب نتیجه

حاصل می‌شود؟

(تجربی ۹۱)

$\frac{29}{64}$  (۴)

$\frac{19}{32}$  (۳)

$\frac{27}{64}$  (۲)

$\frac{27}{64}$  (۱)

تست ۱۴:

از هر یک از مدارس A و B و C و D و E چهار نفر به اردوگاه دانش‌آموزی دعوت شده‌اند. به چند طریق می‌توان سه دانش‌آموز که دوبه‌دو

غیر هم مدرسه باشند، انتخاب کرد؟

(تجربی ۹۲)

۶۴۰ (۴)

۴۸۰ (۳)

۲۲۰ (۲)

۱۶۰ (۱)

تست ۱۵:

دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال مجموع دو عدد رو شده، مضرب ۴ است؟

(تجربی ۹۲)

$\frac{5}{12}$  (۴)

$\frac{1}{4}$  (۳)

$\frac{5}{18}$  (۲)

$\frac{2}{9}$  (۱)

تست ۱۶: در کیسه‌ای ۵ مهره با شماره‌های ۱ تا ۵ وجود دارد. این مهره‌ها را به طور تصادفی بی در پی بدون جای گذاری خارج می‌کنیم. با کدام احتمال دو مهره با شماره فرد متوالیاً خارج نمی‌شوند؟ (تجربی ۹۲)

- (۱)  $1/1$  (۲)  $2/15$  (۳)  $2/2$  (۴)  $3/25$

تست ۱۷: در جعبه‌ای ۶ مهره سفید و ۹ مهره سیاه موجود است. دو مهره متوالیاً و بدون جای‌گذاری از آن بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال بدون توجه به اولین مهره، دومین مهره خارج شده سفید است؟ (تجربی ۹۲)

- (۱)  $5/14$  (۲)  $3/7$  (۳)  $2/5$  (۴)  $3/5$

تست ۱۸: دانش آموزی به ۵ پرسش ۵ گزینه‌ای به تصادف پاسخ می‌دهد. با کدام احتمال فقط به ۳ پرسش پاسخ صحیح داده است؟ (تجربی ۹۲)

- (۱)  $5/256$  (۲)  $2/512$  (۳)  $3/625$  (۴)  $4/768$

تست ۱۹: ظرف A دارای ۴ مهره سفید و ۵ مهره سیاه است و هر یک از دو ظرف یکسان B و C دارای ۶ مهره سفید و ۳ مهره سیاه است. به تصادف یکی از سه ظرف را انتخاب کرده و ۴ مهره از آن خارج می‌کنیم. با کدام احتمال دو مهره از مهره‌های خارج شده، سفید است؟ (تجربی ۹۳)

- (۱)  $25/63$  (۲)  $26/63$  (۳)  $10/21$  (۴)  $11/21$

تست ۲۰: احتمال انتقال نوعی بیماری مسری به افراد مستعد برابر  $5/2$  است. اگر ۵ نفر مستعد، با فردی که حامل این بیماری است ملاقات کنند، با کدام احتمال ۳ نفر آنان مبتلا می‌شوند؟ (تجربی ۹۳)

- (۱)  $5/256$  (۲)  $5/512$  (۳)  $5/1024$  (۴)  $5/2048$

تست ۲۲: در یک خانواده‌ی دو فرزند، می‌دانیم یکی از فرزندان پسر است. با کدام احتمال این خانواده فرزند دختر دارد؟ (فاز ۸۵)

- (۱)  $1/3$  (۲)  $1/2$  (۳)  $2/3$  (۴)  $3/4$



تست ۲۳:

پدر و مادری هر یک دارای یک ژن رنگ چشم مغلوب (b) و یک ژن رنگ چشم غالب (B) اند و  $P(B) = 2P(b)$ . اگر این پدر و مادر دارای سه فرزند باشند، با کدام احتمال فقط یکی از فرزندان دارای ژن رنگ چشم مغلوب است؟

(ف) (۸۶)

تست ۲۴:

هفتاد و پنج درصد محصولات کارخانه‌ای مغلوب‌اند. با کدام احتمال از ۴ گلابی خریداری شده از این کارخانه لافل یک کالا مغلوب است؟

$$\frac{62}{64} \quad (4)$$

$$\frac{127}{128} \quad (3)$$

$$\frac{255}{256} \quad (2)$$

$$\frac{251}{256} \quad (1)$$

(ف) (۸۷)

تست ۲۵:

یک خانواده‌ی سه فرزندی با کدام احتمال، حداقل دو فرزند دختر دارد؟ در صورتی که می‌دانیم حداقل یکی از فرزندان، دختر است.

$$\frac{4}{7} \quad (4)$$

$$\frac{3}{7} \quad (3)$$

$$\frac{5}{8} \quad (2)$$

$$\frac{3}{8} \quad (1)$$

(ف) (۸۷)

تست ۲۶:

۵۵ درصد دانشجویان سال اول دختر و بقیه پسر هستند. ۶۰ درصد دختران و ۶۴ درصد پسران، تمام واحدهای درسی خود را گذرانده‌اند. چند

درصد کل دانشجویان، تمام واحدهای درسی را گذرانده‌اند؟

(ف) (۸۸)

$$67/8 \quad (4)$$

$$67/4 \quad (3)$$

$$61/8 \quad (2)$$

$$61/4 \quad (1)$$

تست ۲۷:

در یک بیمارستان ۵ نوزاد در یک روز متولد شده‌اند. با کدام احتمال لااقل دو نفر از آنان دختر است؟

$$\frac{13}{16} \quad (4)$$

$$\frac{7}{16} \quad (3)$$

$$\frac{3}{8} \quad (2)$$

$$\frac{5}{16} \quad (1)$$

(ف) (۸۸)

تست ۲۸:

چهار رقم ۰، ۱، ۲، ۳، را به تصادف در کنار هم قرار می‌دهیم. با کدام احتمال یک عدد چهار رقمی مضرب ۶، حاصل می‌شود؟

(ف) (۸۹)

$$\frac{5}{9} \quad (4)$$

$$\frac{4}{9} \quad (3)$$

$$\frac{5}{12} \quad (2)$$

$$\frac{1}{3} \quad (1)$$

تست ۲۹: در یک خانواده سه فرزندی، می‌دانیم یکی از فرزندان پسر است با کدام احتمال دو فرزند دیگر، دختر است؟

- (فارغ) (۸۹) (۱)  $\frac{3}{8}$  (۲)  $\frac{3}{7}$  (۳)  $\frac{4}{7}$  (۴)  $\frac{5}{8}$

تست ۳۰: در یک کارخانه ۶۰ درصد کارگران بومی‌اند. اگر ۴ نفر از بین آنان به تصادف انتخاب شوند، با کدام احتمال درست ۳ نفر

از آنان بومی‌اند؟ (فارغ) (۸۹)

- (۱)  $0/1536$  (۲)  $0/2986$  (۳)  $0/2276$  (۴)  $0/3256$

تست ۳۱: از بین ۵ دانش‌آموز تجربی و ۳ دانش‌آموز ریاضی، به چند طریق می‌توان سه نفر را برای کار در آزمایشگاه انتخاب کرد؛ به طوری که لافل دو نفر از آن‌ها دانش‌آموز

تجربی باشند؟ (فارغ) (۹۰)

- (۱) ۲۵ (۲) ۳۰ (۳) ۲۵ (۴) ۴۰

تست ۳۲: در یک روستا ۵۴ درصد جمعیت را مردان و ۴۶ درصد را زنان تشکیل می‌دهند. اگر ۶۰ درصد مردان و ۷۵ درصد زنان دفترچه سلامت داشته باشند، با کدام احتمال

یک فرد انتخابی به تصادف از بین آن‌ها، دفترچه سلامت دارد؟ (فارغ) (۹۰)

- (۱)  $0/658$  (۲)  $0/669$  (۳)  $0/685$  (۴)  $0/696$

تست ۳۳: به طور متوسط از هر ۱۰ مشتری مراجعه‌کننده به فروشگاه ۶ نفر خرید می‌کنند. در فاصله‌ی زمانی معین ۴ مشتری به این فروشگاه مراجعه می‌کنند؛ با کدام

احتمال فقط ۳ نفر از آن‌ها خرید می‌کنند؟ (فارغ) (۹۰)

- (۱)  $0/3172$  (۲)  $0/3282$  (۳)  $0/3456$  (۴)  $0/3654$

تست ۳۴: در پرتاب دو سکه و یک تاس با هم، احتمال این‌که حداقل یک سکه رو و عدد تاس مضرب ۳ باشد، کدام است؟

- (فارغ) (۹۱) (۱)  $\frac{1}{12}$  (۲)  $\frac{1}{6}$  (۳)  $\frac{1}{4}$  (۴)  $\frac{1}{3}$

تست ۳۵: در آزمایشگاهی ۵ موش سفید و ۶ موش سیاه موجود است، به تصادف ۳ موش از بین آنها خارج می‌کنیم. با کدام احتمال لاقل یکی از موش‌ها سفید است؟ (ف) (۹۱)

$$\frac{8}{11} \quad (1) \quad \frac{9}{11} \quad (2) \quad \frac{28}{33} \quad (3) \quad \frac{29}{33} \quad (4)$$

تست ۳۶: احتمال انتقال نوعی بیماری از فرد بیمار به افراد مستعد  $\frac{1}{2}$  است. اگر ۶ نفر مستعد با این بیمار ملاقات کنند، با کدام احتمال ۴ نفر آنان به این بیماری مبتلا می‌شوند؟ (ف) (۹۲)

$$-\frac{1}{1596} \quad (4) \quad -\frac{1}{1548} \quad (3) \quad -\frac{1}{1536} \quad (2) \quad -\frac{1}{1428} \quad (1)$$

تست ۳۷: تعداد جایگشت‌های حروف کلمه SYSTEM به طوری که S ها کنار هم نباشند، کدام است؟ (ف) (۹۳)

$$360 \quad (4) \quad 240 \quad (3) \quad 180 \quad (2) \quad 120 \quad (1)$$

تست ۳۸: چهار دانش‌آموز یک کلاس بر یک نیمکت نشسته‌اند، با کدام احتمال ماه تولد حداقل دو نفر آنان یکسان است؟ (ف) (۹۴)

$$\frac{55}{96} \quad (4) \quad \frac{23}{48} \quad (3) \quad \frac{41}{96} \quad (2) \quad \frac{19}{48} \quad (1)$$

تست ۳۹: در جعبه‌ی اول ۴ مهره‌ی سفید و ۳ مهره‌ی سیاه، در جعبه‌ی دوم ۳ مهره‌ی سفید و ۶ مهره‌ی سیاه موجود است. به تصادف یکی از جعبه‌ها را انتخاب و دو مهره با هم از آن بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال هر دو مهره سفید است؟ (ف) (۹۵)

$$\frac{31}{168} \quad (1) \quad \frac{11}{56} \quad (2) \quad \frac{17}{84} \quad (3) \quad \frac{13}{56} \quad (4)$$

تست ۴۰: در ظرفی ۴ مهره‌ی سفید و ۵ مهره‌ی سیاه موجود است. به تصادف ۳ مهره خارج می‌کنیم. با کدام احتمال مهره‌های خارج شده هم‌رنگ‌اند؟ (ف) (۹۶)

$$\frac{1}{6} \quad (1) \quad \frac{3}{14} \quad (2) \quad \frac{2}{9} \quad (3) \quad \frac{5}{14} \quad (4)$$

تست ۴۱:

دانش آموزی به ۵ پرسش ۵ گزینه‌ای به تصادف پاسخ می‌دهد. با کدام احتمال فقط به یک پرسش پاسخ صحیح داده است؟

(فراچ) ۹۲

۰/۷۱۴۴ (۴)

۰/۵۱۲ (۳)

۰/۴۰۹۶ (۲)

۰/۲۰۴۸ (۱)

تست ۴۲:

در ظرفی ۴ مهره آبی، ۳ مهره قرمز، ۲ مهره سفید موجود است. به تصادف ۳ مهره از ظرف خارج می‌کنیم. با کدام احتمال، حداقل یک مهره آبی، خارج می‌شود؟

(فراچ) ۹۳

$\frac{72}{84}$  (۴)

$\frac{67}{84}$  (۳)

$\frac{37}{42}$  (۲)

$\frac{31}{42}$  (۱)

تست ۴۳:

شصت درصد از کارکنان سازمانی مرد و چهل درصد آنان زن هستند. می‌دانیم که ۲۰ درصد از مردان و ۴۵ درصد از زنان تحصیلات دانشگاهی دارند. اگر به تصادف ۳ نفر از بین آنان انتخاب شود، با کدام احتمال ۲ نفر آنان، تحصیلات دانشگاهی دارند؟

(فراچ) ۹۳

۰/۱۹۸ (۴)

۰/۱۹۶ (۳)

۰/۱۹۲ (۲)

۰/۱۸۹ (۱)

تست ۴۴:

در جعبه‌ای ۳ مهره سفید، ۲ مهره سیاه، ۵ مهره قرمز موجود است. اگر دو مهره از آن بیرون آوریم، با کدام احتمال این دو مهره هم‌رنگ نیستند؟

سراسری ۹۴

$\frac{32}{45}$  (۴)

$\frac{31}{45}$  (۳)

$\frac{29}{45}$  (۲)

$\frac{28}{45}$  (۱)

تست ۴۵:

در پرتاب یک تاس، اگر عدد زوج ظاهر شود، یک تیرانداز مجاز است ۲ تیر رها کند. در غیر این صورت ۳ تیر رها می‌کند. می‌دانیم احتمال موفقیت در هر تیر رها شده  $\frac{2}{3}$  است. با کدام احتمال، فقط ۲ بار موفقیت حاصل می‌شود؟

سراسری ۹۴

$\frac{13}{27}$  (۴)

$\frac{11}{27}$  (۳)

$\frac{15}{27}$  (۲)

$\frac{8}{27}$  (۱)

تست ۴۶: در جعبه‌ای ۷ مهره سفید و ۵ مهره سیاه و ۲ مهره قرمز موجود است. به تصادف ۴ مهره از آن بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال یک مهره قرمز و حداقل ۲ مهره سفید، خارج شده است؟

فارسی ۹۴

$$\frac{35}{91} (1) \quad \frac{25}{77} (2) \quad \frac{45}{143} (3) \quad \frac{55}{143} (4)$$

تست ۴۷: در پرتاب یک سکه، اگر «رو» بیاید یک تیرانداز مجاز است ۵ تیر رها کند، اگر «پشت» بیاید، ۳ تیر رها می‌کند. می‌دانیم احتمال اصابت هر تیر رها شده  $\frac{3}{5}$  است. با کدام احتمال فقط یک تیر اصابت می‌کند؟

فارسی ۹۴

$$\frac{96}{625} (1) \quad \frac{114}{625} (2) \quad \frac{122}{625} (3) \quad \frac{128}{625} (4)$$

تست تجربی ۹۵: هر یک از ارقام ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱ بر روی پنج کارت یکسان نوشته شده است. به تصادف سه کارت از آن‌ها را کنار هم قرار می‌دهیم. با کدام احتمال عدد سه رقمی حاصل مضرب ۳ می‌باشد؟

$$\frac{5}{3} (1) \quad \frac{4}{4} (2) \quad \frac{5}{5} (3) \quad \frac{6}{6} (4)$$

تست تجربی ۹۵: احتمال موفقیت عمل جراحی برای شخص A برابر  $\frac{9}{10}$  و برای شخص B برابر  $\frac{8}{10}$  است. با کدام احتمال، لااقل عمل جراحی برای یکی از این دو نفر، موفقیت‌آمیز است؟

$$\frac{92}{100} (1) \quad \frac{94}{100} (2) \quad \frac{96}{100} (3) \quad \frac{98}{100} (4)$$

تست تجربی ۹۵: آزمایشی فقط دو نتیجه دارد، احتمال پیروزی در هر بار  $\frac{3}{4}$  است. در تکرار ۶ بار این آزمایش مستقل، احتمال ۴ پیروزی چند برابر احتمال ۳ پیروزی است؟

$$\frac{3}{4} (1) \quad \frac{4}{3} (2) \quad \frac{3}{2} (3) \quad \frac{9}{4} (4)$$

## فصل دوم (بخش اول: معادلات درجه دوم)

### بخش اول: معادلات درجه دوم

تعریف: معادلات درجه دوم در حالت کلی به صورت  $ax^2 + bx + c = 0$  هستند. ( $a \neq 0$ )

حل معادله درجه دوم: برای حل معادلات درجه دوم چندین روش وجود دارد که به توضیح دو روش آن می‌پردازیم:

(الف) روش تجزیه: در این روش ابتدا معادله را با استفاده از روش‌های مختلف تجزیه می‌کنیم و در نهایت تک تک معادلات درجه اول بدست آمده را حل می‌نماییم.

مثال ۱: معادلات زیر را حل کنید.

$$x^2 + 2x - 8 = 0 \Rightarrow$$

$$x^3 - x = 0 \Rightarrow$$

$$x^2 - 4x^3 =$$

(ب) روش دلتا: در این روش ریشه‌های معادله (در صورت وجود) از رابطه‌ی  $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$  بدست می‌آید. که در آن  $\Delta = b^2 - 4ac$  است.

تست ۱: اگر عدد یک، ریشه از معادله  $x + a = x(2x + 1)$  باشد، ریشه دیگر معادله کدام است؟

- (۱) ۰      (۲) ۲      (۳) -۲      (۴) -۱

نکته ۱: برای حل معادله درجه دوم دو حالت فاص زیر را داریم:

(الف) اگر  $a + b + c = 0$  باشد، در آن صورت جواب‌های معادله برابر  $x = 1$  و  $x = \frac{c}{a}$  است.

(ب) اگر  $a + c = b$  باشد، در آن صورت جواب‌های معادله برابر  $x = -1$  و  $x = -\frac{c}{a}$  است.

مثال ۲: جواب‌های معادله  $3x^2 - x - 2 = 0$  برابر

و همچنین جواب‌های معادله  $5x^2 - 2x - 7 = 0$  برابر

نکته ۲: اگر  $\alpha$  و  $\beta$  دو ریشه معادله درجه دوم  $ax^2 + bx + c = 0$  باشد، همواره داریم:

$$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a}, P = \alpha\beta = \frac{c}{a}, |\alpha - \beta| = \sqrt{S^2 - 4P} = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

مثال ۳: مجموع، حاصل ضرب و تفاضل ریشه‌های معادلات  $5x^2 - 4x - 1 = 0$ ،  $x^2 - x - 3 = 0$  را بیابید.

نکته ۳: اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های یک معادله دوم باشند، داریم:

$$\alpha^p + \beta^p = S^p - pps \quad , \quad \alpha^p + \beta^p = S^p - pp$$

مثال ۴: اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله  $\sqrt{x^p} - px - 1 = 0$  باشند، مطلوب است

$$\alpha^p + \beta^p = \quad , \quad \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} =$$

$$\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} = \quad , \quad \alpha^p + \beta^p =$$

$$(\alpha - 1)(\beta - 1) = \quad , \quad \alpha^p - \beta^p =$$

نکته ۴: الف) اگر در معادله درجه دوم  $ax^p + bx + c = 0$  علامت  $b$  را قرینه کنیم، ریشه‌های معادله قرینه می‌شوند.

مثال ۵: چون ریشه‌های معادله  $x^p + 5x + 4 = 0$  برابر هستند، پس ریشه‌های معادله  $x^p - 5x + 4 = 0$  برابر هستند.

مثال ۶: معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن قرینه ریشه‌های  $px^p - x - 3 = 0$  باشند؟

ب) اگر در معادله درجه دوم  $ax^p + bx + c = 0$  جای ضرایب  $a$  و  $c$  را عوض کنیم ریشه‌های معادله معکوس می‌شوند.

مثال ۷: چون ریشه‌های معادله  $3x^p - px - 1 = 0$  برابر هستند پس ریشه‌های معادله  $-1x^p - px + 3 = 0$  برابر هستند.

ب) اگر  $a = c$ ، دو ریشه معادله عکس هم‌اند و همچنین اگر  $\alpha\beta = \frac{c}{a} < 0$  دوریشه غیر هم‌علامت هستند.

مثال ۸: ریشه‌های معادله  $px^p - 5x + 4 = 0$  برابر و هستند که معکوس یکدیگرند.

همچنین چون در معادله  $x^p + px - 3 = 0$  داریم  $\alpha\beta = \frac{c}{a} =$  لذا معادله دارای

تست ۲: معادله  $3x^p + x - a^p = 0$ ،  $(a \in \mathbb{R})$  چند ریشه حقیقی دارد؟

۱) ۲ هم‌علامت      ۲) ۱      ۳) ۲ غیر هم‌علامت      ۴) بدون ریشه

ت) اگر  $\frac{c}{a} > 0$ ،  $\Delta > 0$  و الف)  $-\frac{b}{a} > 0$  (معادله دو ریشه مثبت ب)  $-\frac{b}{a} < 0$  (معادله دو ریشه منفی دارد).

مثال ۹: معادله  $x^p - 3x + 1 = 0$  دارای ریشه، زیرا:

و معادله  $px^p + 3x + 1 = 0$  دارای ریشه، زیرا:

ث) اگر  $\Delta < 0$  باشد، علامت معادله همواره هم‌علامت  $a$  است. مثلاً مقدار عددی عبارت  $x^p + px + 7$  به ازای هر عدد حقیقی همواره ..... است، زیرا در این عبارت

ج) ریشه‌های معادله  $ax^p + bpx + ck^p = 0$ ،  $k$  برابر ریشه‌های معادله  $ax^p + bx + c = 0$  است.

مثال ۱۰: معادلات درجه دومی بیابید که ریشه‌های آن ۳ و ۲- برابر ریشه‌های معادله  $x^2 - 4x + 8 = 0$  باشند.

ج) اگر مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های یک معادله به ترتیب برابر  $S$  و  $P$  باشند، معادله  $x^2 - Sx + P = 0$  خواهد بود.

مثال ۱۱: معادلات درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن‌ها به ترتیب برابر  $1 \pm \sqrt{3}$  و  $2 \pm \sqrt{3}$  باشند.

نکته ۵: برای نوشتن یک معادله جدید بر اساس معادله  $ax^2 + bx + c = 0$  که ریشه‌هایش در ارتباط با ریشه‌های این معادله باشند،

کافیست با استفاده از یک تغییر متغیر به معادله مورد نظر برسیم.

مثال ۱۲: الف) معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن:

الف) یک واحد از ریشه‌های معادله  $x^2 + x - 2 = 0$  کمتر باشند.

ب) از معکوس ریشه‌های معادله  $x^2 + 2x - 4 = 0$  آن سه واحد بیشتر باشند.

ج) عکس و قرینه ریشه‌های معادله  $x^2 - 4x - 1 = 0$  باشند.

نکته ۶: برای حل معادلات  $ax^2 + bx + c = 0$  یا  $ax^k + bx + c = 0$  که در آن  $u$  یک عبارت بر حسب  $x$  است، مشابه معادلات درجه دوم عمل می‌کنیم.

مثال ۱۳: معادله‌های  $2(3x-1)^2 + (3x-1) - 3 = 0$ ،  $5x^k - 2x^p - 1 = 0$  را حل کنید.



**تست ۳:** اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله  $x^2 - 6x + 1 = 0$  باشند، حاصل  $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} + \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{\sqrt{6}}$  (۲) ۶ (۳)  $\sqrt{6}$  (۴) ۲۴

**تست ۴:** معادله درجه‌ی دومی که ریشه‌های آن ۳ برابر معکوس ریشه‌های معادله  $x^2 - 13x + 1 = 0$  باشد، کدام است؟

- (۱)  $x^2 - 9x + 9 = 0$  (۲)  $x^2 - 9x + 13 = 0$  (۳)  $x^2 + 9x - 13 = 0$  (۴)  $x^2 - 9x - 9 = 0$

**تست ۵:** اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله  $x^2 - 12x - 1 = 0$  باشند، حاصل  $\alpha^2 + \alpha^3 + \beta^2 + \beta^3$  کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۲۰ (۳) ۱۸ (۴) ۲۲

### تست های کنکور

**تست ۱:** اگر هر یک از ریشه‌های معادله  $3x^2 + ax + b = 0$ ، دو برابر معکوس هر ریشه از معادله

(تجربی ۸۶)  $4x^2 - 7x + 3 = 0$  باشد،  $a$  کدام است؟

- (۱) -۱۴ (۲) -۱۲ (۳) -۸ (۴) -۶

**تست ۲:** اگر  $x = 4$  یکی از جواب‌های معادله  $\sqrt{5x - x^2} = x + a$  باشد، جواب دیگر آن کدام است؟

(تجربی ۸۷)

- (۱)  $\frac{1}{2}$  (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) جواب دیگر ندارد.

**تست ۳:** ریشه‌های معادله درجه دوم  $x^2 + ax + b = 0$  یک واحد از ریشه‌های معادله  $3x^2 + 7x + 1 = 0$ ، بیشتر است (تجربی ۸۷) کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) -۱ (۳)  $\frac{2}{3}$  (۴)  $\frac{4}{3}$

**تست ۴:**

- به ازای کدام مقادیر  $m$ ، از معادله  $mx - 2\sqrt{x} + m - 2 = 0$  فقط یک جواب برای  $x$  حاصل می‌شود؟

(سراسری ۸۸)

- (۱)  $-\frac{2}{3} < m < 2$  (۲)  $0 < m < 2$  (۳)  $\frac{2}{3} < m < \frac{5}{2}$  (۴)  $2 < m < \frac{3}{2}$

**تست ۵:**

- به ازای کدام مقدار  $a$ ، سه خط به معادلات  $y + 2x = 0$ ،  $2y + ax + 5 = 0$ ،  $y + 3x = a$  متقاربانند؟

(سراسری ۸۸)

- (۱) -۱ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۴ نشدنی

**تست ۶:**

- مجموع ریشه‌های حقیقی معادله  $(x^2 + x)^2 - 18(x^2 + x) + 72 = 0$ ، کدام است؟

(سراسری ۹۰)

- (۱) -۴ (۲) -۲ (۳) ۲ (۴) ۴

**تست ۷:**

به ازای کدام مقدار  $m$ ، مجموع مربعات ریشه‌های حقیقی معادله  $mx^2 - (m+3)x + 5 = 0$ ، برابر ۶ می‌باشد؟

(سراسری ۹۳)

- (۱)  $-\frac{9}{5}$  (۲) ۱ (۳) ۱ و  $-\frac{9}{5}$  (۴)  $\frac{9}{5}$  و -۱

تست ۱۰: ریشه‌های کدام معادله، از معکوس ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم  $2x^2 - 3x - 1 = 0$  یک واحد کم‌تر است؟  
 (تجربی ۹۴) (۱)  $x^2 - 3x + 1 = 0$  (۲)  $x^2 + 3x + 1 = 0$  (۳)  $x^2 - 5x + 2 = 0$  (۴)  $x^2 + 5x + 2 = 0$

تست ۱۱: به ازای کدام مجموعه‌ی مقادیر  $m$ ، از معادله‌ی  $x - 2\sqrt{x} + m - 1 = 0$ ، دو جواب متمایز برای  $x$  حاصل می‌شود؟  
 (فاز ۸۸) (۱)  $m \geq 1$  (۲)  $m < 2$  (۳)  $1 \leq m < 2$  (۴) هیچ مقدار  $m$

تست ۱۲: به ازای کدام مجموعه‌ی مقادیر  $m$ ، معادله درجه دوم  $2x^2 + (m+1)x + \frac{1}{4}m + 2 = 0$ ، فاقد ریشه حقیقی است؟  
 (فاز ۸۹) (۱)  $-3 < m < 5$  (۲)  $-3 < m < 4$  (۳)  $-2 < m < 4$  (۴)  $-1 < m < 5$

تست ۱۳: - مقادیر تابع  $y = x^2 - 4x - 12$  در بازه‌ی  $(a, b)$  کوچک‌تر از  $-7$  است. بیش‌ترین مقدار  $b - a$  کدام است؟  
 (گزینه ۲) (۱) ۵ (۲) ۵/۵ (۳) ۶ (۴) ۶/۵

تست ۱۴: - معادله‌ی  $\sqrt{x} - x + 6 = 0$  چند جواب حقیقی دارد؟  
 (گزینه ۲) (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

تست ۱۵: به ازای کدام مجموعه‌ی مقادیر  $m$ ، از معادله‌ی  $x + m\sqrt{x} + m = 1$ ، هیچ جوابی برای  $x$  حاصل نمی‌شود؟

(۲)  $m > 1$

قلمپی (۱)  $\emptyset$

(۴)  $m < 0$

(۳)  $0 < m < 1$

### تمرینات کتاب

۱- معادله‌ای درجه‌ دوم بنویسید که جواب‌های آن دو عدد زیر باشند.

(الف)  $3$  و  $4$  (ب)  $\frac{2}{3}$  و  $\frac{3}{2}$  (ج)  $2 + \sqrt{2}$  و  $2 - \sqrt{2}$

۲- مقدار  $m$  را چنان تعیین کنید که حاصل ضرب جواب‌های معادله  $-mx^2 + 3x + m - 1 = 0$

برابر  $-2$  شود.

۳- مقدار  $a$  را چنان تعیین کنید که جواب‌های معادله  $2x^2 - 5x + a = 0$  معکوس یکدیگر باشند.

سپس جواب‌های این معادله را بیابید.

۴- معادله سهمی را بنویسید که محور طول‌ها را در  $2$  و  $-2$  و محور عرض‌ها را در  $2$  قطع کند.

۵- معادله درجه‌ دومی بنویسید که جواب‌های آن معکوس جواب‌های  $x^2 + 3x - 5 = 0$  باشد.

## فصل دوم (بخش دوم: دنباله ها)

## بخش دوم: دنباله ها

(۱) تعریف دنباله: دنباله تابعی است که به هر عدد طبیعی، یک عدد حقیقی را نسبت می‌دهد.  
 $a_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $n \mapsto a_n$

نکته ۱: جملات برقی از دنباله‌ها از یک قانون فاصی پیروی می‌کنند که به آن جمله‌ی عمومی دنباله گفته می‌شود و تمام جمله‌های دنباله را می‌توان با توجه به آن قاعده مشخص نمود. مثلاً در دنباله  $1, 3, 5, \dots$  جمله‌ی عمومی بصورت  $a_n = 2n - 1$  می‌باشد، و هر جمله را می‌توان با توجه به جمله قبل از آن و یا به طور مستقل پیدا کرد.

مثال ۱: جمله‌ی عمومی دنباله‌های  $a_n = \frac{3n+2}{n}$  و  $b_n = \sqrt{2 + \frac{3}{n}}$  را داریم، سه جمله اول آن را بنویسید.

(۲) دنباله مسابی (عددی): جملات این دنباله‌ها از جمع عدد قبلی با یک عدد ثابت به نام قدر نسبت حاصل می‌شوند. پس در حالت کلی ظاهر این دنباله‌ها بصورت  $a, a+d, a+2d, \dots$  است. که در آن  $a$  جمله اول و  $d$  قدر نسبت است.

نکته ۲: قدر نسبت در این دنباله‌ها از رابطه‌ی  $d = a_n - a_{n-1}$  محاسبه می‌شود. و همچنین جمله‌ی عمومی این دنباله‌ها در حالت کلی به شکل  $a_n = a + (n-1)d$  است.

مثال ۲: در دنباله  $5, 2, -1, \dots$  قدر نسبت و جمله‌ی  $20$ ام و جمله  $125$ ام را مشخص کنید.

نکته ۳: اگر  $a$  و  $b$  و  $c$  به ترتیب سه جمله از یک دنباله مسابی باشند، به  $b$  واسط عددی می‌گوییم و داریم  $b = \frac{a+c}{2}$ . همچنین داریم:

$$a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}$$

یعنی هر جمله واسط عددی بین جملات با فاصله مساوی از طرفین فود است.

مثال ۳: در مجموعه اعداد طبیعی عدد  $5$  واسط عددی چه اعدادی است؟

نکته ۴: اگر جمله‌ی  $a_m$  و  $a_n$  از یک دنباله مسابی را داشته باشیم، فوایم داشت:  $d = \frac{a_m - a_n}{m - n}$

مثال ۴: اگر در یک دنباله جمله ششم  $15$  و جمله دهم  $34$  باشد، قدر نسبت دنباله را بیابید.

تست ۱: اعداد  $2p+3$ ,  $3p+4$ ,  $5p-1$  سه جمله ی متوالی یک تصاعد عددی هستند. قدر نسبت این تصاعد کدام است؟

- ۴ (۱)      ۵ (۲)      ۶ (۳)      ۷ (۴)

تست ۲: به ازای کدام مقدار  $m$  عدد  $\frac{1}{8}$  واسطه عددی بین دو ریشه حقیقی معادله  $(m^2-4)x^2-3x+m=0$  است؟

- ۳ (۱)      -۳ (۲)      ۴ (۳)      -۴ (۴)

تست ۳: تصاعد حسابی به جمله اول  $63$  و قدر نسبت  $(-4)$  چند جمله مثبت دارد؟

- ۱۵ (۱)      ۱۶ (۲)      ۱۷ (۳)      ۱۸ (۴)

نکته ۵: اگر جمله ی  $a$  و  $b$  دو عدد حقیقی باشند و بفوایم بین این دو عدد  $n$  عدد دیگر بگنجانیم بطوری که جملات حاصل یک دنباله عددی

$$d = \frac{b-a}{n+1}$$

را تشکیل دهند، فوایم داشت:

مثال ۵: بین اعداد  $20$  و  $35$  چهار واسطه عددی درج کنید.

تست ۴: بین دو عدد  $7$  و  $55$  به تعداد هفت جمله طوری نوشته شده است که دنباله ی حسابی تشکیل شود، جمله ی وسط کدام است؟

- ۲۹ (۱)      ۳۱ (۲)      ۳۲ (۳)      ۳۳ (۴)

نکته ۶: اگر برای چهار عدد طبیعی داشته باشیم  $m+n=p+q$  در آن صورت در هر دنباله مسابی فوایم داشت:  $a_m + a_n = a_p + a_q$ .

تست ۵: در یک دنباله مسابی جملات هشتم، سیزدهم و شصت و هفتم به ترتیب برابر ۱۱،  $36$  و  $306$  هستند. جمله  $62$  کدام است؟

- ۲۶۳ (۱)      ۲۶۱ (۲)      ۲۵۹ (۳)      ۲۶۹ (۴)

نکته ۷: مجموع  $n$  جمله ی اول در هر دنباله مسابی از رابطه ی  $S_n = \frac{n}{2}[a + (n-1)d]$  یا  $S_n = \frac{n}{2}(a + a_n)$  مناسبه می شود.

امام علی علیه السلام: ((تقوای الهی پیشه کن گرچه اندک، و میان خود و فدای خویش مریم نکه دار و لو کم رنگ))

مثال ۶: در دنباله  $۲, ۶, ۱۰, \dots$  مجموع ۱۰ جمله اول و مجموع ۱۴ جمله اول را بیابید.

مثال ۷: پنجم جمله از دنباله  $۵, ۷, ۹, \dots$  را جمع کنیم تا مجموع جملات از ۱۰۰ بیشتر شود.

تست ۶: در یک دنباله عددی مجموع چهار جمله اول ۳۴ و مجموع چهار جمله دوم ۱۴۶ است. مجموع جملات نهم و دهم کدام است؟

۱۱۹ (۴)

۱۱۵ (۳)

۱۱۲ (۲)

۱۱۰ (۱)

نکته ۸: برای یافتن  $n$  جمله اول در یک دنباله مسابی می‌توانیم از ضرب  $n$  در جمله وسط استفاده کنیم.

تست ۷: جمله بیستم یک دنباله عددی برابر ۱۰۰ است. مجموع ۳۹ جمله اول را بیابید.

۴۰۰۰ (۴)

۳۲۰۰ (۳)

۳۹۰۰ (۲)

۳۸۰۰ (۱)

نکته ۹: تعداد جملات بین دو عدد صحیح  $m$  و  $n$  برابر  $m - n + 1$  است.

تست ۸: مجموع اعداد طبیعی فرد بخش‌پذیر بر ۳ و کوچکتر از ۱۰۱ کدام است؟

۸۸۴ (۴)

۸۶۷ (۳)

۸۵۲ (۲)

۸۱۶ (۱)

(۳) دنباله هندسی: جملات این دنباله‌ها از ضرب عدد قبلی در یک عدد ثابت به نام قدر نسبت حاصل می‌شوند. پس در حالت کلی ظاهر این

دنباله‌ها بصورت  $a, aq, aq^2, \dots$  است. که در آن  $a$  جمله اول و  $q$  قدر نسبت است.

نکته ۱۰: قدر نسبت در این دنباله ها از رابطه  $q = \frac{a_n}{a_{n-1}}$  مناسبه می شود. و همچنین جمله ی عمومی این دنباله ها در حالت کلی بشکل  $a_n = aq^{n-1}$  است.

مثال ۸: در دنباله  $5, \frac{5}{2}, \frac{5}{4}, \dots$  قدر نسبت و جمله ی ۱۷ام را مشخص کنید.

نکته ۱۱: اگر  $a$  و  $b$  و  $c$  به ترتیب سه جمله از یک دنباله هندسی باشند، به  $b$  واسط هندسی می گوئیم و داریم  $b^2 = ac$ .

نکته ۱۲: اگر جمله ی  $a_n$  و  $a_m$  از یک دنباله هندسی را داشته باشیم، فواید داشت:  $q^{m-n} = \frac{a_m}{a_n}$ .

نکته ۱۳: اگر جمله ی  $a$  و  $b$  دو عدد مقیقی باشند و بفواید بین این دو عدد  $n$  عدد دیگر بگنجانیم به طوری که جملات حاصل یک دنباله

هندسی را تشکیل دهند، فواید داشت:  $q^{n+1} = \frac{b}{a}$ .

نکته ۱۴: اگر برای چهار عدد طبیعی داشته باشیم  $m+n = p+q$ ، در آن صورت در هر دنباله مسابی فواید داشت:  $a_m a_n = a_p a_q$ .

مثال ۹: بین اعداد ۲ و ۱۲۸ پنج واسط هندسی بگنجانید.

تست ۹: اعداد  $a$ ، ۲ و  $a-3$  جملات متوالی از دنباله ی هندسی نزولی اند، جمله ی چهارم چند برابر جمله ی دهم آن است؟

۱۲۸ (۴)

۶۴ (۳)

۴۸ (۲)

۳۲ (۱)

تست ۱۰: در یک تصاعد هندسی  $a_2 a_6 = 2a_5$  جمله اول کدام است؟

 $2\sqrt{2}$  (۴)

۴ (۳)

۲ (۲)

 $\sqrt{2}$  (۱)

تست ۱۱: در یک تصاعد هندسی صعودی جمله سوم ۱۰ و جمله هفتم ۴۰ است. جمله اول کدام است؟

 $\frac{5}{4}$  (۴)

۵ (۳)

۲۵ (۲)

 $\sqrt{5}$  (۱)

تست ۱۲: اعداد  $2^a$ ،  $4\sqrt{2}$  و  $2^b$  سه جمله متوالی از تصاعد هندسی اند. واسطه عددی بین  $a$  و  $b$  کدام است؟

 $\sqrt{2}$  (۴)

۱/۵ (۳)

۲ (۲)

۲/۵ (۱)



((مسئولیت زندگیتان را به عهده بگیرید، بدانید فقط شما هستید که می‌توانید خودتان را به جایی که می‌خواهید برسانید، نه هیچکس دیگری))

نکته ۱۵: مجموع  $n$  جمله‌ی اول در هر دنباله هندسی از رابطه‌ی  $S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}$  بدست می‌آید.

مثال ۱۰: مجموع ۶ جمله اول از دنباله‌های  $3, -15, +45, \dots$  ,  $8, 14, 2, \dots$  را بیابید.

تست ۱۳: در یک تصاعد هندسی مجموع هشت جمله اول  $\frac{5}{4}$  مجموع چهار جمله اول آن است. جمله هفتم چند برابر جمله اول است؟

$\frac{1}{4}$  (۴)       $\frac{5}{32}$  (۳)       $\frac{1}{8}$  (۲)       $\frac{1}{16}$  (۱)

تست ۱۴: تصاعد هندسی  $2, x, \frac{1}{2}, \dots$  غیرنزولی است. مجموع شش جمله اول آن کدام است؟

$\frac{23}{16}$  (۴)       $\frac{11}{8}$  (۳)       $\frac{21}{16}$  (۲)       $\frac{41}{32}$  (۱)

تست ۱۵: در یک تصاعد هندسی با قدر نسبت ۲ حاصل  $\frac{a_7 a_2}{a_5^2}$  کدام است؟

$4$  (۴)       $\frac{1}{4}$  (۳)       $16$  (۲)       $\frac{1}{16}$  (۱)

نکته ۱۶: اگر در دنباله هندسی  $-1 < q < 1$  باشد و بخواهیم مجموع همه جملات دنباله را بیابیم، از رابطه  $S = \frac{a}{1-q}$  استفاده می‌کنیم.

مثال ۱۱: مجموع کل جملات دنباله هندسی  $12, -4, \frac{14}{3}, \dots$  ,  $9, 3, 1, \dots$  را بیابید.

## ۱۴ انواع دنباله ها:

الف- دنباله های یکنوا (صعودی یا نزولی): دنباله  $\{a_n\}$  صعودی است هرگاه  $\forall n \leq m \Rightarrow a_n \leq a_m$  و همچنین دنباله  $\{a_n\}$  نزولی است

هرگاه  $\forall n \leq m \Rightarrow a_n \geq a_m$ . مثلا دنباله های  $\{n\}, \{n^p + 1\}, \{\log n\}, \{p^n\}$  همگی صعودی و دنباله های  $\left\{\frac{1}{n}\right\}, \left\{\left(\frac{1}{p}\right)^n\right\}, \{-n\}$

نزولی هستند و همچنین دنباله ای  $\{a\}$  ( $a \in \mathbb{R}$ ) هم صعودی و هم نزولی است.

نکته ۱۷: دنباله های متناوبی نظیر  $\{(-1)^n\}, \{\sin n\}$  نه صعودی و نه نزولیند.

نکته ۱۸: اگر در دنباله  $\{a_n\}$  یا  $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$  یا  $a_{n+1} - a_n > 0$  یا  $a'_n \geq 0$  باشد، دنباله صعودی است.

تست ۱۶: دنباله  $u_n = -n^p - pn + p$  چگونه است؟

(۱) صعودی (۲) نزولی (۳) ابتدا صعودی بعد نزولی (۴) ابتدا نزولی بعد صعودی

ب- دنباله های کراندار و بی کران: اگر عدد حقیقی  $a$  طوری باشد که در دنباله ای  $\{a_n\}$  داشته باشیم:  $\forall n \in \mathbb{N} -a \leq a_n \leq a$ ، در این صورت این دنباله کراندار می باشد و کران بالا و پایین آن به ترتیب  $a$  و  $-a$  هستند. در غیر این صورت بی کران می باشد. مثلا دنباله های

$\{(-1)^n\}, \{\sin n\}$  کراندار و دنباله های  $\{n^p - 1\}$  و  $\left\{\frac{-n+p}{p}\right\}$  بی کران هستند (اولی فقط کران پایین و دومی فقط کران بالا دارد).

نکته: دنباله ای  $\{a_n\}$  کراندار است اگر  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  یک عدد حقیقی شود.

