



سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های دروس ریاضیات

دانلود نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نمونه سوالات و پاسخنامه کنکور

دانلود نرم افزارهای ریاضیات

...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

<https://telegram.me/riazisara>

(@riazisara)

ریاضی ۳

سال سوم

رشته تجربی

تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

به نام خدا

فهرست مطالب این جزوه

فصل اول : پدیده های تصادفی و احتمال ۲

فصل دوم : تابع ۳۰

فصل سوم : حد و پیوستگی ۶۶

فصل چهارم : مشتق ۹۸

فصل	نوبت اول	نوبت دو م - شهر یور
1) پدیده های تصادفی و احتمال	8	4
2) تابع	12	6
3) حد تابع		5
4) مشتق		5

فصل اول پدیده تصادفی و احتمال

📖 درس نامه ۱) پدیده تصادفی- فضای نمونه ای- پیشامد

پدیده تصادفی

به آزمایشی گفته میشه که قبل از وقوع نشه نتیجه اون را به طور قطعی مشخص کرد
مثل پرتاب یک سکه سالم که قبل از به زمین نشستن نمیشه گفت سکه رو یا پشت میاد.

تمرین



➤ کدام یکی از پدیده های زیر تصادفیه ؟

۱. انداختن یک تاس که روی هر ۶ وجه آن عدد یک حک شده است .
۲. انداختن دو تاس سالم با هم
۳. به دنیا آمدن یک نوزاد در ماه خرداد .

فضای نمونه ای

به مجموعه تمام نتایج یک آزمایش تصادفی فضای نمونه ای می گیم
و اون رو با S نمایش می دیم.

- مثال ۱) فضای نمونه ای حاصل از پرتاب یک تاس:

$$\diamond S = \{1,2,3,4,5,6\}$$

☞ به هر عضو فضای نمونه ای یک برآمد گفته میشه .

☞ اگه اعضای یک فضای نمونه ای قابل شمارش باشن به اون گسسته و در غیر این صورت به اون پیوسته می گیم .

- مثال ۲) در پرتاب یک تاس فضای نمونه ای گسسته و در تیر اندازی به سمت یک هدف، فضای نمونه ای پیوسته میشه .

پیشامد

❖ به هر زیر مجموعه از فضای نمونه ای یک پیشامد می گیم .

☞ اگه یه مجموعه دارای n عضو باشه اونوقت 2^n زیر مجموعه داره، پس اگه فضای نمونه ای دارای n عضو باشه آنگاه 2^n پیشامد برای آن وجود داره.

- مثال ۳) پیشامد A که در پرتاب یک تاس عدد زوج بیاید .

$$\diamond A = \{2,4,6\}$$

★ پیشامد حتمی: به پیشامد S پیشامد حتمی می‌گیم.

★ پیشامد نشدنی: به پیشامد \emptyset پیشامد نشدنی یا غیر ممکن می‌گیم.

★ پیشامد ساده: پیشامدی که فقط یک عضو دارد.

• مثال ۴) در پرتاب یک مکعب، پیشامد آن که عدد آمده زوج و اول باشد به این صورته:

$$\diamond A = \{2\}$$

♦ اگه توی یه آزمایش تصادفی نتیجه آزمایش، عضوی از A باشه، می‌گیم A رخ داده است.

• مثال ۵) یک تاس و یک سکه سالم (همگن) را با هم پرتاب می‌کنیم مطلوب است:

الف) فضای نمونه ای این آزمایش

$$\diamond S = \{(1, پ), (2, پ), (3, پ), (4, پ), (5, پ), (6, پ), (1, ر), (2, ر), (3, ر), (4, ر), (5, ر), (6, ر)\}$$

ب) پیشامد آنکه سکه پشت و تاس زوج باشد

$$\diamond A = \{(2, پ), (4, پ), (6, پ)\}$$

ج) پیشامد آنکه سکه پشت یا تاس زوج باشد.

$$\diamond B = \{(1, پ), (2, پ), (3, پ), (4, پ), (5, پ), (6, پ), (2, ر), (4, ر), (6, ر)\}$$

• مثال ۶) هر یک از اعداد طبیعی کوچکتر یا مساوی 20 را روی یک کارت می‌نویسیم و پس از مخلوط کردن کارت‌ها یکی را به طور

قرعه بر می‌داریم مطلوب است تعیین: الف) فضای نمونه ای این تجربه تصادفی

$$\diamond S = \{1, 2, 3, \dots, 20\}$$

ب) پیشامد آنکه عدد آمده مضرب ۵ باشد.

$$\diamond A = \{5, 10, 15, 20\}$$

ج) پیشامد آنکه عدد آمده کوچکتر از ۶ باشد.

$$\diamond B = \{1, 2, \dots, 5\}$$

• مثال ۷) یک سالم را دو بار پرتاب می‌کنیم:

الف) فضای نمونه ای این آزمایش تصادفی

$$\diamond S = \{(ر, ر), (ر, پ), (پ, ر), (پ, پ)\}$$

ب) پیشامد آنکه لااقل یک بار رو بیاید

$$\diamond A = \{(ر, ر), (ر, پ), (پ, ر)\}$$

ج) پیشامد آنکه فقط دوبار پشت بیاید

$$\diamond B = \{(پ, پ)\}$$



تمرین

- ۱) دو تاس با هم پرتاب می شوند مطلوب است :
- الف) فضای نمونه ای آمدن اعداد روی دو تاس و تعداد آن.
- ب) پیشامد آنکه مجموع اعداد روی دو تاس اول باشد.
- ۲) سه سکه را با هم پرتاب می کنیم مطلوب است :
- الف) فضای نمونه ای این آزمایش تصادفی
- ب) پیشامد آنکه حداقل دو سکه پشت بیاید.
- ج) پیشامد آنکه فقط یک سکه رو بیاید.
- د) پیشامد آنکه حد اکثر دو سکه پشت بیاید.
- ۳) دو تاس را با هم می ریزیم :
- الف) تعداد اعضا فضای نمونه ای را بیابید
- ب) پیشامد آن را بیابید که عدد تاس اول زوج و عدد تاس دوم اول باشد
- ج) پیشامد آنرا بیابید که مجموع عدد های آمده مضرب ۳ باشد.
- ۴) خانواده ای دارای ۳ فرزند است (خرداد ۹۴)
- الف) تعداد اعضای فضای نمونه ای این آزمایش تصادفی را مشخص کنید .
- ب) پیشامد A که در آن فرزند سوم پسر باشد را مشخص کنید .
- ج) پیشامد B که در آن حداکثر یک فرزند دختر باشد را مشخص کنید .
- ۵) در یک خانواده سه فرزندی پیشامد آنکه فرزند اول دختر باشد را A و پیشامد آنکه فرزند سوم پسر باشد را B می نامیم :
- الف) فضای نمونه ای را بنویسید (ب) پیشامد های A, B را بیابید.
- ۶) هر یک از اعداد کوچکتر یا مساوی ۸ را روی یک کارت می نویسیم و پس از مخلوط کردن کارت ها یکی را به طور تصادفی بر می داریم مطلوب است تعیین :
- الف) فضای نمونه ای این تجربه تصادفی
- ب) پیشامد آنکه عدد روی کارت مضرب ۴ باشد.

ج) پیشامد آنکه عدد روی کارت اول باشد.

۷) یک تاس سالم را دو بار می ریزیم :

الف) پیشامد آن را بیابید عدد تاس اول ۳ باشد.

ب) پیشامد آن را بیابید که عدد هر دو تاس یکی باشد.

۸) خانواده ای دارای چهار فرزند است ،مطلوب است :

الف) تعداد اعضای فضای نمونه ای

ب) پیشامد A که دو فرزند سوم و چهارم دختر باشند .

ج) پیشامد B که در آن حداقل یک فرزند پسر باشد .

د) پیشامد C که در آن تعداد فرزندان دختر از تعداد فرزندان پسر بیشتر باشد .

۹) یک تاس و یک سکه را با هم پرتاب می کنیم .(خرداد ۹۲)

الف) فضای نمونه ای این آزمایش تصادفی را بنویسید .

ب) پیشامد آنکه سکه رو یا تاس ۵ بیاید را مشخص کنید .

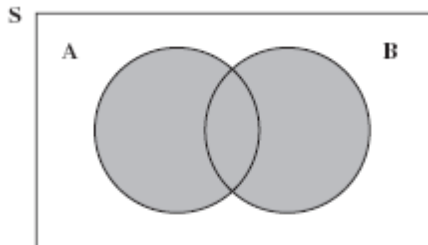
۱۰) یک تاس و یک سکه را با هم می اندازیم : (دی ماه ۹۳)

الف) فضای نمونه ای این آزمایش تصادفی را مشخص کنید .

ب) پیشامد A که در آن عدد رو شده ی تاس عددی اول باشد را مشخص کنید .

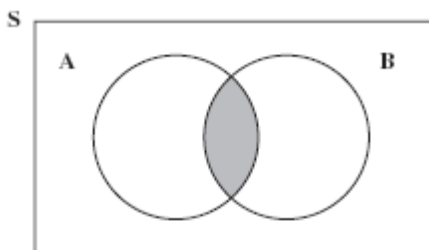
ج) پیشامد B که در آن سکه پشت بیاید را مشخص کنید .

اعمال روی پیشامد ها

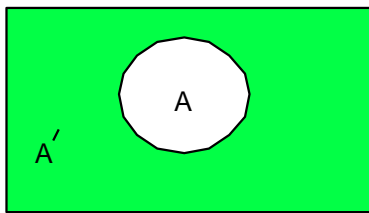


۱) $A \cup B$: این پیشامد زمانی رخ می دهد که هر کدام از دو پیشامد

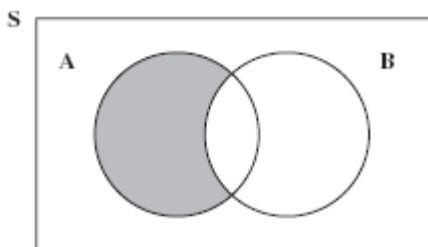
به تنهایی یا با هم رخ بدن .



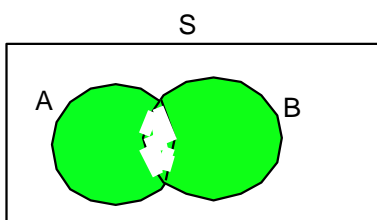
۲) $A \cap B$: این پیشامد زمانی رخ می دهد که هر دو پیشامد با هم رخ بدن .



۳) A' : این پیشامد زمانی رخ می دهد که پیشامد A رخ ندهد. (متمم)



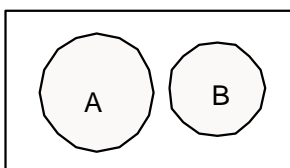
۴) $A - B$: این پیشامد زمانی رخ می دهد که پیشامد A رخ ده ولی پیشامد B رخ ندهد.



۵) $(A - B) \cup (B - A)$: زمانی رخ می دهد که یا فقط A رخ دهد

یا B. (به آن تفاضل متقارن دو پیشامد هم می گوئیم)

۶) اگر $A \cap B = \emptyset$ در این صورت دو پیشامد نا سازگار خواهند بود.



❖ نکات زیر بسیار مورد استفاده قرار می گیرد .

① $(A \cup B)' = A' \cap B'$

② $(A \cap B)' = A' \cup B'$

③ $A - B = A \cap B'$

مثال ۸) سکه و تاس سالمی را با هم پرتاب می کنیم. فرض کنید که A پیشامد آن باشد که در تاس عدد اول بیاید و B پیشامد سکه رو و تاس زوج و C پیشامد سکه پشت و تاس فرد باشد. پیشامد های زیر را بیابید.

الف) A یا B رخ دهد. ب) A, C رخ دهد. ج) فقط A رخ دهد.

$$\diamond A = \{(2, \text{پ}), (3, \text{پ}), (5, \text{پ}), (2, \text{ر}), (3, \text{ر}), (5, \text{ر})\}$$

$$\diamond B = \{(2, \text{ر}), (4, \text{ر}), (6, \text{ر})\}$$

$$\diamond C = \{(1, \text{پ}), (3, \text{پ}), (5, \text{پ})\}$$

$$1. A \cup B = \{(2, \text{پ}), (3, \text{پ}), (5, \text{پ}), (2, \text{ر}), (3, \text{ر}), (5, \text{ر}), (4, \text{ر}), (6, \text{ر})\}$$

$$2. A \cap C = \{(3, \text{پ}), (5, \text{پ})\}$$

$$3. A - (B \cup C) = \{(3, \text{ر}), (5, \text{ر}), (2, \text{پ})\}$$

مثال ۹) یک سکه و یک تاس سالم را پرتاب می کنیم مطلوب است:

پیشامد $A' \cup B'$ که در آن A پیشامد سکه پشت یا تاس ۵ و B پیشامد سکه خط و تاس ۵ باشد

$$\diamond A = \{(پ, 1), (پ, 2), (پ, 3), (پ, 4), (پ, 5), (پ, 6), (ر, 5)\}$$

$$\diamond B = \{(ر, 5)\}$$

$$\diamond A' \cup B' = (A \cap B)' = S - \{(ر, 5)\}$$

تمرین



۱) دو تاس با هم پرتاب می شوند اگر A پیشامد مجموع دو تاس کمتر از ۸ و B پیشامد مجموع دو تاس بیشتر از ۴ باشد پیشامد $A \cup B$ را بیابید.

۲) خانواده ای دارای سه فرزند است:

الف) فضای نمونه ای مناسب این پدیده تصادفی را بنویسید.

ب) پیشامد A که در آن فرزند اول یا دوم پسر باشد.

ج) پیشامد B که در آن حداقل دو فرزند دختر باشند را مشخص کنید.

د) پیشامد $A \cup B'$ را بیابید.

۳) اگر A, B, C سه پیشامد مربوط به فضای نمونه ای S باشد پیشامد های زیر را با استفاده از نمودار ون نمایش دهید.

الف) A یا B رخ دهد ولی C رخ ندهد. ب) فقط پیشامد B رخ دهد.

۴) سکه ای را یک بار پرتاب می کنیم اگر پشت بیاید آن گاه تاس را می ریزیم و اگر رو بیاید سکه را دو بار دیگر پرتاب می کنیم
مطلوب است تعیین :

الف) فضای نمونه ای این تجربه تصادفی

ب) پیشامد A که در آن دقیقاً یک بار سکه به پشت بیاید.

ج) پیشامد B که در آن دقیقاً دو بار سکه رو بیاید.

د) پیشامد $A \cup B'$

۵) سکه ای را آنقدر پرتاب می کنیم که برای اولین بار رو بیاید پیشامدی از این آزمایش تصادفی را بنویسید که در کمتر از ۶ بار پرتاب به این منظور برسیم .

۶) درستی یا نادرستی عبارت های زیر را مشخص کنید. (خرداد ۹۴)

الف) اگر A, B دو پیشامد ناسازگار باشند رابطه $A \cap B \neq \emptyset$ برقرار است .

ب) اگر A, B دو پیشامد در فضای نمونه ای S باشند پیشامد $A-B$ زمانی رخ می دهد که پیشامد A رخ دهد ولی پیشامد B رخ دهد .

۷) اگر A, B دو پیشامد معین باشد پیشامد های زیر را با استفاده از نمودار ون نمایش دهید.

الف) A و B هیچ کدا م اتفاق نیفتد.

ب) A یا B' اتفاق بیفتد.

۸) سکه ای را آنقدر پرتاب می کنیم تا برای دومین بار سکه رو بیاید. اگر A پیشامدی باشد که در کمتر از ۵ پرتاب به این منظور برسیم پیشامد A را معین کنید.

۹) سکه ای را دو بار می اندازیم مطلوب است :

الف) فضای نمونه ای این تجربه تصادفی

ب) پیشامد A آن که سکه دو بار پشت بیاید .

ج) پیشامد B آن که سکه یک بار پشت بیاید .

د) پیشامد $A \cup B'$

۱۰) خانواده ای دارای دو فرزند است :

الف) فضای نمونه ای مناسب برای ترکیب جنسیت فرزندان این خانواده چیست ؟

(ب) پیشامد A که در آن فقط یک فرزند پسر باشد را مشخص کنید .

(ج) پیشامد B که در آن حداقل یک فرزند دختر باشد را مشخص کنید .

(د) پیشامد $A \cup B'$

(۱۱) درستی یا نادرستی عبارت های زیر را مشخص کنید (خرداد ۹۵)

(الف) اگر اعضای S قابل شمارش باشد آن را یک فضای نمونه ای می گوئیم .

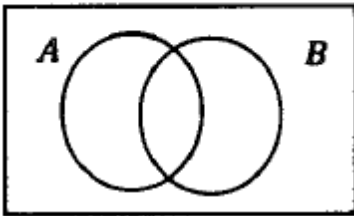
(ب) در پرتاب دو سکه با هم، پیشامد آن که دقیقاً یک بار رو بیاید برابر است با $A = \{(P, R), (R, P)\}$

(ج) اگر A, B دو پیشامد از فضای نمونه ای S باشند و $A \cap B \neq \emptyset$ که در این صورت آن ها را دو پیشامد ناسازگار می نامیم .

(د) اگر $A = (0, 1), B = (-1, 1]$ آنگاه $A \cup B = (-1, 1)$ (برای فصل دوم)

(۱۲) با توجه به شکل مقابل پیشامد $(A - B) \cup (B - A)$ را هاشور بزنید. (خرداد ۹۳)

S



(۱۳) تمام اعداد دو رقمی که با ارقام ۱ و ۲ و ۴ و ۵ می توان ساخت، روی کارت های متمایزی نوشته و در یک کیسه قرار می دهیم و سپس

یکی از این کارت ها را به تصادف خارج می کنیم. مطلوب است :

(الف) فضای نمونه ای این پدیده تصادفی

(ب) پیشامد A که عدد روی کارت مضرب ۴ باشد .

(ج) پیشامد B که عدد روی کارت کوچکتر از ۴+ باشد .