تست ۱۷: دنباله  $\left\{\frac{n^p}{n^p + 1}\right\}$  چگونه است؟

(۱) فقط از بالا کراندار (۲) فقط از پایین کراندار (۳) نه کراندار از بالا و نه کراندار از پایین (۴) کراندار

تست ۱۸: کدام دنباله زیر کران بالا و پایین ندارد؟

(۱)  $\left\{\sin \frac{n\pi}{p}\right\}$  (۲)  $\left\{\sin \frac{1}{n}\right\}$  (۳)  $\{p^n\}$  (۴)  $\{n^p (-1)^n\}$

تست ۱۹: کدام گزینه فقط از پایین کراندار است؟

(۱)  $a_n = \cos \frac{\pi}{n+1}$  (۲)  $b_n = \log \frac{1}{n+1}$  (۳)  $c_n = \left[\frac{(-1)^n}{n+1}\right]$  (۴)  $d_n = \frac{n^p}{n+1}$

تست ۲۰: کدام دنباله صعودی و از بالا و پایین کران دار است؟

$$U_n = \left\{ \frac{n^2 + 2}{n^2 + 4} \right\} \quad (۴) \quad U_n = \left\{ \frac{(-1)^n}{n+1} \right\} \quad (۳) \quad U_n = \left\{ \frac{n^2 + 3}{n^2 + 1} \right\} \quad (۲) \quad U_n = \left\{ \sin \frac{n\pi}{2} \right\} \quad (۱)$$

ج- دنباله های همگرا و واگرا: اگر عدد حقیقی  $a$  طوری باشد که در دنباله  $\{a_n\}$  داشته باشیم:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ ، در این صورت این دنباله

همگرا به عدد  $L$  می باشد. در غیر این صورت واگرا می باشد.

مثلا دنباله  $\left\{ \frac{1}{n} \right\}$ ،  $\left\{ \frac{n+p}{n} \right\}$  به ترتیب به اعداد  $0$  و  $1$  همگرا هستند ولی دنباله های  $\{n+p\}$ ،  $\{\sin n\}$ ،  $\{(-1)^n\}$  واگرا هستند.

نکته ۱۹: دنباله های متناوبی نظیر  $\{(-1)^n\}$  چون مدام بین دو یا چند  $\pm 1$  جابه جا می شود واگراست. همچنین در دنباله های نظیر  $\left\{ \frac{n^p + 1}{n} \right\}$

چون  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^p + 1}{n} = \infty$ ، لذا واگرا هستند.

نکته ۲۰: هر دنباله همگرا، کراندار است، ولی عکس این موضوع صحیح نمی باشد. مثلا دنباله  $\left\{ \frac{3n^p - 1}{4n^p + 3n} \right\}$  چون همگرا به عدد  $\frac{3}{4}$  است، لذا

کراندار نیز است، اما دنباله  $\{(-1)^n\}$  با اینکه کراندار است، ولی همگرا نمی باشد.

نکته ۲۱: برای تشخیص همگرایی دنباله های بشکل  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^p + bn^{p-1} + \dots + k}{a'n^q + b'n^{q-1} + \dots + k'}$  داریم:  $\begin{cases} \bullet & p < q \\ & \frac{a}{a'} \\ \bullet & p = q \\ & \frac{a}{a'} \\ \bullet & p > q \\ & \infty \end{cases}$

مثال ۱۲: دنباله  $\left\{ \frac{3}{4n-1} \right\}$  و  $\left\{ \frac{2n}{-3n+5} \right\}$  و  $\left\{ \frac{1-x^3}{x^p + 400} \right\}$  به چه اعدای همگرا هستند؟

نکته ۲۲: داریم:  $\lim_{n \rightarrow \infty} C^n = \begin{cases} \bullet & |C| < 1 \\ & 1 \\ \bullet & C = 1 \\ \bullet & |C| > 1 \\ & \infty \end{cases}$ ، همچنین اگر  $C = -1$ ، دنباله نوسانی واگرا می باشد.

تست ۲۱: دنباله  $\left\{ \left( \frac{5n-3}{3n+1} \right)^n \right\}$  به چه عددی همگراست؟

(۱)  $\frac{5}{3}$  (۲)  $-1$  (۳)  $0$  (۴) واگرا

نکته ۲۳: داریم:  $u \rightarrow 0 \Rightarrow \sin u \sim u, \tan u \sim u, \cos u \sim 1 - \frac{u^2}{2}$

تست ۲۲: دنباله  $\dots a_n = \left\{ \frac{pn^p}{p-qn} \times \sin \frac{p}{n} \right\}$

(۱) واگراست.

(۲) همگرا به  $\frac{p}{4}$

(۳) همگرا به  $-\frac{p}{4}$

(۴) همگرا به  $-\frac{p}{p}$

تست ۲۳: کدام گزینه نزولی و همگرا است؟

(۱)  $v_n = \cos \frac{\pi}{n}$

(۲)  $u_n = \left(\frac{8}{9}\right)^n$

(۳)  $b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

(۴)  $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

نکته ۲۴: داریم:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{an^p + bn + c} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a} \left(n + \frac{b}{pa}\right)$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[p]{an^p + bn^q + cn + d} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[p]{a} \left(n + \frac{b}{pa}\right)$

مثال ۱۳: اگر دنباله  $a_n = \sqrt{n^2 + bn} - n + 4$  همگرا به ۶ باشد،  $b$  کدام است؟

تست ۲۴: دنباله  $\{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\}$  به کدام عدد همگرا است؟

(۱) ۱

(۲) -۱

(۳)  $\frac{1}{p}$

(۴) صفر

نکته ۲۵: اگر  $a > b$  داریم:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n + b^n}{a'^n + b'^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{a'^n}$

(آزاد تجربی - ۸۲)

تست ۲۵: دنباله  $\left\{ \frac{2^{2n+2} + 8^{n+1}}{2^{2n+1} + 8^n} \right\}$

(۱) همگرا به ۲ است.

(۲) همگرا به ۸ است.

(۳) همگرا به ۴ است.

(۴) واگرا است.

"راه حل صحیح موفقیت این است که اشتیاق شما به پیروزی، بیشتر از ترس شما از شکست باشد"

نکته ۲۶: اگر  $n$  عددی طبیعی و  $a > 0, a \neq 1$  و  $b > 0$  و  $c > 1$ ، در حالت کلی داریم:  $n^n > n! > c^n > n^b > \log_a n$

تست ۲۶: کدام یک از دنباله‌های زیر نزولی است؟

$$\left\{ \frac{1}{n!} \right\} \quad (۴) \quad \left\{ \frac{n^2}{n^2+1} \right\} \quad (۳) \quad \left\{ \frac{n!}{3^n} \right\} \quad (۲) \quad \left\{ \frac{3^n}{n!} \right\} \quad (۱)$$

تست ۲۷: کدام دنباله به صفر همگراست؟

$$\left\{ \frac{n^2}{2^n} \right\} \quad (۴) \quad \left\{ \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{4n+1}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{9n+1}} \right\} \quad (۳) \quad \left\{ \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n} \right\} \quad (۲) \quad \left\{ \sqrt{3n+1} - \sqrt{2n-1} \right\} \quad (۱)$$

تست ۲۸: کدام دنباله صعودی و از بالا و پایین کران‌دار است؟

$$U_n = \left\{ \frac{n^2+2}{n^2+4} \right\} \quad (۴) \quad U_n = \left\{ \frac{(-1)^n}{n+1} \right\} \quad (۳) \quad U_n = \left\{ \frac{n^2+2}{n^2+1} \right\} \quad (۲) \quad U_n = \left\{ \sin \frac{n\pi}{2} \right\} \quad (۱)$$

تست ۲۹: کدام یک از دنباله‌های زیر همگراست؟

$$a_n = \left( n + \frac{1}{n} \right)^2 \quad (۴) \quad a_n = \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1} \quad (۳) \quad a_n = \frac{(-1)^n}{2} \quad (۲) \quad a_n = \frac{n^2}{2n+1} \quad (۱)$$

تست ۳۰: دنباله  $a_n = \left\{ \left[ 3 - \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right] \right\}$  از نظر همگرایی چگونه است؟ ( [ ] نماد جزء صحیح است.)

(۱) همگرا به صفر (۲) همگرا به ۲ (۳) همگرا به ۳ (۴) واگرا

تست ۱۳: - کدام یک از دنباله های زیر همگرا است؟

$$a_n = \frac{2n}{n^2 + 17} \quad (4)$$

$$a_n = \left(n + \frac{1}{n}\right)^n \quad (3)$$

$$a_n = \sin \frac{n\pi}{2} \quad (2)$$

$$a_n = 2(-1)^n \quad (1)$$

## تست های کنکور

### دنباله های عددی

تست ۱:

مجموع تمام اعداد طبیعی بخش پذیر بر ۶ بین دو عدد ۱۰۰ و ۲۰۰ کدام است؟

۲۵۵۰ (۴)

۲۵۲۰ (۳)

۲۴۵۰ (۲)

۲۴۲۰ (۱)

(سراسری ۸۱)

تست ۲:

در یک تصاعد عددی جمله پنجم برابر ۳ و هر جمله از جمله ما قبل خود به اندازه  $\frac{1}{4}$  کمتر است مجموع ۱۰ جمله اول

آن کدام است؟

۳۰ (۴)

$27/5$  (۳)

۲۵ (۲)

$22/5$  (۱)

(سراسری ۸۲)

تست ۳:

مجموع اعداد طبیعی فرد، بخش پذیر بر ۳ و کوچکتر از ۱۰۱، کدام است؟

۸۸۴ (۴)

۸۶۷ (۳)

۸۵۲ (۲)

۸۱۶ (۱)

(سراسری ۸۵)

تست ۴:

- در یک تصاعد عددی، جملات سوم، هفتم و نهم، می توانند سه جمله متوالی از تصاعد هندسی باشند. چندمین جمله این تصاعد، صفر است؟

12 (4)

11 (3)

10 (2)

9 (1)

(سراسری ۸۸)

جملات دوم و پنجم و دوازدهم از یک دنباله حسابی، می توانند سه جمله متوالی از دنباله هندسی باشند، قدرنسبت دنباله هندسی کدام

تست ۵:

است؟

(سراسری ۹۲)

$\frac{7}{3}$  (۴)

$\frac{9}{4}$  (۳)

$\frac{7}{4}$  (۲)

$\frac{5}{3}$  (۱)

مجموع  $n$  جمله اول از یک تصاعد عددی به صورت  $S_n = \frac{n(n-3)}{4}$  است. مجموع جملاتی از این تصاعد که از جمله

تست ۶:

بیست و پنجم شروع و به جمله سی و پنجم ختم شوند، کدام است؟

(فرا ۸۹)

۱۰۴ (۴)

۱۴۸ (۳)

۱۴۰ (۲)

۱۳۲ (۱)

در یک دنباله حسابی، مجموع ۵ جمله اول آن،  $\frac{1}{3}$  مجموع پنج جمله بعدی است. جمله دوم چند برابر جمله اول است؟

تست ۷:

(فا ۹۱)

۴ (۴)

۳ (۳)

$\frac{5}{2}$  (۲)

$\frac{3}{2}$  (۱)

## دنباله های هندسی

در یک تصاعد عددی جمله  $n$ ام به صورت  $a_n = \frac{3}{4}n - 5$  است. مجموع ۱۵ جمله اول این تصاعد کدام است؟

تست ۸:

(سراسری ۸۹)

۱۳۵ (۴)

۱۲۰ (۳)

۱۰۵ (۲)

۹۰ (۱)

- در یک تصاعد هندسی مجموع سه جمله متوالی ۱۹ و حاصل ضرب آن ها ۲۱۶ می باشد. تفاضل کوچک ترین و بزرگ ترین این سه

تست ۹:

عدد کدام است؟

(سراسری ۹۰)

۷ (۴)

۶ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)

به ازای یک مقدار  $x$ ، اعداد  $x^2 - 2$ ،  $2x$ ،  $x^2 + 4$ ، به ترتیب سه جمله اول از دنباله هندسی نزولی اند. مجموع هفت جمله اول این دنباله، کدام است؟

تست ۱۰:

(سراسری ۹۳)

$\frac{127}{8}$  (۴)

$\frac{63}{4}$  (۳)

$\frac{125}{16}$  (۲)

$\frac{117}{16}$  (۱)

				<b>تست ۱۱:</b>
				در دنباله‌ی هندسی $1, 2, 4, \dots$ ، مجموع چهارده جمله‌ی اول، چند برابر مجموع هفت جمله‌ی اول آن است؟
۱۲۹ (۴)	۱۲۷ (۳)	۶۳ (۲)	۶۵ (۱)	(۹۰ج)

				<b>تست ۱۲:</b>
				در یک دنباله هندسی، جمله‌ی دوم و دو برابر جمله‌ی پنجم و جمله‌ی هشتم می‌توانند سه جمله‌ی متوالی از یک دنباله‌ی حسابی باشند، بزرگ‌ترین این سه عدد چند برابر کوچک‌ترین آن‌ها است؟
$7 + 4\sqrt{3}$ (۴)	$5 + 4\sqrt{3}$ (۳)	$5 + 2\sqrt{3}$ (۲)	$2 + \sqrt{3}$ (۱)	(۹۲ج)

				<b>تست ۱۳:</b>
				به ازای یک مقدار $x$ ، اعداد $x, 8 - x, x + 12$ ، به ترتیب سه جمله اول دنباله هندسی نزولی‌اند. حد مجموع جملات این دنباله، کدام است؟
۲۷ (۴)	۲۴ (۳)	۲۱ (۲)	۱۸ (۱)	(۹۳ج)

### دنباله‌های صعودی نزولی و...

				<b>تست ۱۴:</b>
				اگر $U_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n}$ ، آنگاه دنباله با جمله عمومی $U_n$ چگونه است؟
بی‌کران - نزولی (۴)	بی‌کران - صعودی (۳)	کراندار - نزولی (۲)	کراندار - صعودی (۱)	(سراسری ۸۳)

				<b>تست ۱۵:</b>
				دنباله‌ی $u_n = n \left(\frac{2}{3}\right)^n$ برای $n \geq 2$ چه نوع دنباله‌ای است؟
(۲) نزولی - کراندار از بالا و پایین	(۱) صعودی - کراندار از بالا و پایین	(۴) نزولی - فقط از بالا کراندار	(۳) صعودی - فقط از پایین کراندار	(سراسری ۸۴)



**تست ۱۶:** اگر  $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ ،  $(n)$  عدد طبیعی است) آن گاه دنباله جزء صحیح  $a_n$  چگونه است؟

- (سراسری ۸۵) (۱) صعودی- کران دار از بالا  
(۲) نزولی- کران دار از پایین  
(۳) فاقد کران بالا و پایین  
(۴) نه صعودی، نه نزولی- کران دار

**تست ۱۷:** کدام دنباله‌ی زیر، از بالا کران دار است ولی از پایین کران دار نیست؟

(سراسری ۸۶) (۱)  $U_n = \text{Log} \frac{1}{n}$  (۲)  $U_n = \text{Sin} \frac{\pi}{n}$  (۳)  $U_n = \text{Cotg} \frac{\pi}{n}$  (۴)  $U_n = \text{Cos} \frac{n\pi}{n}$

**تست ۱۸:** کوچک ترین کران بالای دنباله با جمله‌ی عمومی  $U_n = \frac{3n^2 - 2n}{4n^2 + 5}$ ، کدام است؟

(سراسری ۸۷) (۱)  $\frac{1}{4}$  (۲)  $\frac{1}{6}$  (۳)  $\frac{3}{5}$  (۴)  $\frac{3}{4}$

**تست ۱۹:** دنباله‌ای، با کدام جمله‌ی عمومی، هم گرا است؟

(سراسری ۸۹) (۱)  $u_n = \left[ \frac{(-1)^n}{n} \right]$  (۲)  $b_n = \text{Log} \frac{1}{n}$  (۳)  $a_n = \text{Sin} \frac{\pi}{n}$  (۴)  $v_n = \frac{n^2 - 1}{2n + 1}$

**تست ۲۰:** کدام یک از دنباله‌های زیر صعودی و همگرا است؟

(سراسری ۹۱) (۱)  $U_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$  (۲)  $U_n = \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}}$  (۳)  $U_n = \left[ \frac{(-1)^n}{n} \right]$  (۴)  $U_n = \frac{2n+1}{n}$

تست ۲۱:

بزرگ‌ترین کران پایین دنباله با جمله عمومی  $U_n = \frac{2n^2 + 3}{n^2 + 1}$ ، کدام است؟

(۸۹) (۵)

(۱) ۱/۵

(۲) ۲

(۳) ۲/۵

(۴) ۳

تست ۲۲:

اعداد طبیعی فرد را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم، که تعداد جملات هر دسته، برابر شماره‌ی آن دسته باشد. ... (۱، ۳، ۵)، (۷، ۹، ۱۱)، ...

(تجربی) (۹۴)

مجموع دو جمله‌ی اول و آخر دسته سی‌ام کدام است؟

(۱) ۱۷۰۰

(۲) ۱۷۵۰

(۳) ۱۸۰۰

(۴) ۱۸۵۰

تست ۲۳:

دنباله‌ای با جمله عمومی  $a_n = \frac{1 + 3^n}{5 + 3^{n-1}}$ ، چگونه است؟

(۹۴) (۵)

(۱) بی‌کران - صعودی

(۲) کراندار - صعودی

(۳) کراندار - نزولی

(۴) بی‌کران - نزولی

## تمرینات کتاب

- ۱- مجموع همه عددهای طبیعی مضرب ۷ و کوچکتر از ۱۰۰۰ را به دست آورید.
- ۲- در یک دنباله حسابی جمله پنجم ۱۹- و جمله دهم ۳۱ است. مجموع بیست جمله ابتدای این دنباله را به دست آورید.
- ۳- دنباله ای حسابی مشخص کنید که جمله اول آن ۲- بوده و مجموع پنج جمله اول آن، یک سوم مجموع پنج جمله بعدی باشد.
- ۴- نشان دهید  $1+3+5+\dots+(2n-1)=n^2$ .
- ۵- مجموع شش جمله ابتدای یک دنباله هندسی ۹ برابر مجموع سه جمله ابتدای آن دنباله است. قدر نسبت این دنباله را بیابید.
- ۶- احمد می خواهد پول های خود را پس انداز کند. او روز اول ۱۰۰۰ تومان در صندوق خود قرار می دهد و قرار می گذارد هر روز  $9/99$  پول واریزی روز قبل را به صندوق اضافه کند. پس از  $20^\circ$  روز او چقدر پول در صندوق خواهد داشت؟ نشان دهید پول صندوق او هیچگاه از ۱۰۰,۰۰۰ تومان بیشتر نخواهد شد.
- ۷- برای محافظت از تابش های مضر مواد رادیواکتیو لایه های محافظتی ساخته شده است که شدت تابش ها پس از عبور از آنها نصف می شود. حداقل از چند لایه باید استفاده کنیم تا شدت تابش ۹۷ درصد کاهش یابد؟
- ۸- با استفاده از دستور محاسبه مجموع جملات دنباله هندسی، درستی اتحاد های زیر را نشان دهید.

$$\text{الف) } x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)$$

$$\text{ب) } x^n + 1 = (x+1)(x^{n-1} - x^{n-2} + \dots - x + 1)$$

۹- با استفاده از اتحاد (الف) در مسئله قبل درستی اتحاد زیر را نشان دهید.

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2} \cdot b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

۱- بررسی کنید از دنباله‌های زیر کدام صعودی، کدام نزولی و کدام نه صعودی‌اند و نه نزولی‌اند.

الف)  $u_n = (-1)^{n+1}$

ب)  $u_n = 3^{n-1}$

ج)  $u_n = \frac{1}{n^2 + 1}$

د)  $u_n = \frac{n^2}{2^n}$

ه)  $u_n = \frac{3^n}{n^3}$

و)  $u_n = \frac{n(n+1)}{2}$

۲- دنباله‌ای مثال بزنید که هم صعودی باشد و هم نزولی.

۳- دو دنباله مثال بزنید که از بالا کراندار بوده ولی از پایین کراندار نباشند.

۴- دو دنباله مثال بزنید که از پایین کراندار بوده ولی از بالا کراندار نباشند.

۵- دو دنباله کراندار مثال بزنید.

۶- دو دنباله مثال بزنید که نه از بالا کراندار باشد و نه از پایین.

۷- با استفاده از ماشین حساب ده جمله نخست دنباله  $e_n = (1 + \frac{1}{n})^n$  را محاسبه کنید. آیا این

دنباله کراندار است؟ (حدس بزنید)

۸- پنج جمله نخست دنباله‌ای که جمله عمومی آن  $u_n = (1 - \frac{1}{n})^n$  است را محاسبه کنید. آیا

این دنباله کراندار است؟

## فصل دوم (بخش دوم: توابع، معادلات، نامعادلات)

بخش دوم: توابع، معادلات و نامعادلات

## ۱) مفاهیم اولیه تابع:

تعریف: به صورت ساده تابع مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب است به طوری که هیچ دو زوجی مؤلفه‌ی اول برابر نداشته باشد. هر تابع از سه جزء

دامنه، هم‌دامنه و ضابطه تشکیل شده است. به طور مثال در تابع  $f: A \rightarrow B$  مجموعه‌ی  $A$  دامنه و مجموعه‌ی  $B$  هم‌دامنه و  $f(x) = 2x + 1$  ضابطه‌ی تابع نامیده می‌شود.

$$f(x) = 2x + 1$$

نکته: برای مناسبی مقدار تابع در نقطه‌ی دلفواه  $a$  از دامنه‌ی تابع، کافی است بجای تمام متغیرهای  $x$  در تابع مفروض، مقدار  $a$  را قرار دهیم.

$$f(0) = \quad , f(-1) = \quad \text{مثال ۱: اگر } f(x) = 3x^2 - 1 \text{ باشد، مطلوب است:}$$

$$g(-2) = \quad , g\left(\frac{1}{2}\right) = \quad \text{مثال ۲: اگر } g(x) = x^2 - 7x \text{ باشد، مطلوب است:}$$

بررسی تابع بودن یک رابطه: معمولاً روابطی که در آن‌ها  $|y|$  یا  $y^2$  موجود باشد تابع نیستند. برای اثبات تابع بودن یک رابطه کافیست نشان دهیم اگر  $x_1 = x_2$  آن گاه  $y_1 = y_2$  (و یا به طور معادل نشان دهیم  $x_1 \neq x_2 \Rightarrow y_1 \neq y_2$ ). همچنین برای اثبات تابع نبودن یک رابطه از مثال نقض استفاده می‌کنیم.

$$\text{مثال ۳: تابع بودن یا تابع نبودن روابط مقابل را بیابید.} \quad \text{a) } |y| = 3x + 2, \quad \text{b) } y^2 = x - 2, \quad \text{c) } y = 5x - 2$$

تست ۱: رابطه‌ی  $\{(3, m^2), (2, 1), (-2, m), (3, m+2), (m, 4)\}$  به ازای کدام مقدار  $m$  یک تابع است؟

$$-2 \quad (1) \quad -1 \quad (2) \quad 2 \quad (3) \quad 4 \quad \text{هیچ مقدار } m \quad (4)$$

تعریف: اگر دو تابع  $f$  و  $g$  را داشته باشیم، به معادله  $f(x) = g(x)$  معادله تقاطع این دو تابع می‌گوییم.وضع دو تابع نسبت به یکدیگر: دو تابع  $f$  و  $g$  بر هم مماس‌اند، اگر دلتای معادله تقاطع صفر باشد و دو تابع متقاطعند اگر دلتای معادله تقاطع مثبت باشد. همچنین دو تابع یکدیگر را قطع نمی‌کنند اگر دلتای معادله تقاطع منفی باشد.تست ۲: خط به معادله  $y = mx + 4$  با منحنی  $y = -x^2 + 2x$  نقطه اشتراکی ندارد، مجموعه مقادیر  $m$  کدام است؟

$$\text{الف) } m < 0 \quad \text{ب) } m > 4 \quad \text{ج) } -1 < m < 4 \quad \text{د) } -2 < m < 4$$

((امام علی(ع): قدر هر کس به اندازه همت او است))

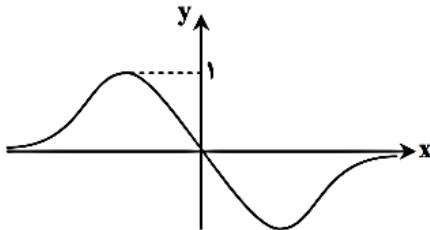
تست ۳: به ازای کدام مقدار  $m$  نمودار تابع  $y = 2x^2 + (m+1)x + m + 6$  بر نیمساز ناحیه اول محورهای مختصات، مماس است؟

- سراسری ۹۴ (۱) -۴ (۲) -۱۲, ۴ (۳) ۱۲, -۴ (۴) ۱۲ (۴)

تست ۴: به ازای کدام مقدار  $m$  نمودار تابع  $y = x(px + m - 1) + 1$  مماس بر محور  $x$  است؟

- سینش ۱۸۷ (۱)  $1 \pm \sqrt{p}$  (۲)  $1 \pm p\sqrt{p}$  (۳)  $\sqrt{p} \pm 1$  (۴)  $p\sqrt{p} \pm 1$

تست ۵: اگر نمودار تابع  $f(x) = \frac{ax+b}{x^2+9}$  به شکل مقابل باشد، مقدار  $a$  کدام است؟



- (۱) ۶  
(۲) ۹  
(۳) -۶  
(۴) -۹

نکته ۲: به کمک تغییر متغیر می‌توانیم مسایلی نظیر تست‌های زیر را حل کنیم.

تست ۶: اگر  $f(1-x) = x^2 - 4x + 5$  آن‌گاه  $f(x-3)$  کدام است؟

- تجربی ۹۰ (۱)  $x^2 + 4x + 5$  (۲)  $x^2 + 4$  (۳)  $x^2 - 4x + 5$  (۴)  $x^2 + 4x - 5$

تست ۷: اگر  $f(x-1) = x^3 - 9x$ ، آن‌گاه ضابطه‌ی  $f(2-x)$  فاقد کدام جمله است؟

- (۱)  $-18x$  (۲)  $-x^3$  (۳)  $9x^2$  (۴)  $27$

((ذهن همه چیز است. به هر چیزی فکر کنید همان می‌شوید))

۲) تعیین علامت چند جمله‌ای‌ها:

الف) چند جمله‌ای درجه‌ی اول:  $(P = ax + b)$

می‌دانیم ریشه‌ی این چند جمله‌ای  $\frac{-b}{a}$  است. جدول تعیین علامت این چند

x	$-\frac{b}{a}$	
<b>P</b>	مخالف علامت a	موافق علامت a

جمله‌ای به صورت مقابل است:

ب) چند جمله‌ای درجه‌ی دوم:  $(P = ax^2 + bx + c)$

بر اساس تعداد ریشه‌های این عبارت، سه حالت زیر را داریم:

حالت اول: اگر عبارت دو ریشه‌ی  $x_1$  و  $x_2$  که  $x_1 < x_2$  داشته باشد ( $\Delta > 0$ ).

x	$x_1$	$x_2$	
<b>P</b>	موافق علامت a	مخالف علامت a	موافق علامت a

دارای جدول مقابل خواهد بود:

حالت دوم: اگر عبارت دارای ریشه مضاعف  $x_1$  باشد، مقدار عبارت در این نقطه صفر و در سایر نقاط هم علامت موافق علامت a است.

x	$x_1$	
<b>P</b>	موافق علامت a	موافق علامت a

حالت سوم: اگر عبارت دارای ریشه حقیقی نباشد، علامت عبارت همواره موافق علامت a است.

x	
<b>P</b>	همواره موافق علامت a

مثال ۴: نامعادلات زیر را حل کنید.

a)  $x^2 - 9 < 0$


b)  $\frac{x^2 + 5x}{x + 2} \geq 0$


نکته ۳: در حالت کلی داریم:  $x^2 \leq a^2 \Leftrightarrow -a \leq x \leq +a$  ,  $x^2 \geq a^2 \Leftrightarrow (x \geq a \vee x \leq -a)$

مثال ۵: نامعادله مقابل را حل کنید.

$$x^p - 14 > 0 \Rightarrow$$

$$4x^p - 20 \leq 100 \Rightarrow$$

۳) انواع توابع:

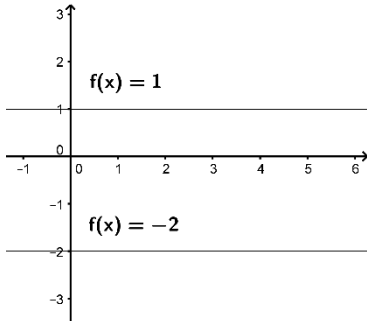
الف) توابع ثابت: تابعی است که هر عضو دامنه را به یک عضو ثابت از برد می‌برد. شکل کلی این

$$f: A \rightarrow B$$

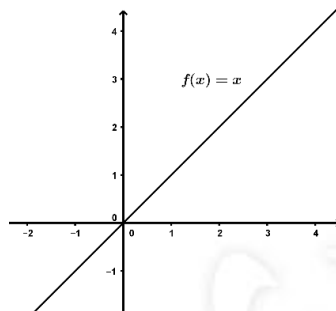
تابع به صورت مقابل است:

$$f(x) = a$$

دامنه‌ی این توابع همگی اعداد مقیقی است و نمودار این توابع به شکل خطهای افقی هستند.



صورت:  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
است.  $f(x) = x$



ب) تابع همانی: تابعی که هر از از دامنه را به خودش

می‌برد (نیمساز ربع اول و سوم). شکل کلی تابع همانی به

پ) توابع قدر مطلق: می‌دانیم تابع قدر مطلق هر عدد منفی را به مثبت تبدیل می‌کند و اعداد مثبت را تغییر نمی‌دهد. پس داریم:

$$|u| = \begin{cases} u & u \geq 0 \\ -u & u < 0 \end{cases}$$

رسم توابع قدر مطلق: برای رسم توابع قدر مطلق که ضابطه‌ی آنها به صورت کلی  $f(x) = |x - a| + b$  است، ابتدا تابع  $f(x) = |x|$  را رسم

می‌کنیم و سپس تابع را با توجه به علامت اعداد  $a$  و  $b$  ابتدا  $a$  واحد به سمت راست یا چپ و سپس  $b$  واحد به سمت بالا یا پایین منتقل می‌کنیم.

مثال ۶: توابع  $y = -|x + 1|$  و  $y = |x| - 2$  و  $y = |x + 2| + 1$  را رسم کنید.

نکته ۴: در حالت کلی داریم:  $|x| = c \Rightarrow x = \pm c$ ، از این موضوع برای حل این معادلات استفاده می‌کنیم.

مثال ۷: مجموعه جواب معادلات زیر را بیابید.

$$2|x - 5| = 8$$



$$|3x - 4| = 2|x|$$

$$|x - 10| - 4 = 2$$

$$|3 + |x - 1|| = 4$$

نکته ۵: در حالت کلی داریم:  $|x| \geq c \Rightarrow x \leq -c \vee x \geq c$  ,  $|x| \leq c \Rightarrow -c \leq x \leq c$  , از این موضوع برای حل این نامعادلات استفاده می‌کنیم.

مثال ۸: مجموعه جواب نامعادلات زیر را بیابید.

$$|x - 4| > 1$$

$$2|x + 1| - 4 \leq 0$$

$$|2x + 3| < 2$$

$$\left| \frac{3x + 1}{4} \right| > 2$$

تست ۸: معادله  $|x^2 - 1| + |x + 1| = 0$  چند جواب دارد؟

- (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بیشمار

تست ۹: مجموعه جواب معادله  $|x - 3| + x = 3$  کدام است؟

- (۱)  $[0, 3]$  (۲)  $[3, \infty)$  (۳)  $(-\infty, 3]$  (۴)  $\emptyset$

(امام علی(ع): غفلت آدمی را همین بس که همتش را در آنچه به کارش نمی‌آید، صرف کند.)

تست ۱۰: مجموعه جواب معادله  $\frac{x-2}{x-3} = \frac{2-x}{x-3}$  کدام است؟

(۱۴)  $[0, 3)$

(۱۳)  $[2, 3)$

(۱۲)  $(2, 4)$

(۱)  $(2, 3)$

تست ۱۱: مجموعه جواب نامعادله  $2x - |x-1| > 8$  کدام است؟

(۱۴)  $\{x \mid x > 9 \text{ یا } x < 1\}$

(۱۳)  $\{x \mid x > 7 \text{ یا } x < 1\}$

(۱۲)  $\{x \mid x > 9\}$

(۱)  $\{x \mid x > 7\}$

تست ۱۲: مجموعه جواب نامعادله  $x^2 - 3|x| - 4 < 0$  کدام است؟

(۱۴)  $\{x \mid -2 < x < 2\}$

(۱۳)  $\{x \mid -3 < x < 3\}$

(۱۲)  $\{x \mid -4 < x < 4\}$

(۱)  $\{x \mid x < -4 \text{ یا } x > 4\}$

تست ۱۳: مجموعه جواب نامعادله  $|x| + |3x-1| \leq 5$  شامل چند عدد صحیح است؟

(۱۴) ۳

(۱۳) ۲

(۱۲) ۱

(۱) ۰

تست ۱۴: کمترین مقدار تابع  $f(x) = |2x+5| + 2|x-1|$  کدام است؟

(۱۴) ۸

(۱۳) ۴

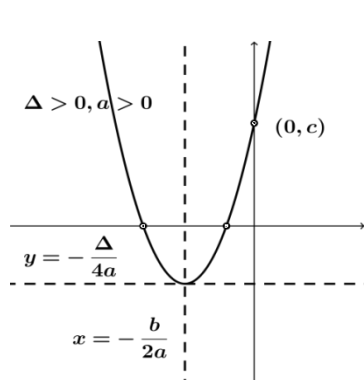
(۱۲) ۷

(۱) ۶

ت) توابع چند جمله‌ای: ساده‌ترین شکل این نوع توابع به صورت  $f(x) = ax^p + bx + c$  است. که به سهمی مشهور هستند. دامنه‌ی توابع چند جمله‌ای همه اعداد حقیقی است.

رسم توابع درجه دوم: برای رسم توابع درجه دومی که ضابطه‌ی آن‌ها به صورت کلی  $f(x) = (x - \alpha)^p + \beta$  است، ابتدا تابع  $f(x) = x^p$  را رسم می‌کنیم و سپس تابع را با توجه به علامت اعداد  $\alpha$  و  $\beta$  ابتدا  $\alpha$  واحد به سمت راست یا چپ و سپس  $\beta$  واحد به سمت بالا یا پایین منتقل می‌کنیم.

مثال ۹: نمودار توابع  $f(x) = -(x - 2)^p$ ,  $f(x) = x^p + 1$ ,  $f(x) = (x + 1)^p - 3$  را رسم کنید.



نکته ۶: راس سهمی‌هایی که به شکل گسترده  $y = ax^p + bx + c$  باشند، نقطه  $(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$  است که در محل تلاقی خط  $x = -\frac{b}{2a}$  (محور تقارن) و  $y = -\frac{\Delta}{4a}$  (مماس افقی) قرار دارد. اگر  $a > 0$  دهانه سهمی به سمت بالا و اگر  $a < 0$  به سمت پایین باز می‌شود. محل تقاطع سهمی با محور  $y$  ها نقطه  $(0, c)$  است.

مثال ۱۰: توابع  $y = x^p - 4x + 1$  و  $y = -x^p - x + 2$  را رسم کنید. کمترین یا بیشترین مقدار هرکدام را نیز بیابید.

نکته ۷: اگر در توابع درجه دوم  $\Delta < 0$ ، تابع بالای محور  $x$  هاست اگر  $a > 0$  و تابع پایین محور  $x$  هاست اگر  $a < 0$ . همچنین اگر  $\Delta = 0$ ، تابع بر محور  $x$  ها مماس است.

تست ۱۵: ممدوده  $a$  کدام باشد تا نمودار تابع  $y = x^p + 2ax + 1$  بالای محور  $x$  ها قرار گیرد؟

- ۱)  $a > -1$       ۲)  $a < 1$       ۳)  $a < -1$       ۴)  $-1 < a < 1$

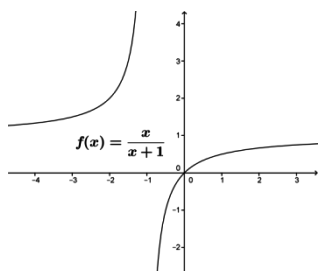
**نکته ۸:** اگر در توابع درجه دوم  $\Delta > 0$  و  $\frac{c}{a} < 0$  (معادله دو ریشه غیر هم‌علامت داشته باشد)، تابع از چهار نامیه می‌گذرد. ولی اگر  $\Delta > 0$  و  $\frac{c}{a} > 0$  (معادله دو ریشه هم‌علامت داشته باشد)، بسته به علامت  $a$  و علامت مجموع ریشه‌ها یعنی  $-\frac{b}{a}$ ، تابع فقط از یکی از نامیه‌ها نمی‌گذرد.

**تست ۶:** به ازای کدام مقدار  $m$  نمودار تابع  $y = (1-m)x^p + x + m - p$  از چهار نامیه محورهای مختصات گذشته و دارای ماکزیمم است؟

- تجربی ۷۵ (۱)  $m < 1$  (۲)  $m > p$  (۳)  $1 < m < p$  (۴)  $-1 < m < p$

**تست ۷:** اگر نمودار تابع  $y = x^p + bx + c$  فقط از نامیه چهارم نگذرد، آنگاه:

- تجربی ۷۴ (۱)  $c \geq 0, b > 0$  (۲)  $c \leq 0, b > 0$  (۳)  $c \geq 0, b < 0$  (۴)  $c \leq 0, b < 0$



**ث) توابع گویا:** این توابع به صورت کسری هستند که صورت و مخرج آن‌ها چندجمله‌ای است. نظیر:

$$f(x) = \frac{x}{x+1}$$

نمودار این توابع در فصل مشتق بررسی می‌شود.

**نکته ۹:** دامنه توابع رادیکالی به صورت مقابل است.  $D = \mathbb{R} - \{ \text{ریشه‌های مخرج} \}$

**مثال ۱۱:** دامنه‌ی تابع  $f(x) = \frac{x+1}{x^p - 4x}$  را بیابید.

**نکته ۱۰:** برای حل معادلات و نامعادلات گویا (کسری) از مخرج مشترک استفاده می‌کنیم، جواب‌هایی مورد قبول هستند که در صورت مساله صدق کنند.

**تست ۱۸:** 'مجموع ریشه‌های معادله‌ی  $\frac{x+2}{x-2} + \frac{x-2}{x+2} = \frac{5}{2}$  کدام است؟'

- (۱) ۱۲ (۲) ۶ (۳) -۶ (۴) صفر

((امام مسن(ع): با عزم و اراده به جنگ سستی بروید.))

تست ۱۹: - معادله  $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2}$  دارای چند ریشه حقیقی است؟

- ۴ (۱)      ۲ (۲)      ۱ (۳)      ۴ (۴) ریشه حقیقی ندارد.

تست ۲۰: - مجموع ریشه‌های معادله  $\frac{3x+2}{2x-1} = \frac{5x-2}{3x-3}$  کدام است؟

- ۴ (۱)      ۴ (۲)      ۶ (۳)      -۶ (۴)

تست ۲۱: - اگر اشتراک مجموعه جواب نامعادلات  $\frac{3-2x}{4} \leq 1$  و  $\frac{2x-1}{3} \leq 2$  به صورت بازه  $[a, b]$  شود، حاصل  $a+b$  کدام است؟

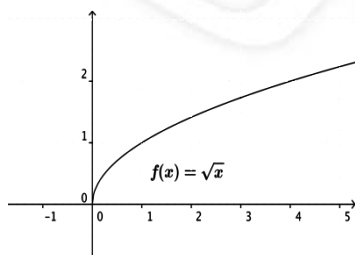
- ۴ (۱)      ۳ (۲)      -۳ (۳)      -۴ (۴)

تست ۲۲: - مجموعه جواب نامعادله  $\frac{2x-1}{x} < 1$  کدام است؟

- (۱, ∞) (۱)      (۰, ۱) (۲)      (-∞, ۰) (۳)      (-∞, ۰) ∪ (۱, +∞) (۴)

۷) توابع رادیکالی: ساده‌ترین شکل توابع رادیکالی  $f(x) = \sqrt{x}$  است که به هر عضو از دامنه جذرش را

نسبت می‌دهد.



(رسم تابع رادیکالی: برای رسم توابع رادیکالی که ضابطه‌ی آنها به صورت کلی  $f(x) = \sqrt{x-a} + b$

است، ابتدا تابع  $f(x) = \sqrt{x}$  (رسم می‌کنیم و سپس تابع را با توجه به علامت اعداد  $a$  و  $b$  ابتدا

وآمد به سمت راست یا چپ و سپس  $b$  وآمد به سمت بالا یا پایین منتقل می‌کنیم.

مثال ۱۲: توابع  $f(x) = \sqrt{x} - 1$  و  $g(x) = \sqrt{x+3} + 1$  را رسم کنید.

نکته ۱۱: با توجه به اینکه زیر رادیکال‌های با فرجه زوج لزوماً باید مثبت باشد، دامنه‌ی این توابع بدست می‌آید.

مثال ۱۳: دامنه توابع زیر را بیابید.

- a)  $f(x) = \sqrt{3x-1}$   
 b)  $g(x) = \sqrt[3]{x^p} + 5x$   
 c)  $h(x) = \frac{1-x^p}{\sqrt{x^p-3x}}$

d)  $k(x) = \sqrt{\frac{x+3}{4-x}}$


تست ۲۳: دامنه تابع  $y = \sqrt{4-\sqrt{1-2x}}$  شامل چند عدد صحیح است؟

- ۸ (۴)      ۹ (۳)      ۷ (۲)      ۶ (۱)

تست ۲۴: دامنه تابع  $y = \sqrt{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+3}}$  کدام است؟

- $\phi$  (۴)       $[-3, -1]$  (۳)       $[-3, \infty)$  (۲)       $[-1, \infty)$  (۱)

((امام صادق(ع): از تنبلی و بی هوصلگی بپرهیز، زیرا که این دو فصلت تو را از بهره دنیا و آفت باز می دارند.))

تست ۲۵:  $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$  دامنه‌ی تابع  $f(3-x)$  کدام است؟

(۴)  $[1, 3]$

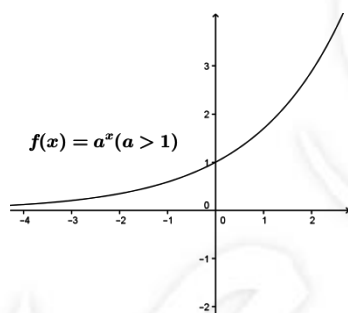
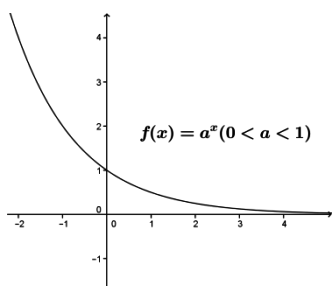
(۳)  $[0, 2]$

(۲)  $[0, 3]$

(۱)  $[0, 2]$

نکته ۱۲: برای حل معادلات رادیکالی، کافی است طرفین معادله را به توان دو برسانیم تا جواب معادله بدست آید. جواب حاصل در صورتی مورد قبول است که معادله اولیه صدق کند.

مثال ۱۴: معادلات زیر را حل کنید.  $\sqrt{1-x} + \sqrt{x} = 1$  و  $\sqrt{x-2} - 2 = 1$ .



توابع نمایی: شکل کلی این توابع به صورت  $f(x) = a^x$  است که در آن  $a$  یک عدد حقیقی مثبت است. دامنه این تابع همه اعداد حقیقی و برد آن اعداد حقیقی مثبت است. نمودار این توابع بر اساس مقدار  $a$  به صورت زیر است:

رسم توابع نمایی: واضح است که تمامی این توابع از نقطه  $(0, 1)$  عبور می کنند. کافیست برای رسم چند نقطه‌ی کمی دیگر نیز در نظر بگیریم.

مثال ۱۵: توابع  $f(x) = 3^x$  و  $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$  را رسم کنید.