(د) $A \cup B, A \cap B$

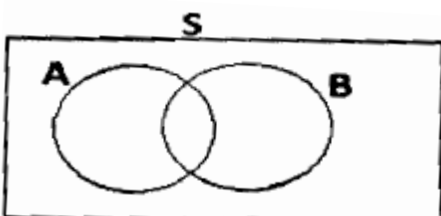
(۱۴) هر یک از اعداد زوج و طبیعی کوچکتر از ۱۹ را روی یککارت نوشته و یکی از کارت ها را به تصادف بر می داریم: (شهریور ۹۳)

(الف) فضای نمونه ای این آزمایش تصادفی را مشخص کنید .

(ب) پیشامد A که در آن عدد روی کارت بر ۵ بخش پذیر باشد را مشخص کنید .

(ج) پیشامد B که در آن عدد روی کارت اول یا فرد باشد را مشخص کنید .

(د) پیشامد $A \cap B$ را مشخص کنید .



(۱۵) با توجه به شکل مقابل پیشامد $(A - B)'$ را هاشور بزنید. (دی ۹۴)

احتمال رخ دادن یک

پیشامد

منظور از رخ دادن پیشامد A یعنی یکی از برآمد های این پیشامد اتفاق بیفتد .

احتمال رخ دادن این پیشامد را با $P(A)$ نمایش می دهیم و با فرمول زیر بیان می کنیم .

$$\diamond P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

در این تساوی $n(A)$ تعداد اعضای پیشامد A و $n(S)$ تعداد اعضای فضای نمونه ای است .

❖ از رابطه بالا نکات مهم زیر به دست می آید :

$$\diamond P(S) = 1$$

$$\diamond P(\emptyset) = 0$$

$$\diamond 0 \leq P(A) \leq 1$$

- مثال ۱۰) روی ۹ کارت از ارقام ۱ تا ۹ نوشته ایم . اگر کارتی را به تصادف انتخاب کنیم مطلوب است احتمال آنکه عدد روی کارت مضرب ۳ باشد.

$$S = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$$

$$\diamond A = \{3, 6, 9\}$$

$$P(A) = \frac{3}{9}$$

- مثال ۱۱) تاسی پرتاب می شود احتمال آن را بیابید که عدد آمده زوج باشد.

$$\diamond S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, A = \{2, 4, 6\} \Rightarrow P(A) = \frac{3}{6}$$

- ۳) عددی به تصادف از فضای نمونه ای $S = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ انتخاب می شود مطلوب است احتمال این که عدد آمده فرد یا از کمتر ۶ باشد

$$\diamond A = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\}$$

$$\diamond P(A) = \frac{7}{10}$$

یکی از فرمول هایی که بسیار مورد استفاده قرار می گیرد، ترکیب است که در سال دوم با آن آشنا شدید

برای یادآوری این فرمول را در زیر می آوریم .

$$\diamond C(n, r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

- مثال ۱۲) در یک جعبه ۱۲ لامپ وجود دارد که ۴ تای آنها معیوب است سه لامپ را به طور تصادفی بر می داریم. مطلوب است احتمال آنکه: الف) هر سه لامپ سالم باشد. ب) هر سه معیوب باشد. ج) یکی سالم و دیگری معیوب باشد.

$$\diamond n(S) = \binom{12}{3} = 220$$

$$A. n(A) = \binom{8}{3} = 56 \Rightarrow P(A) = \frac{56}{220}$$

$$B. n(B) = \binom{4}{3} = 4 \Rightarrow P(B) = \frac{4}{220}$$

$$C. n(C) = \binom{8}{1} \times \binom{4}{2} = 48 \Rightarrow P(C) = \frac{48}{220}$$

• (مثال ۱۳) از بین ۲۲ دانش آموز قرار است به طور تصادفی ۸ نفر برای

تشکیل تیم کوهنوردی انتخاب شوند اگر ۱۰ نفر از این دانش آموزان

از سال اول و ۱۲ نفر دیگر از سال دوم باشند مطلوب است احتمال

آنکه ۴ نفر از سال اول و ۴ نفر از سال دوم انتخاب شوند.

$$n(S) = \binom{22}{8}$$

$$n(A) = \binom{10}{4} \times \binom{12}{4}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$



تمرین

۱) از جعبه ای که شامل ۱۲ سیب سالم و ۵ سیب خراب است ۳ سیب به تصادف بر می داریم مطلوب است احتمال آنکه :

الف) هر سه سیب سالم باشد .

ب) دو سیب سالم و یک سیب خراب باشد .

ج) تعداد سیب های سالم از تعداد سیب های خراب بیشتر باشد .

۲) در یک کیسه ۵ مهره سبز و ۳ مهره قرمز وجود دارد. از این کیسه به تصادف ۲ مهره بیرون می آوریم. مطلوب است احتمال آن

که :الف) هر دو مهره سبز باشد.

ب) هر دو مهره قرمز باشند.

ج) دو مهره مختلف باشند.

۳) چهار سرباز و سه افسر در یک ردیف ایستاده اند مطلوب است احتمال آنکه:

الف) سرباز ها کنار هم و افسر ها کنار هم باشند.

ب) سرباز ها و افسر ها یک در میان باشند.

۴) از بین ۴ مرد و ۳ زن می خواهیم ۳ نفر را به تصادف انتخاب کنیم مطلوب است احتمال آنکه :

الف) ۲ نفر مرد و یک نفر زن باشد .

ب) حداقل ۲ نفر مرد باشند.

۵) دو تاس را با هم می اندازیم مطلوب است احتمال آنکه مجموع شماره ها ۸ و هر دو زوج باشند.

۶) جفت کفش متمایز داریم اگر ۲ لنگه به طور تصادفی از میان آنها انتخاب شود. مطلوب است احتمال آنکه :

الف) آن جفت کفش درست جور شده باشد.

(ب) آن جفت شامل یک لنگه راست و یک لنگه چپ باشد.

(۷) می خواهیم از بین ۵ مرد و سه زن یک کمیته ۳ نفری انتخاب کنیم. مطلوب است محاسبه احتمال آنکه: (خرداد ۹۲)

(الف) حداکثر یک مرد انتخاب شود.

(ب) هر سه مرد باشند.

(۸) در کیسه ای ۵ مهره قرمز و ۶ مهره سفید و ۴ مهره سبز قرار دارد. از ای ن کیسه ۳ مهره به تصادف خارج می کنیم مطلوب است

احتمال آن که: (الف) هر سه مهره سفید باشد.

(ب) هر مهره از یک رنگ باشد.

(۹) ۷ نفر در یک صف ایستاده اند به طوری که ۲ نفر آنها با یک دیگر برادر هستند احتمال آن که این دو برادر در ابتدا و انتهای صف

باشند چقدر است؟

(۱۰) از مجموعه $S = \{1, 2, 3, \dots, 500\}$ عددی را به تصادف انتخاب می کنیم احتمال این که عدد انتخاب شده بر ۷ بخش پذیر

باشد چقدر است؟

(۱۱) چهار کودک در یک هفته متولد شده اند. مطلوب است احتمال آن که حد اقل دو کودک در یک روز متولد شده باشند.

(۱۲) از بین اعضای مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, 900\}$ دو عضو به تصادف انتخاب می شوند مطلوب است احتمال آنکه:

(الف) هر دو عضو زوج باشند

(ب) مجموع دو عضو زوج باشد

(۱۳) با ارقام ۰ و ۲ و ۳ و ۷ و ۹ و بدون تکرار ارقام اعداد چهار رقمی ساخته می شوند. از این اعداد به تصادف یک عدد انتخاب می کنیم

مطلوب است احتمال آن که عدد انتخاب شده زوج باشد؟

(۱۴) از جعبه ای که شامل ۴ مهره سفید و ۳ مهره سبز و ۲ مهره سیاه می باشد ۳ مهره به تصادف انتخاب می کنیم. مطلوب است

احتمال: (الف) فقط دو مهره سفید باشد (ب) حداکثر دو مهره سبز باشد (خرداد ۹۱)

(۱۵) در کیسه ای ۵ مهره سفید و ۴ مهره آبی و ۳ مهره سبب وجود دارد از این کیسه ۴ مهره به تصادف خارج می کنیم احتمال این که

حداکثر ۲ مهره آبی باشد چقدر است؟ (خرداد ۹۳)

(۱۶) از جعبه ای که حاوی ۱۰ سیب سالم و ۴ سیب خراب است ۲ سیب به تصادف بر می داریم مطلوب است احتمال آن که (دی ماه ۹۳)

(الف) هر سه سیب سالم باشند.

(ب) دوسیوب سالم و یکی خراب باشد .

(ج) تعداد سیب های سالم از تعداد سیب های خراب بیشتر باشد .

(۱۷) خانواده ای دارای ۳ فرزند است (دی ماه ۹۴)

(الف) فضای نمونه ای جنسیت فرزندان این خانواده را مشخص کنید .

(ب) پیشامد A که در آن حداقل ۲ فرزند این خانواده دختر باشد را مشخص کنید .

(ج) پیشامد B که در آن فقط ۱ فرزند این خانواده پسر باشد را مشخص کنید .

(د) احتمال آنکه فرزندان به صورت یک در میان پسر و دختر (یا دختر و پسر) باشند را بدست آورید .

(۱۸) می خواهیم از بین ۶ دانش آموز کلاس سوم و ۵ دانش آموز کلاس دوم یک تیم ۴ به تصادف انتخاب کنیم . چقدر احتمال دارد: (شهریور ۹۳)

(الف) هیچ دانش آموز کلاس سوم در تیم نباشد .

(ب) یک دانش آموز کلاس سوم و سه دانش آموز کلاس دوم در تیم باشد .

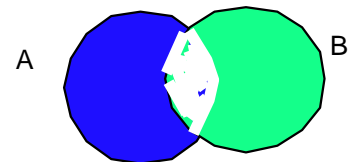
(۱۹) برای تشکیل تیمی ۵ دانش آموز سال سوم و ۴ دانش آموز سال اول داوطلب شده اند به تصادف سه دانش آموز انتخاب می کنیم

احتمال آن را بیابید که: (خرداد ۹۰) (الف) حداکثر یک نفر سال اولی باشد (ب) هیچ کدام سال سوم نباشند.

اصل شمول و عدم شمول

فرض کنید که A, B دو مجموعه دلخواه باشند . در این صورت داریم :

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$



قانون جمع احتمالات

اگر A, B دو پیشامد دلخواه از فضای نمونه ای S باشند در این صورت داریم :

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

❖ برای رسیدن به فرمول بالا کافی است دو طرف تساوی مربوط به اصل شمول و عدم شمول را بر $n(S)$ تقسیم کنیم .

❖ اگر دو پیشامد A, B ناسازگار باشند در این صورت فرمول احتمال بالا به صورت زیر در خواهد آمد

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

احتمال متمم

$$\bullet P(S) = P(A \cup A') = P(A) + P(A') = 1$$

مثال (۱۴) از بین ۱۵ نفر که ۵ نفر آنها مرد هستند ۳ نفر را به تصادف انتخاب می کنیم مطلوب است احتمال آنکه:

الف) هیچ کدام مرد نباشد ب) حداقل یکی مرد باشد.

$$\bullet n(S) = \binom{15}{3} = 455$$

الف) این مطلب که هیچ یک مرد نباشند معادل است با این که همگی زن باشند.

$$\bullet n(A) = \binom{10}{3} = 120 \Rightarrow P(A) = \frac{120}{455}$$

ب) این مطلب که حداقل یک مرد باشد متمم این است که هیچ کدام مرد نباشند

$$\bullet P(B) = P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{120}{455} = \frac{67}{91}$$

مثال (۱۵) اگر A, B دو پیشامد ناسازگار باشند و $P(A \cup B) = \frac{4}{5}, P(A') = \frac{1}{3}$ آن گاه $P(B)$ را بیابید.

$$\bullet P(A \cap B) = 0$$

$$\bullet P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\bullet P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow \frac{4}{5} = \frac{2}{3} + P(B) \Rightarrow P(B) = \frac{2}{15}$$

تمرین



۱) اگر $P(A) = \frac{1}{3}, P(B) = \frac{1}{4}$ و A, B ناسازگار باشند $P(A \cup B), P(A')$ را بیابید.

۲) در جاهای خالی عبارت یا عدد مناسب قرار دهید. (دی ۹۴)

الف) در فضای نمونه ای S پیشامد \emptyset را پیشامد می نامیم .

ب) اگر A, B دو پیشامد ناسازگار در فضای نمونه ای S باشند و $P(B) = 0/1$ و $P(A \cup B) = 0/7$ باشد آنگاه $P(A)$ برابر است .

۳) اگر $P(A) = \frac{1}{3}, P(B) = \frac{3}{4}$ و A, B دو پیشامد ناسازگار باشند حاصل $P(A \cup B)$ را به دست آورید. (خرداد ۹۳)

پیشامد های مستقل و وابسته

دو پیشامد را مستقل گوئیم هر گاه وقوع یکی تاثیری بر وقوع دیگری نداشته باشند. در این حالت خواهیم داشت. مانند به دنیا آمدن فرزندان در یک خانواده یا رو شدن عدد زوج در یک تاس و عدد اول در تاس دیگر در پرتاب دو تاس.

اگر دو پیشامد A, B مستقل باشند در این صورت رابطه زیر بین آنها برقرار است.

$$\diamond P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

مثال ۱۶) نفرات A, B به هدفی شلیک می کنند. احتمال هدف زدن آنها $P(A) = \frac{2}{5}, P(B) = \frac{1}{4}$ می باشد. اگر این دو با هم شلیک کنند احتمال آن را بیابید که هدف مورد اصابت قرار بگیرد.

این دو پیشامد تاثیری بر هم ندارند و مستقل هستند

$$\diamond P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B) = \frac{2}{5} + \frac{1}{4} - \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{11}{20}$$

مثال ۱۷) اگر احتمال پسر یا دختر بودن نوزاد $\frac{1}{2}$ باشد احتمال های زیر را در یک خانواده سه فرزندی بیابید.

الف) فرزند اول پسر باشد

$$\bullet P(A) = \frac{1}{2}$$

ب) کلیه فرزندان خانواده دختر باشند.

$$\bullet P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

ج) حداقل یک فرزند خانواده پسر باشد.

این پیشامد متمم پیشامد همه دختر هستند می باشد.

$$\bullet P(C) = 1 - P(B) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

مثال ۱۸) احتمال زنده بودن مردی تا ۱۰ سال دیگر $\frac{1}{4}$ و احتمال زنده ماندن همسرش تا ۱۰ سال دیگر $\frac{1}{3}$ است پیدا کنید احتمال آن که:

الف) هر دو تا ۱۰ سال دیگر زنده بمانند.

$$\bullet P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$$

ب) فقط همسر او تا ۱۰ سال دیگر زنده بماند.

$$\bullet P(A' \cap B) = P(A') \times P(B) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$$



تمرین

۱) اگر $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{4}$ و A, B مستقل باشند $P(A \cup B)$ را بیابید.

۲) اگر A, B دو پیشامد از فضای نمونه ای S و $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B) = x$, $P(A \cup B) = \frac{1}{3}$ باشد آن گاه:

الف) اگر A, B ناسازگار باشند x را بیابید.

ب) اگر A, B مستقل باشند x را بیابید.

ج) اگر $A \subset B$, x را بیابید.

۳) ۴۰٪ در صد افراد یک جامعه مرد هستند. اگر ۸۰٪ در صد مردان و ۴۰٪ در صد زنان شاغل باشند. اگر فردی از این جامعه انتخاب شود

احتمال آن که فرد انتخابی شاغل باشد چیست؟

۴) در کیسه ای ۶ مهره سیاه و ۴ مهره سفید است. مهره ای از کیسه بیرون می آوریم و بدون توجه به رنگ آن را کنار می گذاریم و

مهره دیگری از کیسه خارج می کنیم مطلوب است احتمال آن که مهره دوم سفید باشد.

۵) سکه سالمی را دو بار پرتاب می کنیم. اگر A پیشامد برآمد هایی که در آن دومین پرتاب رو است و B پیشامد برآمد هایی باشد

که در آن فقط دو رو به صورت متوالی ظاهر شده باشد آیا دو پیشامد A, B مستقل هستند؟ چرا؟ (۹۰)

۶) احتمال اینکه شخصی گروه خونی B^+ داشته باشد ۳۰ درصد و احتمال اینکه او ناراحتی کلیه داشته باشد ۱۵ درصد است. چقدر

احتمال دارد (خرداد) (۹۴)

الف) این شخص گروه خونی B^+ و ناراحتی کلیه داشته باشد.

ب) این شخص گروه خونی B^+ یا ناراحتی کلیه داشته باشد.

۷) در یک تیم والیبال ۶ نفره چقدر احتمال دارد که هیچ دو نفری در یک روز از سال متولد نشده باشد؟ (سال را ۳۶۵ روز در نظر بگیرید) (خرداد) (۹۵)

۸) کیسه A شامل ۲ مهره سفید و ۳ مهره سیاه است و کیسه B شامل ۴ مهره سفید و ۵ مهره سیاه است. کیسه ای به تصادف انتخاب

و از آن مهره ای خارج می کنیم احتمال این که مهره خارج شده سفید باشد چقدر است؟

۹) در کیسه ای ۴ مهره سیاه و ۵ مهره سفید و ۶ مهره قرمز وجود دارد سه مهره به تصادف انتخاب می کنیم. احتمال آن را بیابید که

هیچ دو تایی هم رنگ نباشند.

۱۰) از بین ۶ دانش آموز سال دوم و ۵ دانش آموز سال سوم می خواهیم یک تیم سه نفره تشکیل دهیم احتمال هر یک از پیشامد های زیر را به دست آورید. (خرداد ۹۵)

الف) فقط دو دانش آموز از سال دوم باشند.

ب) حداقل دو دانش آموز از سال سوم باشد.