تست ۲۶: معادله  $4^x - 2^{x+1} + 1 = 0$  چند ریشه دارد؟

(۴) ۱

(۳) ۲

(۲) صفر

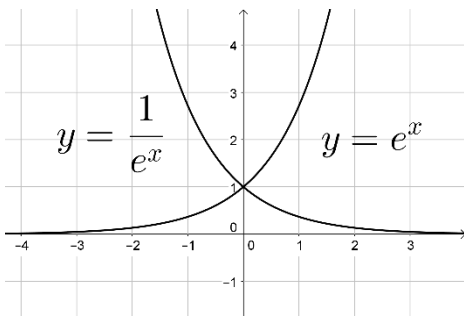
(۱) بیشمار

تست ۲۷: معادله  $9^x + 6^x = 2 \times 4^x$  چند ریشه دارد؟

- ۱) صفر      ۲) ۱      ۳) ۲      ۴) ۳

تست ۲۸: فاصله نقطه تلاقی دو منحنی به معادلات  $y = 2^x$  و  $y = (\sqrt{2})^{x+1} + 4$ ، از نقطه  $A(0, 4)$ ، کدام است؟

- ۱) ۲      ۲) ۳      ۳) ۴      ۴) ۵



نکته ۱۳: عدد "نپر" که با حرف e نشان داده می‌شود عددی گنگ است که تقریباً برابر ۲/۷ می‌باشد. این عدد در ریاضیات کاربرد زیادی دارد. نمودار توابع نمایی  $y = e^x$  و  $y = \left(\frac{1}{e}\right)^x$  به صورت مقابل است:

توابع لگاریتمی: معکوس تابع نمایی هستند و به شکل  $f(x) = \log_a x$  نوشته می‌شوند.

که در آن x یک عدد حقیقی مثبت و a یک عدد حقیقی مثبت مخالف عدد ۱ است. و داریم:  $y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x$ .

مثال ۱۶: مقدار  $\log_a a$  و  $\log_{10} 100$  را بیابید.

قوانین لگاریتم ها:

- |   |                                       |  |
|---|---------------------------------------|--|
| $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ .۳ | $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ .۲  | $\log_a x^n = n \log_a x$ .۱             |
| $\log_a a = 1$ .۷                             | $a^{\log_a x} = x$ .۶                 | $\log_{a^m} x = \frac{1}{m} \log_a x$ .۴ |
| $\log \frac{1}{x} = -\log x$ .۱۰              | $\log_y x = \frac{\log x}{\log y}$ .۹ | $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$ .۸       |

مثال ۱۷: معادله زیر را حل کنید.

$$\log_a (x + 3) + \log_a x = \log_a 4$$



((امام علی(ع): هرگاه تصمیم و دور اندیشی قرین هم شوند، خوشبختی کامل شود.))

مثال ۱۸: حاصل را بیابید.

$$\log 1000 =$$

$$\log_{10} 1000 =$$

$$\log 200 + \log 50 =$$

$$\log 500 - \log 5 =$$

تست ۲۹: اگر  $\log_p 12 = \alpha$ ، عدد  $4^{\alpha-2}$  کدام است؟ (فراچ ۸۶)

- ۱)  $\frac{9}{2}$       ۲) ۶      ۳) ۹      ۴) ۱۸

تست ۳۰: اگر  $\log_{14} N = \frac{3}{p}$  باشد،  $N$  کدام است؟

- ۱)  $\frac{1}{8}$       ۲) ۸      ۳) ۳۲      ۴) ۶۴

تست ۳۱: به عدد ۳۰۱ چند وامد اضافه کنیم تا لگاریتم عدد حاصل در مبنای ۸ عدد ۳ گردد؟

- ۱) ۱۰۳      ۲) ۱۱۲      ۳) ۲۱۱      ۴) ۳۰۱

تست ۳۲: از دو معادله  $\log_p^x = 1 + \log_p^{(y+1)}$  و  $x^2 - y^2 = 32$  مقدار لگاریتم  $(x+y)$  در پایه ۴، کدام است؟

- فراچ ۸۹      ۱)  $\frac{1}{2}$       ۲)  $\frac{3}{4}$       ۳)  $\frac{3}{2}$       ۴) ۲

نکته ۱۴: برای یافتن دامنه توابع لگاریتمی نظیر  $y = \log_a x$  باید شروط زیر بررسی شود:  $\begin{cases} x > 0 \\ a > 0, a \neq 1 \end{cases}$

مثال ۱۹: دامنه‌ی توابع زیر را بیابید.

a)  $f(x) = \log(x^p - 25) \Rightarrow$

b)  $g(x) = \log_{\mu x} \frac{1+5x}{x^p + 3} \Rightarrow$

تست ۳۳: دامنه تابع  $y = \sqrt{1 - \log(x-1)}$  کدام است؟

(۱۴) (۱, ۱۱)

(۱۱) (۱, ۱۱)

(۱۰) [۲, ۱۰]

(۱) (۱, ۲)

تست ۳۴: - دامنه‌ی تابع  $f(x) = \sqrt{1 - \log(x-2)}$  کدام بازه است؟

(۴) (۲, ۹)

(۳) (۲, ۱۲)

(۲) (۲, ۱۲)

(۱) (۲, ۱۲)

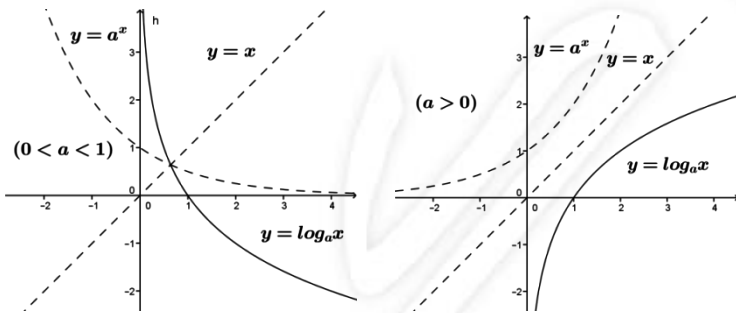
تست ۳۵: - دامنه‌ی تابع  $f(x) = \sqrt{\log \frac{x-2}{4}}$  کدام است؟

(۴) [۳, ۴]

(۳) (۳, ۴)

(۲) [۳, +∞)

(۱) (۳, +∞)



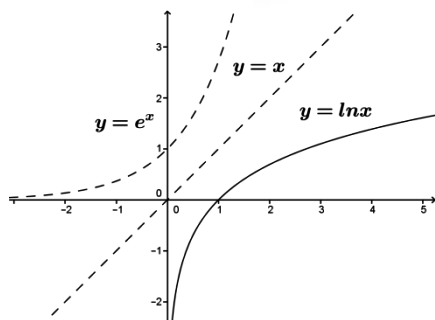
رسم توابع لگاریتمی: اگر قرینه توابع نمایی را نسبت به خط

$y = x$  یعنی نیمساز ربع اول و سوم تعیین کنیم، به این توابع

می‌رسیم. در حالت کلی داریم:  $y = a^x \Leftrightarrow \log_a y = x$ . پس نمودار

این توابع در حالت کلی به صورت مقابل است:

مثال ۲۰: نمودار تابع  $y = \log_p x$  را رسم کنید.



نکته ۵: اگر در تابع لگاریتم پایه برابر عدد نپر باشد، به آن لگاریتم طبیعی می‌گوییم و داریم

$\ln x = \log_e x$ . واضح است که تمام قوانین لگاریتم برای این تابع نیز برقرار است.

نکته ۱۶: توابع  $y = e^x$  و  $y = \ln x$  وارون یکدیگرند و برای عدد حقیقی مثبت  $x$  داریم:  $e^{\ln x} = x, \ln(e^x) = x$ .

مثال ۲۱: معادلات زیر را حل کنید.

$$e^{px} - pe^x + p = 0$$

$$e^{px} - pe^x = 0$$

$$\ln(x-1) + \ln(x+1) = \ln 8$$

$$\ln(px-1) - \ln(x) = \ln p$$

$$p \ln(x-1) = \ln p - \ln 4$$

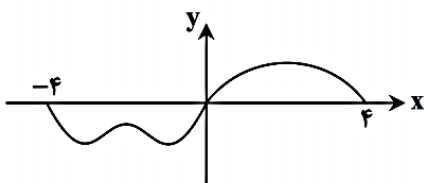
$$\begin{cases} x+y=7 \\ \ln x + \ln y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y=1 \\ \ln x - \ln y = 3 \end{cases}$$

$$\ln(px-1) + \ln(x-7) = \ln 7$$

$$\frac{pe^x + 14}{4e^x - p} = 3$$

تست ۳۶: نمودار تابع  $y = f(2x)$  به شکل مقابل است. دامنه‌ی تابع  $y = 3f(\sqrt{x}) + 1$  کدام است؟



- (۱)  $[4, 16]$
- (۲)  $[0, 64]$
- (۳)  $[0, 4]$
- (۴)  $[4, 64]$

ف. توابع یک به یک و وارون تابع:

توابع یک به یک: اگر در تابعی هیچ دو مؤلفه دوم یکسانی موجود نباشد، آن تابع یک به یک است. معمولاً توابعی که دارای جملاتی نظیر  $|x|$  و  $x^p$  و  $[x]$  هستند، یک به یک نمی‌باشند.

نکته ۱۷: برای رد یک به یک بودن یک تابع از مثال نقض (مثالی که یک به یک بودن را رد کند) و برای تشریح یک به یک بودن یک تابع، از مطلب مقابل استفاده می‌کنیم:  $y_1 = y_p \Rightarrow x_1 = x_p$  (شرط یک به یک بودن)

a)  $y = \sqrt{3x-1}$

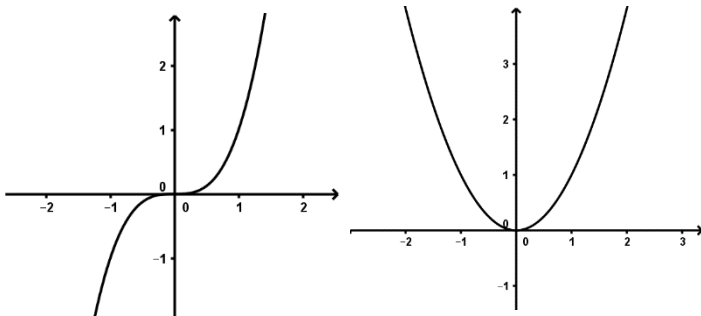
b)  $y = x^p + 4$

c)  $y = |x| - p$

d)  $y = \frac{x}{x+1}$

نکته ۱۸: (تشخیص یک به یک بودن یک تابع از روی نمودار) برای این منظور باید هر قطعی که موازی محور  $y$ ها رسم می‌شود، تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

مثال ۲۳: کدامیک از نمودارهای زیر نمودار یک تابع یک به یک را نشان می‌دهد؟



وارون تابع: اگر یک تابع یک به یک باشد، وارون پذیر نامیده می‌شود. وارون تابع  $f$  را با  $f^{-1}$  نشان می‌دهیم و برای یافتن آن کافی است که تابع را بر مسب متغیر  $x$  بیابیم و در نهایت نقش متغیرهای  $x$  و  $y$  را عوض کنیم.

نکته ۱۹: با توجه به تعریف فوق نمودار هر تابع و وارونش نسبت به نیمساز ربع اول و سوم (خط  $y = x$ ) قرینه هستند.

مثال ۲۴: وارون تابع زیر را بیابید.

$y = \sqrt{3x-4} + 1$

$y = \frac{x+1}{2x-1}$

$y = (x-3)^p, x \geq 3$

د. توابع پله ای و جزء صحیح:

توابعی که آن‌ها را بتوان بر اساس دامنه‌شان به بازه‌هایی دسته‌بندی کرد که در هر بازه مقداری ثابت باشند، توابع پله‌ای نامیده می‌شوند. همچنین تابعی که به هر عدد مقیقی نظیر  $x$ ، اولین عدد صحیح کوچکتر یا مساوی آن را نسبت دهد، تابع جزء صحیح نامیده می‌شود. تابع جزء صحیح به صورت  $f(x) = [x]$  نمایش داده می‌شود و در مورد این تابع داریم:  $D_f = \mathbb{R}$ ،  $R_f = \mathbb{Z}$ .

مثال ۲۵:  $[\frac{1}{p}] =$ ،  $[-p/1] =$ ،  $[p/5] =$ ،  $[p] =$

نکته ۲۰: اگر  $a$  یک عدد صحیح باشد، داریم:

$$[x] = a \Rightarrow a \leq x < a+1, [x+a] = [x] + a, x-1 < [x] \leq x < [x]+1 \leq x+1$$

نکته ۲۱: اگر  $a$  یک عدد صحیح باشد، در حالت کلی تساوی‌های زیر برقرار نیست:  $[ax] = a[x], \left[\frac{x}{a}\right] = \frac{1}{a}[x]$

مثال ۲۶: با یک مثال نشان دهید در حالت کلی تساوی‌های مقابل در حالت کلی صحیح نیست.  $[x] + [y] = [x+y], [px] = p[x]$

تست ۳۷: جواب  $[x + [x + [x]]] = -3$  کدام است؟

- (۱)  $-3 \leq x < -2$  (۲)  $-1 \leq x < 0$  (۳)  $0 \leq x < 1$  (۴)  $\emptyset$

تست ۳۸: مجموعه جواب  $[x] - [-x] = 5$  کدام است؟

- (۱)  $2 \leq x < 3$  (۲)  $2 < x < 3$  (۳)  $\frac{3}{2} < x < \frac{5}{2}$  (۴)  $\left\{\frac{5}{2}\right\}$

مثال ۲۷: معادلات مقابل را حل کنید.

$$[2x + 5] = 1$$

$$\left[\frac{x}{2} - 1\right] = 3$$

$$\left[\frac{3x - 4}{2}\right] = 1$$

$$[1 - x] = 2$$

نکته ۲۲: برای هر عدد حقیقی  $x$  داریم:  $[x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ 1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$  و  $[-x] = \begin{cases} -x & x \in \mathbb{Z} \\ -[x] - 1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$

نکته ۲۳: برای رسم توابع جزء صحیح، ابتدا عبارت داخل کروشه را به بازه‌هایی به طول یک دسته‌بندی می‌کنیم و بعد از یافتن مقدار عددی تابع و ممدوده‌ی  $x$ ، به رسم تابع می‌پردازیم.

مثال ۲۸: تابع  $y = [x]$  را رسم کنید.مثال ۲۹: توابع  $y = [2x] + 1$ ،  $y = [x] + x$ ،  $y = [x] + [-x]$  و  $y = [\cos x]$  را رسم کنید.

تست ۳۹: حاصل عبارت  $\left[ (\sqrt{3} - 2)^{14} \right] + \left[ (1 - \sqrt{2})^{17} \right] + \left[ (\sqrt{2} - \sqrt{3})^{18} \right]$  کدام است؟

(۱) -۱      (۲) صفر      (۳) ۱      (۴) -۲

تست ۴۰: اگر  $(1 + \sqrt{2})^4 + (1 - \sqrt{2})^4 = 198$  باشد، حاصل  $\left[ (1 + \sqrt{2})^4 \right]$  کدام است؟

(۱) ۱۹۵      (۲) ۱۹۶      (۳) ۱۹۷      (۴) ۱۹۸

((هیچ چیز بهتر از کار کردن به جای غصه خوردن آدمی را به قوشبختی نزدیک نمیسازد))

تست ۱۴: اگر  $x \in \mathbb{Z}$  و  $f(x) = [x-1] + [5-x]$ ، معادله  $f\left(\frac{f(x)}{p}\right) = 3x-1$  چند جواب دارد؟

- ۱) ۱ بی‌شمار      ۲) ۳      ۳) صفر      ۴) ۲

۱۴ اعمال جبری بر روی توابع:

الف) چهار عمل اصلی: چهار عمل اصلی برای توابع دلفواه  $f$  و  $g$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad (f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x), \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

مثال ۳۰: اگر  $f(x) = 3x^p - 4$  و  $g(x) = \sqrt{1-4x}$  باشد، داریم:

$$(f+g)(x) =$$

$$(4f)(-1) =$$

$$\left(\frac{f}{5g}\right)(0) =$$

نکته ۲۴: برای یافتن دامنه‌ی این توابع از روابط زیر استفاده می‌کنیم:

$$D_{f+g} = D_{f-g} = D_{f \times g} = D_f \cap D_g, \quad D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\}$$

مثال ۳۱: اگر  $f(x) = \frac{x^p+1}{x}$  و  $g(x) = \sqrt{1-x^p}$  داریم:

$$D_f = \quad , D_g =$$

$$D_{f+g} = D_f \cap D_g =$$

$$D_{\frac{f}{g}} =$$

تست ۱۶: اگر  $f(x) = \sqrt{x+1}$  و  $g(x) = \frac{x+1}{x-2}$ ، مقدار  $(2f-g)(3)$  کدام است؟ (سراسری تجربی - ۷۹)

- ۱) -۱      ۲) ۰      ۳) ۱      ۴) ۲

ترکیب توابع: ترکیب دو تابع دلفواه  $f$  و  $g$  را با نمادهای  $f \circ g$  و  $g \circ f$  نشان می‌دهیم و داریم:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)), \quad (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

مثال ۳۲: اگر  $f(x) = x + 1$  و  $g(x) = \sqrt{x^2 + 4x}$  باشد، داریم:

$$f(g(x)) =$$

$$g(f(x)) =$$

تست ۴۳: اگر  $f(x) = \sqrt{x+2}|x|$  ، مقدار  $f(f(-144))$  کدام است؟ (سراسری تجربی ۸۸)

(۱) تعریف نشده (۲) ۶ (۳) ۸ (۴) ۱۲

تست ۴۴: در تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = \begin{cases} x - \sqrt{x+4} & ; x > 3 \\ 2x + 3 & ; x \leq 3 \end{cases}$  ، مقدار  $f(f(5)) + f(f(1))$  کدام است؟

(۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹

تست ۴۵: اگر  $f(x) = [x]$  و  $g(x) = \frac{x}{1-x}$  ، آن گاه  $(f \circ g)(\sqrt{2})$  کدام است؟ ( [ ] علامت جزء صحیح است.)

(۱) -۴ (۲) -۳ (۳) -۲ (۴) -۱

تست ۴۶: اگر  $f(x) = \sqrt{x+|x|}$  و  $g(x) = \frac{1}{x^2 - 4x}$  ، دامنه‌ی تابع  $g \circ f$  کدام است؟

(۱)  $(0, 8) \cup (8, +\infty)$  (۲)  $\mathbb{R} - \{0, 8\}$  (۳)  $\mathbb{R} - \{0\}$  (۴)  $(0, +\infty)$



تست ۴۷: اگر  $f(x) = [x]$ ، مجموعه‌ی مقادیر  $f(x-f(x))$  کدام است؟

- (۱)  $\{0\}$       (۲)  $\{1\}$       (۳)  $\{0, 1\}$       (۴)  $\{-1, 0, 1\}$

تست ۴۸: اگر  $f(\sqrt{x}+1) = x + 2\sqrt{x} + 2$ ، آنگاه  $f(\sqrt{2})$  چقدر است؟

- (۱) ۳      (۲)  $1 + \sqrt{2}$       (۳)  $\sqrt{2} + 2$       (۴) ۵

تست ۴۹: اگر  $f(x^2 + x) = x^2 + 2x^2 + x^2$  باشد، آنگاه  $f(\sqrt{3})$  چقدر است؟

- (۱) ۷      (۲) ۳      (۳)  $(3 + \sqrt{3})^2$       (۴)  $\sqrt{3}$

نکته ۲۵: ترکیب تابع دلفواه  $f$  با وارونش برابر تابع همانی است، یعنی:  $(f \circ f^{-1})(x) = x \in D_{f^{-1}}$ ،  $(f^{-1} \circ f)(x) = x \in D_f$ .

مثلا چون دو تابع  $y = \ln x$  و  $y = e^x$  وارون یکدیگر هستند، لذا داریم:  $e^{\ln x} = x$ ،  $\ln(e^x) = x$ .

مثال ۳۳: معادله  $2e^{2x} + 1 = 5$  را حل کنید.

نکته ۲۶: برای یافتن دامنه‌ی تابع  $f \circ g$  دو روش وجود دارد. در روش اول ابتدا ضابطه‌ی تابع  $f \circ g$  را می‌یابیم و سپس دامنه‌ی آن را مناسبه

می‌کنیم. در روش دوم بدون مناسبه‌ی ضابطه‌ی  $f \circ g$  و با استفاده از فرمول زیر به مناسبه‌ی دامنه می‌پردازیم.

$$D_{f \circ g} = \{x \mid x \in D_g, g(x) \in D_f\}$$

مثال ۳۴: اگر  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 4}$  و  $g(x) = \sqrt{2x + 7}$  دامنه‌ی  $g \circ f$  و  $f \circ g$  را با استفاده از فرمول بیابید.

$D_f =$  ,  $D_g =$

$D_{g \circ f} =$

$D_{f \circ g} =$

۵. مسائل رشد و زوال: مسایلی نظیر رشد و کاهش جمعیت را با استفاده از توابع  $f(t) = Be^{at}$  بررسی می‌کنیم. در این رابطه متغیر  $B$  جمعیت ابتدایی، متغیر  $a$  ضریب رشد و زوال و متغیر  $t$  زمان است.

مثال ۳۵: رشد یک باکتری از رابطه  $f(t) = Be^{0.2t}$  مناسبه می‌شود. اگر در شروع ۳۰۰۰ باکتری موجود باشد در چه مدتی تعداد باکتری‌ها ۸ برابر می‌شود. ( $\ln 2 = 0.69$ )

مثال ۳۶: تابع رشد جمعیت یک شهر به صورت  $f(t) = 300000e^{0.2t}$  است. جمعیت این شهر چه زمانی دو برابر می‌شود؟ ( $\ln 2 = 0.69$ )

تست ۵۰: تعداد واحد کار کامل شده در روز، توسط یک کارگر عادی بعد از  $t$  ماه اشتغال برابر  $f(t) = 82 - 56e^{-0.2t}$  است. بعد از چند ماه

فارغ ۸۷

تجربه‌ی کاری، این کارگر می‌تواند روزانه ۷۵ واحد را کامل کند؟ ( $\ln 2 = 0.693$ )

۱۲ (۴)

۱۱ (۳)

۹ (۲)

۸ (۱)

تست ۵۱:

اگر یک کارگر عادی بعد از  $t$  ماه اشتغال بتواند روزانه  $f(t)$  واحد کار را کامل کند، تابع کارایی آن به صورت

فاز ۸۹  $f(t) = 90 - 5e^{-0.2t}$  داده می‌شود. پس از چند ماه تجربه کاری، روزانه ۶۵ واحد را کامل می‌کند؟  $(\log_e = 0.7)$

- ۱) ۳/۵      ۲) ۶      ۳) ۷      ۴) ۱۰/۵

تست‌های کنکور فصل تابع

اعمال روی توابع

تست ۵۲:

اگر  $f = \{(1, 2), (2, 5), (0, 3), (4, -1)\}$  و  $g = \{(2, 3), (-1, 4), (4, 1), (3, 0)\}$  تابع  $g \circ f^{-1}$  کدام

است؟

(سراسری ۸۵)

- ۱)  $\{(1, 3), (0, 0)\}$       ۲)  $\{(2, 4), (3, 5)\}$       ۳)  $\{(2, 0), (-1, 4)\}$       ۴)  $\{(5, 3), (-1, 1)\}$

تست ۵۳:

در تابع با ضابطه  $f(x) = x^2(2-x)^2$ ، حاصل  $f(1+x) - f(1-x)$  کدام است؟

- (سراسری ۸۵) ۱) صفر      ۲)  $4x$       ۳)  $2x^2$       ۴)  $4x^2$

تست ۵۴:

اگر  $f(x) = 3 + \sqrt{2x}$ ، آن‌گاه  $f(8)$  کدام است؟

- (سراسری ۸۶) ۱) ۵      ۲) ۳      ۳) ۷      ۴) ۸

تست ۵۵:

اگر  $f(x) = [x]$  و  $g(x) = \frac{x}{1-x}$ ، آن‌گاه  $(f \circ g)(\sqrt{2})$  کدام است؟

- (سراسری ۸۶) ۱) -۴      ۲) -۳      ۳) -۲      ۴) -۱

تست ۵۶:

اگر رابطه‌ی  $|x + y + z| \leq |x| + |y| + |z|$  به رابطه‌ی تساوی تبدیل شود، الزاماً سه عدد غیرصفر  $x$  و  $y$  و  $z$

چگونه‌اند؟

(سراسری ۸۶)

- (۱) مساوی هم (۲) هم علامت (۳) مثبت (۴) منفی

تست ۵۷:

اگر  $f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$  و تابع  $g(x) = \operatorname{tg} x : |x| < \frac{\pi}{2}$  باشد. دامنه تابع  $f \circ g$  کدام است؟

(سراسری ۸۷)

- (۱)  $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$  (۲)  $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$  (۳)  $(0, \frac{\pi}{4}] \cup (-\frac{\pi}{4}, 0)$  (۴)  $(0, 1] \cup (-1, 0)$

تست ۵۸:

$f(x) = \sqrt{x + 2|x|} - 1$  مقدار  $f(f(-144))$  کدام است؟

(سراسری ۸۸)

- (۱) تعریف نشده (۲) ۶ (۳) ۸ (۴) ۱۲

تست ۵۹:

نمودار تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = x^2 + ax + b$  و خط به معادله‌ی  $y + 2x = b$  در نقطه‌ای به طول ۱ روی محور  $x$ ها متقاطع‌اند. طول‌های دو نقطه‌ی تقاطع دیگر این منحنی و خط، کدام است؟

(سراسری ۸۹)

- (۱) ۱ و ۲ (۲) ۱ و ۳ (۳) ۰ و ۱ (۴) ۰ و ۲

تست ۶۰:

اگر  $f(x) = |x|$  و  $g(x) = x^2 + 2x + 1$  باشد، حاصل  $(f \circ g)(1 - \sqrt{2}) - (g \circ f)(1 - \sqrt{2})$  کدام است؟

(سراسری ۸۹)

- (۱)  $2(1 - \sqrt{2})$  (۲)  $2(\sqrt{2} - 1)$  (۳) ۴ (۴)  $4\sqrt{2}$

تست ۶۱:

در تابع یا ضابطه‌ی  $f(x) = \begin{cases} x - \sqrt{x+4} & ; x > 3 \\ 2x+3 & ; x \leq 3 \end{cases}$  مقدار  $f(f(5)) + f(f(1))$  کدام است؟

(سراسری ۹۰)

- ۶ (۱)      ۷ (۲)      ۸ (۳)      ۹ (۴)

تست ۶۲:

اگر  $f(x-3) = x^2 - 4x + 5$ ، آن‌گاه  $f(1-x)$  کدام است؟

(سراسری ۹۰)

- ۱ (۱)  $x^2 + 1$       ۲ (۲)  $x^2 + 3$       ۳ (۳)  $x^2 + 4x + 5$       ۴ (۴)  $x^2 - 4x + 5$

تست ۶۳:

اگر  $f(x) = x + \sqrt{x}$  و  $g = \{(1, 2), (5, 4), (6, 5), (2, 3)\}$  و  $g(f(a)) = 5$  باشد عدد  $a$  کدام است؟

(سراسری ۹۱)

- ۱ (۱)      ۲ (۲)      ۳ (۳)      ۴ (۴)

تست ۶۴:

اگر  $f(x) = x^2 + 3x$ ،  $g(x) = -\frac{1}{4}x + 2$ ، مجموعه طول نقاط از منحنی تابع  $g \circ f$  که در بالای محور  $x$ ها قرار گیرد برابر کدام بازه است؟

(سراسری ۹۱)

- ۱ (۱)  $(-4, 1)$       ۲ (۲)  $(-3, 2)$       ۳ (۳)  $(-2, 1)$       ۴ (۴)  $(4, -1)$

تست ۶۵:

دامنه‌ی تابع  $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$ ،  $f(3-x)$  کدام است؟

(سراسری ۹۲)

- ۱ (۱)  $[0, 2]$       ۲ (۲)  $[0, 3]$       ۳ (۳)  $[0, 2]$       ۴ (۴)  $[1, 3]$

تست ۶۶:

اگر  $f(x) = (2x - 3)^2$  و  $g(x) = x + 2$  نمودارهای دو تابع  $f$  و  $g \circ f$  با کدام طول متقاطع‌اند؟

(سراسری ۹۲)

- ۱ (۱)  $-1$       ۲ (۲)  $\frac{1}{2}$       ۳ (۳)  $1$       ۴ (۴)  $\frac{3}{2}$

((انسان موفق کسی است که زندگی خود را به دست خود بسازد))

تست ۶۷: نمودار تابع با ضابطه  $f(x) = ax^2 + bx + c$  محور xها را در نقطه‌ای به طول ۱ و محور yها را در نقطه‌ای به عرض

۶- قطع کرده و از نقطه  $(-2, -6)$  می‌گذرد،  $f(-1)$  کدام است؟

- ۱) -۸      ۲) -۷      ۳) -۵      ۴) -۴

تست ۶۸: اگر  $f(x) = \frac{x}{x-1}$ ، ضابطه تابع  $f(x^2) - 2f(x) + 1$  کدام است؟

- ۱)  $\frac{1}{1-x^2}$       ۲)  $\frac{2x}{x^2-1}$       ۳)  $\frac{2x+1}{1-x^2}$       ۴)  $\frac{2x-1}{x^2-1}$

تست ۶۹: اگر توابع f و g به عنوان ماشین به صورت  $x \rightarrow \boxed{f} \rightarrow \boxed{g} \rightarrow 2x$  باشند و  $g(x) = 3x + 4$  مقدار  $f(5)$  کدام است؟

- ۱) ۱      ۲) ۲      ۳) ۳      ۴) ۴

تست ۷۰: اگر  $f(x) = x^2 + x - 2$ ،  $g(x) = \frac{1}{3}(x - 3)$ ، مجموعه طول نقاط از منحنی تابع fog که در زیر محور xها قرار گیرند، کدام بازه است؟

- ۱)  $(-5, 1)$       ۲)  $(-1, 5)$       ۳)  $(-2, 1)$       ۴)  $(1, 5)$

تست ۷۱: اگر  $f(x) = \sqrt{x+|x+2|}$ ، دامنه‌ی تابع  $f(-x)$  کدام است؟

- ۱)  $x \leq -1$       ۲)  $x \geq -1$       ۳)  $x \leq 1$       ۴)  $x \geq 1$

تست ۷۲:

اگر  $f(x) = x - \sqrt{x}$  و  $g(x) = \sin^2 x$  باشند، ضابطه‌ی تابع  $f \circ g$  کدام است؟

(۴)  $\frac{1}{2} \cos^2 2x$

(۳)  $-\frac{1}{4} \cos^2 2x$

(۲)  $-\frac{1}{2} \sin^2 2x$

(۱)  $-\frac{1}{4} \sin^2 2x$

(فارغ ۹۶)

تست ۷۳:

اگر  $f(x) = \sqrt{3-x}$  و  $g(x) = \log_p(x^2 + 2x)$  باشند، دامنه‌ی تابع  $f \circ g$  ، کدام است؟

(۴)  $[-4, -2] \cup (0, 2]$

(۳)  $[-4, -1] \cup (1, 2]$

(۲)  $[-2, 0]$

(۱)  $[-4, 2]$

(تجربی ۹۴)

تست ۷۴:

اگر  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{-x^2 + x + 2}}$  و  $g(x) = (\frac{1}{p})^x$  باشند، دامنه‌ی تابع  $f \circ g$  ، کدام است؟

(۴)  $(-1, \frac{1}{p})$

(۳)  $(-2, 0)$

(۲)  $(\frac{1}{p}, +\infty)$

(۱)  $(-\frac{1}{p}, +\infty)$

(فارغ ۹۴)

### تابع لگاریتم

تست ۷۵:

اگر  $4\sqrt{2} = 4^x$  و  $1 + \text{Log} \sqrt{x+1} = \text{Log} y$  مقدار  $y$  کدام است؟

(۴) ۲۵

(۳) ۱۵

(۲) ۱۲/۵

(۱) ۷/۵

(سراسری ۸۵)

تست ۷۶:

اگر  $\text{Log} 3 + \text{Log} \sqrt[3]{3} = \text{Log} (81)^k$  ، آنگاه لگاریتم  $\frac{5}{k}$  در پایه‌ی ۲ کدام است؟

(۴) ۵

(۳) ۴

(۲) ۳

(۱) ۲

(سراسری ۸۶)

تست ۷۷:

اگر لگاریتم  $a$  در پایه  $\sqrt{3}$  برابر  $\frac{4}{3}$  باشد، آنگاه لگاریتم  $(a^3 + 7)$  در پایه ۸ کدام است؟

- (سراسری ۸۷)  $\frac{2}{3}$  (۱)  $\frac{4}{3}$  (۲)  $\sqrt{2}$  (۳)  $\frac{3}{2}$  (۴)

تست ۷۸:

اگر  $fa = 2\sqrt{2}$ ، لگاریتم  $(fa + 1)$  در پایه ۴ کدام است؟

- (سراسری ۸۸) ۱ (۱)  $\sqrt{2}$  (۲) ۲ (۳)  $\frac{3}{2}$  (۴)

تست ۷۹:

از دو معادله  $\text{Log}_p x + \text{Log}_p y = 2$  و  $x^2 + y^2 = 46$  لگاریتم  $(x + y)$  در پایه ۴، کدام است؟

- (سراسری ۸۹)  $\frac{1}{5}$  (۱) ۲ (۲)  $\frac{2}{5}$  (۳) ۳ (۴)

تست ۸۰:

اگر  $\log 2 = k$  باشد، حاصل  $\log(6 - 2\sqrt{5}) + 2\log(1 + \sqrt{5})$  کدام است؟

- (سراسری ۹۰)  $2k$  (۱)  $4k$  (۲)  $1+k$  (۳)  $2+4k$  (۴)

تست ۸۱:

از تساوی  $\log_x(x^2 + 4) = 1 + \log_x 5$ ، مقدار لگاریتم  $x$  در پایه ۲، کدام است؟

- (سراسری ۹۳) -۱ (۱)  $\frac{1}{2}$  (۲)  $\frac{3}{2}$  (۳) ۲ (۴)



تست ۸۲: دامنه‌ی تابع  $f(x) = \sqrt{1 - \log(x-1)}$  به کدام صورت است؟

- فارغ ۸۶ (۱)  $(1, 2]$  (۲)  $[2, 10]$  (۳)  $(1, 1)$  (۴)  $(1, 1]$

تست ۸۳: از دو معادله‌ی  $\log(y+2) = 1$  و  $\log(y-x) + \log(4x+y) = 2$  مقدار  $x$  کدام است؟

- فارغ ۸۷ (۱)  $1$  (۲)  $2$  (۳)  $3$  (۴)  $4$

تست ۸۴: اگر  $a$  و  $b$  ریشه‌های معادله‌ی  $x^2 - 10x + 1 = 0$  باشند، حاصل  $\log a + \log b - \log(a+b)$  کدام است؟

- فارغ ۸۸ (۱)  $-2$  (۲)  $-1$  (۳) صفر (۴)  $1$

تست ۸۵: نمودارهای دو تابع  $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ ،  $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$  نسبت بهم چگونه‌اند؟

- فارغ ۹۱ (۱)  $f(x)$  بالاتر (۲)  $g(x)$  بالاتر (۳) منطبق‌اند (۴) فقط در یک نقطه متقاطع

تست ۸۶: از تساوی  $\log_x(3x+8) = 2 - \log_x(x-6)$  مقدار لگاریتم  $x$  در پایه ۴، کدام است؟

- فارغ ۹۳ (۱)  $\frac{1}{2}$  (۲)  $\frac{2}{3}$  (۳)  $\frac{3}{2}$  (۴)  $2$

تست ۸۷:

کارایی کارگری عادی، در کارخانه‌ای پس از  $t$  ماه، روزانه به تعداد  $f(t) = 90 - 40e^{-0.2t}$  واحد است. پس از چند ماه تجربه‌ی کاری، روزانه ۷۰ واحد را کامل می‌کند؟ ( $\ln 2 = 0.68$ ) (تجربی ۹۴)

۶۸ (۴)

۵۱ (۳)

۳۴ (۲)

۱۷ (۱)

## تابع جزء صحیح

تست ۸۸:

- اگر جزء صحیح  $(x^2 + x)$  برابر ۱- باشد، آنگاه  $[x^{20}]$  کدام است؟

۲ (۴)

۱ (۳)

صفر (۲)

-۱ (۱)

(سراسری ۸۸)

تست ۸۹:

تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = \frac{1}{[\cos \pi x]}$ ، در کدام بازه قابل تعریف است؟

 $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$  (۴) $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  (۳)

(۰, ۱) (۲)

[۰, ۱] (۱)

(سراسری ۸۹)

تست ۹۰:

برای هر عدد طبیعی  $n > 2$  حاصل  $[\sqrt{4n^2 - 2n + 1}] - 2[\sqrt{n^2 - 2n}]$  کدام است؟ (نماد  $[ ]$  به مفهوم جزء صحیح است)

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

(سراسری ۹۰)

تست ۹۱:

اگر  $f(x) = [x]$ ، مجموعه‌ی مقادیر  $f(x - f(x))$  کدام است؟ ( $[ ]$ ، نماد جزء صحیح است.)

 $\{-1, 0, 1\}$  (۴) $\{0, 1\}$  (۳) $\{1\}$  (۲) $\{0\}$  (۱)

فراچ ۸۵

تست ۹۲:

نمودار تابع  $y = 2\left[\frac{x}{2}\right] + 1; x \in [-2, 6]$  از چند پاره خط مساوی هم تشکیل شده است؟

فارغ ۸۶

۶ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

تست ۹۳:

اگر  $x^2 + x < 0$  باشد، حاصل  $[x^4] + [x^3] + [x^2] + [x]$  کدام است؟

فارغ ۸۸

۱ (۴)

صفر (۳)

-۱ (۲)

-۲ (۱)

تست ۹۴:

نمودار تابع  $y = [x^2]$  روی بازه  $x \in (-2, 2)$  از چند پاره خط تشکیل شده است؟ (نماد  $[ ]$  به مفهوم جزء صحیح است)

فارغ ۹۱

۷ (۴)

۶ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)

## تابع نمایی

تست ۹۵:

در تابع با ضابطه  $f(x) = ab^x; b > 0$  داریم  $f(0) = \frac{3}{2}, f(-2) = \frac{3}{32}$  مقدار  $f(\frac{3}{2})$  کدام است؟

سراسری ۹۱

۲۴ (۴)

۱۲ (۳)

۸ (۲)

۶ (۱)

تست ۹۶:

اگر نمودار تابع  $f(x) = a(b)^x - 1$  از دو نقطه  $A(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  و  $B(1, 11)$  بگذرد،  $f(-1)$  کدام است؟

سراسری ۹۳

 $\frac{3}{4}$  (۴) $-\frac{1}{4}$  (۳) $-\frac{1}{2}$  (۲) $-\frac{3}{4}$  (۱)

((امام علی علیه السلام: اگر نماز گزار بداند تا چه حد مشمول رحمت الهی است هرگز سر خود را از سجده بر نخواهد داشت.))

**تست ۹۷:** فاصله نقطه تلاقی دو منحنی به معادلات  $y = 2^x$  و  $y = (\sqrt{2})^{x+1} + 4$ ، از نقطه  $A(0, 4)$ ، کدام است؟  
 (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵ (۵) ۹۳

وارون تابع

**تست ۹۸:** ضابطه وارون تابع  $y = \frac{x}{1+|x|}$  کدام است؟

(۱)  $y = \frac{x}{1-|x|}; |x| < 1$  (۲)  $y = \frac{1-|x|}{|x|}; |x| > 1$  (۳)  $y = \frac{x}{|x|-1}; |x| > 1$  (۴)  $y = \frac{|x|-1}{x}; |x| < 1$  (۵) ۹۱

**تست ۹۹:** ضابطه معکوس تابع  $y = 2 - \sqrt{x-1}$  به کدام صورت است؟

(۱)  $y = x^2 - 4x + 5; x \leq 2$  (۲)  $y = x^2 + 4x - 5; x \leq 2$  (۳)  $y = x^2 - 4x + 5; x \geq 1$  (۴)  $y = -x^2 + 4x - 5; x \geq 1$  (۵) ۹۲

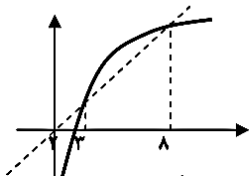
**تست ۱۰۰:** ضابطه وارون تابع  $y = \begin{cases} \sqrt{x} & ; x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & ; x < 0 \end{cases}$  کدام است؟

(۱)  $y = x|x|; x \in \mathbb{R}$  (۲)  $y = -x^2; x < 0$  (۳)  $y = \pm x^2; x \in \mathbb{R}$  (۴)  $y = \pm x|x|; x \in \mathbb{R}$  (۵) ۹۱

**تست ۱۰۱:** ضابطه معکوس تابع  $y = \begin{cases} \frac{|x|}{x} \sqrt{|x|}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$  به کدام صورت است؟

(۱)  $y = x\sqrt{|x|}; x \in \mathbb{R}$  (۲)  $y = x\sqrt{|x|}; x \in \mathbb{R} - \{0\}$  (۳)  $y = x|x|; x \in \mathbb{R} - \{0\}$  (۴)  $y = x|x|; x \in \mathbb{R}$  (۵) ۹۲

تست ۱۰۲: شکل روبه رو، نمودار تابع  $y = f(x)$  و نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم است. دامنه تابع با ضابطه  $\sqrt{x - f^{-1}(x)}$  کدام است؟



- (تجربی ۹۴) (۱)  $(0, 2]$  (۲)  $[2, 3]$   
 (۳)  $[2, 8]$  (۴)  $[3, 8]$   
 - گزینه ۴

تست ۱۰۳: تابع با ضابطه  $y = x|x - 2|$ ، در یک بازه، نزولی است. ضابطه معکوس آن در این بازه کدام است؟

- (تجربی ۹۴) (۱)  $1 - \sqrt{1 + x}; x < 0$  (۲)  $1 - \sqrt{1 - x}; x < 1$  (۳)  $1 + \sqrt{1 - x}; 0 < x < 1$  (۴)  $1 - \sqrt{1 - x}; 0 < x < 1$

تست ۱۰۴: تابع با ضابطه  $f(x) = |2x - 6| - |x + 1|$ ، در یک بازه، صعودی است. ضابطه معکوس آن، در این بازه، کدام است؟

- (فاز ۹۴) (۱)  $-x + 7; x > 8$  (۲)  $\frac{1}{3}x + 2; x > 3$   
 (۳)  $x + 7; x > -4$  (۴)  $\frac{1}{2}x - 1; -4 < x < 8$

رسم توابع

تست ۱۰۵: خط به معادله  $y = 2x - 5$  در نقطه‌ای به طول ۱ بر منحنی به معادله  $y = ax^2 + bx + 1$  مماس است.  $a$  کدام

(تجربی ۸۶) است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۶

تست ۱۰۶:

(سراسری ۹۳)

نمودار تابع  $y = \left| \frac{1}{3}x \right| - 2$  را،  $f$  واحد به طرف  $x$  های منفی و یک واحد به طرف  $y$  های مثبت انتقال می دهیم. نمودار جدید و نمودار اولیه، با کدام طول متقاطع اند؟

- (۱)  $-3,5$       (۲)  $-3$       (۳)  $-2,5$       (۴)  $-2$

تست ۱۰۷:

(فارس ۹۳)

نمودار تابع با ضابطه  $y = x^2 - 3x - 10$  را، حداقل چند واحد به طرف  $x$  های مثبت انتقال دهیم، تا طول نقاط تلاقی نمودار حاصل با محور  $x$  ها غیرمنفی باشد؟

- (۱)  $1$       (۲)  $1,5$       (۳)  $2$       (۴)  $3$

تست ۱۰۸:

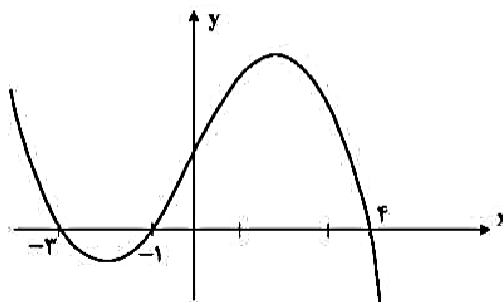
(فارس ۹۳)

به ازای کدام مقدار  $m$  نمودار تابع  $y = 2x^2 + (m+1)x + m + 6$  بر نیمساز ناحیه اول محورهای مختصات، مماس است؟

- (۱)  $-4$       (۲)  $-12, 4$       (۳)  $12, -4$       (۴)  $12$

تست ۱۰۹: شکل روبه رو، نمودار تابع  $y = f(x-2)$  است: دامنه تابع یا ضابطه  $\sqrt{x}f(x)$ ، کدام است؟

(فارس ۹۴)



- (۱)  $[-1, 1] \cup [0, 6]$   
 (۲)  $[-3, 1] \cup [0, 2]$   
 (۳)  $[-5, -3] \cup [-1, 2]$   
 (۴)  $[-5, -3] \cup [0, 2]$

نامعادلات

تست ۱۱۰: مقادیر تابع  $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2x + 6$  در بازه‌ی  $(a, b)$  بزرگ‌تر  $\frac{7}{4}$  از می‌باشد. بیش‌ترین مقدار  $b - a$  کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۵/۵ (۴) ۶

تست ۱۱۰:

(سراسری ۸۹)

تست ۱۱۱: مجموعه جواب نامعادله  $|\frac{x-2}{2x+1}| > 1$  به صورت کدام بازه‌ها است؟

- (۱)  $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$  (۲)  $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{2}, 1)$  (۳)  $(-\infty, -\frac{1}{2})$  (۴)  $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$

تست ۱۱۱:

(سراسری ۹۲)

تست ۱۱۲: مجموعه جواب نامعادله  $|x-2| < x^2 - 2x$  به صورت کدام بازه‌ها است؟

- (۱)  $(-1, 1)$  (۲)  $(-1, 2)$  (۳)  $(0, 2)$  (۴)  $(1, 2)$

تست ۱۱۲:

(فارس ۹۲)

## تمرینات کتاب

۱- نمودارهای توابع زیر را رسم کنید.