۱۱) در یک جامعه ۸۰ درصد افراد به بیماری A مبتلا هستند. در انتخاب دو نفر احتمال آن که هر دو به بیماری A آلوده باشند چند برابر آن است که حداقل یک نفر آلوده نباشند؟

۱۲) اگر A, B دو پیشامد مستقل باشند ثابت کنید B' و A' نیز مستقل هستند.

اگر A, B دو پیشامد مستقل باشند به طوریکه $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$, $P(A) = \frac{2}{5}$ ، آنگاه $P(B')$ را به دست آورید. (خرداد ۹۵)

۱۳) احتمال اینکه رضا در کنکور قبول شود $\frac{6}{10}$ و احتمال اینکه علی در کنکور قبول شود $\frac{3}{10}$ است. احتمال اینکه حداقل یکی از آنها در کنکور قبول شود را به دست آورید. (خرداد ۹۱)

۱۴) چقدر احتمال دارد در یک تیم کوه نوردی ۳ نفره (خرداد ۹۳)

الف) همه در ماه تیر متولد شده باشند؟

ب) هیچ دو نفری در یک ماه سال متولد نشده باشند؟

۱۵) چهار نفر را در نظر می گیریم چقدر احتمال دارد (دی ماه ۹۴)

الف) هر ۴ نفر در یک روز از هفته متولد شده باشند.

ب) هیچ دو نفری در یک روز از هفته متولد نشده باشند.

۱۶) می خواهیم از بین ۴ دانش آموز کلاس اول و ۶ دانش آموز کلاس دوم یک تیم ۳ نفره به تصادف انتخاب کنیم چقدر احتمال دارد (شهریور ۹۴)

الف) هیچ دانش آموزی کلاس اول در تیم نباشد.

ب) تعداد دانش آموزان کلاس دوم در تیم انتخابی از تعداد دانش آموزان کلاس اول بیشتر باشد.

۱۷) پنج نفر که دو نفر آنها خواهر یکدیگرند به تصادف در یک ردیف می ایستند چقدر احتمال دارد (خرداد ۹۴)

الف) دو خواهر کنار هم قرار گرفته باشند.

ب) دو خواهر در اول و آخر صف واقع شده باشند.

مجموعه تست های فصل احتمال

۱) در پرتاب دو سکه و یک تاس با هم چقدر احتمال دارد حداقل یک سکه رو و عدد تاس زوج بیاید؟

$$\frac{3}{8}(۴) \quad \frac{3}{4}(۳) \quad \frac{1}{8}(۲) \quad \frac{1}{4}(۱) \quad \triangleright$$

✍

۲) دو تاس را با هم پرتاب می کنیم با کدام احتمال مجموع دو عدد رو شده مضرب ۴ است؟ (سراسری تجربی ۹۲)

$$\frac{5}{12}(۴) \quad \frac{1}{4}(۳) \quad \frac{5}{18}(۲) \quad \frac{2}{9}(۱) \quad \triangleright$$

✍

۳) مطالعات ژنتیکی نشان می دهد که +۴ درصد ژن های تشکیل دهنده عامل RH خون منفی هستند. احتمال اینکه در خانواده ای دومین فرزند با RH منفی سومین فرزند خانواده باشد چقدر است؟

1. 0/48
2. 0/043
3. 0/34
4. 0/38

۴) در یک آپارتمان ۸ زوج زندگی می کنند. قرار است یک شورای ۶ نفره تشکیل شود به چند طریق می توان این شورا را انتخاب کرد به طوریکه فقط زوج زن و شوهر در این شورا باشند؟

1. 1680
2. 8008
3. 4004
4. 1848

۵) احتمال اینکه شخصی گروه خونی A^+ داشته باشد، $\frac{2}{3}+$ و احتمال اینکه ناراحتی قلبی داشته باشد $\frac{3}{4}+$ است. احتمال اینکه شخصی ناراحتی قلبی یا گروه خونی A^+ داشته باشد کدام است؟

1. 0/44
2. 0/46
3. 0/48
4. 0/5

۶) احتمال به هدف زدن تیر توسط تیرانداز $\frac{3}{4}+$ است. او انقدر شلیک می کند تا به هدف بزند احتمال آن که بیش از ۳ شلیک لازم باشد چقدر است؟

1. 0/340
2. 0/343

3. 0/348

4. 0/334

7) در خانواده ای با شش فرزند با چه احتمالی آخرین فرزند سومین پسر خانواده است؟

1. $\frac{1}{32}$ 2. $\frac{3}{32}$ 3. $\frac{5}{32}$ 4. $\frac{7}{32}$

8) تمام اعداد سه رقمی را که می توان با ارقام ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱ و ۰ با ارقام متمایز نوشت را هر یک روی یک کارت نوشته و همه را در یک کیسه قرار می دهیم. سپس یک کارت را برمی داریم احتمال آن که عدد به دست آمده زوج و بزرگتر از ۳۰۰ باشد کدام است؟

1. 0/32

2. 0/36

3. 0/38

4. 0/48

9) در ظرفی ۲ مهره سفید و ۲ مهره قرمز قرار دارد. ۴ مرتبه مهره ای از ظرف خارج کرده و پس از مشاهده به ظرف بر می گردانیم با چه احتمالی تعداد مهره های سفید و قرمز خارج شده از ظرف با هم برابر است؟

1. $\frac{108}{625}$ 2. $\frac{216}{625}$ 3. $\frac{324}{625}$ 4. $\frac{54}{625}$

10) در جعبه ای ۴ مهره سفید و سه مهره و ۲ مهره قرمز وجود دارد از این جعبه به تصادف، پی در پی وبدون جایگذاری انتخاب می کنیم احتمال اینکه مهره های اول و سوم هم رنگ نباشند کدام است؟

1. $\frac{5}{18}$ 2. $\frac{12}{18}$ 3. $\frac{7}{18}$ 4. $\frac{11}{18}$

11) برای قبولی در یک طرح استخدامی لازم است افراد در دو آزمون شرکت کنند و فردی که در هر دو آزمون قبول شود استخدام می شود اگر احتمال قبولی فرد در حداقل یکی از این دو آزمون $\frac{7}{16}$ باشد و احتمال قبولی فرد در هر یک آزمون ها یکسان باشد احتمال استخدام این فرد چقدر است؟

1. $\frac{1}{2}$ 2. $\frac{1}{4}$ 3. $\frac{1}{16}$ 4. $\frac{1}{9}$

12) 2 مهره سفید و 4 مهره سیاه در کیسه ای موجود است. یک مهره از این کیسه به تصادف خارج می کنیم و بعد از مشاهده رنگ آن، آن را به همراه دو مهره از رنگ دیگر به کیسه برمی گردانیم اگر مجدداً سه مهره از کیسه خارج کنیم احتمال این که فقط دو مهره از این 3 مهره سفید باشد کدام است؟

1. $\frac{2}{7}$
 2. $\frac{9}{28}$
 3. $\frac{11}{28}$
 4. $\frac{13}{28}$
- 13) دو تاس را با هم میریزیم اگر مجموع دو عدد رو شده کمتر از 7 باشد با کدام احتمال شماره های هر دو تاس یکسان است؟

1. $\frac{1}{5}$
 2. $\frac{1}{6}$
 3. $\frac{1}{8}$
 4. $\frac{3}{8}$
- 14) از هر چهار گروه آزمایشی به ترتیب 1 و 2 و 3 و 4 نفر داوطلب شرکت در آزمونی هستند اگر به تصادف 4 نفر از بین آنان معرفی شوند با کدام احتمال از هر گروه یک نفر معرفی شده اند؟ (سراسری ریاضی 88)

$$\frac{3}{14}(4) \quad \frac{3}{21}(3) \quad \frac{1}{7}(2) \quad \frac{1}{8}(1) \quad \triangleright$$

✍

15) در طرفی پنج مهره با شماره های 1 و 2 و 3 و 4 و 5 قرار دارند. دو مهره با هم بیرون می آوریم با کدام احتمال مجموع شماره های این دو مهره عددی فرد است؟ (سراسری ریاضی خارج کشور 87)

$$/7(4) \quad /6(3) \quad /5(2) \quad /4(1) \quad \triangleright$$

✍

16) در آزمایشگاهی 5 موش سفید و 6 موش سیاه موجود است. به تصادف 3 موش از بین آنها خارج می کنیم با کدام احتمال لااقل یکی از موش ها سفید است؟ (سراسری تجربی خارج کشور 91)

$$\frac{29}{33}(4) \quad \frac{28}{33}(3) \quad \frac{9}{11}(2) \quad \frac{8}{11}(1) \quad \triangleright$$

✍

17) از بین اعداد طبیعی سه رقمی یک عدد برداشته ایم. با کدام احتمال لااقل یک بار رقم 2 در این عدد ظاهر شده است؟

(سراسری ریاضی خارج کشور 86)

$$/28(4) \quad /26(3) \quad /25(2) \quad /24(1) \quad \triangleright$$

✍

18) در آزمایشگاهی 5 موش سفید و 3 موش سیاه نگهداری می شوند. به تصادف متوالی سه موش از بین آنها انتخاب می شوند. با کدام احتمال اولین موش سفید و سومین موش سیاه است؟ (سراسری تجربی 88)

$$\frac{15}{56}(4) \quad \frac{13}{56}(3) \quad \frac{17}{56}(2) \quad \frac{11}{56}(1) \quad \triangleright$$

۱۹) در گروه زنان ساکن یک روستا ۶۰ درصد آنان تحصیلات ابتدایی و ۲۵ درصد از آنان مهارت قالیبافی دارند اگر یک فرد از بین این گروه انتخاب شود با کدام احتمال این فرد تحصیلات ابتدایی یا مهارت قالیبافی دارد؟ (سراسری تجربی ۹۰)

$$\triangleright \begin{matrix} 1/7(1) & 2/7(2) & 3/8(3) & 4/15(4) \end{matrix}$$

✍

۱۹) دو تاس سالم را با هم پرتاب می کنیم تا برای اولین بار هر دو عدد رو شده زوج باشند با کدام احتمال حداکثر در سه پرتاب این نتیجه حاصل می شود؟ (سراسری تجربی ۹۱)

$$\triangleright \begin{matrix} 1/64(1) & 2/64(2) & 3/32(3) & 4/64(4) \end{matrix}$$

✍

۲۰) احتمال انتقال بیماری مسری به افرادی که واکسن زده اند ۲۵٪ و احتمال انتقال به افراد دیگر ۲٪ است. $\frac{2}{5}$ کارگران یک کارگر واکسن زده اند اگر فرد حامل بیماری به تصادف با یکی از کارگران ملاقات کند با کدام احتمال این بیماری منتقل می شود؟ (سراسری تجربی ۸۹)

$$\triangleright \begin{matrix} 1/13(1) & 2/14(2) & 3/15(3) & 4/16(4) \end{matrix}$$

✍

۲۱) از بین ۳ کارت سفید و ۴ کارت سبز یکسان به تصادف یک کارت بدون جایگذاری بیرون می آوریم سپس کارت دوم را خارج می کنیم با کدام احتمال هر دو کارت هم رنگ هستند؟ (سراسری تجربی ۹۱)

$$\triangleright \begin{matrix} 1/7(1) & 2/14(2) & 3/7(3) & 4/7(4) \end{matrix}$$

✍

۲۲) طرف A دارای ۴ مهره سفید و ۵ مهره سیاه است و هر یک از دو ظرف یکسان B, C دارای ۶ مهره سفید و ۳ مهره سیاه است. به تصادف یکی از سه ظرف را انتخاب کرده و ۴ مهره از آن خارج می کنیم با کدام احتمال دو مهره از مهره های خارج شده سفید است (سراسری تجربی ۹۳)

$$\triangleright \begin{matrix} 1/63(1) & 2/63(2) & 3/21(3) & 4/21(4) \end{matrix}$$

✍

۲۳) در جعبه ای ۶ مهره سفید و ۹ مهره سیاه موجود است. دو مهره متوایا و بدون جایگذاری از آن بیرون می آوریم با کدام احتمال بدون توجه به اولین مهره دومین مهره خارج شده سفید باشد؟ (سراسری ۹۲)

$$\triangleright \begin{matrix} 1/14(1) & 2/7(2) & 3/5(3) & 4/5(4) \end{matrix}$$

✍

۲۴) در جعبه ای ۳ مهره سفید ۲ مهره سیاه و ۵ مهره قرمز وجود دارد اگر دومهره از آن بیرون می آوریم با کدام احتمال این دو مهره هم رنگ نیستند؟ (تجربی ۹۴)

1. $\frac{28}{45}$
2. $\frac{29}{45}$
3. $\frac{31}{45}$
4. $\frac{32}{45}$

۲۵) در کیسه ای ۵ مهره با شماره های ۱ تا ۵ وجود دارد. این مهره ها را به طور تصادفی پی در پی بدون جای گذاری خارج می کنیم با کدام احتمال دو مهره با شماره فرد متوالیا خارج نمی شوند؟ (سراسری تجربی ۹۲)

$$\text{➤ } \frac{1}{1} \quad \frac{2}{15} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{4}{25}$$

✍

۲۶) در ظرفی ۴ مهره سفید و ۵ مهره سیاه موجود است. به تصادف ۳ مهره از ظرف بیرون می آوریم با کدام احتمال مهره های خارج شده هم رنگ هستند؟ (خارج ۹۲)

1. $\frac{1}{6}$
2. $\frac{3}{14}$
3. $\frac{2}{9}$
4. $\frac{5}{14}$

۲۷) در جعبه اول ۴ مهره سفید و ۳ مهره سیاه در جعبه دوم ۳ مهره سفید و ۶ مهره سیاه موجود است. به تصادف یکی از جعبه ها را انتخاب کرده و دو مهره با هم از آن بیرون می آوریم با کدام احتمال هر دو مهره سفید است؟ (خارج ۹۲)

1. $\frac{31}{168}$
2. $\frac{11}{56}$
3. $\frac{17}{84}$
4. $\frac{13}{56}$

۲۸) در بین ۴ نفر با کدام احتمال هیچ دو نفری در یک روز هفته متولد نشده اند؟

$$\text{➤ } \frac{120}{74} \quad \frac{120}{73} \quad \frac{216}{74} \quad \frac{216}{73}$$

✍

۲۹) چهار دانش آموز یک کلاس که بر یک نیمکت نشسته اند با کدام احتمال ماه تولد حداقل دو نفر آنان یکسان است؟ (خارج ۹۲)

1. $\frac{19}{48}$
2. $\frac{41}{96}$
3. $\frac{23}{48}$
4. $\frac{55}{96}$

۳۰) از ظرفی شامل ۴ مهره سفید ۳ مهره سیاه و ۵ مهره قرمز ۳ مهره به تصادف با هم خارج می کنیم با کدام احتمال حداکثر ۲ مهره

قرمز خارج می شود؟

$$\triangleright \left(1\right) \frac{1}{22} \quad \left(2\right) \frac{21}{22} \quad \left(3\right) \frac{19}{22} \quad \left(4\right) \frac{9}{11}$$

✍

۳۱) در ظرفی ۴ مهره سفید و ۵ مهره سیاه موجود است. به تصادف ۳ مهره از ظرف بیرون می آوریم با کدام احتمال مهره های خارج شده هم رنگ هستند؟ (خارج تجربی ۹۲)

5. $\frac{1}{6}$
6. $\frac{3}{14}$
7. $\frac{2}{9}$
8. $\frac{5}{14}$

۳۲) در کیسه ای ۴ مهره آبی و ۳ مهره قرمز وجود دارد. از این کیسه ۳ مهره بی در پی و بدون جای گذاری و به تصادف خارج می کنیم. احتمال این که مهره های اول و سوم هم رنگ باشند کدام است؟

$$\triangleright \left(1\right) \frac{4}{7} \quad \left(2\right) \frac{3}{7} \quad \left(3\right) \frac{3}{14} \quad \left(4\right) \frac{5}{14}$$

✍

۳۳) در جعبه ای ۳ مهره قرمز و ۵ مهره آبی وجود دارد از این جعبه مهره ای به تصادف انتخاب می کنیم و به جای آن دو مهره از رنگ دیگر قرار می دهیم حال مهره ای به تصادف از جعبه انتخاب می کنیم با چه احتمالی این مهره با مهره اولیه هم رنگ است؟

1. $\frac{13}{72}$
2. $\frac{31}{72}$
3. $\frac{13}{36}$
4. $\frac{31}{36}$

34) در دو ظرف به ترتیب 24 و 18 مهره یکسان موجود است. در ظرف اول 6 مهره سفید و در ظرف دوم 3 مهره سفید است. از اولی 7 مهره و از دومی 5 مهره به تصادف برداشته و در ظرف دیگری می ریزیم. سپس از ظرف آخر یک مهره بیرون می آوریم با کدام احتمال این مهره سفید است؟ (ریاضی 94)

1. $\frac{13}{72}$
2. $\frac{7}{36}$
3. $\frac{15}{72}$
4. $\frac{31}{144}$

35) در ظرف A، 5 مهره زرد و 3 مهره نارنجی و در ظرف B 4 مهره زرد و 2 مهره نارنجی قرار دارد. 2 مهره به طور تصادف از هر ظرف انتخاب می کنیم. چقدر احتمال دارد مهره های خارج شده هم رنگ نباشد؟

1. 0/85
2. 0/80
3. 0/75
4. 0/70

36) در جامعه ای نسبت زنان به مردان 3 به 2 است. اگر 40 درصد مردان و 50 درصد زنان تحصیل کرده باشند و یک نفر انتخاب شود احتمال آن که این یک نفر زن یا تحصیل کرده باشد چقدر است؟

1. $\frac{19}{25}$
2. $\frac{21}{25}$
3. $\frac{69}{250}$
4. $\frac{7}{25}$

37) مطالعات ژنتیکی نشان می دهد که 40 درصد زن های تشکیل دهنده عامل RH خون منفی هستند. احتمال اینکه در خانواده ای دومین فرزند با RH منفی سومین فرزند خانواده باشد چقدر است؟

5. 0/48
6. 0/043
7. 0/34
8. 0/38

38) در یک آپارتمان 8 زوج زندگی می کنند. قرار است یک شورای 6 نفره تشکیل شود به چند طریق می توان این شورا را انتخاب کرد به طوری که فقط زوج زن و شوهر در این شورا باشند؟

5. 1680
6. 8008
7. 4004
8. 1848

39) احتمال اینکه شخصی گروه خونی A^+ داشته باشد $2/3$ و احتمال اینکه ناراحتی قلبی داشته باشد $3/4$ است. احتمال اینکه شخص ناراحتی قلبی یا گروه خونی A^+ داشته باشد کدام است؟

1. $0/44$
2. $0/46$
3. $0/48$
4. $0/5$

40) احتمال به هدف زدن تیر توسط تیرانداز $3/4$ است. او انقدر شلیک می کند تا به هدف بزند احتمال آن که بیش از ۳ شلیک لازم باشد چقدر است؟

1. $0/340$
2. $0/343$
3. $0/348$
4. $0/334$

41) در ظرفی ۲ مهره سفید و ۳ مهره قرمز قرار دارد. ۴ مرتبه مهره ای از ظرف خارج می کنیم و پس از مشاهده به ظرف باز می گردانیم. با چه احتمالی تعداد مهره های سفید و قرمز خارج شده با هم برابر است؟

1. $\frac{108}{625}$
2. $\frac{216}{625}$
3. $\frac{324}{625}$
4. $\frac{54}{625}$

42) در خانواده ای با شش فرزند با چه احتمالی آخرین فرزند سومین پسر خانواده است؟

1. $\frac{1}{32}$
2. $\frac{3}{32}$
3. $\frac{5}{32}$
4. $\frac{7}{32}$

43) تمام اعداد سه رقمی را که می توان با ارقام ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱ و ۰ با ارقام متمایز نوشت را هر یک روی یک کارت نوشته و همه را در یک کیسه قرار می دهیم. سپس یک کارت را برمی داریم احتمال آن که عدد به دست آمده زوج و بزرگتر از 300 باشد کدام است؟

1. $0/32$
2. $0/36$
3. $0/38$
4. $0/48$

43) در چند عدد سه رقمی مجاور متمایزند؟

1. 576
2. 648
3. 729
4. 720

44) در ظرفی ۲ مهره سفید و ۲ مهره قرمز قرار دارد. ۴ مرتبه مهره ای از ظرف خارج کرده و پس از مشاهده به ظرف بر می گردانیم با چه احتمالی تعداد مهره های سفید و قرمز خارج شده از ظرف با هم برابر است؟

5. $\frac{108}{625}$
6. $\frac{216}{625}$
7. $\frac{324}{625}$
8. $\frac{54}{625}$

45) در یک اتوبوس ۵ مرد و ۴ زن وجود دارد. این اتوبوس شروع به حرکت می کند اگر یک نفر در ایستگاه یک نفر در ایستگاه دوم و مابقی در آخرین ایستگاه پیاده شوند احتمال آن که همه مردها در یک ایستگاه پیاده شده باشند کدام است؟

1. $\frac{1}{2}$
2. $\frac{2}{5}$
3. $\frac{1}{6}$
4. $\frac{1}{4}$

(۱۰۱) چهار نفر در یک کلاس حضور دارند. احتمال آن که هیچ دو نفری در یک روز هفته متولد نشده باشند کدام است؟

1. $\frac{242}{343}$
2. $\frac{210}{343}$
3. $\frac{211}{343}$
4. $\frac{120}{343}$

46) شصت درصد افراد جامعه ای را زنان تشکیل می دهند. ۷۰ درصد از مردان و ۲۰ درصد از زنان مبتلا به چاقی هستند اگر سه نفر از این جامعه انتخاب کنیم احتمال آنکه حداقل دو نفر به چاقی مبتلا باشند چقدر است؟

1. 0/36
2. 0/64
3. 0/4225
4. 0/352

47) با حروف کلمه world چند کلمه سه حرفی می توان نوشت که حتما شامل حرف d باشد؟

1. 24
2. 36
3. 48
4. 72

48) برای قبولی در یک طرح استخدامی لازم است افراد در دو آزمون شرکت کنند و فردی که در هر دو آزمون قبول شود استخدام می شود اگر احتمال قبولی فرد در حداقل یکی از این دو آزمون $\frac{7}{16}$ باشد و احتمال قبولی فرد در هر یک آزمون ها یکسان باشد احتمال استخدام این فرد چقدر است؟

1. $\frac{1}{2}$
2. $\frac{1}{4}$
3. $\frac{1}{16}$
4. $\frac{1}{9}$

49) 2 مهره سفید و 4 مهره سیاه در کیسه ای موجود است. یک مهره از این کیسه به تصادف خارج می کنیم و بعد از مشاهده رنگ آن، آن را به همراه دو مهره از رنگ دیگر به کیسه برمی گردانیم اگر مجدداً سه مهره از کیسه خارج کنیم احتمال این که فقط دو مهره از این 3 مهره سفید باشد کدام است؟

5. $\frac{2}{7}$
 6. $\frac{9}{28}$
 7. $\frac{11}{28}$
 8. $\frac{13}{28}$
- 50) دو تاس را با هم میریزیم اگر مجموع دو عدد رو شده کمتر از 7 باشد با کدام احتمال شماره های هر دو تاس یکسان است؟

5. $\frac{1}{5}$
 6. $\frac{1}{6}$
 7. $\frac{1}{8}$
 8. $\frac{3}{8}$
- 51) بیست درصد از دانشجویان یک دانشگاه بومی هستند با کدام احتمال از 5 دانشجوی انتخابی سه نفر آنان بومی هستند؟

1. 0/0256
 2. 0/0512
 3. 0/0948
 4. 0/1024
- 52) تاسی را پنج بار پرتاب می کنیم. متغیر تصادفی X را تعداد دفعاتی می گیریم که عدد ظاهر شده زوج باشد $P(X = 3)$ کدام است؟

1. $\frac{5}{16}$
 2. $\frac{3}{32}$
 3. $\frac{3}{16}$
 4. $\frac{9}{32}$
- 53) از مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4, \dots, 10\}$ به تصادف سه عدد انتخاب میکنیم. احتمال آنکه جمع سه عدد زوج باشد کدام است؟

1. $\frac{1}{3}$
 2. $\frac{17}{120}$
 3. $\frac{19}{140}$
 4. $\frac{1}{2}$
- 54) در جعبه ای سه مهره سفید و 4 مهره سیاه و پنج مهره قرمز موجود است. سه مهره را به تصادف و پی در پی و بدون جایگذاری بر می داریم. با کدام احتمال مهره اول سفید و دو مهره دیگر هم رنگ نیستند؟

1. $\frac{4}{55}$
2. $\frac{5}{54}$
3. $\frac{19}{110}$
4. $\frac{17}{220}$

55) تیر را به سمت هدف پرتاب می کنیم میدانیم که تیر اول و سوم به هدف برخورد می کند اگر احتمال اصابت هر تیر $\frac{1}{3}$ باشد با کدام احتمال حداقل سه تیر به هدف برخورد می کند؟

1. $\frac{8}{27}$
2. $\frac{16}{81}$
3. $\frac{19}{27}$
4. $\frac{65}{81}$

56) در ظرفی ۹ مهره از شماره یک تا نه موجود است. ۴ مهره به تصادف انتخاب می کنیم احتمال آنکه بزرگترین عدد انتخاب شده ۷ باشد چقدر است؟

1. $\frac{2}{21}$
2. $\frac{5}{126}$
3. $\frac{1}{9}$
4. $\frac{10}{63}$

فصل دوم تابع

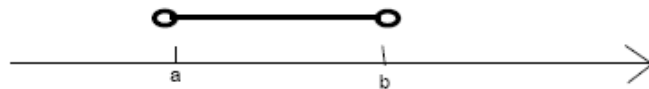
درستامه (۱) بازه

بازه

بازه نمادی است که برای ساده تر نوشتن یک مجموعه به کار می رود.

❖ بازه باز

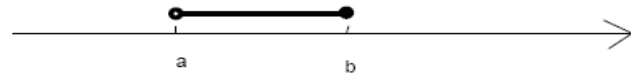
$$\{x \mid x \in \mathbb{R}, a < x < b\} = (a, b)$$



❖ بازه ی نیم باز

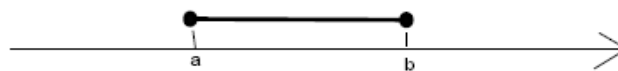
$$\{x \mid x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\} = [a, b)$$

$$\{x \mid x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\} = (a, b]$$



❖ بازه ی بسته

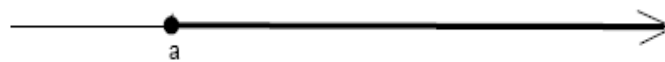
$$\{x \mid x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$$



❖ ممکن است بازه ای از یک یا دو سمت نامحدود یا بیکران باشد در این صورت شبیه به حالت های زیر

خواهد بود

$$\{x \mid x \in \mathbb{R}, x \geq a\} = [a, \infty)$$



$$\{x \mid x \in \mathbb{R}, x < a\} = (-\infty, a)$$



$$\{x \mid x \in \mathbb{R}\} = (-\infty, +\infty)$$



اعمال روی بازه ها

برای تعیین اجتماع و اشتراک و تفاضل دو بازه به این صورت عمل می کنیم :

ابتدا دو بازه را با فاصله در پایین و بالای یک محور مشخص می کنیم .

✓ اجتماع جایی از محور خواهد بود که حداقل یکی از دو بازه در آن قسمت دیده شود .

✓ اشتراک جایی است که هر دو بازه دیده شوند.

✓ تفاضل جایی است که فقط بازه اول باشد.

✓ متمم نیز جایی است که بازه مورد نظر نباشد

★ برای تعیین مرکز و شعاع بازه (a, b)

✓ مرکز $\frac{a+b}{2}$

✓ شعاع $\frac{b-a}{2}$

★ در حل نامعادلات از دو فرمول مهم زیر استفاده می شود .

$$|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a \quad \checkmark$$

$$|x| \geq a \Leftrightarrow x \geq a \vee x \leq -a \quad \checkmark$$

• مثال ۱) دو بازه $A = [2,4], B = [3,5]$ داده شده است حاصل عبارات زیر را بیابید.

- $A) A \cup B = [2,5]$ $B) A \cap B = [3,4]$
- $C) A - B = [2,3]$ $D) A' = (-\infty, 2) \cup (4, +\infty)$

• مثال ۲) بازه ی $[5,10] \cap ([-2,6] \cup [6,9])$ را به ساده ترین صورت بنویسید.

- $[-2,6] \cup [6,9] = [-2,9]$
- $[-2,9] \cap [5,10] = [5,9]$

• مثال ۳) نا معادله $-2 < 4x + 6 \leq 10$ را حل کرده و جواب را به صورت بازه نمایش دهید.

برای حل این نا معادله ابتدا از طرفین ۶ واحد کم می کنیم سپس آنها را بر ۴ تقسیم می کنیم

- $-2 < 4x + 6 \leq 10 \Rightarrow -8 < 4x \leq 4 \Rightarrow -2 < x \leq 1 = (-2,1]$
- مثال ۴) نا معادله $|2x - 1| < 3$ را حل کرده و جواب را به صورت بازه نمایش دهید.
- $|2x - 1| < 3 \Rightarrow -3 < 2x - 1 < 3 \Rightarrow -2 < 2x < 4 \Rightarrow -1 < x < 2 = (-1,2)$

تمرین



۱) حاصل عبارتهای زیر را یافته و جواب را روی محور نشان دهید.

① $(-3,2) \cap (-1,4)$

② $(-\infty, 5) \cup (-2,7)$

۲) بازه های $A = (-2, 4]$, $B = [-1, 5]$ داده شده اند حاصل عبارت‌های زیر را بیابید.

① $(A \cup B)'$

② $A - B'$

۳) نامعادلات زیر را حل کرده و جواب را به صورت بازه نمایش دهید.

① $3x - 2 \leq \frac{x+1}{2}$

② $\frac{2x-1}{3} \geq \frac{x+1}{2}$

③ $3x - 3 \leq 2x + 1 < 3x + 2$

۴) اگر (-2) مرکز بازه (a, b) باشد و طول این بازه برابر ۷ باشد مقادیر a, b را بیابید.

۵) مجموعه جواب نامعادله $|2x - 1| \geq 2$ را به صورت بازه نشان دهید.

۶) بازه A به صورت $(-\infty, 0]$ و بازه B به صورت $(-4, 3)$ است حاصل $A - B$ و $(A \cap B)'$ را بیابید.

۷) اگر $A = \{x \mid -3 < x \leq 2\}$ و $B = \{x \mid x \leq \frac{-3}{2}\}$ باشند هر یک از مجموعه های $A, B, A \cup B$ را به صورت بازه نمایش دهید.

۸) اگر A بازه متناظر جواب نامعادله $3 \frac{1-x}{2} < B = (-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$ باشد حاصل $A \cup B$ را به صورت بازه ی اعداد بنویسید.

۹) نامعادله های زیر را حل کنید و جواب را به صورت بازه نمایش دهید.

① $3x - 2 \leq \frac{x+1}{2}$

② $-2 \leq \frac{x}{2} - 1 \leq 2$

درس نامه ۲) معادلات و نامعادلات شامل عبارات گویا

معادلات شامل عبارات گویا

معادلات گویا معادلاتی هستند کسری که در مخرج آنها متغیر وجود دارد

برای حل این معادلات ابتدا آنها را از حالت کسری خارج

می کنیم (با ضرب طرفین تساوی در مخرج مشترک کسر ها) سپس معادله بدست آمده را حل می کنیم

➤ جواب های بدست آمده نباید ریشه مخرج باشند.

مثال ۵) معادلات زیر را حل کنید.

- A) $\frac{x+2}{x-2} - \frac{x-2}{x+2} = \frac{8}{x^2-4} \xrightarrow{\times(x^2-4)} (x+2)(x+2) - (x-2)(x-2) = 8 \Rightarrow x^2 + 4x + 4 - (x^2 - 4x + 4) = 8 \Rightarrow 8x = 8 \Rightarrow x = 1$
- B) $\frac{x}{8} + \frac{2}{x-2} = \frac{x+2}{2x-4} \xrightarrow{\times 8(x-2)} (x-2)x + 16 = 4(x+2) \Rightarrow$
- $x^2 - 2x + 16 = 4x + 8 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 & \times \\ x = 4 & \checkmark \end{cases}$

مثال ۶) به ازای چه مقدار از a معادله زیر دارای مجموعه جواب $\{-1\}$ است

$$\diamond \frac{x-1}{3x+4} = \frac{2x^2+a}{5x+4}$$

کافی است به جای x مقدار داده شده را قرار دهیم و مقدار a را بیابیم.

$$\bullet \frac{-1-1}{-3+4} = \frac{2+a}{-5+4} \Rightarrow \frac{-2}{1} = \frac{2+a}{-1} \Rightarrow 2+a = 2 \Rightarrow a = 0$$

تمرین



A. معادلات زیر را حل کنید

$$\textcircled{1} \frac{2x-1}{x-4} + 2 = \frac{1-2x}{3x-12}$$

$$\textcircled{2} \frac{2}{x} + \frac{4-5x}{3x^2} = \frac{5}{3}$$

$$\textcircled{3} \frac{x}{8} + \frac{2}{x-2} = \frac{x+2}{2x-4}$$

$$4 \quad \frac{x+1}{4} + 1 = \frac{3x}{x+1}$$

$$5 \quad \frac{3x-2}{x} + \frac{2x+5}{x+3} = 5$$

$$5 \quad \frac{2x+3}{2x-2} - \frac{5}{x^2-1} = \frac{2x-3}{2x+2}$$

$$7 \quad \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2}$$

B. به ازای چه مقدار a معادله $\frac{x+a}{x} - \frac{x}{x+a} = \frac{4a}{x+a}$ دارای جواب $x=1$ است. (خرداد ۹۴)

C. معادلات زیر را حل کنید.

$$1 \quad \frac{2x+3}{x-1} - \frac{2x-3}{x+1} = \frac{10}{x^2-1}$$

$$2 \quad \frac{x+2}{x-1} + \frac{x-1}{x+2} = \frac{17}{4}$$

$$3 \quad \frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} = 3x \left(1 - \frac{x-1}{x+1}\right)$$

$$4 \quad \frac{2x+3}{x-1} - \frac{2x-3}{x+1} = \frac{10}{x^2-1}$$

$$5 \quad \frac{3}{3x^2-3x-28} = \frac{5}{5x^2-x-20}$$

D. به ازای چه مقادیری از k ، معادله $\frac{4-t}{2-2t} = \frac{3t^2+k}{(t^2+1)^2-68}$ دارای جواب $t = -3$ است؟

E. به ازای چه مقدار a معادله $\frac{x}{a-x} + \frac{a-x}{x} = \frac{a}{x}$ دارای جواب $x = 2$ است؟

F. اگر $x = 2$ یک جواب معادله $\frac{2x^2}{a+x} + \frac{a-x}{x} = \frac{a}{x}$ باشد. (خرداد ۹۵)

الف) a را تعیین کنید. ب) به ازای $a=0$ ریشه دیگر این معادله را در صورت وجود به دست آورید.

نا معادلات شامل عبارات گویا

برای حل نامعادلات شامل عبارات گویا، همه عبارات را به یک سمت نامساوی برده

، مخرج مشترک گرفته و به یک کسر تبدیل می کنیم. سپس با تعیین علامت عبارت به دست آمده جواب نامعادله را می یابیم.