ب)  $y = -2x^2 + 2x - 1$

د)  $y = (2-x)(4+x)$

و)  $y = 2x^2 - 3x + 4$

الف)  $y = 3x^2 + 6x$

ج)  $y = 9x^2 + 6x + 1$

ه)  $y = 2x^2 + 3$

۲- شخصی که در لبه فوقانی ساختمانی به ارتفاع  $80$  متر ایستاده است تویی را با سرعت اولیه  $20$  متر بر ثانیه به سوی بالا پرتاب می کند. بعد از  $t$  ثانیه ارتفاع توپ از سطح زمین برابر است با  $h = -5t^2 + 20t + 80$ . نمودار این تابع را رسم کنید. با استفاده از این نمودار به سؤالات زیر پاسخ دهید:

الف) توپ پس از چند ثانیه به زمین می خورد؟

ب) ماکزیمم ارتفاع توپ چقدر است؟ بعد از چند ثانیه به ماکزیمم ارتفاع می رسد؟

ج) بعد از چند ثانیه پس از پرتاب توپ به سطح بالای ساختمان برمی گردد؟

د) دامنه این تابع را تعیین کنید.

۳- محیط مستطیلی  $100$  متر است. طول و عرض آن را چنان تعیین کنید که مساحت مستطیل ماکزیمم شود.

۴- کمترین مقدار تابع  $f(x) = x + \frac{4}{x}$  را به ازای مقادیر مثبت  $x$  تعیین کنید.



۳- با استفاده از مسأله ۱ برای هر دو عدد حقیقی  $x$  و  $y$  نشان دهید

$$-|x| - |y| \leq x + y \leq |x| + |y|$$

و نتیجه بگیرید:  $|x + y| \leq |x| + |y|$  (رابطه نامساوی مثلثی)

۴- می‌توان نشان داد رابطه نامساوی مثلثی برای هر تعداد عدد حقیقی برقرار است. برای سه

$$\text{عدد حقیقی } x_1, x_2 \text{ و } x_3 \text{ نشان دهید } |x_1| + |x_2| + |x_3| \geq |x_1 + x_2 + x_3|.$$

۵- معادله‌ها و نامعادله‌های زیر را حل کنید:

الف)  $|2x - 1| = 3$

ب)  $\frac{1}{|x+5|} = 2$

ج)  $\left|x + \frac{2}{3}\right| \leq 1$

د)  $\frac{3}{|x|} < 1$

ه)  $|2x + 1| = |x - 2|$

۶- نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید:

الف)  $y = |3 - 2x|$

ب)  $y = |1 - x^2|$

ج)  $y = |x^3|$

د)  $y = |\cos x|, 0 \leq x \leq \pi$

۷- هر یک از توابع زیر را به صورت یک تابع چند ضابطه‌ای (بدون نماد قدر مطلق) بنویسید.

سیس نمودار هر یک را رسم کنید:

الف)  $y = 3 - |x + 1|$

ب)  $y = x|x|$

ج)  $y = |x - 1| + |x + 1|$

۱- نمودارهای توابع زیر را رسم کنید.

الف)  $y = 2[x] + 1$

ب)  $y = \left[ \frac{x}{2} \right]$

ج)  $y = [\cos x] ; -\pi \leq x \leq \pi$

د)  $y = [x^2] ; -2 \leq x \leq 2$

۲- نمودار تابع  $y = x - [x]$  را رسم کنید (راهنمایی: ابتدا نشان دهید  $0 \leq x - [x] < 1$ )

۳- اگر  $f(x) = [x+2] + [-x]$  و  $x \notin \mathbb{Z}$  نشان دهید  $f(x) = 1$

۴- با استفاده از نامساوی‌های  $4n^2 + 4n + 1 < 4n^2 + 4n + 1 < 4n^2 + 4n + 1$  نشان دهید:

$$n \in \mathbb{N}! : \left[ \sqrt{4n^2 + 4n + 1} \right] = 2n$$

۵- معادله‌های زیر را حل کنید.

الف)  $[x-3] = 4$     ب)  $[1-2x] = -5$

۶- فرض کنیم  $x$  و  $y$  دو عدد حقیقی باشند ثابت کنید:

$$[x+y] = [x] + [y] + 1 \quad \text{یا} \quad [x+y] = [x] + [y]$$

۱- تعیین کنید تابع  $y = |x|$  روی چه بازه‌هایی صعودی و روی چه بازه‌هایی نزولی است.

۲- تعیین کنید تابع  $y = |\sin x|$  روی چه بازه‌هایی صعودی و روی چه بازه‌هایی نزولی است.

۳- روی بازه  $[0, 2]$  نمودار یک تابع را رسم کنید که روی بازه  $[0, 1]$  صعودی و روی بازه

$[1, 2]$  نزولی باشد.

۴- روی بازه  $[-1, 1]$  نمودار تابعی را رسم کنید که روی بازه  $(0, -1]$  و  $[1, 0)$  صعودی

باشد ولی روی بازه  $[-1, 1]$  صعودی نباشد.

۱- برای توابع  $f(x)=x^2+1$  و  $g(x)=\frac{1}{x}$  و  $k(x)=2^x$  ترکیب توابع زیر را حساب کنید.

fog , gof , fok , kof , fofok

۲- دامنه تابع  $f(x)=3x+1$  را به گونه‌ای محدود کنید که برای تابع  $g(x)=\sqrt{1-x}$  ترکیب gof قابل انجام باشد و gof را حساب کنید.

۳- برای تابع  $f(x)=1-\sqrt{x}$  آیا ترکیب fok قابل انجام است؟ دامنه f را به گونه‌ای محدود کنید که fok قابل انجام باشد.

۴- در تابع  $y=\frac{ax+1}{x-c}$  آیا می‌توان a و c را به گونه‌ای تعیین کرد که این تابع وارون خود باشد؟

۵- دامنه تابع  $y=x^2+2x$  را به گونه‌ای محدود کنید که وارون پذیر باشد و وارون آن را به دست آورید.

۶- آیا تابع زیر وارون پذیر است؟ وارون آن را به دست آورید.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ -x^2 & 0 < x \end{cases}$$

۷- ثابت کنید تابع  $f(x)=\frac{2^x-1}{2^x+1}$  وارون پذیر است و وارون آن را به دست آورید.

۱- معادله‌های زیر را حل کنید.

(الف)  $\ln(x-3)=2$

(ب)  $(e^x-5)(2e^x-7)=0$

(ج)  $(e^x+3)^2-25=0$

(د)  $\ln(4x-5)=\ln(2-x)$

(ه)  $|e^x-1|=|3-2e^x|$

(و)  $\ln(2x-1)+\ln(x-7)=\ln 7$

۲- اعداد حقیقی  $x$  و  $y$  را چنان تعیین کنید که:

(الف) 
$$\begin{cases} \ln(2x+1)+\ln(3y-2)=\ln 3x+\ln(y+3) \\ \ln(x+1)-\ln(y+4)=-\ln 3 \end{cases}$$

(ب) 
$$\begin{cases} \ln x+\ln 2y=\ln(xy+2) \\ \ln(1-x)+\ln(y+1)=\ln(y-x-1) \end{cases}$$

۳- جمعیت شهری ۱۰۰۰۰ نفر است و با آهنگی متناسب با تعداد جمعیت افزایش می‌یابد. اگر این آهنگ ۶ درصد و جمعیت بعد از  $t$  سال  $P(t)$  باشد، آنگاه  $P(t)=10000e^{0.06t}$ . تا کی انتظار می‌رود جمعیت به ۴۵۰۰۰ نفر برسد؟

۴- در یک نوع کشت ۲۰۰۰ باکتری موجود است، و بعد از  $t$  دقیقه  $f(t)$  باکتری ظاهر می‌شود که  $f(t)=2000e^{0.25t}$ . چه وقت ۱۰۰۰۰ باکتری در کشت وجود خواهد داشت؟

- ۵- کارایی کارگر عادی در کارخانه‌ای با تابع  $f(t) = 100 - 60e^{-0.2t}$  داده می‌شود که کارگر بعد از  $t$  ماه اشتغال می‌تواند روزانه  $f(t)$  واحد کار را کامل کند. بعد از چند ماه تجربه کاری، انتظار می‌رود که کارگر روزانه ۷۰ واحد را کامل کند؟
- ۶- قیمت فروش ابزاری،  $t$  سال پس از خرید،  $f(t)$  دلار است، که  $f(t) = 1200 + 8000e^{-0.25t}$ . چند سال پس از خرید، قیمت فروش این ابزار ۲۰۰۰ دلار می‌شود؟ در مسایل ۹-۷ به فرمول زیر نیاز داریم:

$$A = Pe^{it}$$

- در این فرمول  $P$  سرمایه اولیه است که با نرخ سود مشارکت  $i$  درصد به مدت  $t$  سال در مؤسسه‌ای (بانک یا شرکت تولیدی) سرمایه‌گذاری می‌شود و  $A$  مقدار سرمایه پس از  $t$  سال است.
- ۷- چقدر طول می‌کشد تا ۵۰۰۰۰۰۰ ریال پس‌انداز با نرخ ۹ درصد مرکب پیوسته ۹۰۰۰۰۰۰ ریال شود؟
- ۸- مسأله ۷ را وقتی که نرخ سود شرکت در سرمایه‌گذاری ۱۲ درصد مرکب پیوسته باشد، حل کنید.
- ۹- چقدر طول می‌کشد تا یک سرمایه‌گذاری دو برابر شود هرگاه نرخ سود مشارکت در سرمایه‌گذاری ۸ درصد مرکب پیوسته باشد؟

## فصل دوم (بخش چهارم: مثلثات)

## بخش چهارم: مثلثات

## ۱) یادآوری:

۱. تعریف رادیان: فرض کنیم  $l$  طول کمان مقابل به زاویه  $\theta$  در دایره‌ای به شعاع  $r$  باشد. در این صورت اندازه‌ی این کمان بر اساس رادیان از

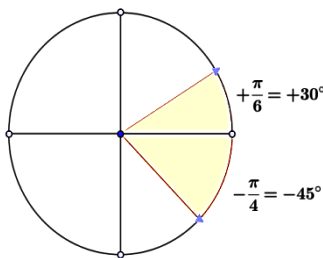
رابطه‌ی  $\theta = \frac{l}{r}$  بدست می‌آید. همچنین اگر فرض کنیم اندازه‌ی زاویه‌ای بر مسب درجه برابر  $D$  باشد، در این صورت با استفاده از رابطه‌ی

$$\frac{R}{\pi} = \frac{D}{180}$$

می‌توانیم اندازه‌ی زاویه را بر مسب رادیان بیابیم.

مثال: اندازه‌ی زاویه‌ای  $A$  برابر  $1/5\pi$  رادیان است، بر مسب درجه این زاویه برابر  $36^\circ$  است زیرا:

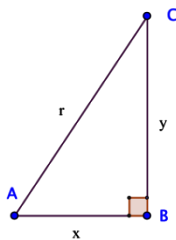
مثال: اندازه‌ی زاویه‌ای  $135^\circ$  درجه است. اندازه‌ی آن را بر اساس رادیان بیابید.



۲. تعریف دایره‌ی مثلثاتی: دایره‌ی ای جهتدار و به شعاع یک است که جهت مثبت آن عکس حرکت عقربه‌های است.

۳. روابط مثلثاتی: در سال اول با نسبت‌های مثلثاتی آشنا شدیم. در مورد زاویه‌ی دلفواه  $A$  از

مثلث قائم الزاویه نظیر شکل مقابل داریم:



$$\sin A = \frac{y}{r}, \quad \cos A = \frac{x}{r}, \quad \tan A = \frac{y}{x}$$

و همچنین می‌دانیم که روابط زیر در حالت کلی برای این نسبت‌ها برقرار است:

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

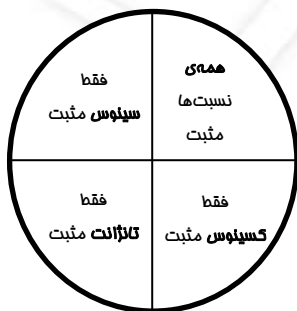
در ادامه به تکمیل بحث مثلثات می‌پردازیم.

۴. نکته مهم: برای مفظ آسان نوامی که در آن‌ها نسبت‌های مثلثاتی مثبتند از قانونی به نام "هستک"

استفاده می‌کنیم. به این معنا که "همه"ی نسبت‌های مثلثاتی در نامیه اول مثبتند و در نامیه دوم فقط

سینوس، در نامیه سوم فقط تانژانت و در نامیه چهارم فقط کسینوس مثبت است. از این نکته‌ی ساده

برای درک بهتر ادامه‌ی بحث استفاده می‌کنیم.



۲) مماسبه نسبت‌های مثلثاتی زوایای خاص:فرض کنیم  $\alpha$  یک زاویه ماده باشد، داریم:

مماسبه نسبت‌های مثلثاتی  $\left(\frac{\pi}{p} \pm \alpha\right)$ : همی نسبت‌های مثلثاتی با افزوده شدن و یا کاهش زاویه آن‌ها از مقدار  $\frac{\pi}{p}$  با توجه به تعریف،

تغییر نسبت می‌دهند. اما زاویه ی  $\left(\frac{\pi}{p} - \alpha\right)$  در نامیه ی اول و  $\left(\frac{\pi}{p} + \alpha\right)$  در نامیه ی دوم واقع است، لذا داریم:

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{p} - \alpha\right) &= & , \quad \cos\left(\frac{\pi}{p} - \alpha\right) &= & , \quad \tan\left(\frac{\pi}{p} - \alpha\right) &= \\ \sin\left(\frac{\pi}{p} + \alpha\right) &= & , \quad \cos\left(\frac{\pi}{p} + \alpha\right) &= & , \quad \tan\left(\frac{\pi}{p} + \alpha\right) &= \end{aligned}$$

مماسبه ی نسبت‌های مثلثاتی  $(\pi \pm \alpha)$ : نسبت‌های مثلثاتی با افزوده شدن و یا کاهش زاویه آن‌ها از مقدار  $\pi$  با توجه به تعریف شان، تغییر نسبت نمی‌دهند. اما زاویه ی  $(\pi - \alpha)$  در نامیه ی دوم و  $(\pi + \alpha)$  در نامیه ی سوم واقع است، لذا داریم:

$$\begin{aligned} \sin(\pi - \alpha) &= & , \quad \cos(\pi - \alpha) &= & , \quad \tan(\pi - \alpha) &= \\ \sin(\pi + \alpha) &= & , \quad \cos(\pi + \alpha) &= & , \quad \tan(\pi + \alpha) &= \end{aligned}$$

مماسبه نسبت‌های مثلثاتی  $(-\alpha)$  و  $(2\pi - \alpha)$ : چون این دو زاویه در نامیه ی چهارم واقع می‌شود، پس با توجه به تعریف نسبت‌های مثلثاتی به راحتی فوهم داشت:

$$\sin(2\pi - \alpha) = \sin(-\alpha) = \quad , \quad \cos(2\pi - \alpha) = \cos(-\alpha) = \quad , \quad \tan(2\pi - \alpha) = \tan(-\alpha) =$$

مماسبه نسبت‌های مثلثاتی  $(p\pi + \alpha)$ : چون این دو زاویه در نامیه ی اول واقع می‌شود، پس هیچکدام از نسبت‌های مثلثاتی تغییری نمی‌کنند، پس داریم:

$$\sin(p\pi + \alpha) = \quad , \quad \cos(p\pi + \alpha) = \quad , \quad \tan(p\pi + \alpha) =$$

مثال ۳: مقدار نسبت‌های مثلثاتی زیر را بیابید.

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{13\pi}{4}\right) &= & , \quad \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) &= & , \quad \tan\left(\frac{14\pi}{3}\right) &= \\ \cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) &= & , \quad \tan\left(\frac{7\pi}{4}\right) &= & , \quad \sin\left(\frac{7\pi}{4}\right) &= \\ \cos\left(\frac{9\pi}{4}\right) &= & , \quad \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) &= & , \quad \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) &= & , \quad \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) &= \end{aligned}$$

تست ۱: حاصل عبارت  $\frac{\sin 250^\circ + \sin 700^\circ}{\cos 560^\circ - \cos 110^\circ}$  با فرض  $\tan 20^\circ = 0/4$ ، کدام است؟

$$\frac{5}{8} \quad (۴) \quad \frac{7}{3} \quad (۳) \quad \frac{3}{4} \quad (۲) \quad -\frac{3}{4} \quad (۱)$$

تست ۲: - حاصل عبارت  $(\text{Cotg } 40^\circ + \text{Cotg } 50^\circ) \text{Cos } 70^\circ$  کدام است؟

Sin  $20^\circ$  (۴)

$2 \text{Cos } 10^\circ$  (۳)

$4 \text{Sin } 10^\circ$  (۲)

Sin  $10^\circ$  (۱)

تست ۳: - ساده شده‌ی عبارت  $\text{Cot} \left( \frac{3\pi}{2} + x \right) \tan \left( \frac{\pi}{2} + x \right) - \text{Sin} \left( \frac{7\pi}{2} - x \right) \text{Cos} (\Delta\pi - x)$  برابر است با:

$-\text{Sin}^2 x$  (۴)

$\text{Sin}^2 x$  (۳)

$-\text{Cos}^2 x$  (۲)

$\text{Cos}^2 x$  (۱)

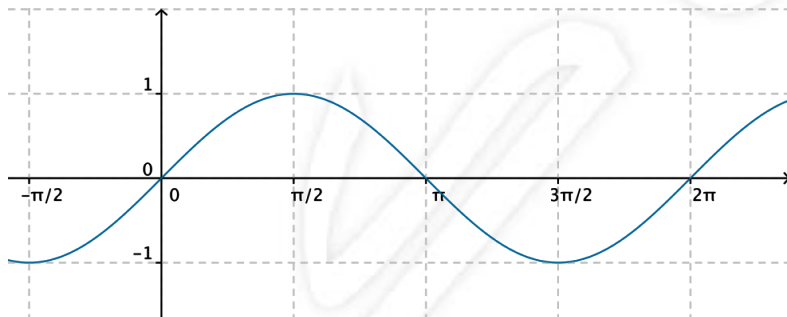
(۳) رسم توابع مثلثاتی:

با توجه به جدول مقادیرهای مثلثاتی و مطالبی که در بالا گفته شد، می‌توانیم توابع مثلثاتی را رسم کنیم.

۱. رسم تابع مثلثاتی سینوس: می‌دانیم جدول مثلثاتی این نسبت به صورت زیر است:

x	°	۳۰°	۴۵°	۶۰°	۹۰°
sinx	۰	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	۱

نمودار این نسبت به صورت مقابل است، با توجه این نمودار داریم:

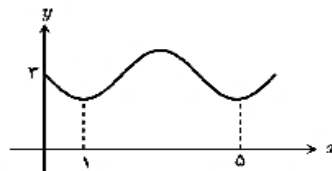


۱. دامنه‌ی تابع  $y = \sin x$ ،  $D = \mathbb{R}$  است.

۲. دوره‌ی تناوب تابع  $y = \sin Ax$  برابر  $T = \frac{2\pi}{|A|}$

است.

تست ۴: شکل رویه‌ی تقسیمی از نمودار تابع  $y = a + \sin(b\pi x)$  است. مقدار  $y$  در نقطه‌ی  $x = \frac{25}{3}$ ، کدام است؟



$3/5$  (۴)

۲ (۳)

$2/5$  (۲)

۲ (۱)



((امام صادق(علیه السلام): تسبیحات فاطمه زهرا علیها السلام در هر روز پس از هر نماز نزد من محبوب تر از هزار رکعت نماز در هر روز است.))

۲. رسم تابع مثلثاتی کسینوس: می‌دانیم جدول مثلثاتی این نسبت به صورت زیر است:

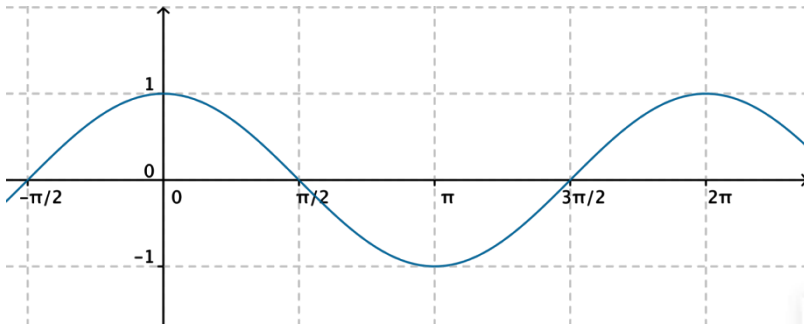
X	۰°	۳۰°	۴۵°	۶۰°	۹۰°
cosx	۱	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	۰

نمودار این نسبت به صورت مقابل است، با توجه این نمودار داریم:

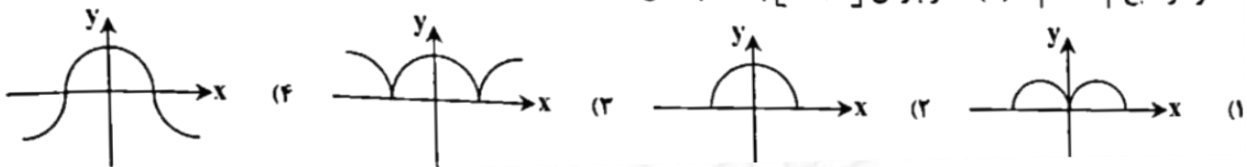
۱. دامنه‌ی تابع  $y = \cos x$ ،  $D = \mathbb{R}$  است.

۲. دوره‌ی تناوب تابع  $y = \cos Ax$  برابر  $T = \frac{2\pi}{|A|}$

است.



تست ۵: - نمودار تابع  $f(x) = |\cos x|$  در بازه‌ی  $[-\pi, \pi]$  به کدام شکل است؟



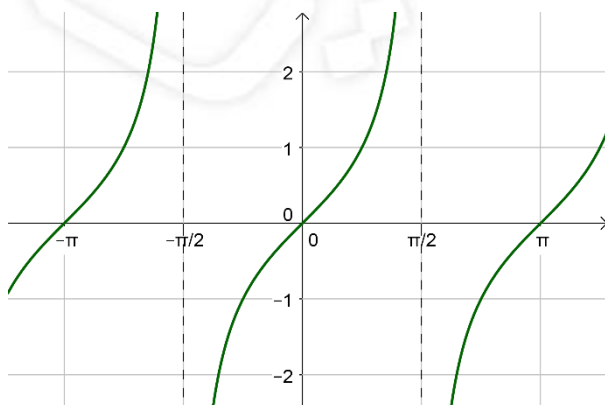
۳. رسم تابع مثلثاتی تانژانت: می‌دانیم جدول مثلثاتی این نسبت به صورت زیر است:

X	۰°	۳۰°	۴۵°	۶۰°	۹۰°
tanx	۰	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	۱	$\sqrt{3}$	ت.ن

نمودار این نسبت به صورت مقابل است، با توجه این نمودار داریم:

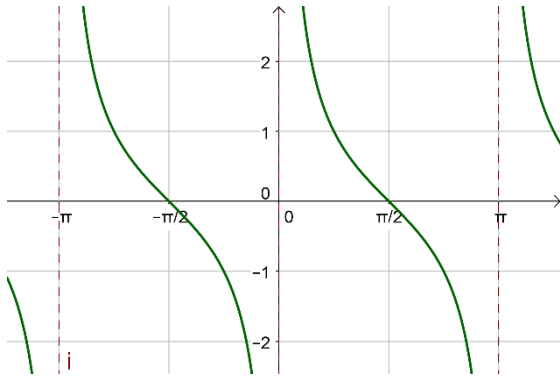
۱. دامنه‌ی تابع  $y = \tan x$  برابر  $D = \mathbb{R} - \left\{ k\pi + \frac{\pi}{2} \right\}$  است.

۲. دوره‌ی تناوب تابع  $y = \tan Ax$  برابر  $T = \frac{\pi}{|A|}$  است.



د) رسم تابع مثلثاتی کتانژانت: می‌دانیم جدول مثلثاتی این نسبت به صورت زیر است:

X	°	۳۰°	۴۵°	۶۰°	۹۰°
tanx	ت.ن	$\sqrt{3}$	۱	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	۰



نمودار این نسبت به صورت زیر است، با توجه این نمودار داریم:

۱. دامنه تابع  $y = \cot x$  برابر  $\mathbb{R} - \{k\pi\}$  است.

۲. دوره تناوب تابع  $y = \cot Ax$  برابر  $T = \frac{\pi}{|A|}$  است.

نکته: تابع مثلثاتی  $y = \sin \alpha$  در  $\alpha = k\pi$  دارای مقدار صفر است و همچنین تابع مثلثاتی  $y = \cos \alpha$  در  $\alpha = k\pi + \frac{\pi}{2}$  دارای مقدار

صفر است، که در آن  $k$  یک عدد صحیح است.

مثال ۴: توابع  $y = \sin 4x$  و  $y = \cos \frac{\pi x}{p}$  در کجا صفر هستند؟

#### ۱۴) چند رابطه مهم در نسبت‌های مثلثاتی:

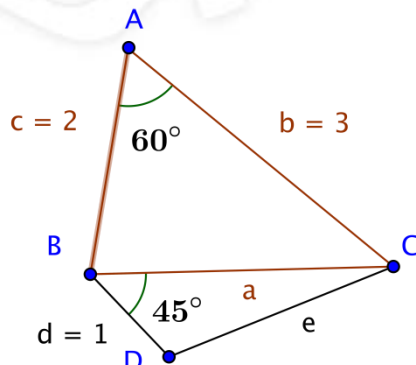
مثلث دلفواه ABC را در نظر می‌گیریم. اگر اضلاع رو به رو به زاویه‌های A و B و C این مثلث را به ترتیب a و b و c بنامیم، می‌توانیم روابط زیر را برای نسبت‌های مثلثاتی بیان کنیم.

#### رابطه‌ی کسینوس‌ها:

این رابطه برای محاسبه‌ی طول ضلع مثلث با توجه به زاویه مقابل آن و همچنین اضلاع دیگر مثلث است. داریم:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A, \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2accosB, \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2abc \cos C$$

مثال ۵: با توجه به شکل مقابل طول ضلع a و e را بیابید.



این رابطه برای تناسبی مسامت مثلث دلفواه و همچنین رابطه‌ی بین زاویه‌ها و اضلاع مثلث دلفواه می‌باشد. داریم:

$$S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ac\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C, \quad \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

مثال ۶: در مثال بالا مسامت مثلث‌های ABC و BCD را بیابید.

مماسبندی نسبت‌های مثلثاتی مجموع و تفاضل دو زاویه:

فرض کنیم  $\alpha$  و  $\beta$  دو زاویه دلفواه باشند. در این صورت داریم:

$$1) \quad \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

مثال ۷: مقدار  $\sin 75^\circ$  و  $\sin 105^\circ$  را بیابید.

$$\sin 75^\circ =$$

$$\sin 105^\circ =$$

نکته: با توجه به مطلب فوق برای  $\sin 2\alpha$  داریم:

$$\sin 2\alpha = \sin(\alpha + \alpha) = \sin \alpha \cos \alpha + \cos \alpha \sin \alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha$$

$$\Rightarrow \sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha$$

$$2) \quad \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

مثال ۸: مقدار  $\sin 15^\circ$  از دو راه بیابید.

$$\sin 15^\circ =$$

$$\sin 15^\circ =$$

$$3) \quad \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

مثال ۹: مقدار  $\cos 75^\circ$  و  $\cos 105^\circ$  را بیابید.

$$\cos 75^\circ =$$

$$\cos 105^\circ =$$

نکته ۱: با توجه به مطلب فوق برای  $\cos 2\alpha$  داریم:

$$\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sin \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\Rightarrow \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

نکته ۲: با توجه به اینکه  $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$  خواهیم داشت:

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha - 1 + \cos^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$$

$$\Rightarrow \cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$$

((امام علی (علیه السلام): فضای هر طرفی در اثر ممتوای خود تنگتر می‌شود مگر طرف دانش که با تمصیل علوم، فضای آن بازتر می‌گردد.))

نکته ۳: با توجه به اینکه  $\cos^p \alpha = 1 - \sin^p \alpha$  خواهیم داشت:

$$\cos^p \alpha = \cos^p \alpha - \sin^p \alpha = 1 - \sin^p \alpha - \sin^p \alpha = 1 - 2\sin^p \alpha$$

$$\Rightarrow \cos^p \alpha = 1 - 2\sin^p \alpha$$

نکته ۴: از نکات ۲ و ۳ استفاده می‌کنیم و روابط مهم زیر را می‌یابیم (کاربرد در قسمت هم ارزی‌های مد):

$$\cos^p \alpha = \frac{1 + \cos^p \alpha}{2}, \quad \sin^p \alpha = \frac{1 - \cos^p \alpha}{2}$$

مثال ۱: حاصل  $\sin^{2p} / 5^\circ$  و  $\cos^{2p} / 5^\circ$  را بیابید.

$$\sin^{2p} / 5^\circ = \frac{1 - \cos^{2p} / 5^\circ}{2} = \frac{1 - \frac{1 - \sqrt{p}}{2}}{2} = \frac{2 - 1 + \sqrt{p}}{4} \Rightarrow \sin^{2p} / 5^\circ = \frac{1 + \sqrt{p}}{4} = \frac{\sqrt{p} + 1}{4}$$

$$\cos^{2p} / 5^\circ =$$

$$۴) \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

مثال ۱: مقدار  $\cos 15^\circ$  از دو راه بیابید.

$$\cos 15^\circ =$$

$$\cos 15^\circ =$$

$$۴) \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}, \quad \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

مثال ۲: عبارت  $\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$  را راه ساده کنید.

تست ۶: - حاصل  $\cos 10^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ$  با کدام گزینه برابر است؟

۱ (۴)

 $\frac{1}{8} \tan 80^\circ$  (۳)

 $\frac{1}{8}$  (۲)

 $\frac{1}{8} \sin 80^\circ$  (۱)

تست ۷: - مقدار عددی عبارت  $\frac{1 - \tan 15^\circ}{1 + \tan 15^\circ}$  کدام است؟

$$\frac{\sqrt{3}}{3} \quad (۴)$$

$$۱ \quad (۳)$$

$$\sqrt{3} \quad (۲)$$

$$۲ \quad (۱)$$

### ۵) حل معادلات مثلثاتی:

حل معادلات سینوسی: اگر داشته باشیم  $\sin x = a = \sin \alpha$ ، در این صورت جواب‌های کلی معادله به صورت زیر است:

$$\begin{cases} x = \nu k\pi + \alpha \\ x = \nu k\pi + \pi - \alpha \end{cases}$$

حل معادلات کسینوسی: اگر داشته باشیم  $\cos x = a = \cos \alpha$ ، در این صورت جواب‌های کلی معادله به صورت زیر است:

$$\begin{cases} x = \nu k\pi + \alpha \\ x = \nu k\pi - \alpha \end{cases}$$

حل معادلات تانژانتی: اگر داشته باشیم  $\tan x = a = \tan \alpha$ ، در این صورت جواب‌های کلی معادله به صورت زیر است:

$$x = k\pi + \alpha$$

مثال ۱۳: معادلات زیر را حل کنید.

$$\nu \sin x - \sqrt{\nu} = 0$$

$$\nu \cos^{\nu} x - \cos x = 0$$

$$\tan^{\nu} x - \nu = 0$$

$$\sin \nu x - \sin x = 0$$

$$\cos \Delta x - \cos x = 0$$

$$\tan x - \nu \cot x = 1$$

تست ۸: - جواب کلی معادله  $\sin^2 x = 1 - \tan\left(\frac{3\pi}{4} - x\right)$  به کدام صورت است؟

$$(۴) \quad k\pi + \frac{\pi}{4}$$

$$(۳) \quad k\pi - \frac{\pi}{4}$$

$$(۲) \quad 2k\pi + \frac{\pi}{4}$$

$$(۱) \quad 2k\pi - \frac{\pi}{4}$$

تست ۹: - جواب کلی معادله  $2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$  کدام است؟

$$(۴) \quad \frac{2k\pi}{3}$$

$$(۳) \quad k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

$$(۲) \quad 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$$

$$(۱) \quad 2k\pi$$

### تست‌های کنکور

#### معادلات مثلثاتی

تست ۱۰: جواب کلی معادله  $\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 1 + \sin\left(\frac{5\pi}{4} + x\right)$  کدام است؟

(تجربی ۸۵)

$$(۴) \quad 2k\pi + \frac{\pi}{4}$$

$$(۳) \quad 2k\pi - \frac{\pi}{4}$$

$$(۲) \quad 2k\pi - \frac{\pi}{4}$$

$$(۱) \quad k\pi + \frac{\pi}{4}$$

تست ۱۱: جواب کلی معادله  $2\sin(\pi - x)\cos\left(\frac{2\pi}{3} + x\right) + 3\cot x \sin(\pi + x) = 0$  کدام است؟

(تجربی ۸۷)

$$(۴) \quad 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$$

$$(۳) \quad 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

$$(۲) \quad 2k\pi + \frac{2\pi}{3}$$

$$(۱) \quad 2k\pi + \frac{\pi}{3}$$

تست ۱۲:

اگر  $\tan \frac{2\pi}{3} \sin\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) = 1$  باشد، مقدار  $\cos 2x$  کدام است؟

(تجربی ۸۸)

$\frac{2}{3}$  (۴)

$\frac{1}{3}$  (۳)

$-\frac{1}{3}$  (۲)

$-\frac{2}{3}$  (۱)

تست ۱۳:

جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی  $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{3}$  به کدام صورت است؟

(تجربی ۸۹)

$k\pi + \frac{\pi}{3}$  (۴)

$k\pi + \frac{\pi}{6}$  (۳)

$\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{3}$  (۲)

$\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$  (۱)

تست ۱۴:

جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی زیر، کدام است؟  $\sin(\pi + x)\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - 2\sin(\pi - x) + 1 = 0$ 

(سراسری ۹۰)

$2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$  (۴)

$2k\pi + \frac{\pi}{4}$  (۳)

$2k\pi + \frac{\pi}{6}$  (۲)

$2k\pi - \frac{\pi}{4}$  (۱)

تست ۱۵:

جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی  $\sin^2 x - \cos^2 x = \sin\left(\frac{2\pi}{3} + x\right)$  به کدام صورت است؟

(سراسری ۹۱)

$2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$  (۴)

$2k\pi + \frac{\pi}{3}$  (۳)

$\frac{2k\pi}{3}$  (۲)

$\frac{k\pi}{3}$  (۱)

تست ۱۶:

جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی  $\sin^2 x - \cos^2 x = \sin^2 \frac{5\pi}{4}$  به کدام صورت است؟

(سراسری ۹۲)

$k\pi \pm \frac{\pi}{3}$  (۴)

$k\pi \pm \frac{\pi}{6}$  (۳)

$2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$  (۲)

$2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$  (۱)

((امام علی علیه السلام: علم گنج بزرگی است که با فرج کردن تمام نمی شود.))

تست ۱۷:

اگر  $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{2}{3}$  باشد، مقدار  $\cos 2x$  کدام است؟

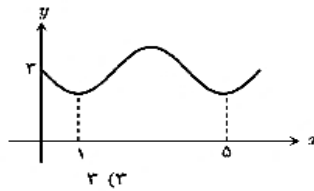
(سراسری ۹۳)

- (۱)  $-\frac{2}{9}$       (۲)  $-\frac{1}{9}$       (۳)  $\frac{1}{9}$       (۴)  $\frac{2}{9}$

تست ۱۸:

شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع  $y = a + \sin(b\pi x)$  است. مقدار  $y$  در نقطه‌ی  $x = \frac{25}{4}$ ، کدام است؟

(سراسری ۹۳)



- (۱) ۲      (۲)  $\frac{3}{5}$       (۳) ۳      (۴)  $\frac{5}{3}$

تست ۱۹:

حاصل عبارت  $\frac{\cos 285^\circ - \sin 255^\circ}{\sin 525^\circ - \sin 105^\circ}$ ، با فرض  $\tan 15^\circ = \frac{5}{28}$ ، کدام است؟

(سراسری ۹۴)

- (۱)  $-\frac{16}{9}$       (۲)  $-\frac{9}{16}$       (۳)  $\frac{9}{16}$       (۴)  $\frac{16}{9}$

تست ۲۰:

اگر  $\tan \beta = \frac{1}{2}$  و  $\alpha - \beta = \frac{\pi}{4}$  باشند، مقدار  $\sin 2\alpha$  کدام است؟

(سراسری ۹۴)

- (۱)  $\frac{5}{45}$       (۲)  $\frac{5}{6}$       (۳)  $\frac{5}{75}$       (۴)  $\frac{5}{8}$

تست ۲۱:

جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی  $1 = 2 \cos^2 x + 2 \sin x \cos x$ ، به کدام صورت است؟

(سراسری ۹۴)

- (۱)  $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$       (۲)  $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$       (۳)  $k\pi - \frac{\pi}{8}$       (۴)  $k\pi + \frac{\pi}{8}$



تست ۲۲: اگر زاویه منفرجه و  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$  باشد، مقدار  $\tan\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$  کدام است؟ (ف) (۸۵)

- (۱)  $-7$  (۲)  $-\frac{1}{5}$  (۳)  $\frac{1}{5}$  (۴)  $7$

تست ۲۳: جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی  $2 \tan x \cos^2 x = 1$  به کدام صورت است؟ (ف) (۸۶)

- (۱)  $k\pi - \frac{\pi}{4}$  (۲)  $k\pi + \frac{\pi}{4}$  (۳)  $2k\pi - \frac{\pi}{4}$  (۴)  $2k\pi + \frac{\pi}{4}$

تست ۲۴: جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی  $\cos^2 x \sin(2\pi - x) - \sin^2 x \cos(\pi + x) = \cos \frac{3\pi}{2}$  کدام است؟ (ف) (۸۷)

- (۱)  $\frac{k\pi}{4}$  (۲)  $\frac{k\pi}{2}$  (۳)  $k\pi + \frac{\pi}{4}$  (۴)  $k\pi \pm \frac{\pi}{4}$

تست ۲۵: اگر  $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{2}{3}$ ، آن‌گاه  $\tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$  کدام است؟ (ف) (۸۸)

- (۱)  $-\frac{1}{3}$  (۲)  $-\frac{1}{5}$  (۳)  $\frac{1}{5}$  (۴)  $\frac{1}{3}$

تست ۲۶: جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی  $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$  به کدام صورت است؟ (ف) (۸۹)

- (۱)  $k\pi - \frac{\pi}{3}$  (۲)  $k\pi + \frac{\pi}{3}$  (۳)  $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$  (۴)  $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

تست ۲۷: جواب کلی معادله مثلثاتی  $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$  به کدام صورت است؟

(ف) (۹۰)

- (۱)  $k\pi - \frac{\pi}{3}$  (۲)  $k\pi + \frac{\pi}{3}$  (۳)  $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$  (۴)  $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

تست ۲۸: نمودار تابع  $y = 3 \sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)$  روی بازه  $[-\pi, \frac{3\pi}{4}]$  در چند نقطه محور xها را قطع می‌کند؟

(ف) (۹۱)

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

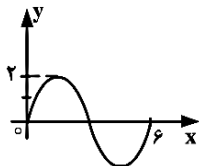
تست ۲۹: مجموع تمام جواب‌های معادله‌ی مثلثاتی  $\sin 5x + \sin 4x = 1 + \cos \pi$  در بازه  $[0, 2\pi]$  کدام است؟

(ف) (۹۲)

- (۱)  $8\pi$  (۲)  $9\pi$  (۳)  $10\pi$  (۴)  $11\pi$

تست ۳۰: شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع  $y = a \sin(b\pi x)$  است.  $a + b$  کدام است؟

تست ۳۰: (ف) (۹۳)



- (۱)  $\frac{4}{3}$  (۲)  $\frac{5}{3}$  (۳)  $\frac{7}{3}$  (۴)  $\frac{8}{3}$

تست ۳۱: اگر  $\tan \alpha = 2$  و  $\tan \beta = \frac{1}{3}$  باشد، مقدار  $\tan(2\alpha - \beta)$  کدام است؟

تست ۳۱: (ف) (۹۳)

- (۱) -۲ (۲) -۲ (۳)  $\frac{1}{2}$  (۴) ۳

تست ۳۲: حاصل عبارت  $\frac{\sin 250^\circ + \sin 70^\circ}{\cos 560^\circ - \cos 110^\circ}$  با فرض  $\tan 20^\circ = 0.4$ ، کدام است؟

فرا ۹۴

(۱)  $-\frac{3}{4}$  (۲)  $\frac{3}{4}$  (۳)  $\frac{7}{3}$  (۴)  $\frac{5}{8}$

تست ۳۳: اگر  $\tan \frac{x}{2} - \cot \frac{x}{2} = 1$  باشد، مقدار  $\tan 2x$ ، کدام است؟

فرا ۹۴

(۱)  $-\frac{3}{2}$  (۲)  $\frac{3}{4}$  (۳)  $\frac{4}{3}$  (۴)  $\frac{3}{2}$

تست ۳۴: جواب کلی معادله مثلثاتی  $\cos 3x + \cos x = 0$ ، با شرط  $\cos x \neq 0$  کدام است؟

فرا ۹۴

(۱)  $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$  (۲)  $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$  (۳)  $k\pi - \frac{\pi}{4}$  (۴)  $k\pi + \frac{\pi}{4}$

## تمرینات کتاب

معادلات زیر را حل کرده و جواب‌های کلی آن‌ها را بیابید.

۱)  $2\sin^2 x - 1 = 0$

۲)  $2\cos x + \sqrt{3} = 0$

۳)  $\sin^2 x + \sin x = 0$

۴)  $\tan x = 3\cot x$

۵)  $2\sin^2 x - \sin^2 x - 1 = 0$

۶)  $\sin^2 x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

۷)  $\sin^2 x \cos x - \cos^2 x \sin x = 1$

۸)  $\cos^2 x - 3\cos x + 2 = 0$

۹)  $\cos^2 x - \sin^2 x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

۱۰)  $\cos x - \cos^2 x = 0$

## فصل سوم (مشتق و کاربردهای آن)

## فصل سوم: مشتق و کاربردهای آن

آهنگ متوسط تغییر: آهنگ متوسط تغییر تابع  $f$  از نقطه  $a$  تا  $b$  از دامنه آن برابر کسر است.  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

تست ۱: در تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{36}{x^2}$ ، آهنگ متوسط تابع از  $x_1 = 2$  تا  $x_2 = 3$  چقدر از آهنگ لحظه‌ای آن در  $x = \sqrt[3]{12}$  بیشتر است؟

۲/۵ (۴)

۲ (۳)

۱/۵ (۲)

۱ (۱)

تعریف مشتق (آهنگ آنی یا لمظه‌ای تغییر): اگر تابع  $f$  در همسایگی نقطه  $x = a$  تعریف شده باشد، مشتق تابع  $f$  در نقطه  $x = a$

که با نماد  $f'(a)$  نشان می‌دهیم، را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

اگر مد بالا وجود داشته باشد، می‌گوییم تابع  $f$  در  $x = a$  مشتق پذیر است.