★ قبل از بیان تمرین های این قسمت به یاد آوری تعیین علامت از سال گذشته می پردازیم

دو جمله ای درجه اول $y = ax + b$: کافی است عبارت را مساوی صفر قرار داده، ریشه آن را بیابیم. سپس با استفاده از جدول زیر تعیین علامت را انجام می دهیم.

x	ریشه
y	مخالف علامت a 0 موافق علامت a

سه جمله ای درجه دوم $y = ax^2 + bx + c$: عبارت را مساوی صفر قرار داده، مقدار Δ را می یابیم.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

سپس با توجه به مقدار Δ یکی از حالت های زیر را خواهیم داشت:

(1) اگر $\Delta > 0$ معادله دارای دو ریشه $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ است و جدول تعیین علامت به صورت زیر است:

x	ریشه بزرگتر	ریشه کوچکتر
y	مخالف علامت a 0 موافق علامت a	مخالف علامت a 0 موافق علامت a

(2) اگر $\Delta = 0$ معادله دارای یک ریشه $x = \frac{-b}{2a}$ است.

x	ریشه
y	مخالف علامت a 0 موافق علامت a

(3) اگر $\Delta < 0$ باشد معادله ریشه ندارد.

x	مخالف علامت a
y	مخالف علامت a

مثال ۷) نا معادله زیر را حل کنید.

$$\diamond \frac{x^2 + x + 2}{x^2 - 3x + 2} < 1$$

$$\diamond \frac{x^2 + x + 2}{x^2 - 3x + 2} - 1 < 0 \Rightarrow \frac{x^2 + x + 2 - x^2 + 3x - 2}{x^2 - 3x + 2} < 0 \Rightarrow \frac{4x}{x^2 - 3x + 2} < 0$$

لطفاً ریشه های صورت و مخرج را یافته، عبارت را تعیین علامت کنید.

جواب نهایی برابر است با $(-\infty, 0) \cup (1, 2)$

تمرین



۱) هر یک از نا معادله های زیر را حل کنید .

① $1 - \frac{1}{x} < x + 1$

② $\frac{x^2 - 2}{x} < 1$

۲) به ازای چه مقادیری از x عبارت زیر قابل محاسبه است ؟

$$\sqrt[4]{\frac{1}{x^2} - \frac{3}{4}}$$

۳) اگر $A = \left\{x: x \in \mathbb{R}, \frac{5}{x} \geq 2\right\}$, $B = (-1, 2)$ باشد (خرداد ۹۳)

الف) جواب مجموعه A را با راه حل تعیین کنید .

ب) مجموعه $A \cap B$ را به وسیله بازه نمایش دهید .

هر یک از نا معادله های زیر را حل کنید .

① $\frac{6 - x^2}{x} > 1$

② $\left| \frac{1 - x}{2x - 5} \right| > 1$

③ $\frac{1}{2x^2 + x + 1} \geq \frac{1}{x^2 + 1}$

۴) به ازای چه مقادیری از x عبارت زیر قابل محاسبه است ؟

• $\sqrt{\frac{2x^2 + x - 6}{3x^2 - 7x - 6}} - 5x\sqrt{16 - x^2}$

۵) نامعادله $\frac{x}{x+1} - \frac{x-1}{x} \geq -1$ را حل کرده و جواب را به صورت بازه نمایش دهید. (خرداد ۹۰)

۶) نامعادله $\frac{x+2}{2x-1} < \frac{1}{x-2}$ را حل کرده و مجموعه جواب را به صورت بازه نشان دهید. (خرداد ۹۲)

۷) نامعادله $x - 2 \leq \frac{2x-1}{x+2}$ را حل کرده و جواب را به صورت بازه نمایش دهید. (خرداد ۹۱)

سوالات چهار گزینه ای

۵۷) نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{2x^2-5x+5}{x^2+1}$ در بازه (a, b) پایین تر از خط $y=1$ است. بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟

1. 1
2. 2
3. 3
4. 4

۵۸) به ازای کدام مقدار m نمودار تابع $y = \frac{1}{2}x^2 + (m-2)x + 1$ همواره بالای محور افقی است؟

1. $m > 2$
2. $1 < m < 2$
3. $1 - \sqrt{2} < m < 1 + \sqrt{2}$
4. $2 - \sqrt{2} < m < 2 + \sqrt{2}$

۵۹) به ازای کدام مقادیر m نمودار تابع با ضابطه $f(x) = mx^2 + x$ همواره زیر خط $y=1-x$ قرار دارد؟

1. $-1 < m < 0$
2. $M < -1$
3. $M < 0$
4. \emptyset

۶۰) مجموعه جواب نامعادله $\frac{-2(x^4-1)-1}{1-x^2} \geq \frac{x^2-x^4-1}{1-x^2}$ شامل چند عدد صحیح نیست؟

1. ۱
2. ۲
3. ۳
4. ۴

۶۱) عبارت $\frac{(m-1)x^2+2x-1}{3x^2+1}$ به ازای جميع مقادیر x منفی است حدود m کدام است؟

1. $m < 0$
2. $m < 1$
3. $-2 < m < 2$
4. $m > -3$

۶۲) اگر نمودار تابع $f(x) = x^2 - x - 2$ در فاصله (a, b) زیر محور افقی باشد حداکثر مقدار $b - a$ کدام است؟

- ۲(۴) $\frac{3}{2}$ (۳) ۳(۲) ۱(۱) >

۶۳) به ازای کدام مجموعه مقادیر m نمودار تابع با ضابطه $f(x) = x^2 - (m - 2)x + m$ همواره بالای خط به معادله

$$y = -1 \text{ قرار دارد؟}$$

1. $R - [-1, 4]$
2. $(-1, 4)$
3. $R - [0, 8]$
4. $(0, 8)$

۶۴) مقادیر تابع با ضابطه $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 6$ در بازه (a, b) بزرگ تر از $\frac{7}{2}$ است. بیشترین مقدار $b - a$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۸۹)

$$\text{> } (1) \ 4 \quad (2) \ 5 \quad (3) \ 5/5 \quad (4) \ 6$$

✍

۶۵) نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{3x^2 - 2x}{x^2 + 4}$ در بازه (a, b) پایین تر از خط به معادله $y = 2$ است. بیشترین مقدار $b - a$ کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج کشور ۸۸)

$$\text{> } (1) \ 4 \quad (2) \ 6 \quad (3) \ 8 \quad (4) \ \infty$$

✍

۶۵) اگر $f(x) = x^2 + 3x$ ، $g(x) = -\frac{1}{2}x + 2$ و $f \circ g$ که در بالای محور محور افقی قرار دارد برابر کدام بازه است؟ (سراسری تجربی ۹۱)

$$\text{> } (1) \ (-4, 1) \quad (2) \ (-3, 2) \quad (3) \ (-2, 1) \quad (4) \ (-1, 4)$$

✍

۶۶) اگر $f(x) = (2x - 3)^2$ و $g(x) = x + 2$ نمودارهای دو تابع $f, f \circ g$ با کدام طول متقاطعند؟ (سراسری تجربی ۹۲)

$$\text{> } (1) \ -1 \quad (2) \ \frac{1}{2} \quad (3) \ 1 \quad (4) \ \frac{3}{2}$$

✍

۶۷) به ازای کدام مقادیر m عبارت $(m - 1)x^2 + 6x + 2m + 1$ برای هر مقدار دلخواه x مثبت است؟ (سراسری ریاضی خارج کشور ۹۰)

$$\text{> } (1) \ m < -2 \quad (2) \ m > 2/5 \quad (3) \ 1 < m < 2/5 \quad (4) \ 1 < m < 2/5$$

✍

۶۸) اگر عبارت $(a - 1)x^2 + (a - 1)x + 1$ به ازای هر مقدار x منفی باشد؛ a به کدام مجموعه تعلق دارد؟ (سراسری ریاضی ۹۱)

$$\text{> } (1) \ 1 < a < 5 \quad (2) \ a < 1 \quad (3) \ \emptyset \quad (4) \ R$$

✍

۶۹) به ازای کدام مقادیر m نمودار تابع $y = (m-1)x^2 + \sqrt{3}x + m$ همواره در زیر محور افقی است؟

1. $m < \frac{-1}{2}$
2. $\frac{-1}{2} < m < 1$
3. $1 < m < \frac{3}{2}$
4. $m > \frac{3}{2}$

۷۰) مجموعه جواب نامعادله $\frac{x^2-x-10}{x^2+x-12} > 10$ شامل کدام یک از بازه های زیر است؟

- (۱) (1,4) (۲) (-3,1) (۳) (1,3) (۴) (-4,1)

✍

۷۱) مجموعه جواب نامعادله $\left| \frac{x-3}{2x+1} \right| > 1$ به صورت کدام بازه ها است؟ (سراسری تجربی ۹۲)

- (۱) $\left(-3, \frac{-1}{2}\right) \cup \left(\frac{-1}{2}, 1\right)$ (۲) $\left(-2, \frac{-1}{2}\right) \cup \left(\frac{-1}{2}, 1\right)$ (۳) $\left(-3, \frac{-1}{2}\right)$ (۴) $\left(\frac{-1}{2}, 1\right)$

✍

۷۲) مجموعه جواب نامعادله $(x-4)|x| < 2x-5$ کدام است؟ (سراسری ریاضی ۹۲)

1. (1,5)
2. $(1 - \sqrt{6}, 1 + \sqrt{6})$
3. $(1,5) \cup (1 + \sqrt{6}, \infty)$
4. $(-\infty, 1 - \sqrt{6}) \cup (1,5)$

۷۳) به ازای کدام مجموعه مقادیر a نمودار تابع $f(x) = (a-3)x^2 + ax - 1$ از ناحیه اول محور های مختصات نمی گذرد؟

(سراسری ریاضی ۹۲)

1. $a \leq 2$
2. $0 < a \leq 2$
3. $2 < a < 3$
4. $0 < a < 3$

یاد آوری از سال اول و دوم

	0	30	45	60	90	180	270	360
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	تعریف نشده	0	تعریف نشده	0
cot	تعریف نشده	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	تعریف نشده	0	تعریف نشده

روابط بنیادی

- ★ $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$
- ★ $\cos\theta \times \tan\theta = \sin\theta$
- ★ $\sin\theta \times \cot\theta = \cos\theta$
- ★ $\tan\theta \times \cot\theta = 1$
- ★ $1 + \cot^2\theta = \frac{1}{\sin^2\theta}$
- ★ $1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$

(۱) زوایای قرینه:

$$\diamond \sin(-\theta) = -\sin\theta, \cos(-\theta) = \cos\theta, \tan(-\theta) = -\tan\theta, \cot(-\theta) = -\cot\theta$$

(۲) زوایای مکمل:

$$\diamond \sin(\pi - \theta) = \sin\theta, \cos(\pi - \theta) = -\cos\theta, \tan(\pi - \theta) = -\tan\theta, \cot(\pi - \theta) = -\cot\theta$$

(۳) زوایای با اختلاف π :

$$\diamond \sin(\pi + \theta) = -\sin\theta, \cos(\pi + \theta) = -\cos\theta, \tan(\pi + \theta) = \tan\theta, \cot(\pi + \theta) = -\cot\theta$$

(۴) زوایای با مجموع 2π :

$$\diamond \sin(2\pi - \theta) = -\sin\theta, \cos(2\pi - \theta) = \cos\theta, \tan(2\pi - \theta) = -\tan\theta, \cot(2\pi - \theta) = -\cot\theta$$

(۵) زوایای متمم:

$$\diamond \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta, \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta, \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot\theta, \cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \tan\theta$$

۶) زوایای با مجموع $\frac{\pi}{2}$:

$$\diamond \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos\theta, \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = -\sin\theta, \tan\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\cot\theta, \cot\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\tan\theta$$

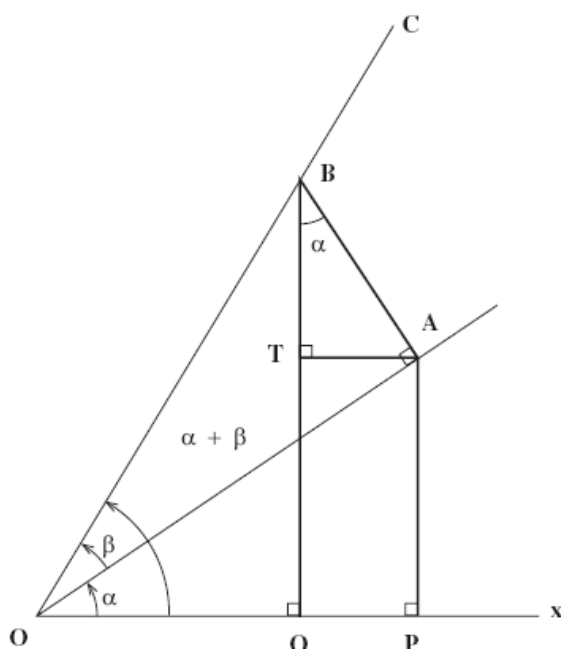
نسبت های مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا:

$$\diamond \sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\diamond \cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\diamond \tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$$

$$\diamond \cot(\alpha \pm \beta) = \frac{\cot\alpha\cot\beta \mp 1}{\cot\beta \pm \cot\alpha}$$



با استفاده از شکل زیر رابطه $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$ را

ثابت کنید .

با توجه به رابطه های فوق داریم :

• نسبت های مثلثاتی زاویه 2α :

$$\star \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\star \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$\star \tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$$

$$\star \cot 2\alpha = \frac{\cot^2\alpha - 1}{2\cot\alpha}$$

★ نسبت های مثلثاتی زاویه 3α :

$$★ \sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$

$$★ \cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

$$★ \tan 3\alpha = \frac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1 - 3\tan^2\alpha}$$



تمرین



• عبارت های زیر را ساده کنید .

① $\frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$

② $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

③ فرض کنید $\tan\alpha = \frac{3}{4}$, $\tan\beta = \frac{5}{12}$ و α, β زوایای حاده باشند، حاصل عبارت های زیر را بیابید .

★ $\sin(\alpha + \beta)$

★ $\cos(\alpha + \beta)$

★ $\tan(\alpha + \beta)$

④ درستی تساوی های زیر را ثابت کنید .

A. $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\cos x$

B. $\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = 2\sin\alpha\sin\beta$

C. $\sin 2x \cos x - \cos 2x \sin x = \sin x$

D. $\cot \frac{x}{2} - \tan \frac{x}{2} = 2\cot x$

⑤ نسبت های مثلثاتی زاویه 75° را بیابید.

⑥ نسبت های مثلثاتی زاویه های $15^\circ, 22/5^\circ$ را بیابید .

⑦ فرض کنید $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, $\sin\beta = \frac{15}{17}$ و α حاده و β منفرجه باشد، حاصل عبارت های زیر را بیابید .

* $\sin(\alpha + \beta)$

* $\cos(\alpha - \beta)$

* $\cot(\alpha + \beta)$

* $\sin 2\alpha$

* $\tan 2\beta$

8) درستی تساوی های زیر را ثابت کنید .

❖ A) $\tan \alpha = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 - \tan^2 \alpha}$

❖ B) $\frac{2}{\tan \alpha + \cot \alpha} = \sin 2\alpha$

❖ C) $\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta$

9) اگر $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ و α زاویه منفرجه باشد، حاصل $\tan 2\alpha$ را بیابید. (خرداد ۹۲)

10) درستی رابطه $\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta$ را نشان دهید. (خرداد ۹۱)

11) فرض کنید $\tan \alpha = \frac{3}{4}$ و α زاویه ای حاده باشد حاصل $\sin 2\alpha$ را به دست آورید. (خرداد ۹۳)

12) فرض کنید $\tan \alpha = -\frac{1}{2}$ و α زاویه ای منفرجه باشد عبارت $\cos 2\alpha$ را محاسبه کنید. (خرداد ۹۵)

13) درستی برابری مقابل را ثابت کنید (خرداد ۹۴)

• $\frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \tan \alpha$

9) دامنه تابع $f(x) = \tan(x + \frac{\pi}{3})$ را به دست آورید. (خرداد ۹۰) (صبر کن تو دامنه تابع حل کن)

❖ سوالات چند گزینه ای

(۷۴) اگر $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{2}{3}$ باشد مقدار $\cos 2x$ کدام است؟ (سراسری ۹۳ تجربی)

➤ (۱) $-\frac{2}{9}$ (۲) $-\frac{1}{9}$ (۳) $\frac{1}{9}$ (۴) $\frac{2}{9}$

✍

(۷۵) اگر $\tan\frac{2\pi}{3} \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = 1$ باشد، مقدار $\cos 2x$ کدام است؟ (سراسری تجربی - ۸۸)

➤ (۱) $-\frac{2}{3}$ (۲) $-\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{2}{3}$

✍

(۷۶) اگر $\tan\beta = \frac{1}{2}$ و $\alpha - \beta = \frac{\pi}{4}$ مقدار $\sin 2\alpha$ کدام است؟ (تجربی ۹۴)

1. / ۴۵
2. / ۶
3. / ۷۵
4. / ۸

(۷۷) اگر $\sin x + \cos x = -\sqrt{2}$ باشد، حاصل $\sin^4 x + \cos^4 x$ چقدر است؟

➤ (۱) ۱ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{8}$

(۷۸) اگر $\sin 2x = \frac{1}{4}$ باشد، حاصل $(\sin x + \cos x)^2$ کدام است؟

➤ (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{5}{4}$ (۳) $\frac{9}{8}$ (۴) $\frac{17}{16}$

(۷۹) اگر $\cos 2\beta = \frac{3}{5}$ و β زاویه حاده باشد مقدار $\sin\left(\frac{\pi}{3} - \beta\right)$ کدام است؟

➤ (۱) $\frac{\sqrt{3}-2}{2\sqrt{5}}$ (۲) $\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{5}}$ (۳) $\frac{2\sqrt{3}-1}{2\sqrt{5}}$ (۴) $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{5}}$

تابع

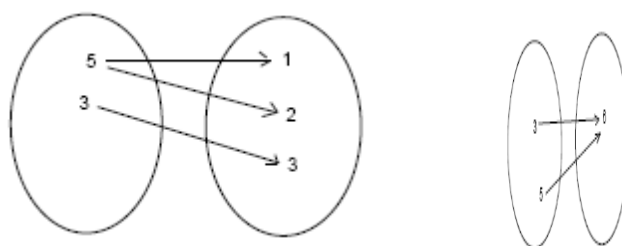
قانون یا ضابطه ای است که بین دو مجموعه تعریف می شود و به هر عضو از مجموعه

اول یک و تنها یک عضو از مجموعه دوم را نسبت می دهد. تابع را به صورت های مختلف می توان نمایش داد.

نمودار و ن

در صورتی تابع را نشان می دهد که از هر عضو مجموعه اول

دقیقا یک فلش خارج شود..



زوج مرتب

هنگامی تابع را نشان می دهد که مولفه (مختص) های اول زوج های مرتب با هم مساوی نباشند.

مجموعه f تابع است

$$\diamond f = \{(4,5), (3,2), (7,1)\}$$

g تابع نیست

$$\diamond g = \{(7,3), (2,1), (7,4)\}$$

• مثال ۸) مقادیر a, b را به گونه ای بیابید که مجموعه زیر یک تابع را نشان دهد.

- $f = \{(4,3), (4,2a-1), (7,5), (1,8), (9-a, b+4)\}$
- $2a-1=3 \Rightarrow a=2 \Rightarrow f = \{(4,3), (7,5), (1,8), (7, b+4)\}$
- $b+4=5 \Rightarrow b=1 \Rightarrow f = \{(4,3), (7,5), (1,8)\}$

تمرین

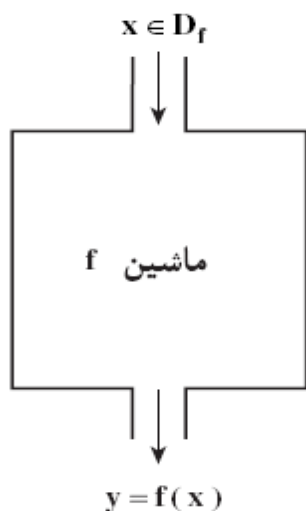


۱) کدام یک از مجموعه های زیر یک تابع را نشان می دهد.

- A. $\{(-1,0), (0,1), (2,3), (\sqrt{-1}, 4)\}$
- B. $\{(-1,2)\}$
- C. $\{(0,0), (2,1), (3,2), (-1,0), (2,-2)\}$
- D. $\{(1,1), (2,3), (-1,-1), (-2,5)\}$

۲) مقادیر a, b را به گونه ای بیابید که مجموعه زیر تابع باشد

$$f = \{(1,3), (a-2,6), (1,2a-3), (1,b)\}$$



نمایش تابع با استفاده از ضابطه

نمایش تابع با استفاده از ضابطه به صورت مقابل خواهد بود

$$\text{که در آن} \quad \begin{cases} f: A \rightarrow B \\ y = f(x) = \dots \end{cases} \quad \text{دامنه} = A \text{ و هم دامنه} = B \text{ خواهد بود}$$

مقدار تابع در یک نقطه

برای تعیین مقدار تابع در یک نقطه کفایت به جای x ، عدد داده شده را قرار دهیم تا مقدار تابع بدست آید.

• مثال ۹) اگر تابع $f(x) = 4x^2 - 5$ داده شده باشد مقدار $f(0), f(2), f(-1)$ را بیابید.

$$\text{❖ } f(0) = 4 \times (0)^2 - 5 = -5$$

$$\text{❖ } f(2) = 4 \times 2^2 - 5 = 11$$

$$\text{❖ } f(-1) = 4 \times (-1)^2 - 5 = -1$$

• مثال ۱۰) اگر تابع $f(x+1) = x^2$ آن گاه $f(x)$ را بیابید. سپس $f(1)$ را بیابید.

$$\text{❖ } x+1 = a \Rightarrow x = a-1 \Rightarrow f(a) = (a-1)^2$$

$$\text{➤ } f(1) = 0$$

تمرین



۱) تابع $f(x) = x^2 - 4$ داده شده است، مقادیر زیر را حساب کنید.

$$\text{❖ } f(3), f(5), f(f(3))$$

۲) مقادیر a, b را چنان بیابید که مجموعه $g = \{(-1, b+3), (7, 1), (-1, 4-a), (7, a)\}$ یک تابع باشد. (خرداد ۹۰)

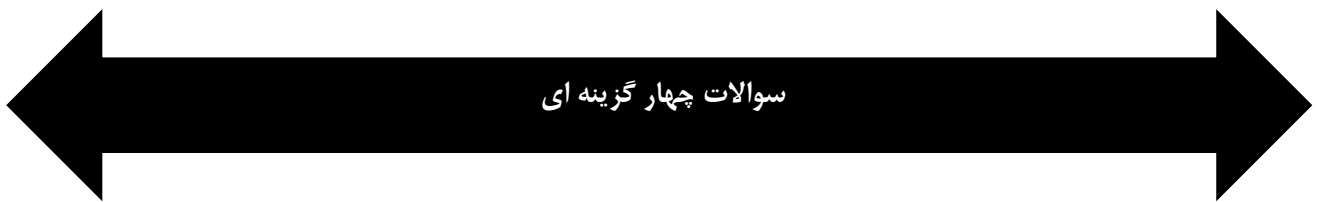
۳) اگر $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ باشد، $f(-\frac{1}{x})$ را یافته و درستی تساوی $f(x) \times f(-\frac{1}{x}) = -1$ را بررسی کنید.

۴) اگر $f(x-1) = \frac{x+3}{x+1}$ باشد ضابطه تابع $f(x)$ را بیابید.

۵) اگر تابع $f(x-1) = \frac{x}{x+1}$ باشد ضابطه $f(x)$ را یافته و $f(3)$ را بیابید.

۳) تابع $f(x) = 3^x$ است مقدار $f(1-x) + f(x+1)$ را بیابید.

۴) هرگاه $f(x) = \sqrt{3 + \sqrt{2-x}}$ باشد مقادیر $f(1), f(\sqrt{x+3})$ را بیابید.



۸۰) اگر $f(x) = \sqrt{x+2|x|}$ مقدار $f(f(-144))$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۸۸)

➤ ۱) تعریف نشده ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۲

✍

۸۱) اگر $f(x) = 2 - |x-2|$ ضابطه تابع $f(f(x))$ برابر کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج کشور ۹۰)

➤ ۱) x ۲) $4-x$ ۳) $f(x)$ ۴) $2-f(x)$

✍

۸۲) در تابع با ضابطه $f(x) = x^2 - 2[x]$ مقدار $f(-\frac{1}{2}f(\sqrt{3}))$ کدام است؟ (سراسری تجربی خارج کشور ۹۰)

➤ ۱) $1/75$ ۲) $2/25$ ۳) $2/5$ ۴) $2/75$

✍

۸۳) در تابع با ضابطه $f(x) = a \cdot b^x$ داریم و $f(-2) = \frac{3}{2}$ مقدار $f(\frac{3}{2})$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۱)

➤ ۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۲ ۴) ۲۴

✍

۸۴) اگر نمودار تابع $f(x) = ab^x - 1$ از دو نقطه $A(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), B(1, 11)$ بگذرد $f(-1)$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۳)

➤ ۱) $-\frac{3}{4}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $-\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{3}{4}$

✍

۸۵) اگر $f(x-3) = x^2 - 4x + 5$ باشد نگاه $f(1-x)$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۰)

➤ ۱) $x^2 + 1$ ۲) $x^2 + 3$ ۳) $x^2 + 4x + 5$ ۴) $x^2 - 4x + 5$

نمودار توابع درجه اول

فرم توابع درجه اول در حالت کلی به صورت $y = ax + b$ است.

برای تعیین معادله آنها نیاز به یک نقطه از خط و شیب خط داریم:

اگر نقطه مورد نظر $A \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix}$ و شیب برابر m باشد معادله تابع از فرمول زیر بدست می آید.

$$\diamond y - y_A = m(x - x_A)$$

اگر به جای یک نقطه و شیب دو نقطه را داشته باشیم باید ابتدا از رابطه مقابل شیب را بیابیم.

$$\diamond m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

تمرین



- معادله خطی را مشخص کنید که محور x ها را در نقطه ای به طول $\frac{-3}{2}$ قطع کند و از نقطه $(1, 5)$ بگذرد.

نمودار توابع درجه دوم

رسم نمودار این توابع که سهمی نامیده می شود را در ریاضی ۲ به روش انتقال دیدید.

اگر تابع درجه دوم به صورت $y = f(x) = x^2$ را داشته باشیم:

(۱) تابع $y = f(x + a)$: به اندازه a واحد نمودار به سمت چپ می رود.

(۲) تابع $y = f(x - a)$: به اندازه a واحد نمودار به سمت راست می رود.

(۳) تابع $y = f(x) + a$: به اندازه a واحد نمودار به سمت بالا می رود.

(۴) تابع $y = f(x) - a$: به اندازه a واحد نمودار به سمت پایین می رود.

(۵) $y = -f(x)$: تابع نسبت به محور x قرینه می شود.

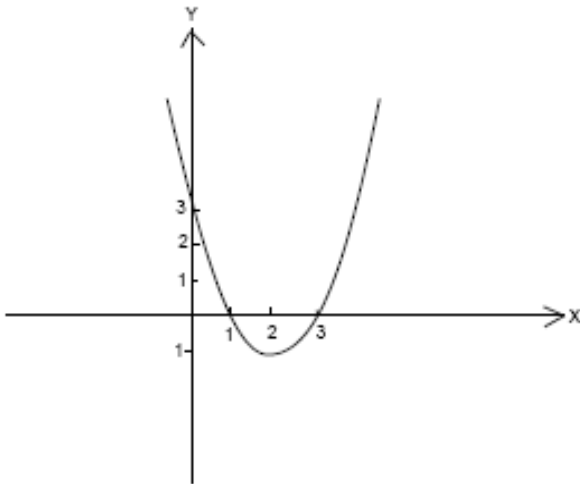
(۶) $y = k f(x)$: عرض تمام نقاط در k ضرب می شود.

(۷) ممکن است تابع داده شده ترکیبی از چند حالت بالا باشد.

روش دیگر

اگر یک تابع در جه دوم در حالت کلی به صورت $y = ax^2 + bx + c$ باشد ابتدا از رابطه $x = \frac{-b}{2a}$ طول نقطه راس سهمی را می یابیم و با جایگذاری آن در معادله عرض این نقطه نیز بدست می آید. سپس دو نقطه در دو طرف راس انتخاب کرده و راس را به آنها وصل می کنیم.

➤ اگر در معادله تابع a مثبت باشد این نقطه می نیمم تابع و اگر منفی باشد ماکزیمم تابع خواهد بود.



مثال ۱۱) نمودار تابع $f(x) = x^2 - 4x + 3$ را رسم کنید.

$$x = \frac{-b}{2a} = -\frac{-4}{2} = 2 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow S(2, -1) \text{ راس سهمی}$$

$$y = 0 \Rightarrow x = 1, x = 3 : \text{ محل برخورد نمودار با محور } x$$

$$x = 0 \Rightarrow y = 3 : \text{ محل برخورد با } y$$

$$\text{خط تقارن: } x = 2$$

مثال ۱۲) در تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ مقادیر a, b را به گونه ای بیابید که $f(1) = 6$ و تابع محور عرض ها را در نقطه ای به عرض ۵ قطع کند و از نقطه $(-1, 10)$ عبور کند.

$$A(0, 5) \in f \Rightarrow f(0) = 5 \Rightarrow 0 + 0 + c = 5 \Rightarrow c = 5$$

$$B(-1, 10) \in f \Rightarrow f(-1) = 10 \Rightarrow a - b = 5$$

$$C(1, 6) \in f \Rightarrow f(1) = 6 \Rightarrow a + b = 1$$

از حل معادلات بدست آمده خواهیم داشت: $a = 3, b = -2$

تمرین



۱) نمودار توابع زیر را رسم کنید.

- A) $y = x^2 - 8x + 15$

- $B) y = x^2 - 4x + 4$

۲) اگر $f(x) = ax^2 + bx + c$ باشد مقادیر a, b, c را طوری بیابید که این سهمی محور y را در نقطه ای به عرض ۳ و محور x را در نقطه ای به طول ۱ قطع کند و از نقطه $A(2,3)$ بگذرد.

۳) توابع زیر را رسم کنید

- $y = x^2 - x - 2$

- $y = x^2 + 6x + 5$

۴) تابع $y = ax^2 + x + b$ مفروض است. ضرایب a, b را چنان بیابید که منحنی از نقطه $A(2, -2)$ بگذرد و محور y ها را در نقطه ای به عرض ۳ قطع کند.

۵) دو تابع $y = x^2 + ax + b$ و $y = x + 2b$ مفروضند. a, b را طوری بیابید که نمودارهای این دو تابع روی محور x هادر نقطه ای به طول ۲ یکدیگر را قطع کنند.

۶) در سهمی $f(x) = ax^2 + bx + c$ مقادیر a, b, c را به گونه ای بیابید که سهمی خط $y = x + 1$ را در نقاطی به طول های ۱ و ۲ و محور عرض ها را در نقطه ای به عرض ۱- قطع کند.

۷) در تابع $y = ax^2 + bx - 2$ مقادیر a, b را طوری بیابید که نمودار تابع از نقطه $A(-1, 2)$ بگذرد و محور x را در نقطه ای به طول ۱ قطع کند. (خرداد ۹۲)

۸) اگر $f(x) = \begin{cases} ax - 3 & x < 0 \\ 2bx^2 & x \geq 0 \end{cases}$ و a, b را طوری بیابید که نمودار تابع از نقطه $A(2, -3)$ بگذرد و داشته باشیم $f(-2) = 3$. (خرداد ۹۵)

۹) اگر $f(x) = x^2 + ax - 3b$ مقادیر a, b را طوری بیابید که این سهمی محور x ها را در نقطه ای به طول ۳ قطع کند و از نقطه $(1, -4)$ بگذرد. (خرداد ۹۴)

۱۰) دو تابع $y = x^2 + ax - 3b$ و $y = -x + b$ داده شده اند. مقادیر a, b را چنان بیابید که نمودارهای این دو تابع روی محور x در نقطه ای به طول ۱ همدیگر را قطع کنند. (خرداد ۹۳)

۱۱) اگر $f(x) = ax^2 + bx + c$ باشد a, b, c را به گونه ای بیابید که این سهمی محور y را در نقطه ای به عرض ۴ و محور x را در نقطه ای به طول ۱- قطع کند و از نقطه $(1, 2)$ نیز بگذرد. (خرداد ۹۱)

توابع چند ضابطه ای

در بعضی توابع، دامنه تابع به چند قسمت تقسیم شده و برای هر یک

به تنهایی یک ضابطه تعریف می شود. این توابع را چند ضابطه ای گوئیم.

اگر بخواهیم مقدار تابع را در این توابع بیابیم باید مقدار متغیر را در ضابطه مربوط به ناحیه خودش قرار دهیم.

$$\text{مثال ۱۳) در تابع } f(x) = \begin{cases} 4x - 1 & x < 2 \\ x^2 - 3 & 2 \leq x \leq 5 \\ 1 + 2x & x > 5 \end{cases} \text{ مقادیر زیر را بیابید.}$$

- A) $f(3) = 3^2 - 3 = 6$
- B) $f(6) = 1 + 2 \times 6 = 1$

تمرین



۱) اگر $f(x) = \begin{cases} x + 1 & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$ باشد مقدار عددی عبارت $\frac{f(f(-2))}{f(1)+f(-1)}$ را بدست آورید.

۲) در تابع $f(x) = \begin{cases} 4 - 2x & x \geq 1 \\ 1 + x^2 & x < 1 \end{cases}$ مقدار $f(f(-1))$ را بیابید.

۳) تابع f به صورت $f(x) = \begin{cases} \sqrt{2} + x & x \geq 1 \\ \sqrt{2} - x & x < 1 \end{cases}$ داده شده است. برابری های زیر را کامل کنید.

- $f(\sqrt{2} - 1) = \dots$ $f(3 - \sqrt{2}) = \dots$ $f(-\sqrt{2}) = \dots$
- $f(0) = \dots$ $f(f(-1)) = \dots$

۴) نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} 2 - x & x < 2 \\ x^2 & x \geq 2 \end{cases}$ را رسم کنید.

۵) تابع $f(x) = \begin{cases} 1 + x^2 & x \geq 0 \\ 1 + \frac{x}{2} & x < 0 \end{cases}$ مفروض است. این تابع را رسم کنید و $f(f(-1))$ را بیابید.

۶) نمودار تابع $y = -2|x - 3|$ را رسم کنید. (خرداد ۹۵)

۷) در تابع $f(x) = \begin{cases} x - 1 & x < 0 \\ 2 - x^2 & x \geq 0 \end{cases}$ مقدار $f(1 - \sqrt{3})$ را بیابید.

۸) اگر $f(x) = \begin{cases} x + 3 & x < -1 \\ x^2 & x \geq -1 \end{cases}$ باشد $f(f(-4))$ را بیابید.

۹) اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 - 8x & x > 0 \\ 7 & x = 0 \\ 7x - 4 & x < 0 \end{cases}$ باشد مطلوب است حاصل $f(f(f(0)))$.

(۱۰) نمودار تابع $f(x) = \frac{\sqrt{x^2}}{x} + x^2$ را رسم کنید.

(۱۱) نمودار توابع زیر را رسم کنید.

• A) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & x < 2 \\ x + 3 & x \geq 2 \end{cases}$

• B) $f(x) = -|3x + 1|$

(۱۲) تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & x < 0 \\ x - 1 & x \geq 0 \end{cases}$ داده شده است. (خرداد ۹۲)

الف) نمودار تابع را رسم کنید.

ب) حاصل $f(f(-1))$ را بیابید.