مثال ۱: به کمک تعریف، مشتق توابع زیر را در  $x = a$  بیابید.  $f(x) = px + 1$ ,  $f(x) = \frac{1}{x}$

تست ۲: اگر  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = px$ ، حاصل  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x^p - 9}$  کدام است؟

۹ (۴)

 $\frac{1}{p}$  (۳) $\frac{1}{p}$  (۲) $\frac{3}{p}$  (۱)

نکته ۱: اگر تابع  $f$  در نقطه  $x = a$  مشتق پذیر باشد، داریم:  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+mh) - f(a+nh)}{h} = (m-n)f'(a)$

تست ۳: حد کدام یک از کسرهای زیر وقتی  $\Delta x \rightarrow 0$ ، برابر  $f'(x)$  است؟

$$\frac{f(x) - f(x + \Delta x)}{\Delta x} \quad (۲)$$

$$\frac{f(x + 2\Delta x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x} \quad (۱)$$

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x} \quad (۴)$$

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x} \quad (۳)$$

تست ۴: اگر  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = p$  حاصل ،  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x-ph)}{h}$  کدام است؟

(۱)  $p$       (۲)  $2p$       (۳)  $-p$       (۴)  $-4p$

تست ۵: اگر  $f'(p) = 5$  حاصل ،  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^p(p+3h) - f^p(p-h)}{(h^p - h)f(p)}$  کدام است؟ (الف)  $-40$       (ب)  $20$       (ج)  $10$       (د)  $5$

نکته ۲: اگر  $h(x) = f(x)g(x)$  و  $f(a) = 0$  داریم:  $h'(a) = f'(a)g(a)$ .

تست ۶: اگر  $f(x) = \frac{x + \sqrt{px}}{x-1} \cot \frac{\pi}{x}$  حاصل ،  $\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x-p}$  کدام است؟

(۱)  $-\pi$       (۲)  $\frac{-\pi}{p}$       (۳)  $\frac{\pi}{p}$       (۴)  $\pi$

تست ۷: اگر  $f(x) = \begin{cases} x-1 & x > 0 \\ x^p & x \leq 0 \end{cases}$  آنگاه حاصل  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x^p+1+h) - f(x^p+1)}{h}$  کدام است؟

(۱)  $x^p$       (۲)  $p(x^p+1)$       (۳)  $(x^p+1)^p$       (۴)  $1$

تست ۸: اگر  $f(x) = x^p - x$  ،  $g(x) = \sqrt{px}$  حاصل  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(p+h)g(p+h) - f(p)g(p)}{h}$  کدام است؟

(۱)  $3$       (۲)  $4$       (۳)  $6$       (۴)  $7$

نکته ۳: به عبارت  $f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x-a}$  مشتق راست و به عبارت  $f'_-(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x-a}$  مشتق (است تابع  $f$  در نقطه  $x = a$  می گوییم).

تست ۹: در تابع با ضابطه  $f(x) = x\sqrt{x} + |x-1|$  مقدار  $f'_+(1) + 3f'_-(1)$  کدام است؟

(۱)  $2$       (۲)  $3$       (۳)  $4$       (۴)  $5$

تست ۱: اگر  $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1 - x^p}}$ ،  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h^p) - f(0)}{h^p}$  کدام است؟

- ۸ (۱)  $\frac{\sqrt{p}}{p}$  (۲)  $\sqrt{p}$  (۳) ۲ (۴)

تست ۱۱: اگر  $f(x) = \begin{cases} x^p - 5x + 4 & , x < 1 \\ x^q - \sqrt{x} & , x \geq 1 \end{cases}$  مقدار  $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+ph) - f(1-h)}{h}$  کدام است؟

### مماسه مشتق توابع:

فرمول های زیر را برای مماسه مشتق توابع داریم:

الف) مشتق توابع ثابت: مشتق توابع ثابت صفر می باشد. یعنی:  $f(x) = c \Rightarrow f'(x) = 0$

ب) مشتق تابع  $f(x) = x^n$ : بصورت مقابل است:  $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$

مثال ۲: مشتق توابع زیر را بیابید.

$$f(x) = x^5 \Rightarrow f'(x) = \quad , \quad f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) =$$

پ) مشتق جمع و تفریق توابع: اگر توابع  $f$  و  $g$  در نقطه  $x = a$  مشتق پذیر باشند، تابع  $f \pm g$  نیز در این نقطه مشتق پذیر است و

$$\text{داریم: } (f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$$

مثال ۳: مشتق توابع زیر را بیابید.

$$f(x) = x^5 + 3x - 2 \Rightarrow f'(x) = \quad , \quad f(x) = \sqrt[3]{x} + x^3 \Rightarrow f'(x) =$$

$$y = kx^n \Rightarrow y' = knx^{n-1}, \quad y = kx \Rightarrow y' = k \quad \text{نکته ۴: در حالت کلی داریم:}$$

$$f(x) = 2x^3 - \frac{x}{5} + 2\sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \quad \text{مثال ۴:}$$

نکته ۵: اگر  $y = f^n$ ، آن گاه داریم:  $y' = nf^{n-1}f'$

$$y = (\sqrt{x} - x^p)^m \Rightarrow y' = \quad , \quad y = (x^5 - 3x)^5 \Rightarrow y' = \quad \text{مثال ۵:}$$

تست ۱۲: اگر  $y = \sqrt[5]{x^3 - 2x}$ ، آن گاه حاصل  $5y^4 y'$  کدام است؟

- (۱)  $-\frac{5(3x^2 - 2)}{\sqrt[5]{(x^3 - 2x)^4}}$  (۲)  $2 - 3x^2$   
 (۳)  $3x^2 - 2$  (۴)  $5(3x^2 - 2)\sqrt[5]{(x^3 - 2x)^4}$

ت) مشتق ضرب توابع: اگر توابع  $f$  و  $g$  در نقطه  $x = a$  مشتق پذیر باشند، تابع  $fg$  نیز در این نقطه مشتق پذیر است و داریم:

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$

مثال ۶: مشتق توابع زیر را بیابید.

$$y = (\sqrt{x} + 1)(x^m - x^p) \Rightarrow y' =$$

$$y = \sqrt{x}(4x - 1)^p \Rightarrow y' =$$

تست ۱۳: اگر  $f(x) = x - \sqrt{x^p - x}$ ،  $g(x) = x + \sqrt{x^p - x}$ ، حاصل  $f'(9)g(9) + f(9)g'(9)$  کدام است؟

۱) ۳      ۲)  $\frac{1}{18}$       ۳)  $\frac{1}{3}$       ۴)  $\frac{1}{3}$

مثال ۷: اگر  $f(x) = \cos x \cos^p x \cos^q x$  باشد، حاصل  $\cos x f'(x) + \sin x f'(x)$  را بیابید.

ت/مشتق تقسیم توابع: اگر توابع  $f$  و  $g$  در نقطه  $x = a$  مشتق پذیر باشند، تابع  $\frac{f}{g}$  نیز در این نقطه مشتق پذیر است و داریم:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$$

مثال ۸: مشتق توابع زیر را بیابید.

$$y = \frac{x}{\sqrt{x+1}}$$

$$y = \frac{\sqrt{x} - x^p}{\sqrt{x}}$$

ت/مشتق توابع رادیکالی: اگر  $y = \sqrt[p]{f}$ ، آن گاه داریم:  $y' = \frac{f'}{p\sqrt[p]{f}}$

$$y = \sqrt{x^r - 1} \Rightarrow y' =$$

$$y = \sqrt[3]{2x - x^r} \Rightarrow y' =$$

مثال ۹:

نکته ۶: در حالت کلی داریم:  $\left(\sqrt[m]{u^n}\right)' = \frac{nu'}{m\sqrt[m]{u^{m-n}}}$

$$\left(\sqrt[5]{(x^p + 4x)^m}\right)' =$$

$$\left(\sqrt[3]{(\sqrt{x} - 1)^p}\right)' =$$

مثال ۱۰:

ت/مشتق توابع مثلثاتی: مشتق توابع مثلثاتی با استفاده از فرمول های زیر محاسبه می شوند:

$$y = \sin u \Rightarrow y' = u' \cos u, \quad y = \cos u \Rightarrow y' = -u' \sin u$$

$$y = \tan x \Rightarrow y' = u'(1 + \tan^2 u), \quad y = \cot u \Rightarrow y' = -u'(1 + \cot^2 u)$$

مثال ۱۱: مشتق بگیرید.

$$y = \sin 5x \Rightarrow y' =, \quad y = \sqrt{x+5} \cos^3 x \Rightarrow y' =$$

$$y = \tan\left(5x - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \Rightarrow y' =, \quad y = \sin^3(\sqrt{x}) \Rightarrow y' =$$



$$y = 3 \sin x \cos x \Rightarrow y' =$$

$$, y = \frac{\tan x}{\cos x} \Rightarrow y' =$$

قاعده زنجیری:

قضیه: فرض کنید تابع  $g$  در نقطه  $x$  تابع  $f$  در نقطه  $g(x)$  مشتق پذیر باشد، آن گاه تابع مرکب  $f \circ g$  در نقطه  $x$  مشتق پذیر است و داریم:

$$(f \circ g)'(x) = g'(x) f'(g(x))$$

به عبارت دیگر اگر داشته باشیم  $y = f(u)$  که در آن  $u = g(x)$  باشد در آن صورت داریم:  $y'_x = f'_u u'_x$  یا به عبارتی  $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$

مثال ۱۲: مشتق  $y = \sqrt{x^4 - 3x}$  را به کمک قاعده زنجیری بیابید.

مثال ۱۳: مشتق بگیرید. ۱)  $y = \sin(x^3)$ , ۲)  $y = \cos^3 x$ , ۳)  $y = \sin^3(4x-1)$

تست ۱۴: اگر مشتق تابع  $f(x)$  برابر با  $\frac{1}{x}$  باشد آن مشتق تابع  $f(ax)$  کدام است؟

$$\frac{a^2}{x} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{ax} \quad (۳)$$

$$\frac{a}{x} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{x} \quad (۱)$$

تست ۱۵: اگر مشتق تابع  $f(x)$  برابر با  $\tan x$  باشد آن گاه مشتق  $y=f(ax)$  کدام است؟

$$a \tan ax \quad (۴)$$

$$\tan x \quad (۳)$$

$$\tan ax \quad (۲)$$

$$a \tan x \quad (۱)$$

تست ۱۶: اگر  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \frac{3}{2}$  آن گاه مشتق  $f\left(\frac{1}{x}\right)$  در  $x = \frac{1}{3}$  کدام است؟

$$\frac{1}{6} \quad (۴)$$

$$\frac{-1}{6} \quad (۳)$$

$$\frac{27}{2} \quad (۲)$$

$$\frac{-27}{2} \quad (۱)$$

((امام صادق علیه السلام: نماز به وقت، نیکی کردن به پدر و مادر و جهاد در راه خداوند بهترین کارها است.))

تست ۱۷: اگر مشتق  $f(\operatorname{tg}x)$  برابر  $\frac{1+\operatorname{tg}^2x}{\operatorname{tg}x}$  باشد، آن گاه مشتق  $f(\operatorname{Sin}x)$  کدام است؟

$$\frac{1+\operatorname{Sin}^2x}{\operatorname{Sin}x} \quad (۲) \qquad \cot gx \quad (۱)$$

$$\operatorname{tg}x \quad (۴) \qquad (1+\operatorname{Sin}^2x)\operatorname{Cot}gx \quad (۳)$$

تست ۱۸: هر گاه تابع  $f$  فرد باشد و داشته باشیم:  $f'(3) = -2$  آنگاه  $f'(-3)$  کدام است؟

۱ (۱)                      -۲ (۲)                      -۱ (۳)                      ۲ (۴)

تست ۱۹: اگر  $y = \sqrt{pu} - \frac{1}{u}$  و  $u = \sin^p x - \cos^p x$ ، مقدار  $\frac{dy}{dx}$  به ازای  $\frac{\pi}{۴}$  کدام است؟

۱۵ (۴)                      ۱۲ (۳)                      ۱۰ (۲)                      ۹ (۱)

(ع) مشتق توابع نمایی و لگاریتم طبیعی: مشتق توابع نمایی با استفاده از فرمول های زیر مناسب می شوند:

$$(e^u)' = u'e^u, (a^u)' = u'a^u \ln a, \ln|u| = \frac{u'}{u}$$

مثال ۱۴: مشتق بگیرید.

$$y = e^{ux} + e^x + e^{-x} \Rightarrow y' = \qquad , y = 3^x + 2^x \Rightarrow y' =$$

$$y = \ln x^p + \ln|x+1| \Rightarrow y' = \qquad , y = xe^{ux^p-1} \Rightarrow y' =$$

$$y = 5^{\frac{x}{p}} \Rightarrow g'(x) = \qquad , y = \ln(\sqrt{x^p} + c) \Rightarrow y' =$$

(ف) مشتق توابع ضمنی: اگر تابع  $f$  بر اساس متغیرهای  $x$  و  $y$  باشد، برای مناسبه مشتق از رابطه  $y'_x = \frac{-f'_x}{f'_y}$  استفاده می کنیم، که در آن

منظور از  $f'_x$  مشتق تابع بر اساس متغیر  $x$  است ( $y$  را عدد فرض می کنیم) و بر عکس این موضوع برای  $f'_y$  است.

مثال ۱۵: مشتق بگیرید.

$$x^p + xy + \sin y + c = 0 \Rightarrow y'_x = \qquad , x^m + y^m + e^{xy} = 0 \Rightarrow y'_x =$$

$$\sin(xy) + x^p y^p + y = 0 \Rightarrow y'_x =$$

پیامبر اکرم (ص): ((ده صفت در هر که باشد نشان دهنده عقل کامل و انسان سالم است:))

تست ۲۰: در نمودار منحنی  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 4$ ، در کدام نقطه خط مماس بر نمودار منحنی موازی خط  $y = -x$  است؟

(۱)  $x = 2$       (۲)  $x = \sqrt{2}$       (۳)  $x = 4$       (۴)  $x = 1$

تست ۲۱: در رابطه ضمنی  $\sqrt{y} + \sqrt[4]{y} + \sqrt[5]{y} = xy^3$  حاصل  $x'(1)$  کدام است؟

(۱)  $\frac{156}{27}$       (۲)  $-\frac{27}{156}$       (۳)  $\frac{161}{20}$       (۴)  $-\frac{161}{20}$

تست ۲۲: معادله خط مماس بر نمودار تابع با ضابطه  $y = x^{x-1}$  در نقطه  $x = 1$  کدام است؟

(۱)  $y = x$       (۲)  $y = x + 1$       (۳)  $x = 1$       (۴)  $y = 1$

نکته ۷: برای مماسه مشتق ضمنی راه دوم این است که مشتق  $x$  را یک و مشتق  $y$  را  $y'$  بگیریم و به مماسه مشتق بپردازیم.

$$px + y + xy' + y' \cos y = 0 \Rightarrow$$

مثال ۶: مشتق بگیرید.

### کاربردهایی از مشتق

الف) شیب فضا مماس: مشتق تابع  $f$  را در نقطه  $x = a$  همان شیب فضا مماس بر این تابع در نقطه  $x = a$  می باشد.

نکته ۸: برای مماسه شیب قائم بر منحنی کافی است که شیب فضا مماس را عکس و قرینه کنیم.

مثال ۷: معادله فضا مماس و قائم بر تابع  $f(x) = (14x - 3)^p$  را در نقطه  $x = 1$  بیابید.

ب) تعیین ماکزیمم و مینیمم نسبی:

تعریف: تابع  $f$  با دامنه  $[a, b]$  و بازه‌ی  $I$  که زیر مجموعه‌ای از آن است را در نظر می‌گیریم. اگر نقطه  $x_0$  از این بازه طوری باشد که به ازای

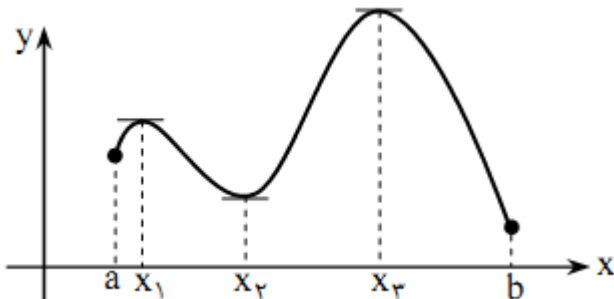
هر نقطه از  $[a, b]$  داشته باشیم  $f(x_0) \leq f(x)$ ، در این صورت به  $(x_0, f(x_0))$  مینیمم نسبی تابع می‌گوییم. همچنین اگر نقطه  $x_0$  از

بازه‌ی  $I$  طوری باشد که به ازای هر نقطه از نقاط بازه‌ی  $[a, b]$  داشته باشیم  $f(x_0) \geq f(x)$ ، در این صورت به  $(x_0, f(x_0))$  ماکزیمم

نسبی تابع می‌گوییم.

نکته ۹: با توجه به تعریف بالا نقاط ابتدایی و انتهایی بازه نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی تابع هستند.

تعریف: تابع  $f$  با دامنه  $[a, b]$  دامنه و نقطه  $x_0$  از آن را در نظر می‌گیریم. اگر نقطه  $x_0$  طوری باشد که به ازای هر نقطه از دامنه تابع داشته باشیم  $f(x_0) \leq f(x)$ ، در این صورت به  $(x_0, f(x_0))$  مینیمم مطلق تابع می‌گوییم. همچنین اگر نقطه  $x_0$  طوری باشد که به ازای هر نقطه از دامنه تابع داشته باشیم  $f(x_0) \geq f(x)$ ، در این صورت به  $(x_0, f(x_0))$  ماکزیمم مطلق تابع می‌گوییم.

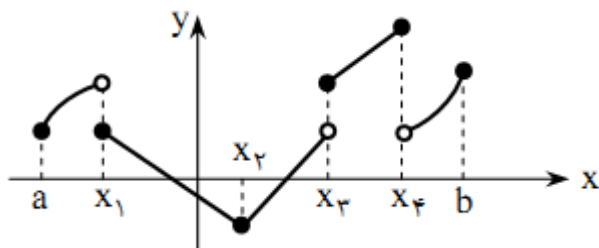


مثال ۸: ماکزیمم و مینیمم نسبی و مطلق را در نمودار مقابل

مشخص کنید.

نکته ۱۰: به نقاط ماکزیمم و مینیمم یک تابع، اکسترم‌های آن تابع می‌گوییم.

مثال ۹: اکسترم‌های نسبی و مطلق تابع مقابل مشخص کنید.



قضیه: اگر تابع  $f$  در  $x = x_0$  اکسترم نسبی داشته باشد و تابع در این نقطه مشتق‌پذیر باشد، آنگاه  $f'(x_0) = 0$ .

نکته ۱۱: عکس مطلب فوق لزوماً درست نمی‌باشد. (یعنی ممکن است مشتق در یک نقطه صفر شود ولی آن نقطه اکسترم نسبی نباشد)

نکته ۱۲: اگر مشتق تابع  $f$  در یک بازه مثبت باشد، تابع در این بازه صعودی و اگر منفی باشد نزولی است.

مثال ۱۰: تابع  $y = 3x^3 - 2x$  در چه نقاطی صعودی و در چه نقاطی نزولی است؟

نکته ۱۳ (آزمون مشتق اول): اگر تابع  $f$  بر  $[a, b]$  پیوسته و بر  $(a, b)$  مشتق‌پذیر باشد و به ازای  $c \in (a, b)$   $f'(c) = 0$  باشد و تابع

مشتق در این نقطه تغییر علامت دهد، آنگاه نقطه  $(c, f(c))$  یک اکسترم نسبی تابع است.

((۱. مردم به فیرتان امیدوار باشند. ۲. مردم از شر شما در امان باشند.))

مثال ۲۱: اکستریم‌های نسبی توابع  $f(x) = ۲x^۳ - ۶x$  ,  $g(x) = \frac{x^p + 1}{x}$  را بیابید.

$$f(x) = ۲x^۳ - ۶x \Rightarrow$$

x			
y'			
y			

$$g(x) = \frac{x^p + 1}{x} \Rightarrow$$

x			
y'			
y			

ج) تعیین نقاط بحرانی: نقطه درونی c از دامنه تابع f نقطه بحرانی آن نامیده می‌شوند، هرگاه مشتق در آن صفر باشد و یا موجود نباشد.

مثال ۲۲: نقاط بحرانی توابع زیر را بیابید.

$$y = ۲x^۳ - ۶x \Rightarrow$$

$$f(x) = \frac{x^p}{x+1} \Rightarrow$$

$$f(x) = \sqrt{۴ - x^p}$$

$$f(x) = \sqrt{x^p - ۹}$$

نکته ۱۴: با گرفتن مشتق مجدد از مشتق یک تابع و تکرار این کار به مشتق از مراتب بالاتر می‌رسیم.

نکته ۱۵: اگر مشتق دوم یک تابع مثبت باشد، جهت تقعر تابع رو به سمت و اگر منفی باشد، جهت تقعر تابع به سمت پایین است.

د) تعیین نقطه عطف: اگر تابع f در نقطه c از دامنه‌اش دارای مشتق دوم باشد و  $f''(c) = ۰$  باشد، و جهت تقعر تابع در دو سمت این

نقطه تغییر کند، نقطه c نقطه عطف آن است.

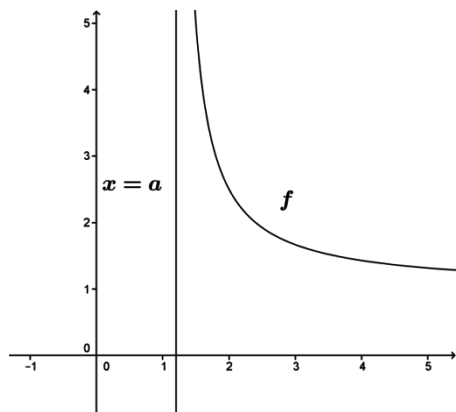
مثال ۲۳: توابع  $f(x) = x^۳ - ۳x + ۴$  ,  $g(x) = ۲x^۳ - ۶x$  در کجا دارای نقطه عطف و اکستریم‌های نسبی است؟

$$f(x) = -x^۳ + ۳x + ۴ \Rightarrow$$

x			
y'			
y''			
y			

$$g(x) = px^m - qx \Rightarrow$$

x				
y'				
y''				
y				



ه) تعیین مجانب :

۱) مجانب قائم: تابع f را در نظر می‌گیریم. اگر یکی از حالت‌های زیر اتفاق بیفتد، خط  $x = a$  مجانب قائم تابع نامیده می‌شود.

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f = +\infty, \lim_{x \rightarrow a^+} f = -\infty, \lim_{x \rightarrow a^-} f = +\infty, \lim_{x \rightarrow a^-} f = -\infty$$

نکته ۱۶: برای یافتن مجانب‌های قائم یک تابع کسری، کافایت ریشه مخرب کسر را بیابیم، در صورتی ریشه مخرب کسر مجانب قائم است که ریشه صورت نباشد و اگر بود بعد ساده شدن باز هم ریشه مخرب باشد.

نکته ۱۷: توابع با برد متناهی مجانب قائم ندارند.

تست ۲۳: چند تابع از توابع زیر مجانب قائم دارند؟

د)  $y = \sqrt{\frac{x+1}{x}}$

ه)  $y = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}$

ب)  $y = \sqrt{\frac{x}{x+1}}$

الف)  $y = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}$

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

تست ۲۴: کدام‌یک از خطوط زیر معادله مجانب قائم تابع  $y = \frac{x - \frac{\pi}{2}}{1 - \sin x}$  می‌باشند؟

۲)  $x = \frac{\pi}{2}$

۱)  $x = 1$

۴) تابع مجانب قائم ندارد.

۳)  $x = \frac{2\pi}{3}$

تست ۲۵: تابع  $f(x) = \frac{1}{2x - [2x]}$  در فاصله  $[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$  چند مجانب قائم دارد؟

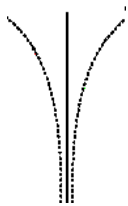
۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

تست ۲۶: اگر  $f(x) = \frac{a[x]-1}{3-x}$  در اطراف مجانب قائم خود به صورت زیر باشد حدود  $a$  کدام است؟



- (۱)  $\frac{1}{3} < a < \frac{1}{2}$   
 (۲)  $a > \frac{1}{2}$   
 (۳)  $\frac{1}{2} < a < \frac{1}{3}$   
 (۴)  $\frac{1}{3} < a < 1$

تست ۲۷: منمنی  $y = \frac{1}{[x] + [-x]}$  چند مجانب قائم دارد؟

- (۱) هیچ (۲) یک (۳) دو (۴) بی شمار

تست ۲۸: تابع  $y = \frac{x^2+1}{x-1 \cdot \sin x}$  چند مجانب قائم دارد؟

- (۱) هیچ (۲) ۷ (۳) ۱۰ (۴) بی شمار

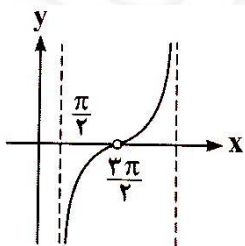
تست ۲۹: تابع  $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{(x^p+x-1)(x^p+x+1)}$  چند مجانب قائم دارد؟

- (۱) ۴ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) ۰

تست ۳۰: تابع  $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-[x]}$  با دامنه  $[0, 2]$  چند مجانب قائم دارد؟

- (۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) ۰

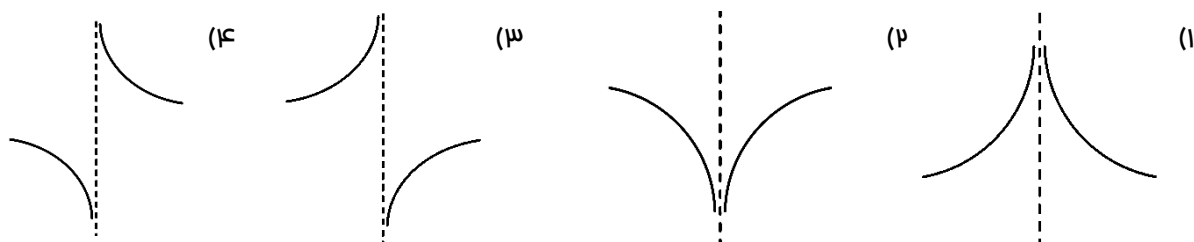
تست ۳۱: شکل زیر قسمتی از نمودار تابع  $f(x) = \frac{1+a \sin x}{b + \cos x}$  است.  $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$  کدام است؟



- (۱)  $1 - \sqrt{3}$  (۲)  $2 - \sqrt{3}$  (۳)  $1 + \sqrt{3}$  (۴)  $2 + \sqrt{3}$

((۳) کار نیک دیگران را زیاد شمارید. ۴. کار فوب خود را کم شمارید گروه زیاد باشد. ۵. در همه عمر از تحصیل علم فستنه نشوید.))

تست ۳۲: نمودار تابع  $y = \frac{x+1}{x^3+x}$  در نزدیکی مجانب قائم به کدام صورت است؟



نکته ۱۸: در توابع لگاریتمی نظیر  $h(x) = \log \frac{f(x)}{g(x)}$ ، ریشه‌های  $f$  و  $g$  مجانب‌های قائم تابع هستند، در صورتی که تابع در یک همسایگی از آن‌ها تعریف شده باشد.

تست ۳۳: کدام یک از توابع زیر مجانب قائم دارد؟

$y = \text{Arccos} \frac{1}{x-1}$  (۴)

$y = \sin \frac{1}{x}$  (۳)

$y = \log(x-2)$  (۲)

$y = \frac{1}{[x]}$  (۱)

تست ۳۴: تابع  $f(x) = \log \frac{x^2-x}{x^3-x^2}$  چند مجانب قائم دارد؟

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

(۲) مجانب افقی: تابع  $f$  را در نظر می‌گیریم. اگر یکی از حالت‌های زیر اتفاق بیفتد، خط

$y = a$  مجانب افقی تابع نامیده می‌شود.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f = a, \lim_{x \rightarrow -\infty} f = a$$

پس برای یافتن مجانب افقی یک تابع کسری، کافی است مد در بی‌نهایت تابع را مناسبه کنیم.

نکته ۱۹: توابع با دامنه متناهی، مجانب افقی ندارند.

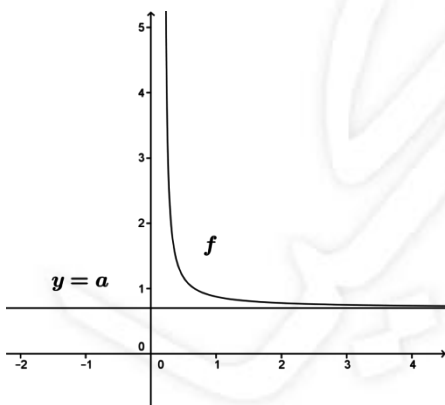
تست ۳۵: کدامیک مجانب افقی دارد؟

$y = \sin^{-1} \left( \frac{|x|}{x+1} \right)$  (۴)

$y = \sin^{-1} \left( \frac{px+1}{x-1} \right)$  (۳)

$y = x + \frac{x}{x-1}$  (۲)

$y = \sqrt{\frac{1-x^p}{x-p}}$  (۱)





تست ۳۶: کدامیک مجانب افقی دارد؟

$$y = 2x + \sqrt{4x^2 - 1} \quad (۴)$$

$$y = x + \sqrt{x} \quad (۳)$$

$$y = \sqrt{x-1} + \sqrt{7-x} \quad (۲)$$

$$y = \frac{x + \sqrt{1-x^2}}{x^2 + 3} \quad (۱)$$

تست ۳۷: نمودار تابع  $f$  با ضابطه  $f(x) = \frac{2|x|+3}{x-2}$  چند مجانب دارد؟

۴ (صفر)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

تست ۳۸: منحنی تابع  $y = \frac{\sqrt{-x}}{x^2-1}$  چند خط مجانب دارد؟

۲ (۴)

صفر (۳)

۳ (۲)

۱ (۱)

تست ۳۹: منحنی تابع  $y = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x-5}$  چند مجانب دارد؟

۴ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

تست ۴۰: در صورتی که منحنی تابع  $y = \frac{\sqrt{ax^2+x+1}}{|x|-2a+3}$  هم مجانب قائم و هم مجانب افقی داشته باشد حدود  $a$  کدام است؟ $a > 0$  (۴) $a \geq 2$  (۳) $0 < a \leq 2$  (۲) $a \geq \frac{1}{4}$  (۱)تست ۴۱: اگر مجانب‌های تابع  $y = a + \frac{x+1}{ax+b}$  در نقطه  $(3, 2)$  متقاطع باشند،  $a+b$  کدام است؟

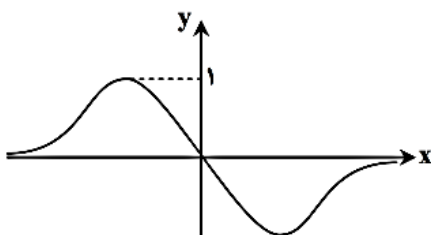
-۳ (۴)

۳ (۳)

-۲ (۲)

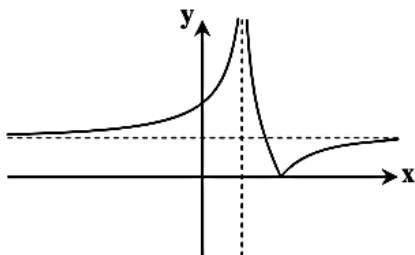
۲ (۱)

تست ۴۲: - اگر نمودار تابع  $f(x) = \frac{ax+b}{x^2+9}$  به شکل مقابل باشد، مقدار  $a$  کدام است؟



- (۱) ۶
- (۲) ۹
- (۳) -۶
- (۴) -۹

تست ۴۳: - کدام یک از گزینه‌های زیر می‌تواند ضابطه‌ی تابع مقابل باشد؟



- (۱)  $y = \frac{|x|-4}{|x|-1}$
- (۲)  $y = \left| \frac{x-1}{x-3} \right|$
- (۳)  $y = \left| \frac{x-2}{x-1} \right|$
- (۴)  $y = \left| \frac{x-2}{x^2-1} \right|$

۳) مجانب مایل: تابع  $f$  را در نظر می‌گیریم. اگر یکی از حالت‌های زیر اتفاق بیافتد، فضا  $y = mx + b$  مجانب مایل تابع نامیده می‌شود.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (mx + b)) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (mx + b)) = 0$$

نکته ۲۰: برای یافتن مجانب مایل در توابع کسری، کافایت صورت را بر مخرج گس تقسیم کنیم. فارج قسمت مجانب مایل را نتیجه

می‌دهد. نکته: در توابع رادیکالی نیز از روابط  $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ ,  $b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx)$  مجانب مایل را بدست می‌آوریم.

نکته ۲۱: ۱. در حالت کلی شرط وجود مجانب مایل در تابع  $y = \sqrt{ax^p + bx + c}$ ,  $\sqrt{a} > 0$  و  $\Delta \neq 0$  است.

۲. در توابع  $y = mx + h + \sqrt{ax^p + bx + c}$  با شرط  $a > 0, \Delta \neq 0$  مجانب مایل تابع خطوط  $y = mx + h + \sqrt{a} \left| x + \frac{b}{2a} \right|$  احتمالاً

مجانب‌های مایل تابع هستند. همچنین در توابع  $y = mx + h + \sqrt[3]{ax^3 + bx^2 + cx + d}$  فضا  $y = mx + h + \sqrt[3]{a} \left( x + \frac{b}{3a} \right)$  احتمالاً

مجانب افقی تابع می‌باشد.

مثال ۲۴: معادله مجانب مایل توابع مقابل را بیابید.

۱)  $y = px + \sqrt{x^p + q}$

$$پ) y = \frac{x^{\mu} + x + 1}{x^{\nu} + \mu}$$

$$س) y = x - \sqrt{x^{\nu} + \mu x}$$

نکته ۲۲: تنها توابع کسری با صورت و مخرج چندجمله‌ای در صورتی مجانب مایل دارند که درجه صورت یک واحد بیشتر از مخرج باشد. در این حالت مجانب مایل از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$y = \frac{ax^n + bx^{n-1} + \dots}{cx^{n-1} + dx^{n-2} + \dots} \Rightarrow y = \frac{a}{c}x - \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{c^2}$$

مثال ۲۵: معادله مجانب مایل تابع  $y = \frac{3x^2 + x - 1}{x + 4}$  را بیابید.

تست ۴۴: عرض نقطه تقاطع مجانب‌های منمنی  $y = \frac{x^{\mu}}{x^{\nu} - 4x + 4}$  کدام است؟

- (۱) -۲      (۲) ۳      (۳) ۴      (۴) ۶

تست ۴۵: اگر  $y = x + 2$  مجانب مایل تابع  $y = \frac{ax^{\nu} + bx + c}{x - 1}$  باشد،  $a - b$  کدام است؟

- (۱) -۱      (۲) ۲      (۳) صفر      (۴) -۳

((.۶) از انجام فواسته های مردم فسته نشوید. لا گمنامی را بیشتر از شهرت دوست داشته باشید.))

تست ۴۶: اگر تابع با ضابطه  $f(x) = 2x - \sqrt{ax^3} - x + 7$ ، دارای مجانبی موازی محور  $x$  ها باشد، عرض از مبدا مجانب مایل آن کدام است؟

- (۱)  $-\frac{3}{2}$       (۲)  $\frac{3}{2}$       (۳) ۳      (۴) -۳

تست ۴۷: تابع  $f(x) = |x| + \frac{x}{x^2 - 1}$  دارای:

- (۱) مجانب افقی است.  
 (۲) چهار خط مجانب دارد.  
 (۳) دارای دو خط مجانب قائم و یک مجانب مایل است.  
 (۴) یک مجانب قائم و دو مجانب مایل است.

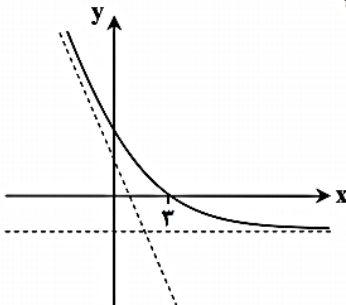
(و) رسم نمودار توابع: برای رسم توابع ابتدا در صورت وجود مجانب‌های تابع را می‌یابیم. سپس با استفاده از مشتق اول و دوم نقاط اکسترمم و عطف تابع یافته و با استفاده از جدول تغییرات تابع، به رسم تابع می‌پردازیم.

مثال ۲۶: نمودار تابع  $y = \frac{x+1}{x-2}$  را رسم کنید.

x				
y'				
y				

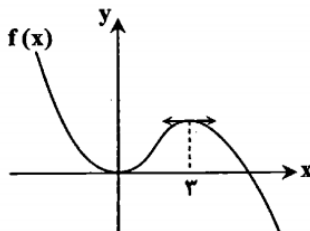
مثال ۲۷: نمودار توابع زیر را رسم کنید.  $y = \frac{x}{x-1}$ ,  $y = x^3 - 3x$

تست ۴۸: - قسمتی از نمودار تابع  $f(x) = -2bx + \sqrt{x^2 - ax + 1}$  به شکل مقابل است. مقدار  $ab$  کدام است؟



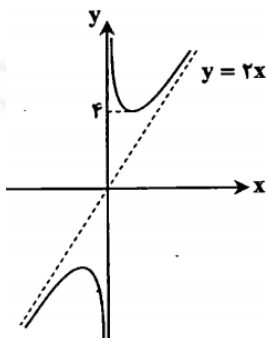
- (۱)  $\frac{1}{9}$
- (۲)  $\frac{1}{6}$
- (۳)  $\frac{1}{12}$
- (۴)  $\frac{1}{18}$

تست ۴۹: - اگر نمودار تابع  $f(x) = -x^2 + ax^2 + b$  به شکل مقابل باشد، مقدار  $f(4)$  کدام است؟



- (۱) صفر
- (۲) ۴
- (۳) ۸
- (۴) -۲

تست ۵۰: - اگر نمودار تابع  $f(x) = \frac{ax^2 + b}{x}$  به شکل مقابل باشد، حاصل  $a - b$  کدام است؟

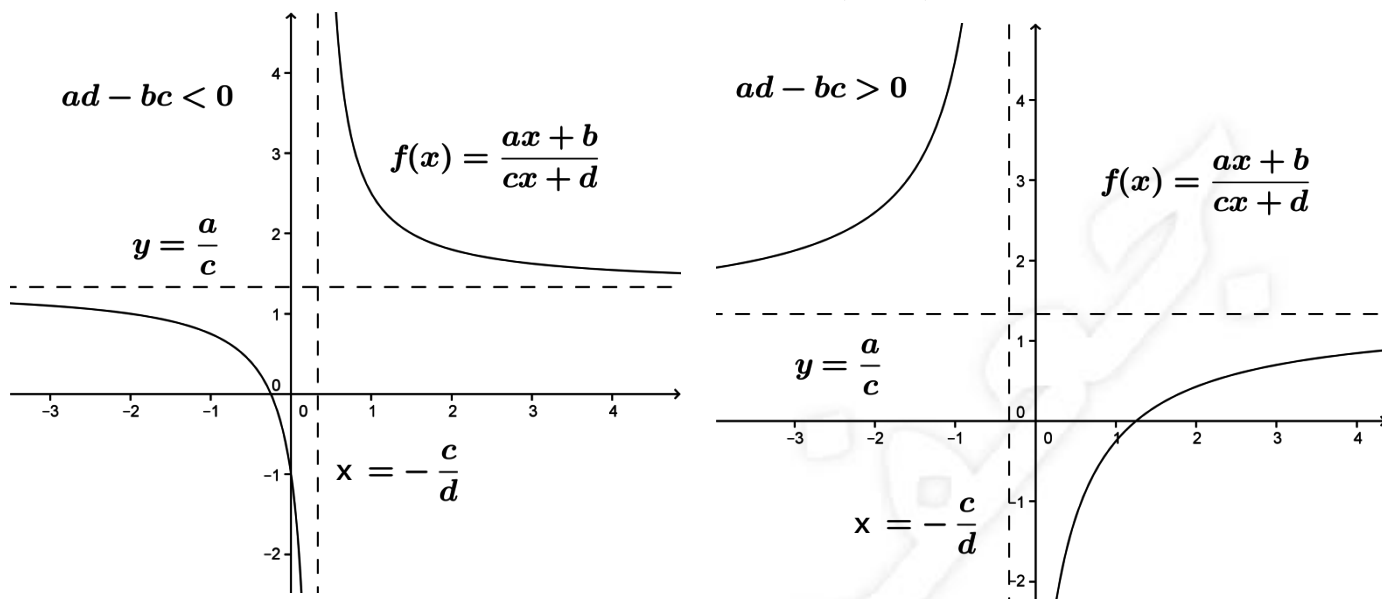


- (۱) ۲
- (۲) صفر
- (۳) -۲
- (۴) ۴

نکته ۲۳: به توابعی به شکل  $y = \frac{ax+b}{cx+d}$  توابع هموگرافیک می‌گوییم. همیشه همه یا قسمتی از این توابع به صورت ضربدری در نوامی

یک و سه و یا در نوامی دو و چهار واقعند. مجانب قائم این تابع خط  $x = -\frac{c}{d}$  و مجانب افقی آن خط  $y = \frac{a}{c}$  می‌باشد. همچنین مرکز این

تابع در محل تقاطع دو مجانبش یعنی نقطه  $(-\frac{c}{d}, \frac{a}{c})$  است. این توابع اکسپوننسیل نسبتی ندارند و یکنوا هستند.



مثال ۲۸: مرکز توابع  $y = \frac{x+1}{2x-1}$ ،  $y = \frac{3x}{1-2x}$  را بیابید و سپس مشخص کنید این دو تابع در چه نوامی واقعند.

## تست های کنکور فصل مشتق

## آهنگ متوسط تغییر و تعریف مشتق

تست ۱: در تابع با ضابطه  $f(x) = x + \frac{1}{x}$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع وقتی متغیر از عدد ۲ به عدد  $2+h$  تغییر کند، برابر  $\frac{\Delta}{h}$  (تجربی ۸۶) است.  $h$  کدام است؟

(۱)  $\frac{1}{5}$  (۲) ۲ (۳)  $\frac{2}{5}$  (۴) ۳

تست ۲: تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} ax - a & x < 1 \\ x^2 - x & x \geq 1 \end{cases}$  به ازای کدام مقدار  $a$  در نقطه  $x = 1$  مشتق پذیر است؟ (تجربی ۸۶)

(۱) -۱ (۲) ۱ (۳) هر مقدار  $a$  (۴) هیچ مقدار  $a$

تست ۳: در تابع  $f(x) = \sqrt{x}$  آهنگ متوسط تغییر تابع نسبت به تغییر متغیر، روی بازه  $[\frac{2}{25}, \frac{2}{56}]$  از آهنگ آن، در شروع این بازه، چه قدر کمتر است؟ (تجربی ۸۷)

(۱)  $\frac{1}{93}$  (۲)  $\frac{2}{93}$  (۳)  $\frac{1}{62}$  (۴)  $\frac{1}{31}$

تست ۴: - آهنگ متوسط تغییر تابع  $f(x) = \sqrt{x^2 + 16}$  نسبت به متغیر  $x$  روی بازه  $[0, 3]$ ، از آهنگ لحظه‌ای تابع در  $x = \sqrt{2}$ ، چقدر کمتر است؟ (تجربی ۸۸) ۱ صفر

(۱)  $\frac{1}{18}$  (۲)  $\frac{1}{12}$  (۳)  $\frac{1}{9}$  (۴)  $\frac{1}{6}$

تست ۵: - در تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{36}{x^2}$ ، آهنگ متوسط تابع از  $x_1 = 2$  تا  $x_2 = 3$  چقدر از آهنگ لحظه‌ای آن، در  $x = \sqrt[3]{12}$  بیش تر است؟ (تجربی ۹۰) ۱ (۱)

(۱)  $\frac{1}{5}$  (۲)  $\frac{2}{5}$  (۳) ۲ (۴)  $\frac{2}{5}$

(۸. فقر در نظر تان بد نباشد. ۹. به یک غذا اکتفا کنید.)