(۱۳) نمودار $f(x) = \begin{cases} 1 + x^2 & x \geq 0 \\ 1 - \frac{x}{2} & x < 0 \end{cases}$ را رسم کرده و $f(f(-4))$ را به دست آورید. (خرداد ۹۱)

تابع $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & x \geq 0 \\ -x + 2 & x < 0 \end{cases}$ (خرداد ۹۴)

الف) نمودار تابع f را رسم کنید. ب) مقدار $f(f(-2))$ را محاسبه کنید.

(۱۴) تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & x < 0 \\ 2 & x > 0 \end{cases}$ را در نظر بگیرید. (خرداد ۹۳)

الف) نمودار تابع f را رسم کنید. ب) دامنه تابع f را به دست آورید.

📖 درس نامه ۷) دامنه تابع

منظور از دامنه یعنی مجموعه اعدادی که مجاز هستند در تابع به جای x قرار بگیرند و مشکلا تی نظیر صفر شدن مخرج کسر و منفی شدن عبارت زیر رادیکال با فرجه زوج و... پیش نیاید.

☞ اگر دامنه یک تابع مشخص نشده با شد دامنه برابر بزرگترین مجموعه ممکن می گیریم که این خاصیت را داشته

باشد. دامنه را با حرف D نشان می دهیم.

دامنه این توابع تمام اعداد حقیقی است.

مثال (۱۴) دامنه تابع زیر را بیابید.

• $f(x) = 4x^2 - 5x + \sqrt{11} \Rightarrow D = R$

توابع چند جمله ای

توابع گویا

دامنه این توابع به صورت زیر است.

$$* D = R - \{ \text{ریشه های مخرج} \}$$

مثال ۱۵) دامنه تابع $f(x) = \frac{5x-3}{x^2-4}$ را بیابید.

$$\triangleright x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2 \Rightarrow D = R - \{2, -2\}$$

دامنه توابع رادیکالی با فرجه فرد

دامنه این توابع برابر دامنه عبارت زیر رادیکال است.

توابع را دیکالی با فرجه زوج

دامنه برابر اعدادی است که به ازای عبارت زیر رادیکال منفی نشود.

مثال ۱۶) دامنه تابع $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$ را بیابید.

با توجه به مطالب گفته شده $x^2 - 5x + 6 \geq 0$ ریشه های عبارت را یافته و تعیین علامت می کنیم در نتیجه خواهیم داشت:

$$\bullet D = (-\infty, 2] \cup [3, +\infty)$$

توابع لگاریتمی

اگر تابع لگاریتمی را به صورت $f(x) = \log_{G(x)} P(x)$ باشد شرایط حکم فرما بر این تابع به صورت زیر خواهد بود

$$\bullet \begin{cases} P(x) > 0 \\ G(x) > 0 \\ G(x) \neq 1 \end{cases}$$

مثال ۱۷) دامنه تابع $f(x) = \log_{x+2}(2x+6)$ را بیابید.

$$\bullet \begin{cases} 2x+6 > 0 \Rightarrow x > -3 \\ x+2 > 0 \Rightarrow x > -2 \\ x+2 \neq 1 \Rightarrow x \neq -1 \end{cases} \Rightarrow D = (-2, +\infty) - \{-1\}$$

توابع شامل سینوس و کسینوس

برای یافتن دامنه این توابع فقط دامنه کمان تابع را می یابیم.

توابع شامل تانژانت و کتانژانت

$$\star f(x) = \tan u \Rightarrow D_f = \left\{x \mid u \neq k\pi + \frac{\pi}{2}\right\}, f(x) = \cot u \Rightarrow D_f = \{x \mid u \neq k\pi\}$$

مثال (۱۸) دامنه تابع $f(x) = \tan 2x$ را بیابید.

$$\diamond D_f = \left\{x \mid 2x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}\right\} = \left\{x \mid x \neq \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right\}$$

توابع چند ضابطه ای

دامنه هر یک از ضابطه ها را یافته و از آن ها اجتماع می گیریم.

تمرین



دامنه توابع زیر را بیابید.

1. $f(x) = 5x^2 - 10x + 17$

2. $f(x) = \sqrt[3]{\frac{2x+1}{x^2+1}}$

3. $f(x) = \frac{21}{\sqrt{4-x^2}}$

4. $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2-1}$

5. $\log_{10} \frac{x-1}{x}$

6. $f(x) = \cot\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

7. $f(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{x^2-3x-4}$

8. $f(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}$

9. $f(x) = \begin{cases} x+1 & x \geq 2 \\ 3x & x < 0 \end{cases}$

➤ خرداد ۹۲

10. $y = \frac{x+5}{x^2-4x+4}$

11. $f(x) = 2x^2 - 3x$

$$12. g(x) = x(x + 2)(x - 1)$$

$$13. f(x) = \sqrt{2x - x^2}$$

$$14. f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x - 4}$$

$$15. f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}$$

$$16. f(x) = \frac{x+5}{x^2 - 2x - 3}$$

$$17. f(x) = \sqrt{\frac{2-x}{1-x}}$$

$$18. g(x) = \sqrt[3]{\frac{5}{x^2 + x - 12}}$$

$$19. f(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{|x|}$$

$$20. f(x) = \frac{2 + \sqrt{3+x}}{\sqrt{-x}}$$

$$21. f(x) = \frac{\sqrt{2-x}}{x^2 - 9}$$

$$22. h(x) = \frac{2x}{\sqrt[2]{x+1}}$$

$$23. f(x) = \frac{1 + \sqrt{x+2}}{\sqrt[3]{x}}$$

$$24. f(x) = \log_x(1 - x^2)$$

25. $f(x) = \log(3 - x^2)$

26. $f(x) = \log(2 - x)^2$

27. $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{4})$

28. $g(x) = \cos \frac{1}{x}$

29. $k(x) = \tan(x - \frac{\pi}{4})$

30. $g(x) = \cot(2x - \frac{\pi}{2})$

31. $f(x) = \tan(3x - \frac{\pi}{6})$

32. $g(x) = \begin{cases} x & -3 < x \leq 2 \\ 3x - 4 & 2 < x \leq 4 \end{cases}$

❖ سوالات چهار گزینه ای

۸۶) دامنه تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{1 - \log(x - 1)}$ به کدام صورت است؟ (سراسری تجربی خارج کشور ۸۶)

➤ (۱) $(1, 2]$ (۲) $[2, 10]$ (۳) $[1, 11)$ (۴) $(1, 11]$

✍

۸۷) اگر $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$ دامنه تابع $f(3 - x)$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۲)

➤ (۱) $[0, 2]$ (۲) $[0, 3]$ (۳) $[1, 2]$ (۴) $[1, 3]$

۸۸) دامنه تابع $\log(\log \sin^2 x)$ کدام است؟

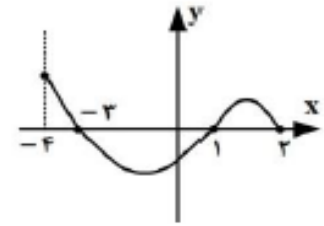
- 1) \emptyset
- 2) \mathbb{R}
- 3) $\{\frac{\pi}{2}\}$
- 4) $\{k\pi + \frac{\pi}{2}\}$

۸۹) اگر $f(x) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^x$ باشد دامنه تابع $y = \sqrt{xf(x)}$ کدام بازه است؟ (سراسری ریاضی ۹۳)

1. $[-1, 1]$
2. $(-\infty, 0)$
3. $(-\infty, \infty)$
4. $(0, \infty)$

۹۰) شکل روبرو نمودار تابع $y = f(x)$ است. دامنه تابع $\sqrt{xf(x)}$ کدام است؟ (سراسری ریاضی ۹۲)

1. $[0, 2]$
2. $[-3, 2]$
3. $[-4, -3] \cup [1, 2]$
4. $[-3, 0] \cup [1, 2]$



۹۱) تابع $f(x) = \log_3(ax + b)$ فقط برای مقادیر $\left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$ با معنی است. اگر $f(4) = 2$ آنگاه $f\left(\frac{-4}{9}\right)$ کدام است (سراسری ریاضی ۹۴)

1. -2
2. -1
3. $\frac{1}{2}$
4. 1

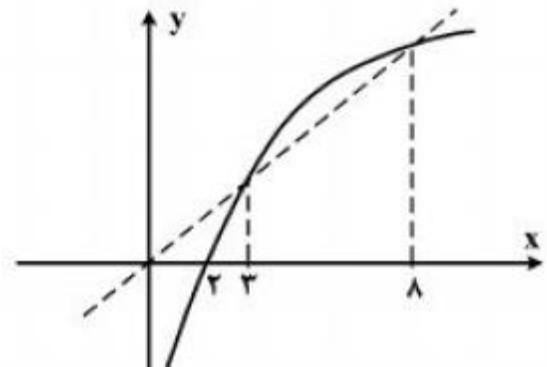
۹۲) اگر مجموعه $\{x \in \mathbb{R} : -2 < x < 2\}$ دامنه تابع با ضابطه $y = x^2 + 2x$ باشد آنگاه برد تابع با ضابطه $y = |f(x)|$

کدام بازه است؟

1. $(-2, 10)$
2. $(2, 10)$
3. $[0, 10)$
4. $\left(\frac{9}{4}, 10\right)$

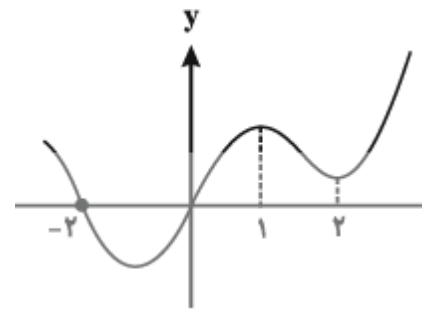
۹۳) شکل مقابل نمودار تابع $y = f(x)$ و نیمساز ربع اول و سوم است. دامنه تابع $y = \sqrt{x - f^{-1}(x)}$ کدام است؟

1. $(0, 2]$
2. $[2, 3]$
3. $[2, 8]$
4. $[3, 8]$



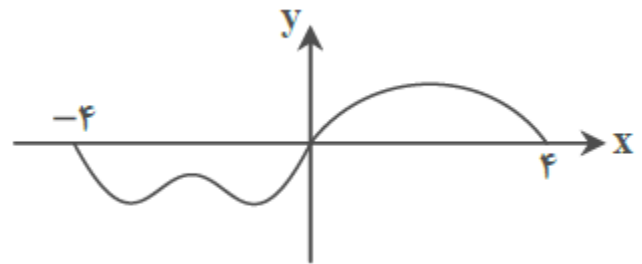
۹۴) اگر تابع به صورت مقابل باشد دامنه تابع $y = x \sqrt{\frac{1}{-f(x)}}$ کدام است؟

- A. $(-\infty, 0)$
- B. $(0, \infty)$
- C. $(-\infty, -2) \cup (0, \infty)$
- D. $(-2, 0)$



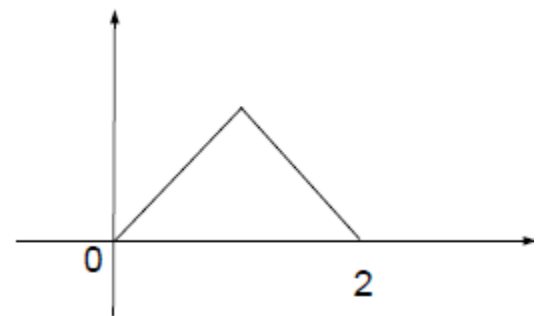
۹۵) نمودار تابع $y = f(2x)$ به شکل زیر است. دامنه تابع $y = 3f(\sqrt{x}) + 1$ کدام است؟

- A. $[4, 16]$
- B. $[0, 64]$
- C. $[0, 4]$
- D. $[4, 64]$



۹۶) اگر نمودار f به شکل زیر باشد دامنه g با ضابطه $g(x) = \frac{f(1-x)}{f(x)}$ کدام است؟

- 1. $(-1, 1) - \{0\}$
- 2. $[0, 1]$
- 3. $[-1, 1] - \{0\}$
- 4. $(0, 1]$



عملیات روی توابع

اگر f, g دو تابع باشند مجموع، تفاضل، ضرب و تقسیم آنها به صورت زیر تعریف می شود.

$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$	جمع
$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$	تفاضل
$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$	ضرب
$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$	تقسیم

★ دامنه تابع حاصل جمع، تفریق و ضرب برابر اشتراک دامنه ها است

★ $D_{f \pm g} = D_f \cap D_g, D_{f \times g} = D_f \cap D_g$

★ دامنه تابع حاصل تقسیم برابر اشتراک دامنه ها به جز اعدادی که مخرج را صفر می کنند.

★ $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\}$

مثال ۱۹) اگر $f(x) = \frac{1}{x-2}, g(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$ باشد دامنه وضابطه تابع $f \times g$ را بیابید.

- $\begin{cases} D_f = R - \{2\} \\ D_g = (2, +\infty) \end{cases}$

- $D_{f \times g} = (2, +\infty) \quad (f \times g) = \frac{1}{(x-2)\sqrt{x-2}}$

مثال ۲۰) دو تابع $f = \{(1,2), (3,5), (8,4), (-1,0)\}, g = \{(1,8), (3,9), (5,2), (8,0)\}$ داده شده اند $f + g, f - g, f \times g$ را بیابید.

$f + g = \{(1,10), (3,14), (8,4)\}$ $f - g = \{(1,-6), (3,-4), (8,4)\}$

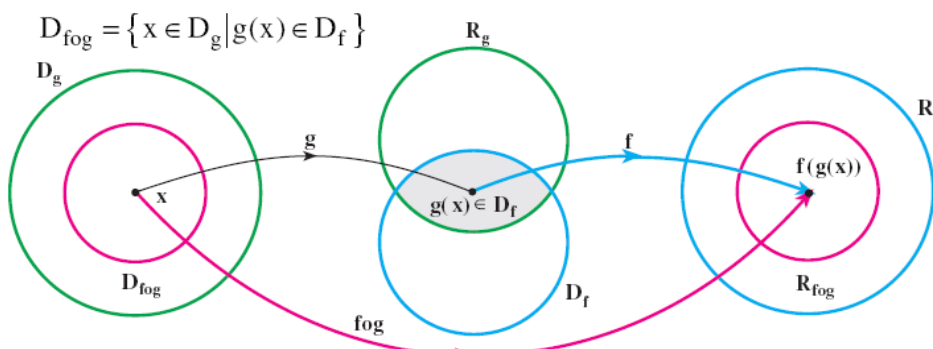
$f \times g = \{(1,16), (3,45), (8,0)\}$ $\frac{f}{g} = \{(1, \frac{2}{8}), (3, \frac{5}{9})\}$

ترکیب توابع

ترکیب دو تابع f, g را که به صورت $f \circ g$ نمایش می دهیم به صورت زیر تعریف می کنیم:

★ $f \circ g(x) = f(g(x))$

دامنه این تابع برابر است با اعضای از دامنه تابع g به طوری که $g(x)$ در دامنه تابع f باشد.



به تصویر زیر دقت کنید.

★ اگر دو تابع به صورت زوج مرتب باشند در این صورت از نکته زیر می توان استفاده کرد.

- $(x, y) \in g, (y, z) \in f \Rightarrow (x, z) \in fog$

مثال (۲۱) توابع $f(x) = \sqrt{x}, g(x) = \frac{1}{x}$ داده شده اند $f \circ g, fog$ را بیابید.

- $$\begin{cases} D_f = [0, +\infty), D_g = R - \{0\} \\ D_{fog} = (0, +\infty) \\ (fog) = f(g(x)) = f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\sqrt{x}} \end{cases}$$

مثال (۲۲) اگر $f = \{(2,1), (3,-2), (5,0)\}, g = (5,2), (-1,4), (0,3)$ باشند تابع $f \circ g$ را بیابید.

- $D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{5,0\}$
- $f \circ g = \{(5,1), (0,-2)\}$



تمرین



(۱) اگر $f(x) = \sqrt{x+3}, g(x) = 4-x$ باشد مطلوب است محاسبه:

- $(2f - g)(1)$

(ب) ضابطه و دامنه $\frac{g}{f}$

(۲) اگر $f(x) = \begin{cases} x-1 & , x < 3 \\ 2x & , x \geq 3 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} 5x & , x < 3 \\ 7x & , x \geq 3 \end{cases}$ باشند تابع $(f-2g)(x)$ را بیابید.

(۳) اگر $f = \{(1,0), (0,2), (-1,3), (2,4), (3,1)\}$ و $g = \{(0,1), (1,2), (2,3), (3,-1)\}$ باشد حاصل عبارات زیر را بیابید.

➤ A) $f + g$

➤ B) $2f \times g$

➤ C) $\frac{f+2g}{g-f}$

۴) اگر $f(x) = 2x + 1, g(x) = \sqrt{x^2 + 5}$ باشد حاصل عبارت $(2) \frac{2f-3g}{fg+5f}$ را بیابید.

• در هر مورد دامنه و ضابطه fog را بیابید.

➤ 5) $f(x) = x^2, g(x) = \sqrt{x}$

➤ 6) $f(x) = \frac{2}{x-1}, g(x) = \frac{1}{x+2}$

➤ 7) $f(x) = \cos x, g(x) = \sqrt{1-x^2}$

➤ 8) $f(x) = x^2 + 2x + 1, g(x) = |x|$

۹) اگر $(gof)(x) = 7x - 9, f(x) = 5x + 2$ باشد آن گاه $g(x)$ را حساب کنید.

۱۰) اگر $f(x) = x + a, g(x) = ax^2 + bx + c$ باشد a, b, c را طوری تعیین کنید که داشته باشیم:

$$fog(x) = x^2 - 3x + 4$$

۱۱) اگر $f(x) = x + 3, g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ باشد آن گاه مطلوب است محاسبه:

➤ $(fog)(x)$

➤ $(2f - g)(-1)$

۱۲) اگر $f(x) = 3x + 2, g(x) = 2x^2 - x + 1$ مقدار a را طوری بیابید که $(fog)(a) = (gof)(a)$

۱۳) اگر $f(x) = x + 2, g(x) = \sqrt{1-x^2}$ باشند. مطلوب است:

الف) دامنه و ضابطه $\frac{f}{g}$ ب) ضابطه gof

۱۴) اگر تابع f به صورت $f = \{(1,3), (2,3), (3,1)\}$ باشد تابع $f \circ f$ را بدست آورید.