**تست ۶:** در تابع با ضابطه  $f(x) = (2x+1)^{-\frac{1}{2}}$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع، از نقطه  $x = 4$  تا  $x = 12$ ، از آهنگ لحظه‌ای آن در نقطه  $x = 4$  چقدر بیشتر است؟ (تجربی ۹۳)

- (۱)  $\frac{7}{540}$       (۲)  $\frac{11}{540}$       (۳)  $\frac{7}{270}$       (۴)  $\frac{11}{270}$

**تست ۷:** در تابع با ضابطه  $f(x) = \sqrt{x}$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع، از نقطه  $x = 4$  تا  $x = 6.25$ ، از آهنگ لحظه‌ای آن در نقطه  $x = 4$  چقدر کمتر است؟ (فاز ۹۳)

- (۱)  $\frac{1}{36}$       (۲)  $\frac{1}{18}$       (۳)  $\frac{5}{72}$       (۴)  $\frac{1}{12}$

**تست ۸:** در تابع با ضابطه  $f(x) = \sqrt{x}$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع نسبت به تغییر متغیر  $x$ ، در نقطه  $x = 1$  با نمو متغیر  $0/21$ ، از آهنگ لحظه‌ای تابع در این نقطه، چقدر کم تر است؟ (تجربی ۹۴)

- (۱)  $\frac{1}{42}$       (۲)  $\frac{1}{21}$       (۳)  $\frac{2}{42}$       (۴)  $\frac{2}{21}$

**تست ۹:** در تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}}$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع نسبت به تغییر متغیر  $x$ ، در نقطه  $x = 1$  با نمو  $0/44$ ، از آهنگ لحظه‌ای تابع در این نقطه، چقدر کمتر است؟ (فاز ۹۴)

- (۱)  $\frac{1}{38}$       (۲)  $\frac{1}{24}$       (۳)  $\frac{1}{12}$       (۴)  $\frac{1}{6}$

خط مماس و قائم

**تست ۱۰:** معادله‌ی خط مماس بر منحنی به معادله  $y = \frac{1}{4} \cos 2x - \cos x$  در نقطه‌ی  $x = \frac{\pi}{3}$  واقع بر آن کدام است؟ (تجربی ۸۵)

- (۱)  $y = -\frac{3}{4}$       (۲)  $y = \frac{3}{4}$       (۳)  $y = -x + \frac{\pi}{3} - 1$       (۴)  $y = x + \frac{\pi}{4}$



**تست ۱۱:** عرض از مبدأ خط مماس، بر منحنی به معادله  $y = \sqrt{x^2 + 2x}$  در نقطه  $x = 1$  واقع بر آن کدام است؟ (تجربی ۸۷)

(۱)  $-\frac{3}{5}$  (۲)  $\frac{3}{4}$  (۳)  $\frac{3}{2}$  (۴) ۲

**تست ۱۲:** - معادله خط قائم بر منحنی  $y = \ln(2x - 5)$ ، در نقطه تلاقی آن با محور  $x$ ها، کدام است؟ (تجربی ۸۸)

(۱)  $x + 2y = 3$  (۲)  $x - 2y = 3$  (۳)  $2x + y = 6$  (۴)  $2x - y = 6$

**تست ۱۳:** خط مماس بر منحنی به معادله  $y = x^3 + 3x^2 + 1$ ، بر خط به معادله  $x - 3y = 2$  عمود است. این خط مماس از نقطه‌ای با کدام مختصات می‌گذرد؟ (تجربی ۸۹)

(۱)  $(1, 3)$  (۲)  $(1, 4)$  (۳)  $(2, -6)$  (۴)  $(2, -4)$

**تست ۱۴:** - خط مماس بر منحنی به معادله  $\ln(x^2 - y) = \sqrt{y+1} - x$ ، در نقطه  $(2, 3)$  نیمساز ناحیه‌ی اول را با کدام طول قطع می‌کند؟ (تجربی ۹۰)

(۱)  $\frac{3}{4}$  (۲)  $\frac{5}{4}$  (۳)  $\frac{4}{3}$  (۴)  $\frac{5}{3}$

**تست ۱۵:** عرض از مبدأ خط مماس بر منحنی به معادله  $y = \ln \sqrt{\frac{\sin x}{1 + \cos x}}$  در نقطه  $x = \frac{\pi}{2}$  واقع بر آن، کدام است؟ (تجربی ۹۲)

(۱)  $-\frac{\pi}{4}$  (۲)  $-\frac{\pi}{2}$  (۳)  $\frac{\pi}{4}$  (۴)  $\frac{\pi}{2}$

تست ۱۶: خط قائم بر منحنی  $y = xe^{x^2-4}$ ، در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن، محور  $x$ ها را با کدام طول قطع می‌کند؟  
 (فارسی ۹۳) ۱۰ (۱) ۱۶ (۲) ۱۸ (۳) ۲۰ (۴)

تست ۱۷: خط مماس بر منحنی به معادله  $y = \sqrt{2x}e^{2-x}$ ، در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن، محور  $y$ ها را با کدام عرض، قطع می‌کند؟  
 (تجربی ۹۴) ۳ (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴)

تست ۱۸: عرض از مبدأ خط مماس بر منحنی به معادله  $y = \ln \frac{\sqrt{4x+1}}{x^2-2x+3}$ ، در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن، کدام است؟  
 (فارسی ۹۴)  $\frac{5}{9}$  (۱)  $\frac{8}{9}$  (۲)  $\frac{5}{3}$  (۳)  $\frac{10}{3}$  (۴)

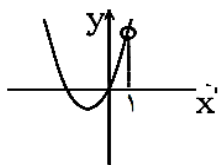
تست ۱۹: خط به معادله  $y = 2x - 5$  در نقطه‌ای به طول ۱ بر منحنی به معادله  $y = ax^2 + bx + 1$  مماس است.  $a$  کدام است؟  
 ۲ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴)

## مجانِب

تست ۱۹: فاصله‌ی نقطه‌ی تلاقیِ مجانب‌های منحنی به معادله  $y = \frac{x - \sqrt{x}}{x^2 - 3x + 2}$  از مبدأ مختصات کدام است؟  
 (تجربی ۸۵)  $\sqrt{2}$  (۱) ۲ (۲)  $\sqrt{5}$  (۳) ۵ (۴)

**تست ۲۰:** منحنی به معادله  $y = \sqrt{(a-1)x^2 + ax + 2 - a}$  دارای دو خط مجانب است، مجموعه مقادیر  $a$  به کدام صورت است؟ (تجربی ۸۷)

(۱)  $a < 2$  (۲)  $a > 0$  (۳)  $a > 1$  (۴)  $1 < a < 2$



**تست ۲۱:** شکل نمودار تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{4x^3 + ax + b}{x - 1}$ ، دوتایی مرتب  $(a, b)$  کدام است؟ (تجربی ۸۷)

(۱)  $(0, -4)$  (۲)  $(-4, 0)$  (۳)  $(-2, 1)$  (۴)  $(4, 0)$

**تست ۲۲:** نقطه تلاقی مجانب‌های نمودار تابع  $y = 2x - \sqrt{x^2 - 2x}$ ، کدام است؟ (تجربی ۸۸)

(۱)  $(-1, 0)$  (۲)  $(-1, 1)$  (۳)  $(1, 2)$  (۴)  $(1, 3)$

**تست ۲۳:** یکی از مجانب‌های منحنی به معادله  $y = \frac{2x^3 + ax^2 + 5}{x^2 + x}$  محور  $x$ ها را در نقطه‌ای به طول ۲- قطع می‌کند.  $a$  کدام است؟ (تجربی ۹۰)

(۱)  $-3$  (۲)  $3$  (۳)  $4$  (۴)  $6$

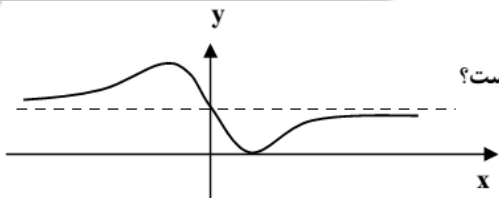
**تست ۲۴:** اگر  $f(x) = \frac{x+3}{2x+1}$  و  $g(x) = \frac{2x-1}{x+2}$  باشند نقطه تلاقی مجانب‌های تابع  $f \circ g$  کدام است؟ (تجربی ۹۱)

(۱)  $(-1, 0)$  (۲)  $(-1, 1)$  (۳)  $(-2, 2)$  (۴)  $(0, 1)$

تست ۲۵:

(تجربی ۹۴)

شکل روبه رو، نمودار تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{ax^2 + bx + 8}{x^2 + 4}$  است.  $a + b$  کدام است؟



- (۱) -۷  
(۲) -۶  
(۳) ۹  
(۴) ۱۰

مشتق ضمنی

تست ۲۶:

(تجربی ۸۵)

از رابطه  $\sin(x - 2y) + \sqrt{x - y} - y = 0$ ، مقدار مشتق  $y$  نسبت به  $x$  در نقطه  $(2, 1)$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{2}{5}$   
(۲)  $\frac{3}{5}$   
(۳)  $\frac{2}{5}$   
(۴)  $\frac{3}{5}$

تست ۲۷:

(تجربی ۸۶)

از رابطه  $\frac{dy}{dx} + y\sqrt{x} = 6$  مقدار  $\frac{dy}{dx}$  در نقطه  $(1, 4)$  کدام است؟

- (۱) -۲  
(۲) -۱  
(۳) ۰  
(۴)  $\frac{1}{2}$

تست ۲۸:

(تجربی ۹۳)

در تابع ضمنی  $4\sqrt{xy} + \frac{1}{y} - 2x = 1$ ، تابع  $y$  بر حسب متغیر  $x$  منظور شده است. معادله خط مماس بر منحنی آن در نقطه  $(4, 1)$ ، کدام است؟

- (۱)  $y + 2x = 9$   
(۲)  $2y - x = -2$   
(۳)  $3y + x = 7$   
(۴)  $3y - x = -1$

نقاط بحرانی و اکسترمم

تست ۲۹:

(تجربی ۸۵)

نقاط بحرانی تابع با ضابطه  $f(x) = x^2(x - 2)^2$  رأس یک مثلث اند. نوع این مثلث کدام است؟  
(۱) متساوی الاضلاع  
(۲) فقط متساوی الساقین  
(۳) فقط قائم الزاویه  
(۴) قائم الزاویه و متساوی الساقین

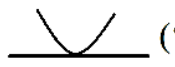


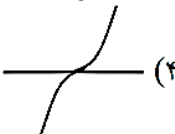
تست ۳۰: ماکسیمم مطلق تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = \frac{1}{x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 5}$  کدام است؟ (تجربی ۸۵)

- (۱)  $\frac{1}{6}$       (۲)  $\frac{1}{5}$       (۳)  $\frac{1}{3}$       (۴)  $\frac{1}{2}$

تست ۳۱: می‌نیمم مطلق تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2$  روی بازه‌ی  $[-1, 3]$  کدام است؟ (تجربی ۸۶)

- (۱)  $-\frac{11}{3}$       (۲)  $-\frac{10}{3}$       (۳)  $-\frac{8}{3}$       (۴)  $-\frac{7}{3}$

تست ۳۲: نمودار تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x$  در نقطه‌ی  $x = 1$  کدام وضع را با محور  $x$  ها دارد؟ (تجربی ۸۶)

- (۱)       (۲)       (۳)       (۴) 

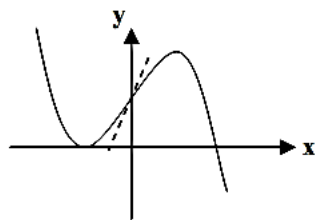
تست ۳۳: بیشترین مقدار تابع با ضابطه  $f(x) = \sin 2x + 2 \cos x$  کدام است؟ (تجربی ۸۷)

- (۱)  $1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$       (۲)  $1 + \sqrt{2}$       (۳)  $\frac{3\sqrt{3}}{2}$       (۴)  $2\sqrt{3}$

تست ۳۴: طول نقطه عطف نمودار تابع با ضابطه  $f(x) = x^{\frac{5}{3}} - 10x^{\frac{2}{3}}$  ، کدام است؟ (تجربی ۸۷)

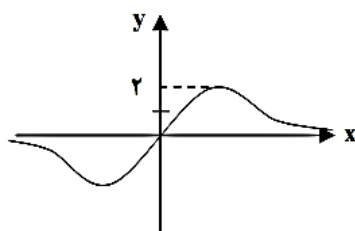
- (۱)  $-2$       (۲)  $-2$  و  $0$       (۳)  $2$       (۴)  $2$  و  $0$

((.ا. همه را از فود بهتر بدانید.))



- تست ۳۵: ۱- شکل مقابل، نمودار تابع  $y = -x^3 + ax^2 + bx + 2$  است. زوج مرتب  $(a, b)$  کدام است؟
- (تجربی ۸۸) (1)  $(0, -3)$   
 (2)  $(1, -2)$   
 (3)  $(0, 3)$   
 (4)  $(0, 6)$

- تست ۳۶: - تقعر نمودار تابع با ضابطه  $f(x) = 6x^5 + 2x + 7$  در بازه  $(a, +\infty)$  رو به بالا است، کمترین مقدار  $a$  کدام است؟
- (تجربی ۸۸) (1)  $-1$  (2) صفر (3)  $\frac{1}{2}$  (4)  $1$



- تست ۳۷: - شکل مقابل نمودار تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{ax+b}{x^2+1}$  است.  $a$  کدام است؟
- (تجربی ۸۸) (1)  $1$   
 (2)  $2$   
 (3)  $3$   
 (4)  $4$

- تست ۳۸: شکل مقابل، نمودار تابع  $y = x^3 + ax^2 + bx$  است. دوتایی  $(a, b)$  به کدام صورت می تواند باشد؟
- (تجربی ۸۹) (1)  $(-3, 4)$   
 (2)  $(-1, 3)$   
 (3)  $(-6, 12)$   
 (4)  $(3, 2)$

- تست ۳۹: در تابع با ضابطه  $f(x) = a \cos 2x + b \sin x$ ، اگر نقطه‌ی می نیم آن در  $(-\frac{\pi}{6}, -3)$  باشد،  $a$  کدام است؟
- (تجربی ۸۹) (1)  $-4$  (2)  $-2$  (3)  $-1$  (4)  $1$

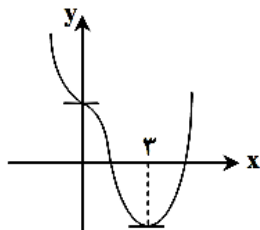
تست ۴۰: مجموعه‌ی طول تقاطعی که در آن‌ها تقعر منحنی به معادله‌ی  $f(x) = (x^2 + 2x + 2)e^{-x}$  رو به پایین باشد، به کدام صورت است؟ (تجربی ۸۹)

(۱)  $-2 < x < 0$  (۲)  $-1 < x < 2$  (۳)  $0 < x < 1$  (۴)  $0 < x < 2$

تست ۴۱: طول نقطه‌ی عطف منحنی به معادله‌ی  $y = \frac{x}{1+|x|}$ ، کدام است؟ (تجربی ۹۰)

(۱) -۱ (۲) صفر (۳) ۱ (۴) فاقد نقطه‌ی عطف

تست ۴۲: شکل مقابل نمودار تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + ax^3 + bx^2 + 2$  است.  $a+b$  کدام است؟ (تجربی ۹۰)



(۱) -۱

(۲) صفر

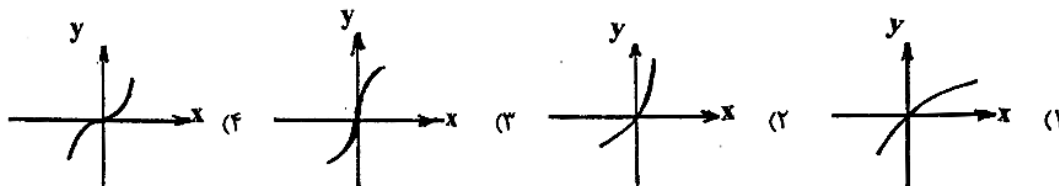
(۳) ۱

(۴) ۲

تست ۴۳: منحنی نمایش تابع  $y = -x^4 + 4x^3 - 3$ ، در کدام بازه صعودی و تقعر آن روبه پایین است؟ (تجربی ۹۱)

(۱)  $(2, 3)$  (۲)  $(0, 2)$  (۳)  $(0, 3)$  (۴)  $(2, +\infty)$

تست ۴۴: نمودار تابع  $y = \frac{x^3}{x^2+1}$  در حوالی مبدا مختصات چگونه است؟ (تجربی ۹۱)



امام علی (علیه السلام): (دو چیز است که قدر و قیمتش را نمی شناسد مگر کسی که آن دو را از دست داده باشد، یکی «موانی» و دیگری «تندرستی و عافیت»)

تست ۱۴۵: بیشترین مقدار تابع  $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$  در بازه  $[-2, 2]$ ، کدام است؟

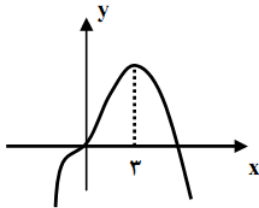
۱۷ (۴)

۱۲ (۳)

۱۰ (۲)

۹ (۱)

(تجربی ۹۶)



تست ۱۴۳: شکل روبه‌رو، نمودار تابع  $y = ax^4 + 2x^3 + bx^2$  است.  $a$  کدام است؟

-۱ (۱)

$-\frac{1}{2}$  (۲)

$-\frac{1}{4}$  (۳)

$\frac{1}{4}$  (۴)

تست ۱۴۳: (تجربی ۹۶)

تست ۱۴۴: تقعر منحنی به معادله  $y = x\sqrt{x^2 + 2}$  در بازه  $(a, +\infty)$  رو به بالا است، کمترین مقدار  $a$ ، کدام است؟

$-\infty$  (۴)

۱ (۳)

-۱ (۲)

صفر (۱)

تست ۱۴۴: (تجربی ۹۶)

تست ۱۴۵: در کدام بازه تابع با ضابطه  $f(x) = -x^4 + 8x^3 - 18x^2$ ، نزولی و تقعر نمودار آن، رو به بالا است؟

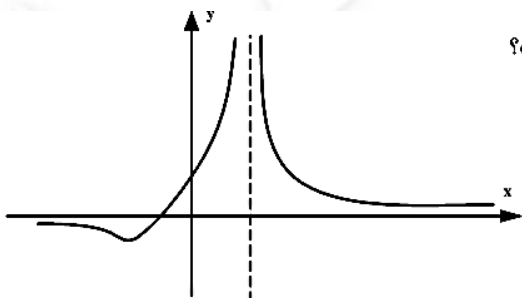
$(0, 3)$  (۴)

$(0, 1)$  (۳)

$(1, 4)$  (۲)

$(1, 3)$  (۱)

تست ۱۴۵: (تجربی ۹۳)



تست ۱۴۶: شکل مقابل نمودار تابع  $y = \frac{x+a}{x^2+bx+4}$  است. مقادیر  $a$  و  $b$ ، چگونه است؟

$b=4, a < 0$  (۱)

$b=-4, a < 0$  (۲)

$b=4, a > 0$  (۳)

$b=-4, a > 0$  (۴)

تست ۱۴۶: (تجربی ۹۳)



تست ۴۷: در کدام بازه تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^3 - 3x^2$  صعودی و تقعر نمودار آن، رو به پایین است؟

- (فارغ ۹۳) (۱)  $(-2, 0)$  (۲)  $(-2, 1)$  (۳)  $(-1, 2)$  (۴)  $(0, 1)$

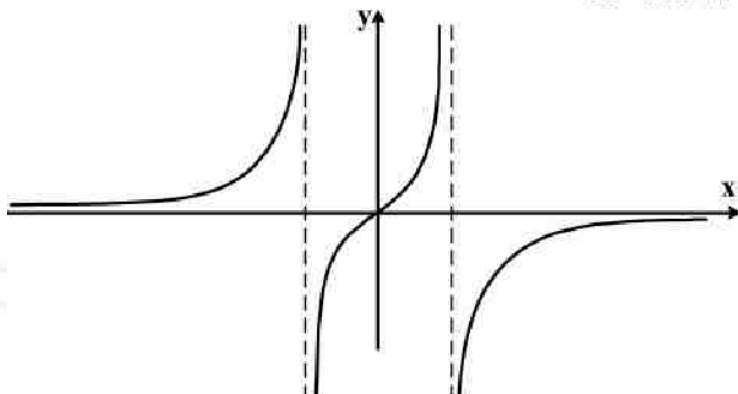
تست: اگر تابع هایی به صورت  $f(x) = x^3 - (m+2)x^2 + 3x$  همواره صعودی باشند، آن گاه مجموعه طول نقاط عطف این توابع، در کدام بازه است؟ (تجربی ۹۴)

- (۱)  $[-2, 0]$  (۲)  $[-2, 2]$  (۳)  $[-1, 1]$  (۴)  $[0, 1]$

تست: اگر تابع هایی به صورت  $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - (m-1)x^2 + 8x$  دارای ماکزیمم و می نیمم با طول های منفی باشند، آن گاه مجموعه طول نقاط عطف این توابع، در کدام بازه است؟ (فارغ ۹۴)

- (۱)  $(-5, -\frac{1}{2})$  (۲)  $(-4, -1)$  (۳)  $(-\infty, -2)$  (۴)  $(-\infty, -4)$

تست: شکل روبه رو، نمودار تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{x}{ax^2 + bx + 1}$  است. مقادیر  $a$  و  $b$  چگونه است؟ (فارغ ۹۴)



- (۱)  $a < 0, b = 0$   
 (۲)  $a > 0, b = 0$   
 (۳)  $a > 0, b = 1$   
 (۴)  $a < 0, b = 1$

## فرمول‌های مشتق

تست ۴۸: اگر  $f(x) = \sqrt{2} \sin \pi x^2$ ، آن‌گاه  $f'(\frac{1}{\sqrt{6}})$  کدام است؟

(تجربی ۸۵)

$\pi\sqrt{3}$  (۴)       $\pi\sqrt{2}$  (۳)       $\frac{\pi\sqrt{3}}{2}$  (۲)       $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$  (۱)

تست ۴۹: مقدار مشتق تابع  $y = \operatorname{tg}^3 x - \operatorname{Cotg} 2x$  در نقطه‌ی  $x = \frac{\pi}{6}$  کدام است؟

(تجربی ۸۶)

$4$  (۴)       $\frac{8}{3}$  (۳)       $2$  (۲)       $\frac{4}{3}$  (۱)

تست ۵۰: در تابع با ضابطه  $f(x) = |x| \cdot [x]$ ، مقدار  $f'(0^-) - f'(0^+)$  کدام است؟

(تجربی ۸۷)

$2$  (۴)       $1$  (۳)       $0$  (۲)       $-1$  (۱)

تست ۵۱: مقدار  $\frac{dy}{dx}$  به ازای  $x = \frac{\pi}{4}$  و  $y = \sqrt{2}U - \frac{1}{U}$  و  $U = \sin^2 x - \cos^2 x$  کدام است؟

(تجربی ۸۸)

$15$  (۴)       $12$  (۳)       $10$  (۲)       $9$  (۱)

تست ۵۲: اندازه‌ی مشتق تابع  $y = \frac{1 - \operatorname{tg} 2x}{1 + \operatorname{tg} 2x}$  به ازای  $x = \frac{\pi}{8}$  کدام است؟

(تجربی ۸۹)

$1$  (۴)       $\frac{1}{2}$  (۳)       $-1$  (۲)       $-2$  (۱)

تست ۵۳: مقدار مشتق تابع  $y = \operatorname{Cos}^2(\frac{\pi}{3} + \frac{x}{4})$  به ازای  $x = \frac{\pi}{3}$  کدام است؟

(تجربی ۹۰)

$\frac{1}{4}$  (۴)       $\frac{1}{8}$  (۳)       $-\frac{1}{8}$  (۲)       $-\frac{1}{4}$  (۱)

تست ۵۴: - در تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = x\sqrt{x} + |x-1|$  مقدار  $f'_+(1) + 3f'_-(1)$  کدام است؟

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

(تجربی ۹۰)

تست ۵۵: مقدار مشتق  $\frac{1-\cos^2 x}{2-\sin^2 x}$  به ازای  $x = \frac{\pi}{4}$  کدام است؟

(تجربی ۹۱)

$\frac{1}{9}$  (۴)

$\frac{7}{9}$  (۳)

$\frac{5}{9}$  (۲)

$\frac{4}{9}$  (۱)

تست ۵۶: مشتق تابع  $y = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{4}\right)$  به ازای  $x = \frac{\pi}{3}$  کدام است؟

(تجربی ۹۳)

$-\frac{1}{8}$  (۴)

$-\frac{1}{4}$  (۳)

$-\frac{1}{2}$  (۲)

$-\frac{\sqrt{3}}{2}$  (۱)

تست ۵۷: تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = \begin{cases} \sin^2 x - \cos^2 x & ; 0 < x \leq \frac{\pi}{4} \\ a \tan x + b \sin^2 x & ; \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$  در نقطه  $x = \frac{\pi}{4}$  مشتق پذیر است.  $b$  کدام است؟

(تجربی ۹۳)

۱ (۴)

$\frac{1}{2}$  (۳)

$-\frac{1}{2}$  (۲)

-۱ (۱)

تست ۵۸: مشتق  $y = \sin^3 \sqrt{2x}$  به ازای  $x = \frac{\pi^2}{18}$  کدام است؟

(فارج ۹۳)

$\frac{27}{4\pi}$  (۴)

$\frac{27}{8\pi}$  (۳)

$\frac{9}{4\pi}$  (۲)

$\frac{9}{8\pi}$  (۱)

تست ۵۹: تابع با ضابطه‌ی

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{x} - 5 & ; x \geq 1 \\ x^2 + ax + b & ; x < 1 \end{cases}$$

در نقطه  $x = 1$  مشتق پذیر است.  $b$  کدام است؟

(۹۳) (ف) ۱ (۱)      ۲ (۲)      ۳ (۳)      ۴ (۴)

تست ۶۰: اگر  $f(x) = x^3 - |2x^2|x$  باشد، مقدار  $f'_+(\sqrt{2}) - f'_-(\sqrt{2})$  کدام است؟

(۹۴) (ف) ۱ (۱)      -۲ (۲)      -۱ (۳)      ۲ (۴)

## تمرینات کتاب

در مسایل ۱ تا ۵ نقاط بحرانی توابع داده شده را به دست آورید.

$$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 60 \quad -1$$

$$g(x) = 2x^3 - 2x^2 - 16x + 1 \quad -2$$

$$g(x) = x^{\frac{6}{5}} - 12x^{\frac{1}{5}} \quad -3$$

$$f(x) = (x^3 - 3x^2 + 4)^{\frac{1}{3}} \quad -4$$

$$f(x) = x^{\frac{7}{6}} - \frac{7}{2}x^{\frac{2}{3}} + 5 \quad -5$$

در مسایل ۶ تا ۱۱ مقادیر ماکزیمم و می نیمم مطلق توابع مفروض بر بازه داده شده را در صورت

وجود محاسبه کنید.

$$[-1, 4] \quad : \quad g(x) = x^4 - 8x^2 + 16 \quad -6$$

$$[-3, -1] \quad : \quad f(x) = x^3 + 5x - 4 \quad -7$$

$$[-2, 1] \quad : \quad f(x) = (x+1)^{\frac{2}{3}} \quad -8$$

$$[-5, 4] \quad : \quad f(x) = 1 - (x-3)^{\frac{2}{3}} \quad -9$$

$$[0, 64] \quad : \quad f(x) = x^{\frac{7}{6}} - \frac{7}{2}x^{\frac{2}{3}} + 5 \quad -10$$

$$[-2, 3] \quad : \quad f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 60 \quad -11$$

در تمرین‌های ۱ تا ۴ ماکزیمم و می‌نیمم نسبی توابع داده شده را به دست آورید.

$$y = 2x^2 - 9x + 30 \quad -1$$

$$y = 3x^5 - 25x^2 + 60x + 10 \quad -2$$

$$y = x^4 - 8x^2 + 22x - 24x + 100 \quad -3$$

$$y = x^4 - 12x^2 + 52x^2 - 96x + 100 \quad -4$$

۵- در تمرین‌های ۱ تا ۴، آیا توابع داده شده دارای ماکزیمم یا می‌نیمم مطلق هستند؟ چرا؟

۶- ثابت کنید تابع  $y = x^2$  همواره صعودی است و از آنجا نتیجه بگیرید که این تابع ماکزیمم و می‌نیمم ندارد.

۷- در تابع  $y = 2x^2 - 9x + 30$  ثابت کنید پاره خطی که نقاط ماکزیمم و می‌نیمم روی نمودار تابع را به هم وصل می‌کند توسط منحنی نمایش تابع به دو قسمت مساوی تقسیم می‌شود.

۸- ضرایب ثابت  $a$  و  $b$  را چنان تعیین کنید که تابع با ضابطه  $f(x) = x^2 + ax^2 + b$  در  $(2, 3)$  یک ماکزیمم یا می‌نیمم نسبی داشته باشد.

- ۹- ضرایب  $a$ ،  $b$ ،  $c$  را چنان تعیین کنید که تابع با ضابطه  $f(x) = ax^2 + bx + c$  در  $x = 1$  دارای مقدار ماکزیمم نسبی  $7$  باشد و نمودار تابع  $y = f(x)$  از نقطه  $(2, -2)$  بگذرد.
- ۱۰- تابع  $f(x) = x^{n+1}$  مفروض است که در آن  $n$  یک عدد صحیح و مثبت است، ثابت کنید که این تابع صعودی است و از آنجا نتیجه بگیرید که ماکزیمم و می نیمم نسبی ندارد.
- ۱۱- تابع  $y = x^{2n}$  مفروض است که در آن  $n$  یک عدد صحیح و مثبت است، ثابت کنید که این تابع در  $x = 0$  دارای یک می نیمم مطلق است.

در مسایل ۱ تا ۵، تعیین کنید که در چه بازه‌ای تقعر منحنی تابع داده شده رو به بالا است، در چه بازه‌ای تقعر آن رو به پایین است، و نقاط عطف را نیز در صورت وجود به دست آورید.

$$y = 16x^4 + 32x^3 + 24x^2 - 5x - 2 \quad -1$$

$$y = x^4 - 8x^3 + 24x^2 \quad -2$$

$$y = \frac{x}{x^2 - 1} \quad -3$$

$$y = \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{6}x^3 - x^2 \quad -4$$

$$y = x^2 + 2x^2 - 3x + 3 \quad -5$$

۶- نقاط ماکزیمم و می نیمم نسبی و نقطه عطف منحنی نمایش تابع  $y = x^3 - 4x^2 - 3x + 10$  را به دست آورید. ثابت کنید که این سه نقطه بر یک استقامت هستند و نقطه عطف وسط پاره خط واصل بین نقاط ماکزیمم و می نیمم نسبی است.

۷-  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  ضرایب  $a, b, c, d$  را چنان تعیین کنید که این تابع در  $(3, 0)$  دارای یک ماکزیمم یا می نیمم نسبی باشد و منحنی نمایش آن در  $(-1, 1)$  یک نقطه عطف داشته باشد.

۸- اگر  $y = ax^3 + bx^2$  ضرایب ثابت  $a$  و  $b$  را چنان تعیین کنید که منحنی نمایش این تابع در نقطه  $(1, 2)$  دارای یک نقطه عطف باشد.

۹- طول نقاط عطف یک منحنی به معادله  $y = (x^2 - 7x + 14)e^x$  را به دست آورید.

منحنی نمایش توابع زیر را رسم کنید.

$$1- y = x^3 + 4x^2 - 3x + 10$$

$$2- y = x^2 + x^2 + 1$$

$$3- y = \frac{2x - 3}{3x - 5}$$

$$4- y = \frac{x}{x^2 + 1}$$

$$5- y = \frac{x^2}{x - 1}$$

$$6- y = \sqrt{x^2 - 1}$$

$$7- y = \frac{x^2}{\sqrt{x - 1}}$$

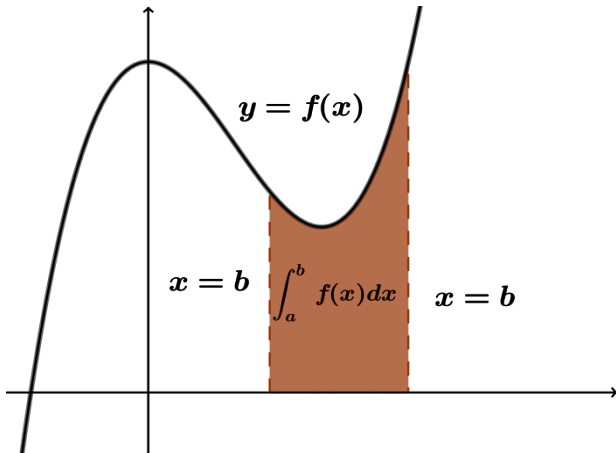


## فصل چهارم (انتگرال)

## فصل چهارم: انتگرال

## انتگرال معین:

**تعریف:** فرض کنیم تابع  $f$  بر بازه  $[a, b]$  پیوسته و مثبت باشد، در این صورت انتگرال تابع  $f$  از  $a$  تا  $b$  را نماد  $\int_a^b f(x) dx$  نشان می‌دهیم و منظور از آن مساحت زیر سطح ممصور بین تابع  $f$  و محور  $x$  ها و فطوط  $x = a$  و  $x = b$  است.



**نکته ۱:** اگر در تعریف فوق  $f$  بر بازه  $[a, b]$  منفی باشد، بجای مساحت از قرینه آن استفاده می‌کنیم.

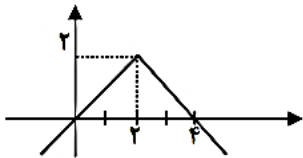
**نکته ۲:** اگر در تعریف فوق عدد  $a < c < b$  موجود باشد، در این صورت داریم:  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$ .

**نکته ۳:** در حالت کلی داریم:  $\int_a^a f(x) dx = 0$  و  $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$ .

**مثال ۱:** حاصل انتگرال‌های مقابل را بیابید.  $\int_{-p}^1 (px + p) dx$  و  $\int_{-p}^p p dx$ .

**مثال ۲:** حاصل انتگرال‌های مقابل را بیابید.  $\int_{-p}^p |x+1| dx$  و  $\int_{-1}^p (p[x]-1) dx$ .

پیامبر خدا (ص): (سه چیز است که در هر کس نباشد هیچ عملی از او کامل نگردد):



تست ۱: با توجه به شکل روبه‌رو، حاصل  $\int_0^4 (2 - |x - 2|) dx$  کدام است؟

- (تجربی ۹۲) ۲ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۳/۵ (۴)

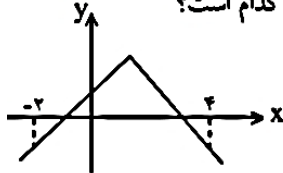
تست ۲: حاصل  $\int_{-2}^2 (x + |x|) dx$  کدام است؟

- (تجربی ۸۸) ۲ (۱) ۰ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴)

۴ (۴)

۲ (۳)

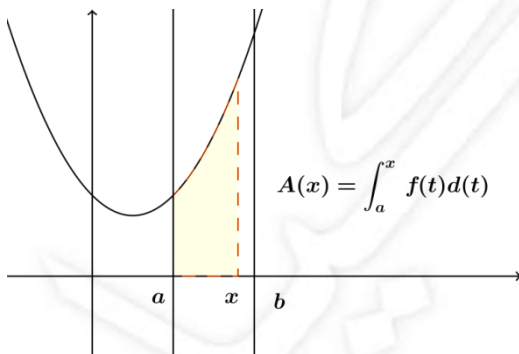
تست ۳: با توجه به نمودار تابع  $f(x) = 2 - |x - 1|$  حاصل انتگرال معین  $\int_{-2}^4 f(x) dx$  کدام است؟



- (تجربی ۸۹) ۲ (۱) ۵/۲ (۲) ۷/۲ (۳) ۳ (۴)

نکته ۴: تاکنون با انتگرال توابع قطعی آشنا شدیم. در ادامه فصل به انتگرال توابع غیر قطعی خواهیم پرداخت.

انتگرال توابع غیر قطعی:



تابع مسامت: فرض کنید تابع  $f$  که بر بازه  $[a, b]$  پیوسته است را در نظر

می‌گیریم. منظور از تابع مسامت این تابع در بازه مذکور که آن را با  $A(x)$  نشان

می‌دهیم، انتگرال  $A(x) = \int_a^x f(t) dt$  است که در آن  $a \leq x \leq b$ .

مثال ۳: تابع مسامت توابع  $y = x^3 - 1$ ,  $y = x^p - x$  را در بازه  $[1, 4]$  مشخص کنید.

۱. پارسیایی که او را از نافرمانی خدا باز دارد.

قضیه (اولین قضیه مساب دیفرانسیل و انتگرال):

فرض کنید تابع  $f$  که بر بازه  $[a, b]$  و برای هر  $x$  که  $a \leq x \leq b$  داشته باشیم  $A(x) = \int_a^x f(t) dt$  در این صورت داریم:

$$\forall x \in (a, b) \quad A'(x) = f(x)$$

مثال ۴: برای هر یک  $F'(x)$  را بیابید.  $F(x) = \int_a^x (te^t + 5) dt$ ,  $F(x) = \int_a^x \left( \frac{\sin t + 1}{t^p + 1} \right) dt$ ,  $F(x) = \int_a^x (t^p + 1) dt$

نکته ۵: اگر داشته باشیم  $F'(x) = f(x)$ ، در این صورت به تابع  $F(x)$  یک تابع اولیه تابع  $f$  می‌گوییم.

قضیه (دومین قضیه مساب دیفرانسیل و انتگرال):

فرض کنید تابع  $f$  که بر بازه  $[a, b]$  پیوسته باشد و داشته باشیم  $F'(x) = f(x)$ ، در این صورت داریم:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

مثال ۵: چون  $(x^p + x)' = px + 1$  پس داریم:  $\int_1^p (px + 1) dx = \left( \left( \frac{p}{p+1} x^{p+1} + x \right) \right) \Big|_1^p = \left( \frac{p^{p+1}}{p+1} + p \right) - \left( \frac{1}{p+1} + 1 \right) = \frac{p^{p+1} + p(p+1) - 1 - p - 1}{p+1} = \frac{p^{p+1} + p^2 + p - 2}{p+1}$

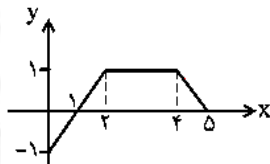
نکته ۶: در حالت کلی داریم:  $\frac{d}{dx} \left( \int_{f(x)}^{g(x)} h(t) dt \right) = g'(x)h(g(x)) - f'(x)h(f(x))$

مثال ۶: مشتق بگیرید.

$$\left( \int_p^{x^p} (kt - 1) dt \right)' = \left( \int_{\sqrt{x}}^1 (\sin t - t) dt \right)'$$

$$\frac{d}{dx} \left( \int_1^{\ln x^p} \left( \frac{5x-1}{\tan x} \right) dt \right) =$$

تست ۴: اگر نمودار تابع  $f$  شکل مقابل باشد و  $F' = f$  و  $F(0) = 1$  آن‌گاه  $F(5)$  کدام است؟



- |                    |                   |
|--------------------|-------------------|
| $\frac{11}{2}$ (۲) | $\frac{7}{2}$ (۱) |
| $\frac{5}{2}$ (۴)  | $\frac{3}{2}$ (۳) |

نکته ۷: وقتی محدود برای انتگرال تابع  $f$  نوشته نمی‌شود  $(\int f(x) dx)$ ، منظور از انتگرال دسته‌ای از توابع می‌باشد که شرایط را داشته باشند.

فرمول‌های انتگرال گیری:

$$\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + c, \quad (r \neq -1) \quad ۱.$$

مثال ۷:  $\int x^m dx =$  ,  $\int dx =$

تست ۵: حاصل  $f(x) = \int \sqrt{x} \sqrt[3]{x} \sqrt[4]{x} dx$  کدام است؟

$\frac{24}{21}$  (۴)

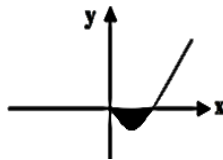
$\frac{24}{51}$  (۳)

$\frac{24}{31}$  (۲)

$\frac{24}{41}$  (۱)

نکته ۸: در بعضی موارد بهتر است از رسم شکل برای یافتن مساحت زیر سطح استفاده کنیم.

تست ۶: با توجه به نمودار تابع با ضابطه  $f(x) = x - \sqrt{x}$ ، مساحت ناحیه سایه زده، کدام است؟



$\frac{1}{4}$  (۲)

$\frac{1}{6}$  (۱)

$\frac{2}{3}$  (۴)

$\frac{1}{3}$  (۳)

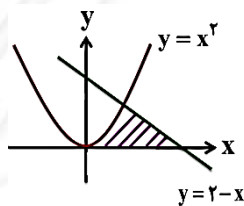
تست ۷: مساحت ناحیه‌ی محصور بین نمودار تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = \begin{cases} x, & -2 \leq x \leq 0 \\ x^2, & 0 \leq x \leq 3 \end{cases}$ ، محور xها و دو خط  $x = -2$  و  $x = 3$  کدام است؟

۹ (۲)

۸ (۱)

۱۱ (۴)

۱۰ (۳)



تست ۸: با توجه به شکل زیر، مساحت ناحیه‌ی سایه زده چقدر است؟

$\frac{7}{6}$  (۲)

$\frac{4}{3}$  (۱)

$\frac{2}{3}$  (۴)

$\frac{5}{6}$  (۳)

$\int 5x^p dx =$

$\int \frac{x^p}{5} dx =$

مثال:

$\int cf(x) dx = c \int f(x) dx$  .۲

نکته ۹: برای مناسبه انتگرال‌های معین شامل قدر مطلق و جزء صمیم، ابتدا انتگرال را به بازه‌های به طول مناسب افراز می‌کنیم.

تست ۹: مقدار  $\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} [\cos x] dx$  کدام است؟

- (۱) صفر (۲)  $\frac{7\pi}{12}$  (۳)  $-\frac{7\pi}{12}$  (۴)  $-\frac{\pi}{4}$

تست ۱۰: مقدار انتگرال معین  $\int_{-1}^3 (x + [x]) dx$  کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۵/۵ (۳) ۶ (۴) ۶/۵

تست ۱۱: حاصل  $\int_{-1}^2 x^2 [x] dx$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{55}{3}$  (۲) ۱۵ (۳)  $\frac{26}{3}$  (۴)  $\frac{29}{3}$

۳.  $\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$

$\int (x^5 + 4x) dx =$

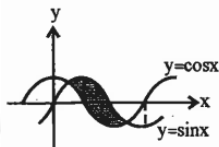
مثال ۸:  $\int \frac{x^3 - 7x}{x} dx =$

۴.  $\int \cos ax dx = \frac{1}{a} \sin ax + c$  و  $\int \sin ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax + c$

تست ۱۲: حاصل  $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (\cos^4 x - \sin^4 x + 2 \sin^2 x) dx$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{\pi}{6}$  (۲)  $\frac{\pi}{4}$  (۳)  $\frac{\pi}{3}$  (۴)  $\frac{\pi}{2}$

تست ۱۳: مساحت ناحیه‌ی هاشور خورده در شکل زیر کدام است؟



- (۱) ۲ (۲)  $2\sqrt{2}$  (۳) ۱ (۴)  $\sqrt{2}$

۱۴. فوجی که به وسیله آن با مردم مدارا کند

مساحت ناحیه‌ی محدود به سهمی  $y = x(\pi - x)$  و منحنی  $y = \sin x$  کدام است؟ تست ۱۴:

$$\frac{\pi^3}{6} - 2 \quad (4)$$

$$\frac{\pi^3}{6} - 1 \quad (3)$$

$$\frac{\pi^2}{6} - 1 \quad (2)$$

$$\frac{\pi^3}{6} \quad (1)$$

تست ۱۵: حاصل  $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx$  کدام است؟

$$\frac{\pi - 2}{8} \quad (4)$$

$$\frac{\pi - 2}{8} \quad (3)$$

$$\frac{2 - \pi}{8} \quad (2)$$

$$\frac{\pi}{8} \quad (1)$$

تست ۱۶: حاصل  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx$  کدام است؟

$$\frac{4}{3} \quad (4)$$

$$1 \quad (3)$$

$$\frac{2}{3} \quad (2)$$

$$\frac{1}{3} \quad (1)$$

$$\int (1 + \cot^p ax) dx = -\frac{1}{a} \cot ax + c \quad \text{و} \quad \int (1 + \tan^p ax) dx = \frac{1}{a} \tan ax + c \quad \Delta$$

$$\int (p \sin x + w) dx =$$

$$\int p(1 + \cot^p wx) dx =$$

مثال ۹:

تست ۱۷: حاصل  $\int (2 \tan x + 3 \cot x)^2 dx$  کدام است؟

$$2 \tan x + 9 \cot x + x + c \quad (2)$$

$$2 \tan x + 9 \cot x - x + c \quad (1)$$

$$2 \tan x - 9 \cot x - x + c \quad (4)$$

$$2 \tan x - 9 \cot x + x + c \quad (3)$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c, \quad \int e^{kx} dx = \frac{1}{k} e^{kx} + c \quad \Delta$$

مثال ۱۰:

$$\int \left( \frac{1}{px} - pe^{px} + \sqrt{x} \right) dx =$$

$$\int \frac{w + e^{px}}{e^{px}} dx =$$

$$\int_1^p \frac{x^p - w}{x}$$

$$\int \left( \frac{p}{x} - \frac{x^p}{p} \right) dx =$$

تست ۱۸: حاصل  $\int \frac{\ln^2 e^{2x}}{e^{2x}} dx$  کدام است؟

۴ (۴)

۲ (۳)

$\frac{3}{2}$  (۲)

۱ (۱)

تست ۱۹: حاصل  $\int_1^2 (e^x - e^{-x})^2 dx$  کدام است؟

$\frac{e^2 + 2e - 1}{2e}$  (۴)

$\frac{e^2 - 2e - 1}{2e}$  (۳)

$\frac{e^2 - 2e - 1}{2e}$  (۲)

$\frac{e^2 + 2e - 1}{2e}$  (۱)

$\int \tan \phi x dx =$

$\int \frac{\psi x}{x^\psi - 1} dx =$

مثال:  $\int \frac{u'}{u} dx = \ln|u| + c$  .۷

۸.  $\int \tan ax dx = \int \frac{\sin ax}{\cos ax} dx = -\int \frac{-\sin ax}{\cos ax} dx = -\ln|\cos ax| + c$ ,  $\int \cot ax dx = \int \frac{\cos ax}{\sin ax} dx = \ln|\sin ax| + c$

مثال ۱۱: حاصل را بیابید.

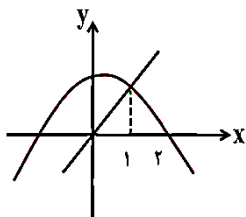
$\int \sin^p \phi x dx =$

$\int \frac{1}{\sin^p x} dx =$

$\int \cos^p \phi x dx =$

$\int \frac{1}{\cos^p x} dx =$

تست ۲۰: مساحت ناحیه‌ی محدود به منحنی  $y = 4 - x^2$  و خط به معادله‌ی  $y = 3x$  و محور  $x$ ها در ناحیه‌ی اول کدام؟



$\frac{7}{3}$  (۲)

$\frac{13}{6}$  (۱)

$\frac{19}{6}$  (۴)

$\frac{8}{3}$  (۳)

تست ۲۱: اگر  $\int \frac{dx}{\sqrt{(2x+1)^2}} = A(2x+1)^k$  باشد،  $A$  کدام است؟

$\frac{4}{3}$  (۲)

$\frac{3}{2}$  (۱)

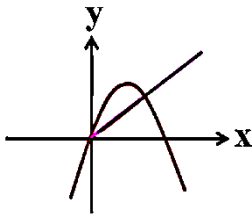
$\frac{3}{4}$  (۴)

$\frac{2}{3}$  (۳)

۱۰. برداری‌ای که با آن رفتار جاهلانه نادره را دفع سازد.

نکته ۱۰: برای مناسبه مسامت ممصور بین دو منحنی از تفاضل آن‌ها استفاده می‌کنیم.

تست ۲۲: مساحت ناحیه‌ی زیر منحنی به معادله‌ی  $y = -x^2 + 5x$  و  $y = x$  بالای خط کدام است؟



$$\frac{22}{3} \quad (1) \quad \frac{16}{3}$$

$$\frac{22}{3} \quad (4) \quad \frac{28}{3} \quad (3)$$

نکته ۱۱: گاهی اوقات با استفاده از تزییر متخیر می‌توان به حل یک انتگرال پرداخت.

تست ۲۳: اگر  $f(x) = \int \frac{x}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1} dx$  و  $f(2) = \frac{1}{2}$ ، آن‌گاه  $f(3)$  کدام است؟

$$\frac{2}{8} \quad (3) \quad \frac{11}{8} \quad (2) \quad -\frac{13}{8} \quad (2) \quad -\frac{21}{28} \quad (1)$$

تست ۲۴: حاصل  $\int_1^4 \frac{dx}{x + \sqrt{x}}$  کدام است؟

$$2 \ln 2 \quad (4) \quad 3 \ln 2 \quad (2) \quad 2 \ln 2 \quad (2) \quad \ln 2 \quad (1)$$

تست ۲۵: حاصل  $\int_0^e \frac{dx}{x \ln x}$  کدام است؟

$$-1 + \log_2 e \quad (2) \quad -1 + \ln 2 \quad (2) \quad \ln 2 \quad (2) \quad \log_2 e \quad (1)$$

تست ۲۶: اگر  $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = A(x^2 + 1)^{\frac{1}{2}} + c$ ، آن‌گاه مقدار  $A$  کدام است؟

$$\frac{1}{4} \quad (2) \quad \frac{1}{3} \quad (2) \quad \frac{1}{2} \quad (2) \quad 1 \quad (1)$$



تست ۲۷: حاصل  $\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$  کدام است؟

$-\cos \sqrt{x} + c$  (۴)

$-\sqrt{2} \cos \sqrt{x} + c$  (۳)

$\sqrt{2} \cos \sqrt{x} + c$  (۲)

$\cos \sqrt{x} + c$  (۱)

نکته ۱۲: در حالت کلی داریم:  $\frac{d}{dx} \left( \int_{f(x)}^{g(x)} h(t) dt \right) = g'(x)h(g(x)) - f'(x)h(f(x))$

مثال ۱۲: مشتق بگیرید.

$\left( \int_p^{x^p} (4t-1) dt \right)' =$

$\left( \int_{\sqrt{x}}^1 (\sin t - t) dt \right)' =$

$\left( x^p \int_p^{x^{p-1}} \left( \frac{e^{\sin t}}{\cos t} \right) dt \right)' =$

$\frac{1}{2}$  (۴)

$\sqrt{2}$  (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

تست ۲۸: اگر  $2x^2 - 8 = \int_a^x f(t) dt$  باشد، آنگاه مقدار مثبت عدد ثابت  $a$  کدام است؟

تست های کنکور

تست ۱:

اگر  $\int x(1-5\sqrt{x}) dx = \frac{x^2}{2} \cdot f(x) + C$  تابع  $f(x)$  کدام است؟

(تجربی ۸۵)

$$x - x\sqrt{x} \quad (۴) \quad x - ۲\sqrt{x} \quad (۳) \quad ۱ - ۲\sqrt{x} \quad (۲) \quad ۱ - ۴\sqrt{x} \quad (۱)$$

تست ۲:

حاصل  $\int_{-2}^2 (2x + |x|) dx$  کدام است؟

(تجربی ۸۶)

$$۸ \quad (۴) \quad ۶ \quad (۳) \quad ۴ \quad (۲) \quad ۳ \quad (۱)$$

تست ۳:

اگر  $\int \frac{(1+\sqrt{x})^2 - x}{\sqrt{x}} dx = \sqrt{x} \cdot f(x) + C$  آنگاه  $f(x)$  کدام است؟

(تجربی ۸۶)

$$۲ + ۲\sqrt{x} \quad (۴) \quad ۲ + \sqrt{x} \quad (۳) \quad ۱ + ۲\sqrt{x} \quad (۲) \quad ۱ + \sqrt{x} \quad (۱)$$

تست ۴:

اگر  $G(x) = \int_2^x \frac{t}{\sqrt{1+t^3}} dt$  آنگاه مشتق راست تابع  $G(x)$ ،  $y = x$ ، در نقطه  $x = ۲$  کدام است؟

(تجربی ۸۷)

$$\frac{5}{3} \quad (۴) \quad \frac{2}{3} \quad (۳) \quad \frac{2}{3} \quad (۲) \quad \frac{1}{3} \quad (۱)$$

تست ۵:

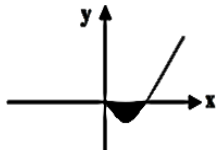
حاصل  $\int_{-2}^2 (x + |x|) dx$  کدام است؟

(تجربی ۸۸)

$$۴ \quad (۴) \quad ۲ \quad (۳) \quad ۲ \quad (۲) \quad -۲ \quad (۱)$$

تست ۶:

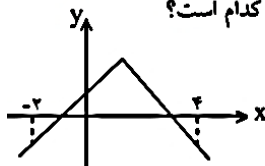
با توجه به نمودار تابع با ضابطه  $f(x) = x - \sqrt{x}$ ، مساحت ناحیه سایه زده، کدام است؟



- (تجربی ۸۸)
- (۱)  $\frac{1}{6}$
- (۲)  $\frac{1}{4}$
- (۳)  $\frac{1}{3}$
- (۴)  $\frac{2}{3}$

تست ۷:

با توجه به نمودار تابع  $f(x) = 2 - |x - 1|$ ، حاصل انتگرال معین  $\int_{-2}^2 f(x) dx$  کدام است؟



- (تجربی ۸۹)
- (۱) ۲
- (۲)  $\frac{5}{2}$
- (۳) ۳
- (۴)  $\frac{7}{2}$

تست ۸:

اگر  $\int \frac{(1 - \sqrt{x})^2}{2\sqrt{x}} dx = \sqrt{x} \cdot f(x) + c$  باشد،  $f(x)$  کدام است؟

- (تجربی ۸۹)
- (۱)  $1 - \sqrt{x} + \frac{1}{3}x$
- (۲)  $1 + \sqrt{x} - \frac{1}{3}x$
- (۳)  $2 - \sqrt{x} + \frac{1}{3}x$
- (۴)  $2 - \sqrt{x} + 2x$

تست ۹:

مساحت ناحیه‌ی محدود به نمودار تابع  $f(x) = |2x - 1|$  و محور  $x$ ها و دو خط  $x = 1$  و  $x = -1$ ، کدام است؟

- (تجربی ۹۰)
- (۱)  $\frac{3}{2}$
- (۲) ۲
- (۳)  $\frac{5}{2}$
- (۴) ۳

تست ۱۰:

با شرط  $x > 1$  داریم:  $\int \frac{2-2x}{1-\sqrt{x}} dx = x \cdot f(x) + c$ ،  $f(x)$  برابر کدام است؟

- (تجربی ۹۰)
- (۱)  $2 + 2\sqrt{x}$
- (۲)  $2 + \sqrt{x}$
- (۳)  $2x - \sqrt{x}$
- (۴)  $2x - 2\sqrt{x}$

تست ۱۱:

اگر  $f(x) = |x| - [x]$  حاصل  $\int_{-1}^2 f(x) dx$  کدام است؟ (تجربی ۹۱)

۳ (۴)

$\frac{5}{2}$  (۳)

۲ (۲)

$\frac{3}{2}$  (۱)

تست ۱۲:

اگر  $\int \frac{\Delta x^2 - 3x}{\sqrt{x}} dx = f(x)(2x\sqrt{x}) + C$  ، آنگاه  $f(x)$  کدام است؟ (تجربی ۹۱)

$\Delta x - 3$  (۴)

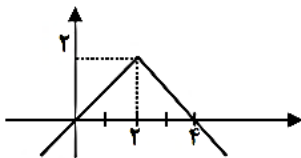
$3x - 2$  (۳)

$x - 1$  (۲)

$x - 2$  (۱)

تست ۱۳:

با توجه به شکل روبه‌رو، حاصل  $\int_0^4 (2 - |x - 2|) dx$  کدام است؟ (تجربی ۹۲)



۳ (۲)

۲ (۱)

۴ (۴)

$3/5$  (۳)

تست ۱۴:

با شرط  $x \neq k\pi + \frac{\pi}{4}$  حاصل  $\int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} dx$  کدام است؟ (تجربی ۹۲)

$-\sin x - \cos x + c$  (۴)

$-\sin x + \cos x + c$  (۳)

$\sin x - \cos x + c$  (۲)

$\sin x + \cos x + c$  (۱)

تست ۱۵:

مقدار انتگرال معین  $\int_{-1}^2 (x + [x]) dx$  کدام است؟ (تجربی ۹۳)

$6/5$  (۴)

۶ (۳)

$5/5$  (۲)

۵ (۱)

تست ۱۶: اگر  $\int \frac{(1+\sqrt{x})^3 - 1}{x} dx = 3\sqrt{x} \cdot f(x) + C$  باشد، کدام است  $f(x)$ ؟ (تجربی ۹۳)

(۲)  $\frac{2}{3}x + \sqrt{x} + 6$

(۱)  $\frac{2}{3}x + 3\sqrt{x} + 2$

(۴)  $\frac{2}{9}x + \sqrt{x} + 2$

(۳)  $\frac{2}{9}x + 3\sqrt{x} + 6$

تست ۱۷: مساحت ناحیه‌ی محصور بین نمودار تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = \begin{cases} x & ; -2 \leq x \leq 0 \\ x^2 & ; 0 \leq x \leq 3 \end{cases}$ ، محور Xها و دو خط  $x = -2$  و  $x = 3$ ، کدام است؟ (ف ۹۰)

(۴) ۱۱

(۳) ۱۰

(۲) ۹

(۱) ۸

تست ۱۸: اگر  $\int \frac{fx - f}{\sqrt[3]{x^2}} dx = \sqrt[3]{x} \cdot f(x) + c$ ، آن‌گاه  $f(x)$  کدام است؟ (ف ۹۰)

(۴)  $fx - 1$

(۳)  $2x - 1$

(۲)  $x - 2$

(۱)  $x - 4$

تست ۱۹: اگر  $f(x) = |x| + |x+1|$  حاصل  $\int_{-1}^2 f(x) dx$  کدام است؟ (ف ۹۱)

(۴) ۷

(۳) ۶/۵

(۲) ۶

(۱) ۵

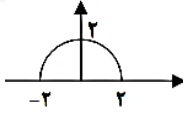
تست ۲۰: اگر  $\int \frac{1-x}{x\sqrt{x}} dx = \frac{2f(x)}{\sqrt{x}} + C$ ، آن‌گاه  $f(x)$  کدام است؟ (ف ۹۱)

(۴)  $2x - 1$

(۳)  $x + 1$

(۲)  $x - 2$

(۱)  $-x - 1$



تست ۲۱: با توجه به شکل روبه‌رو، حاصل  $\int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} dx$  کدام است؟

- (۹۲) (۱)  $2\pi - 2$  (۲)  $\pi + 2$  (۳)  $2\pi$  (۴)  $4\pi$

تست ۲۲: با شرط  $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ ، حاصل  $\int \sqrt{1+\tan^2 x} \sin 2x dx$  کدام است؟

- (۹۲) (۱)  $-2\cos x + c$  (۲)  $-2\sin x + c$  (۳)  $2\cos x + c$  (۴)  $2\sin x + c$

تست ۲۳: مقدار انتگرال معین  $\int_{-2}^1 (|x| - [x]) dx$  کدام است؟

- (۹۳) (۱) ۴ (۲)  $4\frac{1}{5}$  (۳) ۵ (۴)  $5\frac{1}{5}$

تست ۲۴: اگر  $\int \left(\sqrt{x} - \frac{1}{x}\right)^2 dx = \frac{f(x)}{2x} + C$  باشد، کدام  $f(x)$  است؟

- (۹۳) (۱)  $x^3 - 8x\sqrt{x} + 2$  (۲)  $x^3 - 4x\sqrt{x} + 2$   
(۳)  $x^3 - 8x\sqrt{x} - 2$  (۴)  $x^3 - 4x\sqrt{x} - 2$

تست ۲۵: حاصل  $\int_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$  برابر کدام است؟

- (تجربی ۹۴) (۱) ۱ (۲) ۲ (۳)  $\pi$  (۴) صفر

((امام علی (علیه السلام) فرموده اند: مطالعه ی بسیار و پی گیری در مسائل علمی، باعث شکفتن عقل و تقویت نیروی فکر و فهم است))

تست ۲۶: حاصل  $\int_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$  برابر کدام است؟ (تجربی ۹۴)

- (۱) ۱      (۲) ۲      (۳)  $\pi$       (۴) صفر

تست ۲۷: حاصل  $\int_0^{2\pi} \sqrt{2-2\cos x} dx$  کدام است؟ (فاز ۹۴)

- (۱) ۲      (۲) ۴      (۳) ۶      (۴) ۸

تست ۲۸: اگر  $\int \frac{4x^2-1}{\sqrt{x}} dx = \frac{3}{2} \sqrt{x^2} f(x) + c$  آنگاه  $f(x)$  کدام است؟ (فاز ۹۴)

- (۱)  $2x^2 - x$       (۲)  $x^2 - x$       (۳)  $x^2 - 1$       (۴)  $2x^2 - 1$

## تمرینات کتاب

مقدار انتگرال‌های معین ۱ تا ۱۰ را محاسبه کنید.

۱-  $\int_1^2 (3x + 2) dx$

۲-  $\int_{-2}^2 x dx$

۵-  $\int_0^2 |2x + 1| dx$

۷-  $\int_{-2}^2 2[x] dx$

۹-  $\int_{-2}^2 \left(-\frac{5}{4}\right) dx$

۲-  $\int_1^2 (1-x) dx$

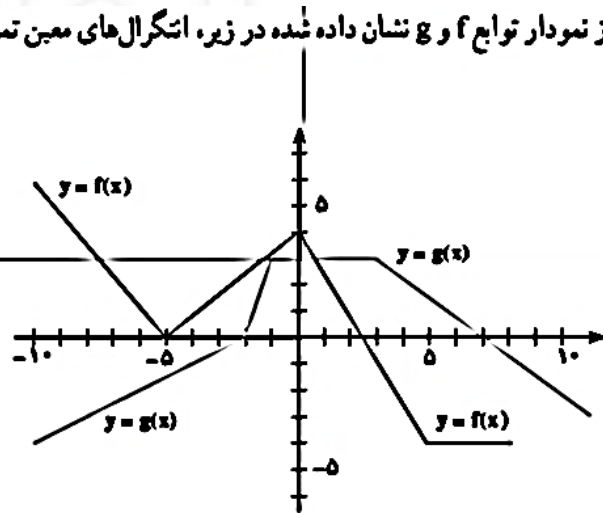
۴-  $\int_{-2}^2 |x| dx$

۶-  $\int_{-2}^2 |2-x| dx$

۸-  $\int_{-2}^2 ([x]-1) dx$

۱۰-  $\int_0^2 (-3) dx$

با استفاده از نمودار توابع  $f$  و  $g$  نشان داده شده در زیر، انتگرال‌های معین تمرین‌های ۱۱ تا ۲۰ را پیدا کنید.



۱۱-  $\int_{-9}^0 f(x) dx$

۱۲-  $\int_{-8}^0 g(x) dx$

۱۵-  $\int_0^2 f(x) dx$

۱۷-  $\int_{-2}^0 g(x) dx$

۱۹-  $\int_{-9}^0 f(x) dx$

۱۲-  $\int_0^2 f(x) dx$

۱۴-  $\int_{-1}^0 g(x) dx$

۱۶-  $\int_0^{-2} f(x) dx$

۱۸-  $\int_0^{-2} f(x) dx$

۲۰-  $\int_{-2}^0 g(x) dx$



فرمولی به صورت  $F(x) + C$ ، که در آن  $F$  یک تابع اولیه برای تابع زیر انتگرال است، برای هر یک از انتگرال‌های نامعین زیر بیابید.

۱-  $\int (x^2 + x + 1) dx$

۲-  $\int (3x^2 + 2x + 1) dx$

۳-  $\int \frac{x^2}{y} dx$

۴-  $\int \sqrt{17} dx$

۵-  $\int \sqrt{x} dx$

۶-  $\int \frac{2}{x^2} dx$

۷-  $\int (5\sin(x) - 3\cos(x)) dx$

۸-  $\int \sqrt[5]{x} dx$

۹-  $\int x^{\frac{2}{3}} dx$

۱۰-  $\int \frac{x^2 - x^{-2}}{3} dx$

۱۱-  $\int \pi x^{100} dx$

۱۲-  $\int (\sin^2(x) + \cos^2(x)) dx$

فرض کنیم  $G$  تابع مساحت با ضابطه تعریف  $G(x) = \int_1^x \frac{\sin(2t)}{1+t^2} dt$  باشد در هر یک از تمرین‌های زیر  $y$  را پیدا کنید.

۱۳-  $y = G(x')$

۱۴-  $y = G(x)$

۱۵-  $y = (G(x))'$

۱۶-  $y = x'G(x)$

۱۷-  $y = G(x)$

۱۸-  $y = \frac{G(x)}{x^2}$

با استفاده از دومین قضیه اساسی، انTEGRال‌های معین مفروض در تمرین‌های ۱۹ تا ۲۴ را

محاسبه کنید :

$$۱۹ - \int_{-1}^2 (x^2 + x + 1) dx$$

$$۲۰ - \int_1^{7/5} (3x^2 + 2x + 1) dx$$

$$۲۱ - \int_1^4 \sqrt{x} dx$$

$$۲۲ - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (5 \sin x - 3 \cos x) dx$$

$$۲۳ - \int_1^{\sqrt{e}} (\sin^2 x + \cos^2 x) dx$$

$$۲۴ - \int_{-1}^{-2} \frac{1}{x^2} dx$$

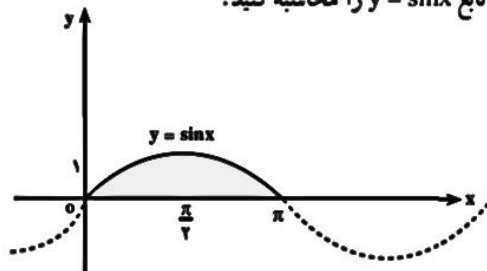
۲۵- دانش‌آموزی از دومین قضیه اساسی استفاده کرده و انTEGRال زیر را محاسبه کرده است :

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \Big|_{-1}^1 = -1 - 1 = -2$$

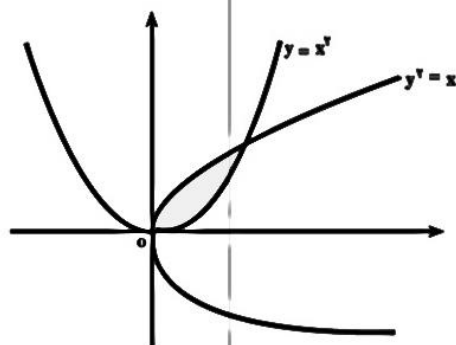
آیا این جواب قابل قبول است؟

نمودار  $y = \frac{1}{x^2}$  را رسم کنید و بگویید که چرا جواب فوق قابل قبول نیست. اشتباه دانش‌آموز در کجاست؟

۲۶- مساحت یک طاق تحت نمودار تابع  $y = \sin x$  را محاسبه کنید.



۲۷- مساحت ناحیه هاشور زده در شکل زیر را محاسبه کنید.



۲۸-  $\int_1^2 e^{2x} dx$  را محاسبه کنید.

۲۹-  $\int_1^5 \frac{dx}{x}$  را محاسبه کنید.

۳۰-  $\int_1^5 \frac{x dx}{x^2 + 1}$  را محاسبه کنید.

۳۱-  $\int_2^3 e^{5x} dx$  را محاسبه کنید.

## فصل پنجم (منحنی‌های درجه دوم)

فصل پنجم: منحنی‌های درجه دوم

(۱) یادآوری:

الف) فاصله دو نقطه  $A(x_p, y_p)$ ,  $A(x_1, y_1)$  از رابطه  $AB = \sqrt{(x_1 - x_p)^2 + (y_1 - y_p)^2}$  بدست می‌آید.الف) نقطه وسط دو نقطه  $A(x_p, y_p)$ ,  $A(x_1, y_1)$  از رابطه  $M = \left( \frac{x_1 + x_p}{2}, \frac{y_1 + y_p}{2} \right)$  بدست می‌آید.مثال ۱: فاصله دو نقطه  $A = (1, 0)$ ,  $B = (-2, 4)$  و همچنین نقطه وسط آن‌ها را بیابید.تست ۱: اگر دو نقطه  $A = (m - 4n, m - n)$  و  $B = (pm + n - 3, m + n + 2)$  به ترتیب روی قسمت مثبت محور  $x$  ها و  $y$  هاباشند، طول پاره‌خط  $AB$  کدام است؟

۴ (۱)

۵ (۲)

 $2\sqrt{2}$  (۳)

۲ (۴)

(۲) فاصله نقطه از خط:

فاصله نقطه  $A = (x_0, y_0)$  از خط  $ax + by + c = 0$  از رابطه  $d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  بدست می‌آید.نکته ۱: فاصله دو خط موازی  $ax + by + c = 0$  و  $ax + by + c' = 0$  از رابطه  $d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  بدست می‌آید.مثال ۲: فاصله خطوط  $3x - 2y = 1$  و  $4x - 1 = y$  از نقطه  $A = (1, -2)$  و از مبدا مختصات بیابید.

((مضرت علی(علیه السلام): عادت بد، دشمنی است که با قدرت بر صافیش مکومت می کند.))

تست ۲: فاصله‌ی بین دو خط به معادلات  $y = x\sqrt{3} + 2$  و  $\sqrt{3}y - 3x + 6 = 0$  کدام است؟

- فارسی ۸۸ (۱)  $2 - \sqrt{3}$  (۲)  $\sqrt{3} - 1$  (۳)  $\sqrt{3} + 1$  (۴)  $2 + \sqrt{3}$

تست ۳: - معادله‌ی چهار ضلع یک مستطیل به صورت  $2x + y = 5$ ،  $2x + y = 3$ ،  $x - 2y = 14$  و  $x + 2y = 6$  می‌باشد. محیط این مستطیل کدام است؟

- (۱)  $2\sqrt{5}$  (۲)  $12\sqrt{5}$  (۳)  $4\sqrt{5}$  (۴)  $8\sqrt{5}$

تست ۴: دو نقطه‌ی A و B واقع بر خط به معادله‌ی  $2x - y = 0$  از خط به معادله‌ی  $3x = 4y + 5$  به فاصله‌ی ۲ قرار دارند. طول پاره خط AB کدام است؟

- (۱)  $2\sqrt{5}$  (۲)  $4\sqrt{5}$  (۳)  $3\sqrt{2}$  (۴)  $4\sqrt{2}$

### ۱۳) دستگاه معادلات:

در سال‌های گذشته با حل این معادلات آشنا شدید و برای حل این معادلات روش‌های جایگزینی و حذفی استفاده کردید. از این روش‌ها برای حل دستگاه‌های سه معادله و سه مجهول نیز می‌توانیم استفاده کنیم.

مثال ۳: معادلات زیر را حل کنید.

$$\text{الف) } \begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 = 10 \end{cases}$$

$$\text{ب) } \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 = -12 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -5 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

بمث در جواب‌های دستگاه معادلات:

دستگاه دومعادله دومیجهولی  $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$  را در نظر می‌گیریم. داریم:

الف) اگر  $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$ ، آن‌گاه معادله یک جواب دارد.

ب) اگر  $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ ، آن‌گاه معادله بیشمار جواب دارد و اگر  $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ ، معادله جواب ندارد.

نکته ۲: اگر دستگاه جواب داشته باشد، سازگار و اگر جواب نداشته باشد، ناسازگار نامیده می‌شود.

نکته ۳: اگر ضرایب  $c$  و  $c'$  صفر باشند، دستگاه همگن نامیده می‌شود.

نکته ۴: دو دستگاه هم‌ارز نامیده می‌شوند، هرگاه جواب‌های یکسانی داشته باشند.

تست ۵: - به‌ازای چند مقدار  $m$ ، دستگاه  $\begin{cases} (m+2)x = m-y+x \\ 3x + (m-2)y = -2m+2-2y \end{cases}$  دارای بی‌شمار جواب است؟

۱) صفر      ۲) ۱      ۳) ۲      ۴) بی‌شمار

تست ۶: - اگر دستگاه‌های  $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 1 \\ 5x_1 - 2x_2 = 12 \end{cases}$  و  $\begin{cases} bx_1 + ax_2 = 2b-1 \\ cx_1 + 4x_2 = 2 \end{cases}$  هم‌ارز باشند، مقدار  $a+c$  کدام است؟

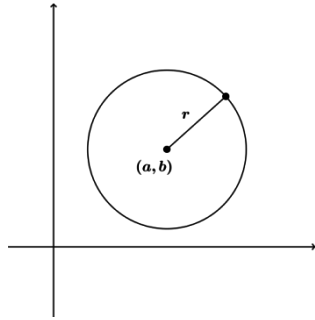
۱) ۳      ۲) ۴      ۳) ۵      ۴) -۲

تست ۷: - به‌ازای چه مقدار  $m$  دستگاه  $\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ x + z = 0 \\ mx + 2y + z = 0 \end{cases}$  جواب غیرصفر دارد؟

۱)  $m = 4$       ۲)  $m = 3$       ۳)  $m = 2$       ۴)  $m = 1$

الف) دایره:

تعریف: مکان هندسی نقاطی از صفحه که فاصله آنها از یک نقطه ثابت (مرکز دایره)، مقداری ثابت (شعاع دایره) است.



معادله دایره:

۱) معادله  $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ ، معادله کانونی دایره به مرکز  $(a, b)$  و شعاع  $r$  است.

۲) معادله ضمیمی (گسترده) دایره به شکل  $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$  است. در این معادله مرکز دایره  $C\left(\frac{-D}{2}, \frac{-E}{2}\right)$  است و شعاع نیز

از رابطه  $r = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$  محاسبه می‌شود.

نکته ۵: شرط این‌که معادله فوق معادله یک دایره باشد، این است که  $D^2 + E^2 - 4F > 0$  باشد.

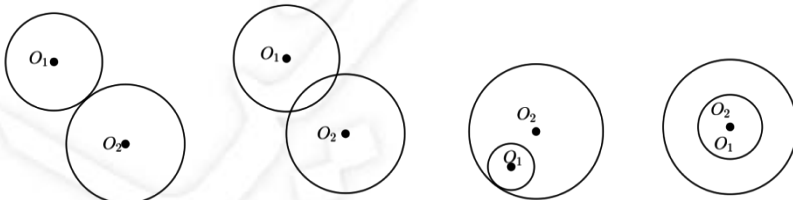
مثال ۴: معادلات  $x^2 + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0$ ،  $x^2 + y^2 + 3x - 2y + 1 = 0$  مربوط به چه نوع منحنی هستند؟ مشخصات آنها را بیابید.

وضع دو دایره نسبت به هم: دو دایره به مرکزهای  $O_1$  و  $O_2$  و شعاع‌های  $r_1$  و  $r_2$  را در نظر می‌گیریم، داریم:

الف) دو دایره مماس خارجاند اگر  $O_1O_2 = r_1 + r_2$ . ب) دو دایره متقاطعاند اگر  $|r_1 - r_2| < O_1O_2 < r_1 + r_2$ .

پ) دو دایره مماس داخلاند اگر  $O_1O_2 = |r_1 - r_2|$ .

ت) دو دایره هم مرکزند اگر  $O_1O_2 = 0$ .



تست ۸: دایره‌ای از دو نقطه‌ی  $(2, 0)$  و  $(-2, 0)$  گذشته و بر خط  $y = 1$  مماس است. شعاع این دایره کدام است؟

- ۱)  $\frac{3}{2}$       ۲)  $\sqrt{5}$       ۳)  $\frac{5}{2}$       ۴) ۳

تست ۹: دایره‌ای از دو نقطه‌ی  $(0, 1)$  و  $(3, 0)$  گذشته و معادله‌ی یک قطر آن به صورت  $x - y = 2$  است. شعاع این دایره کدام است؟

- گزینه ۹۰ (۱)  $\sqrt{2}$  (۲) ۲ (۳)  $\sqrt{5}$  (۴) ۳

تست ۱۰: دایره‌ای به مرکز  $(2, 3)$  بر محور  $x$  مماس است. محور  $y$  روی این دایره وترى با کدام طول جدا می‌کند؟

- (۱) ۶ (۲) ۵ (۳)  $2\sqrt{5}$  (۴)  $2\sqrt{6}$

تست ۱۱: دو قطر از یک دایره،  $x - 2y = 1$  و  $3x + y = 10$  هستند. اگر این دایره بر خط  $3x + 4y = 3$  مماس باشد، سطح آن در کدام نواحی قرار دارد؟

- (۱) فقط اول (۲) اول و دوم (۳) اول و چهارم (۴) اول، دوم و چهارم

نکته ۶: اگر دو دایره  $x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + c_1 = 0$  و  $x^2 + y^2 + a_2x + b_2y + c_2 = 0$  متقاطع باشند، معادله وتر مشترک آن‌ها به صورت

$$(a_1 - a_2)x + (b_1 - b_2)y + (c_1 - c_2) = 0 \text{ خواهد بود که از تفریق دو معادلات آن‌ها بدست می‌آید.}$$

مثال ۵: ابتدا نشان دهید دو دایره  $x^2 + y^2 - 14x = 0$ ،  $x^2 + y^2 - 2x - 8 = 0$  متقاطعند. سپس معادله وتر مشترک این دو را بیابید.

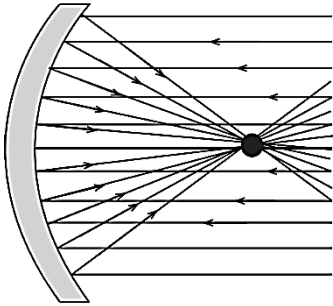
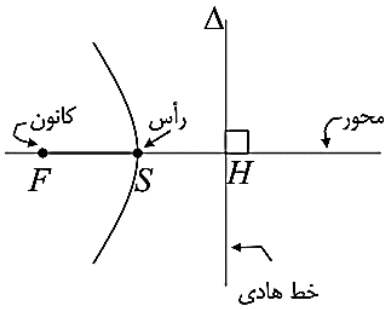
تست ۱۲: معادله‌ی وتر مشترک دو دایره‌ی  $x^2 + y^2 + 3ax + 8y = 0$  و  $x^2 + y^2 - 4x - 2ay - 14 = 0$  به صورت  $5x + 7y = -7$  می‌باشد.  $a$

- گزینه ۹۵ کدام است؟ (۱) -۲ (۲) ۲ (۳) -۳ (۴) ۴



ب) سهمی:

تعریف: مکان هندسی نقاطی از صفحه که فاصله آن‌ها از یک نقطه ثابت (کانون سهمی) و یک خط ثابت (خط هادی سهمی) مقداری ثابت است. نقطه وسط پاره‌خط عمود از کانون بر خط هادی، رأس سهمی نامیده می‌شود.

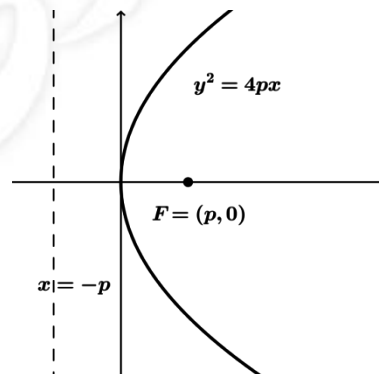
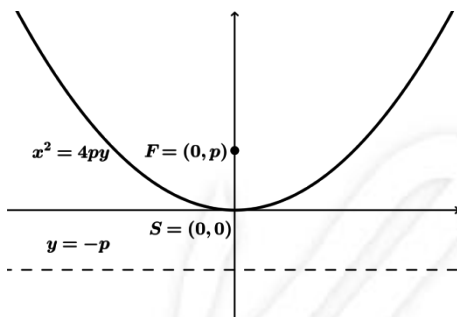


نکته ۷: کانون سهمی را با حرف 'F'، رأس سهمی را با حرف 'S' نشان می‌دهیم. به خطی که از کانون و رأس سهمی می‌گذرد محور کانونی سهمی می‌گوییم. در آینه‌های سهموی، تمام خطوط موازی محور سهمی به آینه تابیده می‌شوند از کانون سهمی بازتابیده می‌شوند و برعکس.

معادله سهمی:

بر اساس جهت دهانه سهمی، این توابع را به چهار دسته زیر تقسیم می‌کنیم:

- الف) دهانه سهمی رو به بالا: معادله به صورت  $x^p = 4py$ ، رأس سهمی:  $S = (0, 0)$ ، کانون سهمی:  $F = (0, p)$  و خط هادی  $y = -p$ .
- ب) دهانه سهمی رو به پایین: معادله به صورت  $x^p = -4py$ ، رأس سهمی:  $S = (0, 0)$ ، کانون سهمی:  $F = (0, -p)$  و خط هادی  $y = p$ .
- ج) دهانه سهمی رو به راست: معادله به صورت  $y^p = 4px$ ، رأس سهمی:  $S = (0, 0)$ ، کانون سهمی:  $F = (p, 0)$  و خط هادی  $x = -p$ .
- د) دهانه سهمی رو به چپ: معادله به صورت  $y^p = -4px$ ، رأس سهمی:  $S = (0, 0)$ ، کانون سهمی:  $F = (-p, 0)$  و خط هادی  $x = p$ .



مثال ۶: مشخصات سهمی‌های  $y^p = -4x$ ,  $x^p - 2y = 0$  و  $y - 1 = x^p + 5x$  را بیابید.

نکته ۸: اگر راس سهمی در نقطه  $(h, k)$  باشد فوایم داشت:

- الف) دهانه سهمی رو به بالا: معادله به صورت  $(x-h)^p = 4p(y-k)$ ، کانون سهمی:  $F = (h, p+k)$  و فضا هادی  $y = -p+k$ .
- ب) دهانه سهمی رو به پایین: معادله به صورت  $(x-h)^p = -4p(y-k)$ ، کانون سهمی:  $F = (h, -p+k)$  و فضا هادی  $y = p+k$ .
- ج) دهانه سهمی رو به راست: معادله به صورت  $(y-h)^p = 4p(x-k)$ ، کانون سهمی:  $F = (p+h, k)$  و فضا هادی  $x = -p+h$ .
- د) دهانه سهمی رو به چپ: معادله به صورت  $(y-h)^p = -4p(x-k)$ ، کانون سهمی:  $F = (-p+h, k)$  و فضا هادی  $x = p+h$ .
- مثال ۷: نمودار سهمی‌های  $y = x^p - 4x$ ,  $y^p + 4y + 4x = 1$  را رسم کنید.

تست ۱۳: به ازای کدام مقدار  $a$ ، خط هادی سهمی به معادله  $y^2 - 6y + 2x + a = 0$  از نقطه  $(1, 2)$  می‌گذرد؟

فراغ ۸۸ (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

تست ۱۴: دو اشعه که به موازات محور  $x$ ها بر سهمی به معادله  $y^2 - 4y - 8x = 12$  می‌تابند، پس از بازتاب در کدام نقطه متقاطع‌اند؟

(۱)  $(0, 2)$  (۲)  $(-2, -2)$  (۳)  $(4, -2)$  (۴)  $(6, 2)$

تست ۱۵: معادله‌ی محور تقارن مقطع مخروطی  $(y+1)^2 = 2x + y - \frac{5}{4}$  کدام است؟

- (۱)  $y = -1$  (۲)  $y = -\frac{1}{2}$  (۳)  $y = -\frac{3}{2}$  (۴)  $y = 1$

ج) بیضی:

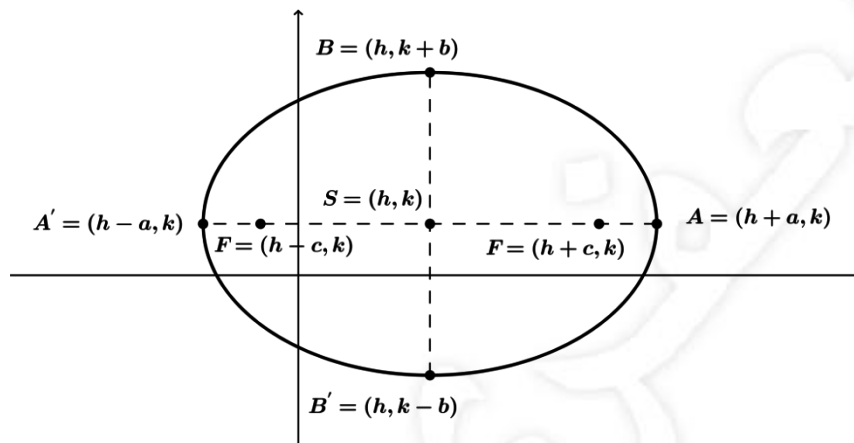
تعریف: مکان هندسی نقاطی از صفحه است که مجموع فاصله آن‌ها از دو نقطه ثابت (کانون‌های بیضی) واقع در صفحه، مقداری ثابت است. کانون‌های بیضی را با  $F, F'$  و مقدار ثابت با  $2a$  نشان می‌دهیم.

معادله بیضی:

بر اساس عمودی یا افقی بودن بیضی، این منحنی‌ها به دو دسته زیر تقسیم می‌شوند (در بیضی همواره داریم  $a > c, a > b$ )

الف) بیضی افقی: معادله این نوع بیضی به صورت  $\frac{(x-h)^p}{a^p} + \frac{(y-k)^p}{b^p} = 1$  است که در آن مرکز بیضی نقطه  $O(h, k)$  است و داریم

$b = \sqrt{a^p - c^p}$  و همچنین کانون‌های بیضی  $F(h \pm c, k)$  و رئوس آن  $(h \pm a, k)$  و  $(h, k \pm b)$  است.

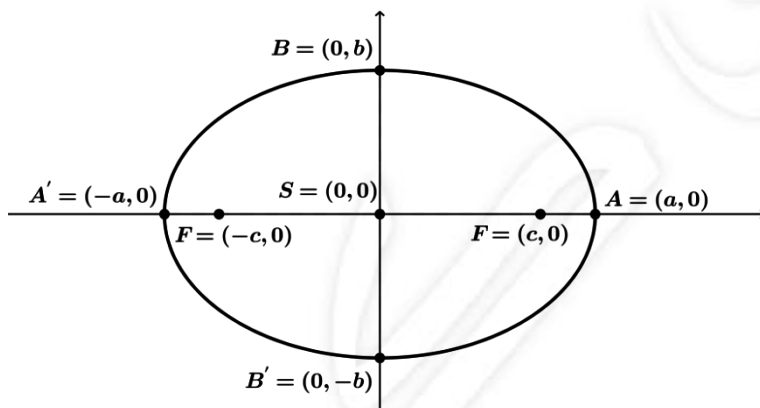


نکته ۹: با توجه به شکل داریم:  $FF' = 2c$  و همچنین اگر  $M$  یک نقطه از بیضی باشد داریم:  $MF + MF' = 2a$ .

نکته ۱۰: اگر مرکز بیضی  $O(0, 0)$  باشد، معادله فوق به صورت

$$\frac{x^p}{a^p} + \frac{y^p}{b^p} = 1$$

تبدیل می‌شود و نمودار آن به شکل مقابل خواهد بود.

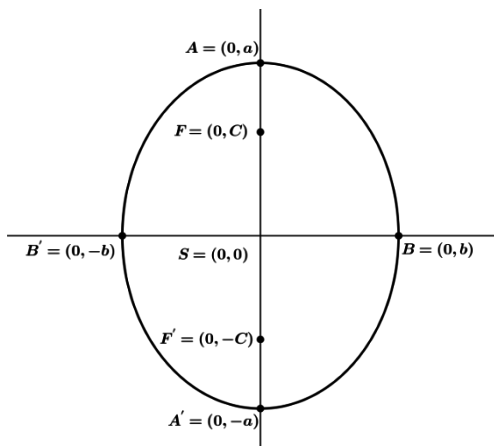
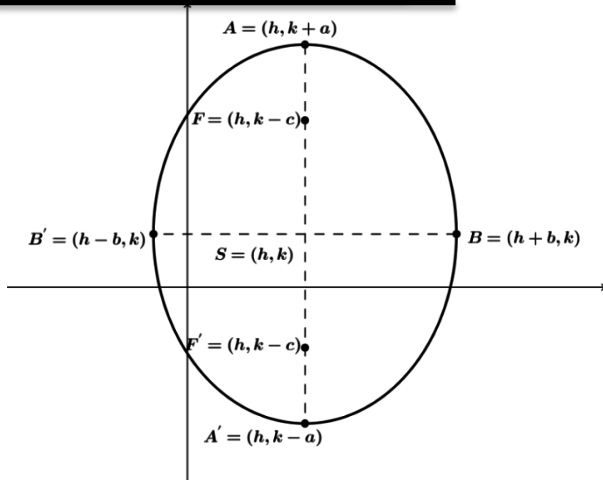


مثال ۸: بیضی  $3x^p + 5y^p + 4x - 12 = 0$  را رسم کنید.

ب) بیضی عمودی: معادله این نوع بیضی به صورت

$$O(h, k) \text{ است که در آن مرکز بیضی نقطه } \frac{(x-h)^p}{b^p} + \frac{(y-k)^p}{a^p} = 1$$

است و داریم  $b = \sqrt{a^p - c^p}$  و همچنین کانون‌های بیضی  $F(h, k \pm c)$  و رئوس آن  $(h \pm b, k)$  و  $(h, k \pm a)$  است.



نکته ۱۱: اگر مرکز بیضی  $O(0, 0)$  باشد، معادله فوق به صورت  $\frac{x^p}{b^p} + \frac{y^p}{a^p} = 1$

تبدیل می‌شود و نمودار آن به شکل مقابل خواهد بود.

تست ۱۷: - معادله‌ی خطی که از نقطه‌ی  $M(2\sqrt{2}, 0)$  و کانون پایینی بیضی  $9x^2 + y^2 = 9$  می‌گذرد، کدام است؟

(۴)  $y = x - 2\sqrt{2}$

(۳)  $y = -x + 2\sqrt{2}$

(۲)  $y = \frac{x}{2} - \sqrt{2}$

(۱)  $y = 2x - 4\sqrt{2}$

نکته ۱۲: رئوس بیضی از مل دستگاه مقابل نیز قابل مماسه است.  $\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases}$

مثال ۹: رئوس بیضی  $0 = 13x^p + 5y^p + 9x - 13$  را بیابید.

فروجه از مرکز بیضی: از رابطه  $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^p - b^p}}{a} = \sqrt{\frac{a^p - b^p}{a^p}} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^p}$

بین صفر و یک است. هر چه مقدار فروجه از مرکز به عدد یک نزدیکتر باشد نشان دهنده این است که بیضی کشیده است و هر چه به صفر نزدیکتر باشد شکل بیضی به دایره نزدیکتر خواهد بود.

((مضرت علی(علیه السلام): علم میراث گرانبھائی است و ادب لباس فافر و زینتی است و فکر آئینه ای است صاف.))

نکته ۱۳: در معادله گسترده بیضی  $Ax^p + By^p + Cx + Dy + E = 0$  همواره داریم:  $a = \max\{A, B\}$ ,  $b = \min\{A, B\}$ .

تست ۱۸: بیضی به معادله  $x^2 + 4y^2 + ax + bx + c = 0$  در نقطه‌ای به طول ۳ بر محور  $x$  مماس است، و از نقطه  $(-1, -2)$  می‌گذرد. خروج از مرکز آن، کدام است؟

$$\frac{1}{2} \quad (1) \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (2) \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (3) \quad \frac{3}{4} \quad (4)$$

مثال ۱۰: بیضی به معادله  $4x^p + y^p + 8x - 2y + 1 = 0$  را رسم کنید.

معادلات مماس و قائم بیضی: معادله فضا مماس بر بیضی  $\frac{x^p}{a^p} + \frac{y^p}{b^p} = 1$  در نقطه  $(x_0, y_0)$  به صورت  $\frac{xx_0}{a^p} + \frac{yy_0}{b^p} = 1$  و معادله فضا

قائم بر بیضی در این نقطه به صورت  $\frac{a^p x}{x_0} - \frac{b^p y}{y_0} = c^p$  می‌باشد.

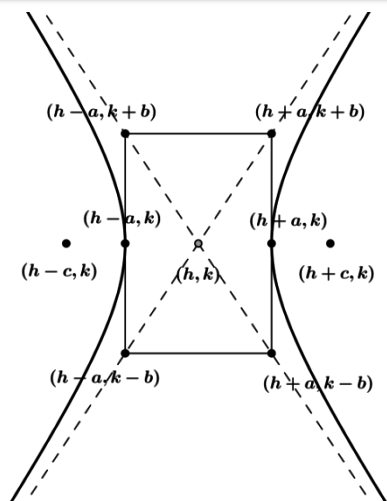
مثال ۱۱: معادله فضا مماس و قائم بر بیضی  $13x^p + 14y^p = 12$  در نقطه  $(p, 0)$  واقع بر آن را بیابید.

(د) هذلولی:

تعریف: مکان هندسی نقاطی از صفحه است که قدر مطلق تفاضل فاصله‌های آن‌ها از دو نقطه ثابت (کانون‌های هذلولی) واقع در صفحه، مقداری ثابت  $(2a)$  است.

نکته ۱۴: در هذلولی همواره داریم:  $c > a$ ,  $c > b$ .

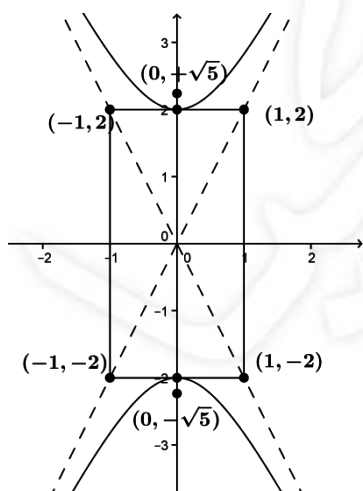
معادله هذلولی: فرض کنیم مرکز هذلولی نقطه  $(h, k)$  باشد. معادله هذلولی به یکی از دو صورت زیر خواهد بود:



الف) هذلولی افقی: معادله این نوع هذلولی  $\frac{(x-h)^p}{a^p} - \frac{(y-k)^p}{b^p} = 1$  است. که در آن  
 $c^2 - a^2 = b^2$  و کانون‌های هذلولی و رئوس هذلولی هستند. خطوط  
 $y - k = \pm \frac{b}{a}(x - h)$  می‌باشد.

مثال ۱۲: هذلولی‌های با معادله  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$  و  $\frac{(x-p)^p}{5} - \frac{y^p}{p} = 1$  را رسم کنید.

ب) هذلولی قائم: معادله این نوع هذلولی  $\frac{(y-k)^p}{a^p} - \frac{(x-h)^p}{b^p} = 1$  است. که در آن  $c^2 - a^2 = b^2$  و کانون‌های هذلولی و



رئوس هذلولی هستند. خطوط  $y - k = \pm \frac{a}{b}(x - h)$  نیز می‌باشد.

مثال ۱۳: هذلولی با معادله  $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{1} = 1$  را رسم کنید.

داریم:  $a=2, b=1, c=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$  لذا رئوس آن  $(0, \pm\sqrt{5})$  و کانون‌های آن

هستند. همچنین خطوط  $y = \pm 2x$  می‌باشند.

نکته ۱۵: اگر معادله هذلولی به صورت گسترده  $ax^p + by^p + cx + dy + e = 0$  باشد، به راحتی با استفاده از مربع کامل به حالت استاندارد تبدیل می‌کنیم.

مثال ۱۴: مشفصات هذلولی  $3x^p - 2y^p + 4x - y = 0$  را بیابید.

تست ۱۹: - در هذلولی  $4x^2 - 8x - y^2 = 0$ ، فاصله‌ی دو کانون چقدر است؟

$$2\sqrt{10} \quad (4)$$

$$\sqrt{10} \quad (3)$$

$$2\sqrt{5} \quad (2)$$

$$\sqrt{5} \quad (1)$$

تست ۲۰: - معادله‌ی مکان هندسی نقاطی که قدرمطلق تفاضل فواصل آن‌ها از  $F \left|_1^3 \right.$  و  $F' \left|_1^{-1} \right.$  برابر ۲ باشد، کدام است؟

$$3x^2 - y^2 - 6x - 2y = 1 \quad (2)$$

$$3x^2 - y^2 - 6x + 2y = 0 \quad (1)$$

$$3x^2 - 6y^2 - 6x + 2y = 0 \quad (4)$$

$$3x^2 - y^2 - 6x + 2y = 1 \quad (3)$$

فروج از مرکز هذلولی: از رابطه  $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^p + b^p}}{a} = \sqrt{\frac{a^p + b^p}{a^p}} = \sqrt{1 + \frac{b^p}{a^p}}$  فروج از مرکز هذلولی بدست می‌آید که مقدار آن چون

$c > a$  همواره عددی بزرگتر از یک است.

نکته ۱۶: اگر معادله هذلولی به صورت گسترده داده شده باشد، برای یافتن فروج از مرکز آن از ضرایب  $x^p$  و  $y^p$  استفاده کنیم.

تست ۲۱: فروج از مرکز هذلولی افقی  $3y^p - x^p + 4x = 1$  کدام است؟

$$2 \quad (4)$$

$$1 \quad (3)$$

$$\frac{3}{\sqrt{p}} \quad (2)$$

$$\frac{p}{\sqrt{3}} \quad (1)$$

((فصرت علی(علیه‌السلام): با علما معاشرت کن تا علمت زیاد، ادبت نیکو و جانت پاک شود.))

تست ۲۲: - خروج از مرکز هذلولی به معادله  $x^2 - 4y^2 = 4y^2 = x^2 - 4x$  در کدام است؟

$$\frac{2\sqrt{5}}{3} \quad (4)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (3)$$

$$\sqrt{5} \quad (2)$$

$$\frac{\sqrt{5}}{2} \quad (1)$$

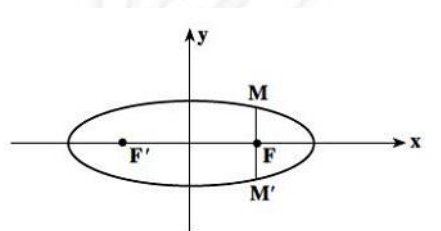
معادلات مماس و قائم هذلولی: معادله خط مماس بر هذلولی  $\frac{x^p}{a^p} - \frac{y^p}{b^p} = 1$  در نقطه  $(x_0, y_0)$  به صورت  $\frac{xx_0}{a^p} - \frac{yy_0}{b^p} = 1$  و معادله

خط قائم بر بیضی در این نقطه به صورت  $\frac{a^p x}{x_0} + \frac{b^p y}{y_0} = c^p$  می‌باشد.

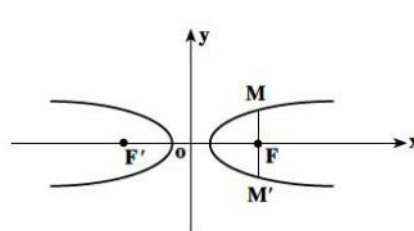
مثال ۵: فروج از مرکز هذلولی  $\frac{x^p}{4} - \frac{y^p}{5} = 1$  و معادله خط مماس بر آن را در نقطه‌ای به طول  $x=1$  واقع بر آن بیابید.

نکته ۱۷: وتر از هذلولی و یا بیضی که از کانون آن بگذرد و بر محور کانونی آن عمود باشد را وتر کانونی می‌نامند که طول آن از رابطه  $\frac{2b^2}{a}$

بدست می‌آید.



یک وتر کانونی بیضی است.



یک وتر کانونی هذلولی است.

مثال ۱۶: طول وتر کانونی هذلولی مثال بالا را بیابید.



تست‌های کنکور

فاصله نقطه از خط

تست ۱: دو ضلع یک مربع منطبق بر دو خط به معادلات  $2x - 2y = 3$  و  $y = x + 1$  هستند، مساحت این مربع کدام است؟

- سراسری ۹۲
- (۱)  $\frac{9}{8}$  (۲)  $\frac{9}{4}$  (۳)  $\frac{25}{8}$  (۴)  $\frac{25}{4}$

تست ۲: به ازای کدام مقدار  $m$  دستگاه معادلات  $\begin{cases} mx + y = m - 1 \\ 3x + (m - 2)y = 4 - 2m \end{cases}$  دارای بیشمار جواب است؟

- سراسری ۹۳
- (۱)  $-2$  (۲)  $-1$  (۳)  $2$  (۴) هیچ مقدار  $m$

تست ۳: نقطه  $A(3, -1)$  وسط قطر مربعی است که یک ضلع آن منطبق بر خط به معادله  $2y - x = 5$  است. مساحت این مربع، کدام است؟

- فارس ۹۳
- (۱)  $40$  (۲)  $45$  (۳)  $75$  (۴)  $80$

دایره

تست ۴: به ازای کدام مقدار  $a$  دایره به معادله  $x^2 + y^2 - 2x + 2y + a = 0$  بر خط به معادله  $x + 2y = 0$  مماس است؟

- سراسری ۸۵
- (۱)  $\frac{3}{2}$  (۲)  $\frac{5}{2}$  (۳)  $2$  (۴)  $5$

تست ۵: دایره به مرکز  $(2, 0)$  و مماس بر نیمساز ربع اول، خط به معادله  $y = 1$  را با کدام طولها قطع می‌کند؟

- سراسری ۸۶
- (۱)  $3, 1$  (۲)  $4, 0$  (۳)  $\frac{5}{2}, \frac{1}{2}$  (۴)  $2 + \sqrt{2}, 2 - \sqrt{2}$

تست ۶: هر خط قائم بر یک دایره، از نقطه  $(-2, 1)$  می‌گذرد. این دایره بر خط به معادله  $y = x - 1$  مماس است. شعاع دایره کدام است؟

- سراسری ۸۸ (۱) ۲ (۲)  $2\sqrt{2}$  (۳) ۳ (۴)  $3\sqrt{2}$

تست ۷: دایره‌ای از نقطه‌ی  $(-1, 2)$  گذشته و بر هر دو محور مختصات مماس است. قطر دایره‌ی بزرگ‌تر کدام است؟

- سراسری ۹۰ (۱) ۸ (۲) ۱۰ (۳) ۱۲ (۴) ۱۵

تست ۸: شعاع دایره‌ای که از سه نقطه با مختصات  $(2, 1)$ ،  $(-2, 4)$ ،  $(0, 0)$  می‌گذرد کدام است؟

- سراسری ۹۱ (۱) ۲ (۲)  $2/5$  (۳) ۳ (۴)  $3/5$

تست ۹: شعاع دایره گذرا بر سه نقطه  $(0, 0)$ ،  $(2, 1)$  و  $(1, -2)$  برابر کدام است؟

- سراسری ۹۳ (۱)  $\frac{1}{2}\sqrt{10}$  (۲)  $\sqrt{3}$  (۳)  $\sqrt{5}$  (۴)  $\frac{1}{2}\sqrt{13}$

تست ۱۰: شعاع دایره به مرکز  $(-2, 2)$  و مماس خارج بر دایره  $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$  کدام است؟

- فرا ۹۳ (۱)  $2\sqrt{2}$  (۲) ۳ (۳)  $2\sqrt{3}$  (۴) ۴

((مضرت علی علیه السلام: هر کس به آنچه می‌داند عمل کند، فداوند دانش آنچه را که نمی‌داند به او ارزانی می‌دارد.))

سهمی

تست ۱۱: در سهمی به معادله  $x^2 - 6x + 8 = 2y$  خط هادی آن کدام است؟  
 سراسری ۸۶

(۱)  $y = -\frac{3}{2}$  (۲)  $y = -1$  (۳)  $y = -\frac{1}{2}$  (۴)  $y = \frac{1}{2}$

تست ۱۲: در سهمی به معادله  $y^2 + 2y + 2x + 1 = 0$  خط هادی آن از نقطه‌ای با کدام مختصات می‌گذرد؟  
 سراسری ۸۸

(۱)  $(1, -2)$  (۲)  $(1, 2)$  (۳)  $(2, 1)$  (۴)  $(3, 0)$

تست ۱۳: سهمی به کانون  $F(2, 4)$  و خط هادی به معادله  $x = -1$  محور  $x$ ها را با کدام طول قطع می‌کند؟  
 سراسری ۹۲

(۱)  $\frac{17}{6}$  (۲)  $\frac{19}{6}$  (۳)  $\frac{10}{3}$  (۴)  $\frac{11}{3}$

بیضی

تست ۱۴: نقطه‌ی  $M(x, y)$  بر روی بیضی به معادله  $9y^2 + 4x^2 - 8x = 8$  قرار دارد. مجموع فواصل نقطه‌ی  $M$  از دو کانون این بیضی کدام است؟  
 سراسری ۸۶

(۱)  $\sqrt{6}$  (۲) ۳ (۳)  $2\sqrt{3}$  (۴) ۶

تست ۱۵: در بیضی به معادله  $3x^2 + 4y^2 = 12$ ، یک خط از کانون بر قطر بزرگ آن عمود می‌کنیم، تا بیضی را در  $A$  و  $B$  قطع کند. اندازه‌ی وتر  $AB$  کدام است؟  
 سراسری ۹۰

(۱)  $\frac{3}{2}$  (۲)  $\frac{5}{2}$  (۳) ۳ (۴) ۴

تست ۱۶: مختصات دو سر قطر کوچک یک بیضی  $(-1, -1), (-1, 2), (0, 2)$  است. این بیضی از نقطه  $(-4, 2)$  می‌گذرد، خروج از مرکز آن کدام است؟

سراسری ۹۲  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  (۴)

$\frac{\sqrt{6}}{3}$  (۳)

$\frac{\sqrt{2}}{2}$  (۲)

$\frac{\sqrt{2}}{3}$  (۱)

هذلولی

تست ۱۷: اگر نقاط  $F(0, 2)$  و  $F'(0, -2)$  کانون‌های یک هذلولی با خروج از مرکز  $\frac{3\sqrt{2}}{4}$  باشند، معادله آن کدام است؟

سراسری ۸۵  $y^2 - 2x^2 = 4$  (۱)  $x^2 - 2y^2 = 4$  (۲)  $x^2 - 8y^2 = 8$  (۳)  $y^2 - 8x^2 = 8$  (۴)

تست ۱۸: در هذلولی به معادله  $x^2 - 3y^2 - 2x = 2$  اندازه وتر گذرنده بر کانون و عمود بر محور کانونی آن کدام است؟

سراسری ۹۱  $2\sqrt{3}$  (۱)  $\sqrt{3}$  (۲)  $2$  (۳)  $2\sqrt{3}$  (۴)

تست ۱۹: در هذلولی به معادله  $3x^2 - 4y^2 - 6x - 9 = 0$  طول وتری از آن، گذرا بر کانون و عمود بر محور کانونی، کدام است؟

سراسری ۹۳  $1$  (۱)  $\sqrt{7}$  (۲)  $3$  (۳)  $2\sqrt{3}$  (۴)

تست ۲۰: قدر مطلق تفاضل فواصل نقطه متحرک  $M(x, y)$ ، از دو نقطه ثابت  $(2, -4)$  و  $(2, 6)$ ، همواره برابر ۶ واحد است. این متحرک با کدام عرض، خط به معادله  $x = 5$  را قطع می‌کند؟

سراسری ۹۳  $1 \pm \frac{15}{4}$  (۱)  $1 \pm 4\sqrt{2}$  (۲)  $2 \pm \frac{15}{4}$  (۳)  $2 \pm 3\sqrt{2}$  (۴)

## سراسری ۹۴

خط هادی یک سهمی به معادله  $x = \frac{13}{4}$  است. هر پرتوی که از نقطه  $(-\frac{5}{4}, -2)$  بر این سهمی بتابد، در امتداد محور  $x$ ‌ها باز می‌تابد. این سهمی محور  $x$ ‌ها را با کدام طول قطع می‌کند؟

- (۱)  $\frac{1}{3}$  (۲)  $\frac{2}{4}$  (۳)  $\frac{5}{9}$  (۴)  $\frac{5}{4}$

هذلولی به معادله  $5y^2 - 4x^2 - 20y = 0$  مفروض است. معادله‌ی یک بیضی که کانون‌های آن منطبق بر رأس‌های هذلولی و رأس‌های آن در کانون‌های این هذلولی باشد، کدام است؟

- (۱)  $9y^2 + 4x^2 - 20y = 9$  (۲)  $5y^2 + 9x^2 - 10y = 36$  (۳)  $4y^2 + 5x^2 - 16y = 4$  (۴)  $9y^2 + 5x^2 - 36y = 9$

## فراچ کثرتور ۹۴

نقطه  $S(-1/6, -1)$  رأس سهمی است. هر پرتو که موازی محور  $x$ ‌ها بر این سهمی بتابد، به نقطه  $(5/9, -1)$  باز می‌تابد. این سهمی محور  $y$ ‌ها را با کدام عرض قطع می‌کند؟

- (۱)  $-6, 4$  (۲)  $-5, 3$  (۳)  $-4, 2$  (۴)  $-2, 0$

بیضی به معادله  $x^2 + 4y^2 + ay + bx + c = 0$  در نقطه‌ای به طول ۳ بر محور  $x$ ‌ها مماس است، و از نقطه  $(-1, -2)$  می‌گذرد. خروج از مرکز آن، کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{2}$  (۲)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  (۳)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  (۴)  $\frac{3}{4}$

## تمرینات کتاب

- ۱- مثلث ABC با سه رأس  $A(1,4)$  و  $B(-2,-2)$  و  $C(4,2)$  مفروض است.  
 الف) معادله میانه وارد بر ضلع BC را به دست آورید.  
 ب) طول میانه AM را محاسبه کنید.  
 ج) معادله ارتفاع BH را محاسبه کنید.  
 د) نقطه تلاقی میانه AM و ارتفاع BH را به دست آورید.
- ۲- طول قطر مربعی که یک ضلع آن واقع بر خط  $x + y = 5$  و مختصات یک رأس آن  $A(-2,1)$  باشد را به دست آورید.
- ۳- نقاط  $A(4,2)$  و  $B(1,-1)$  و  $C(6,-1)$  سه رأس مثلث ABC هستند. اگر H و M به ترتیب پای ارتفاع AH و میانه AM باشند طول MH را به دست آورید.
- ۴- دستگاه‌های خطی زیر را حل کنید.

$$\text{الف) } \begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 = 10 \end{cases}$$

$$\text{ب) } \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 = -12 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -5 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

$$\text{ج) } \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 8 \\ 6x_1 + 8x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases}$$

$$\text{د) } \begin{cases} x + 4y - z = 12 \\ 3x + 8y - 2z = 4 \\ x + y + 3z = 12 \end{cases}$$

۱- مرکز و شعاع دایره‌های زیر را پیدا کنید. سپس دایره را در صفحه مختصات رسم کنید.

$$(الف) \quad x^2 + y^2 + 2x + 2y - 1 = 0 \quad (ب) \quad 3x^2 + 3y^2 + 6x - 1 = 0$$

$$(ج) \quad x^2 + y^2 - 6x + 2y + 1 = 0 \quad (د) \quad 7x^2 + 7y^2 + 142y = 0$$

۲- چه نقاطی در نابرابری‌های زیر صدق می‌کنند؟

$$(الف) \quad x^2 + 4x + y^2 - 12 \leq 0 \quad (ب) \quad 2x^2 + 2y^2 + x + y > 0$$

۳- معادله دایره‌ای را بنویسید که از نقاط  $(1, 0)$  و  $(6, 0)$  گذشته و بر خط  $y = 1$  مماس باشد.

۴- اگر فاصله نقطه  $M(x, y)$  تا نقطه  $A(6, 0)$  دو برابر فاصله‌اش تا نقطه  $B(0, 3)$  باشد، نشان

دهید که مکان  $M$  یک دایره خواهد بود. مرکز و شعاع این دایره را تعیین کنید.

۵- معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکزش  $C(1, 2)$  و بر خط به معادله  $3x + 4y + 1 = 0$  مماس

باشد.

۶- معادله دایره‌ای را بنویسید که از نقاط  $(0, 0)$  و  $(17, 7)$  گذشته و مرکزش بر خط  $6x - 5y = 0$

واقع باشد.

۷- معادله دایره‌ای را بنویسید که از نقاط  $(7, 1)$  و  $(0, 0)$  و  $(-1, 6)$  بگذرد. مرکز و شعاع این

دایره را بیابید.

۸- معادله وتر مشترک دو دایره به معادله زیر را به دست آورید:

$$x^2 + y^2 + 8x + 2y - 82 = 0 \quad \text{و} \quad x^2 + y^2 + 4x + 6y + 10 = 0$$

۹- ابتدا معادله وتر مشترک دو دایره به معادله‌های زیر را به دست آورید.

$$x^2 + y^2 + 4x + 2y - 10 = 0 \quad \text{و} \quad x^2 + y^2 + 2x + 2y - 24 = 0$$

سپس با استفاده از معادله وتر مشترک مختصات نقاط تقاطع دو دایره را به دست آورید.

۱۰- برای هر دسته از معادله دایره‌های زیر مشخص کنید که آیا این دایره‌ها بر هم مماس داخل،

مماس خارج، یا متقاطع اند؟

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y = 4 \quad \text{و} \quad x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0 \quad (\text{الف})$$

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0 \quad \text{و} \quad x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0 \quad (\text{ب})$$

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y = 4 \quad \text{و} \quad x^2 + y^2 + 2x - 4y = 9 \quad (\text{ج})$$

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 7 \quad \text{و} \quad x^2 + (y - 5)^2 = 5 \quad (\text{د})$$

۱۱- معادله دو دایره را بنویسید که برای آن‌ها یکی از حالت‌های زیر برقرار باشد.

$$O_1 O_2 = 0 \quad (\text{الف}) \quad (\text{دو دایره هم‌مرکز})$$

$$O_1 O_2 > r_1 + r_2 \quad (\text{ب}) \quad (\text{دو دایره متخارج})$$

۱- مختصات کانون و رأس و خط هادی هر یک از سهمی‌های زیر را به دست آورده و نمودار

آن‌ها را رسم کنید.

$$\text{الف) } y^2 - 2y + x - 1 = 0$$

$$\text{ب) } 8y = 4 + 4x - x^2$$

$$\text{پ) } y^2 - 8x - 8 = 0$$

$$\text{ت) } 3y^2 + 6x - 4y = 0$$

۲- معادله یک سهمی را بنویسید که  $x = 4$  خط هادی و  $y = 4$  محور تقارن آن و از نقطه  $A(9, 7)$

بگذرد.

۳- معادله سهمی را بنویسید که کانون آن  $F(3, 5)$  و معادله خط هادی آن  $x = -3$  باشد.



۴- معادله سهمی قائم مماس بر محور  $x$ ‌ها که دارای کانون  $F(3, 1)$  باشد را بنویسید. سپس نمودار آن را رسم کنید.

۵- چه نواحی‌ای از صفحه در نابرابری‌های  $y^2 > x$  و  $y^2 < x$  صدق می‌کنند؟ «با رسم شکل».

۶- ثابت کنید معادله خط مماس بر سهمی به معادله  $y^2 = 4px$  در نقطه  $M(x_0, y_0)$  واقع بر آن به صورت  $yy_0 = 2p(x + x_0)$  می‌باشد.

۱- معادله یک بیضی را بنویسید که نقاط  $F(2, -2)$  و  $F'(-4, -2)$  کانون‌های آن و خروج از مرکز آن  $e = \frac{3}{5}$  باشد.

۲- بیضی به معادله  $4x^2 + y^2 + 8x - 2y + 1 = 0$  مفروض است. مختصات مرکز، طول اقطار، فاصله کانونی و مختصات دو کانون این بیضی را حساب کنید.

۳- نقطه  $M \begin{cases} x = 1 + 3 \sin t \\ y = 2 \cos t \end{cases}$  مفروض است اولاً: ثابت کنید مکان هندسی نقطه  $M$  وقتی  $t$  تغییر کند، بیضی است. ثانیاً: نقطه‌ای از بیضی را که به ازای  $t = \frac{\pi}{4}$  به دست می‌آید،  $N$  می‌نامیم معادله خط مماس بر بیضی را در نقطه  $N$  بنویسید.

۴- شکل ناحیه‌ای را رسم کنید که مختصات نقاطش در نابرابری زیر صدق می‌کند.

$$4x^2 + 9y^2 \leq 36$$

۵- به ازای چه مقادیر ثابت  $a$  و  $b$  و  $c$ ، بیضی  $ax^2 + by^2 + c = 0$  در مبدأ مختصات

بر محور  $x$  مماس است و از نقطه  $(-1, 2)$  می‌گذرد؟

۱- هندلولی‌های زیر را رسم کنید:

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1 \text{ (الف)}$$

$$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1 \text{ (ج)}$$

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1 \text{ (ب)}$$

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = -1 \text{ (د)}$$

در تمرین‌های ۲ تا ۸، مرکز، رئوس، کانون‌ها و ثابت‌های هذلولی به معادله مفروض را پیدا کنید. سپس شکل منحنی را در کاغذ شطرنجی رسم کنید.

$$9(x-2)^2 - 4(y+3)^2 = 36 \quad \text{—۲}$$

$$4(x-2)^2 - 9(y+3)^2 = 36 \quad \text{—۳}$$

$$4(y+3)^2 - 9(x-2)^2 = 1 \quad \text{—۴}$$

$$5x^2 - 4y^2 + 20x + 8y = 2 \quad \text{—۵}$$

$$4x^2 = y^2 - 4y + 8 \quad \text{—۶}$$

$$4y^2 = x^2 - 4x \quad \text{—۷}$$

$$4x^2 - 5y^2 - 16x + 10y + 31 = 0 \quad \text{—۸}$$

۹- بر نقطه A واقع بر هذلولی به معادله  $xy = a^2$  ( $a \neq 0$ ) و ثابت است) مماسی رسم کرده‌ایم. این مماس محورهای مختصات را در نقاط B و C قطع می‌کند. ثابت کنید نقطه A وسط پاره خط BC است.

۱۰- بر نقطه A واقع بر هذلولی به معادله  $x^2 - y^2 = 1$  قائمی رسم کرده‌ایم. این قائم محورهای مختصات را در نقاط B و C قطع می‌کند. ثابت کنید نقطه A وسط پاره خط BC است.

۱۱- خطوط موازی با شیب m و ترهایی بر هذلولی به معادله  $x^2 - y^2 = 1$  ایجاد می‌کنند، ثابت کنید اوساط این وترها بر یک خط واقع‌اند.

موفقیت، توفیق بندگی خداست...

موفق باشید...

۱۲۶- در یک دنباله اعداد،  $a_1 = 1$  و برای هر  $n \geq 2$  داریم:  $a_n = 2a_{n-1} + 1$ . جمله هشتم این دنباله، کدام است؟

- (۱) ۱۲۷ (۲) ۱۵۹ (۳) ۲۴۷ (۴) ۲۵۵

۱۲۷- مساحت ناحیه محدود به نمودارهای دو تابع  $y = x + |x|$  و  $y = 2 - |x|$ ، کدام است؟

- (۱) ۲ (۲)  $\frac{7}{3}$  (۳)  $\frac{8}{3}$  (۴) ۳

۱۲۸- از معادله لگاریتمی  $\log_3(2x^2 + 1) - \log_3(x + 2) = 1$ ، مقدار لگاریتم  $(2x - 1)$  در پایه ۸، کدام است؟

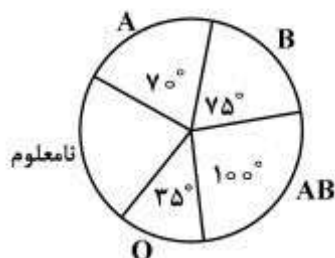
- (۱)  $-\frac{2}{3}$  (۲)  $-\frac{1}{2}$  (۳)  $\frac{1}{2}$  (۴)  $\frac{2}{3}$

۱۲۹- اگر  $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$  باشند، وارون ماتریس  $A \times B$ ، کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 7 & -8 \end{bmatrix}$  (۲)  $\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 8 & 7 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$  (۳)  $\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -7 & -8 \end{bmatrix}$  (۴)  $\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -9 & -8 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$

۱۳۰- نمودار دایره‌ای روبه‌رو، متناسب با تعداد کارکنان سازمانی با گروه خونی متمایز است. گروه خونی ۳۲ نفر از آنان تعیین

نشده است. چند نفر از آنها، دارای نوع خون B هستند؟



- (۱) ۲۵  
(۲) ۳۰  
(۳) ۳۶  
(۴) ۴۰

۱۳۱- میانگین طول اضلاع مربع‌هایی ۱۵ واحد با ضریب تغییرات  $\frac{1}{2}$  محاسبه شده است. میانگین مساحت این مربع‌ها،

کدام است؟

- (۱) ۲۲۹ (۲) ۲۳۲ (۳) ۲۳۴ (۴) ۲۳۶

۱۳۲- هریک از ارقام ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱، بر روی پنج کارت یکسان نوشته شده است. به تصادف سه کارت از آن‌ها را کنار هم

قرار می‌دهیم. با کدام احتمال عدد سه رقمی حاصل مضرب ۳ می‌باشد؟

- (۱)  $\frac{1}{3}$  (۲)  $\frac{1}{4}$  (۳)  $\frac{1}{5}$  (۴)  $\frac{1}{6}$

۱۳۳- مجموعه جواب نامعادله  $\left| \frac{2-x}{2x-3} \right| > 1$ ، به صورت کدام بازه‌ها است؟

- (۱)  $(1, \frac{3}{2})$  (۲)  $(1, \frac{5}{3})$  (۳)  $(\frac{3}{2}, \frac{5}{3})$  (۴)  $(\frac{5}{3}, 2)$

۱۳۴- اگر  $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{2}$  باشد، مقدار  $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha\right)$  کدام است؟

- (۱)  $-\frac{3}{4}$  (۲)  $-\frac{3}{8}$  (۳)  $\frac{3}{8}$  (۴)  $\frac{3}{4}$

۱۳۵- اگر  $f(x) = x^2 + x$  و  $g(x) = \sqrt{4x+1}$  باشند، مساحت ناحیه محدود به نمودار تابع  $gof$  و خط به معادله  $y = 3$  کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۴٫۵ (۴) ۶

۱۳۶- در تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{ax + \sqrt{4x^2 + 5}}{2x + 2}$ ، اگر  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{5}{2}$  باشد، آنگاه حد  $f(x)$  وقتی  $x \rightarrow -1$ ، کدام است؟

- (۱)  $\frac{2}{3}$  (۲)  $\frac{5}{6}$  (۳)  $\frac{3}{2}$  (۴)  $\frac{5}{4}$

۱۳۷- به ازای کدام مقدار  $a$  تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} \frac{\cos x - \sqrt{\cos x}}{\sin^2 x} & ; x \neq 0 \\ a & ; x = 0 \end{cases}$  در نقطه  $x = 0$  پیوسته است؟

- (۱)  $-\frac{1}{4}$  (۲)  $-\frac{1}{2}$  (۳)  $\frac{1}{2}$  (۴) هیچ مقدار  $a$

۱۳۸- در تابع با ضابطه  $f(x) = \left(\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{2x-3}}\right)^3$ ، حاصل  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ ، کدام است؟

- (۱) -۲۱ (۲) -۱۸ (۳) ۱۲ (۴) ۱۵

۱۳۹- احتمال موفقیت عمل جراحی برای شخص A برابر  $\frac{9}{10}$  و برای شخص B برابر  $\frac{8}{10}$  است. با کدام احتمال، لااقل عمل جراحی برای یکی از این دو نفر، موفقیت‌آمیز است؟

- (۱)  $\frac{92}{100}$  (۲)  $\frac{94}{100}$  (۳)  $\frac{96}{100}$  (۴)  $\frac{98}{100}$

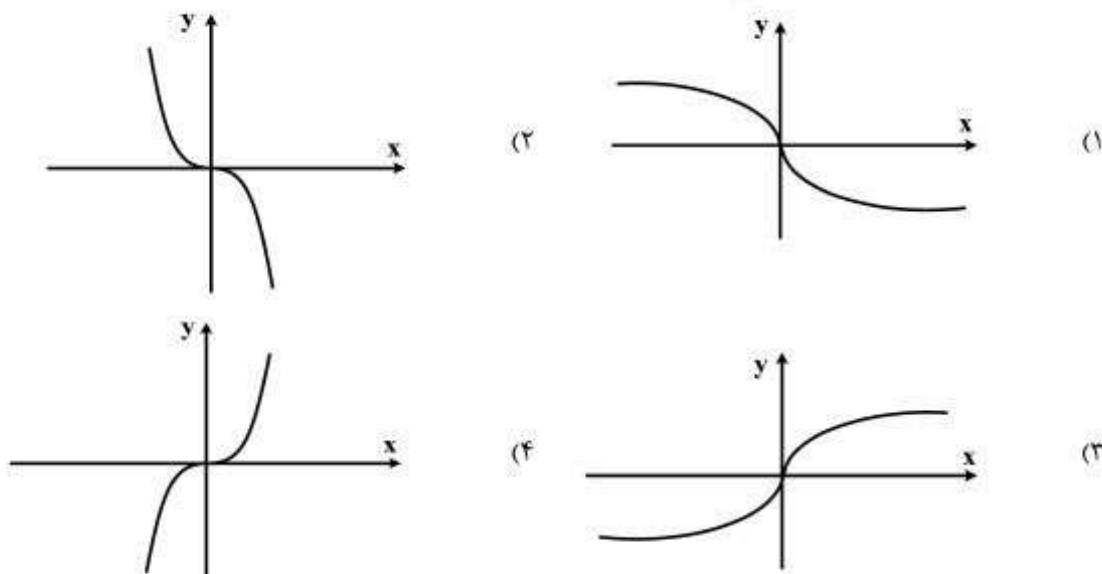
۱۴۰- آزمایشی فقط دو نتیجه دارد، احتمال پیروزی در هر بار  $\frac{3}{4}$  است. در تکرار ۶ بار این آزمایش مستقل، احتمال ۴ پیروزی

چند برابر احتمال ۳ پیروزی است؟

- (۱)  $\frac{3}{4}$  (۲)  $\frac{4}{3}$  (۳)  $\frac{3}{2}$  (۴)  $\frac{9}{4}$

محل انجام محاسبات

۱۴۱- اگر  $f(x) = x|x|$  باشد، نمودار تابع  $y = f^{-1}(x)$  کدام است؟



۱۴۲- در یک دنباله هندسی نزولی هر جمله آن، نصف مجموع تمام جملات بعدی است. قدر نسبت آن کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{3}$  (۲)  $\frac{1}{2}$  (۳)  $\frac{2}{3}$  (۴)  $\frac{3}{4}$

۱۴۳- جواب کلی معادله مثلثاتی  $2\sin^2 x + 3\cos x = 0$  کدام است؟

- (۱)  $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$  (۲)  $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$  (۳)  $2k\pi \pm \frac{5\pi}{6}$  (۴)  $k\pi - \frac{\pi}{3}$

۱۴۴- از نقطه  $A(0, 4/\sqrt{5})$ ، خطی بر منحنی  $y = x^2$  عمود شده است. طول پای عمود با علامت مثبت، کدام است؟

- (۱)  $\sqrt{3}$  (۲) ۲ (۳)  $\sqrt{5}$  (۴)  $2/\sqrt{5}$

۱۴۵- در نقطه‌ای از منحنی به معادله  $x + \sqrt{xy} + y = 12$ ، خط مماس بر منحنی، عمود بر نیمساز ربع اول است. طول نقطه تماس، کدام است؟

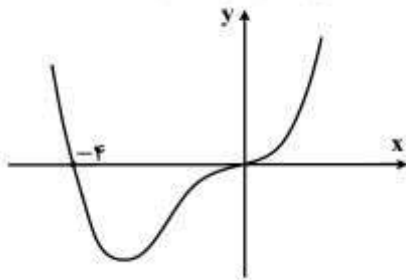
- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۶

۱۴۶- مقادیر ماکزیمم و می‌نیمم مطلق تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 15x$ ، در بازه  $[-4, 3]$ ، کدام است؟

- (۱)  $-18$  و  $24$  (۲)  $-45$  و  $27$  (۳)  $-36$  و  $27$  (۴)  $-27$  و  $36$

محل انجام محاسبات

۱۴۷- شکل روبه‌رو، نمودار تابع  $f(x) = x^4 + ax^3 + bx$  است. با تعیین مقادیر  $a$  و  $b$ ، می‌نیمم تابع، کدام است؟



- (۱) -۳۶
- (۲) -۳۲
- (۳) -۲۷
- (۴) -۲۴

۱۴۸- دایره‌ای به مرکز  $(-1, 2)$  و مماس بر خط به معادله  $x - y = 1$ ، محور  $x$  ها را با کدام طول، قطع می‌کند؟

- (۱) ۱ و ۳
- (۲) ۱ و ۴
- (۳) ۲ و ۳
- (۴) ۴ و ۱/۵

۱۴۹- به ازای کدام مقدار  $k$ ، خروج از مرکز هندلولی به معادله  $4y = 4 - 2y^2 + kx^2$ ، برابر  $\sqrt{3}$  است؟

- (۱) ۱
- (۲) ۲
- (۳) ۳
- (۴) ۴

۱۵۰- حاصل  $\int_{-1}^1 (|3x| - |x|) dx$ ، کدام است؟ (نماد  $| \cdot |$  به مفهوم جزء صحیح است).

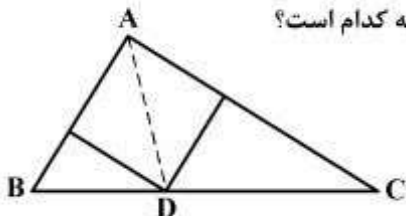
- (۱)  $\frac{5}{2}$
- (۲) ۳
- (۳)  $\frac{7}{2}$
- (۴) ۴

۱۵۱- اگر  $\int \frac{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x})}{x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{x}} f(x) + C$  باشد، آنگاه  $f(x)$  کدام است؟

- (۱)  $2x + 2$
- (۲)  $2x - 1$
- (۳)  $x - 2$
- (۴)  $x + 2$

۱۵۲- در ذوزنقه متساوی‌الساقین، با زاویه  $60^\circ$  درجه، قاعده کوچک‌تر برابر ساق آن است. اگر محیط این ذوزنقه  $30$  واحد باشد، مساحت آن کدام است؟

- (۱)  $24\sqrt{3}$
- (۲)  $27\sqrt{3}$
- (۳) ۴۸
- (۴) ۵۴



۱۵۳- در مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع قائم ۳ و ۷ واحد، طول نیمساز داخلی زاویه قائمه کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{4}\sqrt{2}$
- (۲)  $\frac{2}{1}$
- (۳)  $\frac{2}{8}$
- (۴)  $\frac{2}{1}\sqrt{2}$

۱۵۴- در ذوزنقه‌ای با طول قاعده‌های ۸ و ۱۲ و ارتفاع  $10$  واحد، مساحت مثلث محدود به دو قطر و یک ساق آن، چند واحد مربع است؟

- (۱) ۱۸
- (۲) ۲۰
- (۳) ۲۴
- (۴) ۲۸

۱۵۵- در یک مکعب به طول یال ۴ واحد، بر انتهای سه یال گذرا بر یک رأس، صفحه‌ای می‌گذرد. مساحت مقطع این صفحه با مکعب کدام است؟

- (۱) ۸
- (۲)  $4\sqrt{6}$
- (۳) ۱۲
- (۴)  $8\sqrt{3}$

محل انجام محاسبات