۱۵) اگر $f(x) = \begin{cases} 1-x & x \geq 1 \\ ax-1 & x < 1 \end{cases}$ و $f \circ f(2) = 5$ باشد مقدار a را بدست آورید.

۱۶) اگر $f(x) = \sin x$, $g(x) = \sqrt{1-x^2}$ باشد مقدار $f \circ g\left(\frac{\pi}{4}\right)$ را بیابید.

۱۷) اگر $f(x) = \frac{1}{x}$ باشد $f \circ f(x)$ را یافته، سپس $f(f(3))$ را بیابید.

۱۸) اگر $f(x) = \tan x$, $g(x) = \sqrt{\frac{2x}{1+x^2}}$ باشد، $f \circ g$ را به ساده ترین صورت بنویسید.

۱۹) دو تابع $f(x) = \sqrt{1-x}$, $g(x) = \sqrt{x-1}$ را در نظر بگیرید. (خرداد ۹۵)

الف) دامنه $f \circ g$ را با استفاده از تعریف به دست آورید.

ب) تابع $p(x) = f(x) + g(x)$ را به دست آورید.

۲۰) توابع $f(x) = \sin x$, $g(x) = \sqrt{1-x^2}$ داده شده اند. (خرداد ۹۴)

الف) دامنه تابع $f \circ g$ را با استفاده از تعریف به دست آورید.

ب) تابع $f \circ g$ را تشکیل دهید.

ج) حاصل عبارت $(2f - 3g)(0)$ را بیابید.

۲۱) توابع $f(x) = \frac{3x}{x-1}$, $g(x) = \sqrt{x}$ داده شده اند. (خرداد ۹۳)

الف) تابع $f \circ g$ را تشکیل دهید.

ب) دامنه تابع $f \circ g$ را با استفاده از تعریف به دست آورید.

ج) مقدار $(4) \left(\frac{f-g}{2g}\right)$ را محاسبه کنید.

۲۲) دو تابع $f(x) = 3x^2 - 1$, $g(x) = \frac{x}{x^2-4}$ داده شده اند: (خرداد ۹۰)

الف) ضابطه و دامنه تابع $f \circ g$ را با استفاده از تعریف بیابید.

ب) مقدار $(f - 3g)(1)$ را محاسبه کنید.

۲۳) توابع $f(x) = 2x - 4$, $g(x) = \sqrt{x-6}$ داده شده اند. (خرداد ۹۲)

الف) ضابطه تابع $f \circ g$ را بنویسید.

ب) دامنه تابع $f \circ g$ را با استفاده از تعریف بیابید.

۲۴) اگر $f(x) = x + 3, g(x) = \sqrt{1-x}$ دو تابع باشد (خرداد ۹۱)

الف) دامنه f, g را بیابید

ب) دامنه تابع gof را با استفاده از تعریف بیابید

ج) ضابطه fog را بنویسید.

❖ سوالات چهار گزینه ای

۹۷) اگر $f(x) = |x|, g(x) = x^2 + 2x + 1$ باشد حاصل $fog(1 - \sqrt{2}) - gof(1 - \sqrt{2})$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۸۹)

۱) $4(1 - \sqrt{2})$ ۲) $4(\sqrt{2} - 1)$ ۳) $4(3)$ ۴) $4\sqrt{2}$ ➤

✍

۹۸) اگر توابع f, g به عنوان ماشین به صورت $x \rightarrow \boxed{f} \rightarrow \boxed{g} \rightarrow 2x$ باشند و $g(x) = 3x + 4$ ، آنگاه $f(5)$ کدام است؟ (سراسری تجربی خارج کشور ۹۱)

۱) 1 ۲) 2 ۳) 3 ۴) 4 ➤

✍

۹۹) تابع $f = \{(2,1), (3,2), (4,5), (1,7)\}$ و $g = \{(1,2), (3,1), (a,3), (b,1)\}$ مفروض اند. اگر

$(4,2) \in fog, (4,1) \in gof$ باشند دو تایی (a, b) کدام است؟ (سراسری ریاضی ۹۰)

۱) $(3,4)$ ۲) $(4,5)$ ۳) $(4,3)$ ۴) $(5,4)$ ➤

۱۰۰) اگر $f(x) = \sqrt{x + |x|}$ و $g(x) = \frac{1}{x^2 - 4x}$ دامنه تابع gof کدام است؟ (سراسری تجربی خارج کشور ۸۷)

۱) $(0,8) \cup (8, \infty)$ ۲) $R - \{0,8\}$ ۳) $R - \{0\}$ ۴) $(0, \infty)$ ➤

✍

۱۰۱) اگر $fog(x) = \frac{x^2+2}{x^2-1}$ و $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ مقدار $g(1)$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۸۴)

۱) 2 ۲) 3 ۳) 4 ۴) 5 ➤

✍

۱۰۲) اگر $fog(x) = \frac{x}{x-3}$ و $g(x) = 2x$ مقدار $f(3)$ کدام است؟ (سراسری ریاضی ۹۱)

۱) -4 ۲) -2 ۳) 2 ۴) 4 ➤

✍

۱۰۳) اگر $f(x) = (2x - 3)^2$ و $g(x) = x + 2$ نمودارهای دو تابع f, fog با کدام طول متقاطعند؟ (سراسری تجربی ۹۲)

۱) -1 ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) 1 ۴) $\frac{3}{2}$ ➤

104) اگر $f(x) = x^2 + 3x$ و $g(x) = -\frac{1}{2}x + 2$ مجموعه طول نقاط از منحنی تابع gof که در بالای محور افقی قرار گیرد، برابر کدام بازه است؟

1. $(-4, 1)$
2. $(-3, 2)$
3. $(-2, 1)$
4. $(4, -1)$

105) اگر $(gof)(x) = \frac{1}{2}x$ ، $f(x) = \frac{x}{2-x}$ ضابطه ی تابع g برابر است با:

1. $\frac{x}{x+1}$
2. $\frac{x-1}{x}$
3. $\frac{x}{x-1}$
4. $\frac{x+1}{x}$

106) اگر $(gof)(x) = 1 + \tan^2 x$ و $f(x) = \cos x$ آن گاه مقدار $(gog)(\sqrt{3} - 2)$ کدام است؟

1. $73 - 40\sqrt{3}$
2. $5 - 4\sqrt{3}$
3. $69 - 30\sqrt{3}$
4. $25 + 48\sqrt{3}$

107) اگر $f(x) = x^2 - 5x$ و $g(x) = \sqrt{6-x}$ باشند دامنه تابع gof کدام است؟

- 1) $[-6, 1]$
- 2) $[2, 3]$
- 3) $[-1, 5]$
- 4) $[-1, 6]$

108) اگر f تابع نزولی خطی باشد به طوری که $f \circ f(x) = 4x + 3$ مقدار $f\left(-\frac{5}{2}\right)$ کدام است؟

- 1) ۱
- 2) $\frac{1}{5}$
- 3) ۲
- 4) ۳

109) اگر $f(x) = (\sqrt{2})^x$ و $g(x) = \log_4 x$ آنگاه تابع gof بر روی \mathbb{R} چگونه است؟

- ۱) صعودی و نزولی
- ۲) نزولی
- ۳) صعودی
- ۴) برای $x \leq 0$ تعریف نشده

۱۱۰) اگر $f(x) = x^2 + 4x + 5$, $f \circ g(x) = x^2 - 8x + 17$ باشد آنگاه $g(7)$ کدام می تواند باشد؟

- 1) 1
- 2) -1
- 3) 5
- 4) صفر

111) با شرط $x \leq 1$, $f(x) = x^3 - 3x$ در تابع با ضابطه $g(x) = x^3 + x$ بیشترین مقدار $g \circ f$ کدام است؟

- 1) ۹
- 2) ۱۰
- 3) ۱۲
- 4) ۳۰

112) اگر $f(g(x)) = 4(x^2 - 4x + 5)$, $f(x) = 2x - 3$ باشد تابع $g(x)$ کدام است؟ (ریاضی ۹۳)

1. $x^2 - 4x + 3$
2. $x^2 - 4x + 5$
3. $x^2 - 2x + 5$
4. $x^2 - 2x + 3$

113) اگر $g(f(x)) = 8x^2 + 22x + 20$, $f(x) = 2x + 3$ باشند ضابطه $f \circ g$ در کدام است؟ (سراسری ریاضی ۹۲)

1. $2x^2 - 7x + 3$
2. $2x^2 - 3x + 7$
3. $4x^2 - 2x + 13$
4. $4x^2 - 4x + 11$

114) اگر $g(x) = \log_2(x^2 + 2x)$, $f(x) = \sqrt{3-x}$ باشند دامنه $f \circ g$ کدام است؟ (تجربی ۹۴)

1. $[-4, 2]$
2. $[-2, 0]$
3. $[-4, -1] \cup (1, 2]$
4. $[-4, -2] \cup (0, 2]$

فصل سوم حد و پیوستگی

درس نامه (۱) حد

میل کردن به یک عدد ثابت

وقتی می‌گوییم متغیری مانند x به عددی ثابت مانند a نزدیک می‌شود یعنی اینکه هر چقدر که بخواهیم x را به a نزدیک کنیم ولی هیچ‌گاه x با a برابر نمی‌شود و آن را با نماد $x \rightarrow a$ نمایش می‌دهیم.

✓ اگر x از اعداد بزرگتر از a به عدد a نزدیک شود اصطلاحاً می‌گوییم x میل می‌کند به a از سمت راست و می‌نویسیم:

$$\star x \rightarrow a^+$$

✓ اگر x از اعداد کوچکتر از a به عدد a نزدیک شود اصطلاحاً می‌گوییم x میل می‌کند به a از سمت چپ و می‌نویسیم:

$$\star x \rightarrow a^-$$

تعریف حد

اگر تابعی مانند f در یک همسایگی مانند عدد a تعریف شده باشد می‌گوییم حد تابع f وقتی $x \rightarrow a$ برابر عددی مانند L است هر گاه $f(x)$ به عدد L نزدیک شود و به صورت مقابل آن را نمایش می‌دهیم:

$$\star \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

حد چپ و راست

اگر تابعی مانند f در یک همسایگی عدد a تعریف شده باشد می‌گوییم حد راست تابع f وقتی $x \rightarrow a^+$ برابر عددی مانند L است هر گاه $f(x)$ به عدد L نزدیک شود و به صورت مقابل آن را نمایش می‌دهیم

$$\star \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

اگر تابعی مانند f در یک همسایگی عدد a تعریف شده باشد می‌گوییم حد چپ تابع f وقتی $x \rightarrow a^-$ برابر عددی مانند L است

هرگاه $f(x)$ به عدد L نزدیک شود و به صورت مقابل آن را نمایش می‌دهیم

* $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$

* نکته مهم: اگر تابع f در نقطه a دارای حد راست و چپ باشد و این دو با هم برابر باشند تابع f در این نقطه

دارای حد است و این حد برابر مقدار حدود راست و چپ است.

بررسی حد از راه جدول

مثال ۲۳) حد تابع $f(x) = x + 1$ را وقتی $x \rightarrow 2$ با استفاده از جدول بیابید.

x	...	1/9	1/99	1/999	...	2	...	2/001	2/01	2/1	...
$f(x)$...	2/9	2/99	2/999	...	?	...	3/001	3/01	3/1	...

همانطور که می بینیم وقتی x به عدد ۲ نزدیک می شود مقدار تابع نیز به عدد ۳ نزدیک می شود بنابراین می نویسیم

➤ $\lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 3$



حد زیر را با استفاده از جدول بیابید.

○ $\lim_{x \rightarrow 1} (2x + 1)$

○ $\lim_{x \rightarrow -1} (x - 2)$

بررسی حد از راه نمودار

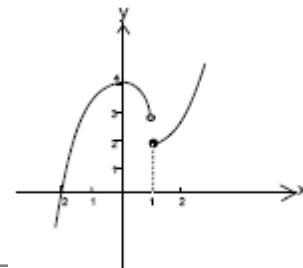
در این قسمت می خواهیم حد تابع را با استفاده از نمودار بیابیم

برای تعیین حد وقتی $x \rightarrow a$ از طریق نمودار کافی است خط

$x = a$ را در نظر گرفته γ نقطه برخورد نمودار به این خط از سمت چپ حد چپ و از سمت راست حد راست را معین می کند.

مثال ۲۴) نمودار تابع f به صورت زیر داده شده است موارد خواسته شده را بیابید.

• الف) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ - ب) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 4$$

با توجه به نکته گفته شده وقتی $x \rightarrow 0$ خواهیم داشت:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 4 \text{ در نتیجه:}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 3 \end{cases}$$

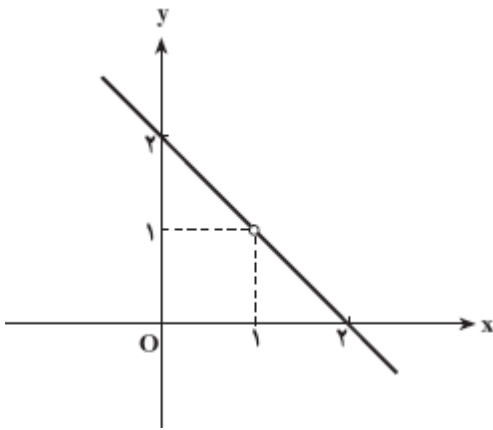
اما وقتی $x \rightarrow 1$ داریم:

و چون این دو حد با هم برابر نیستند پس تابع وقتی $x \rightarrow 1$ حد ندارد.

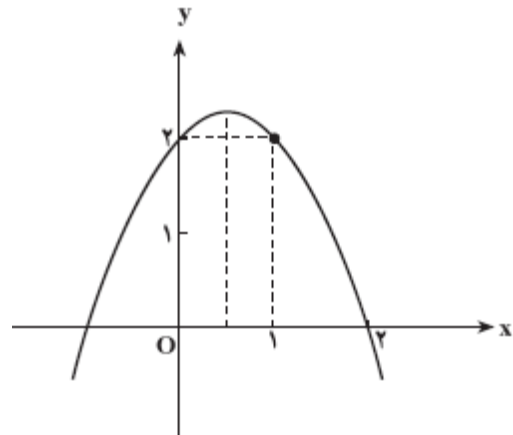
تمرین



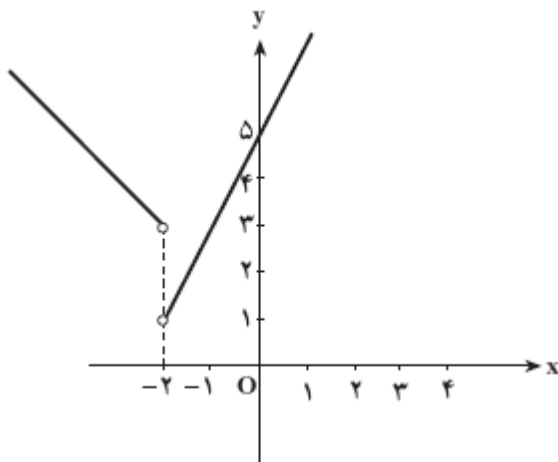
(1) حد توابع زیر را در صورت وجود بیابید.



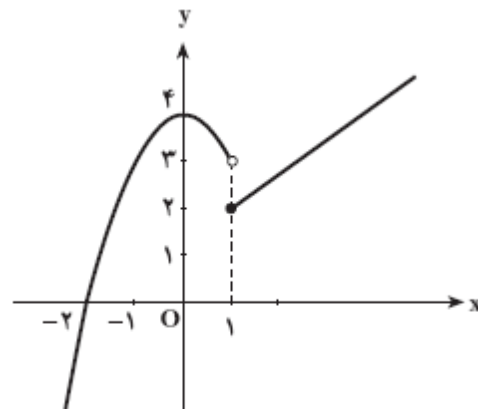
$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = ?$$



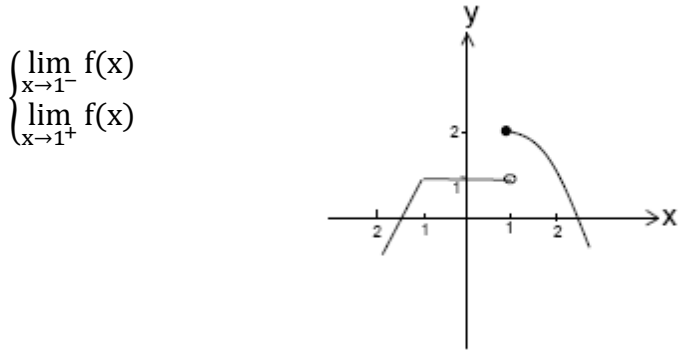
$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = ?$$



$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$$



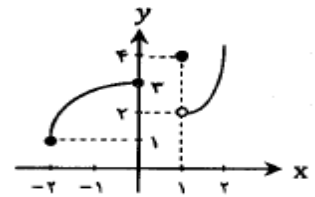
$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$



۲) نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{-1}{2}x & x \geq 1 \\ 4 - x^2 & x < 1 \end{cases}$ رسم کنید و با استفاده از آن وجود حد تابع را در $x=1$ بررسی کنید. (خرداد ۹۰)

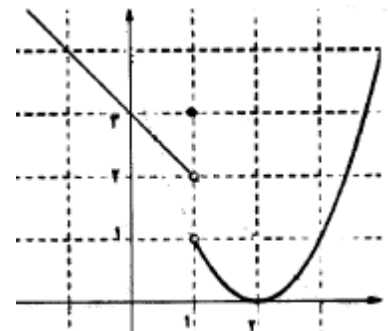
۳) با استفاده از نمودار زیر، عبارت خواسته شده را بیابید. (خرداد ۹۳)

• $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) - 3 \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) + f(1)$



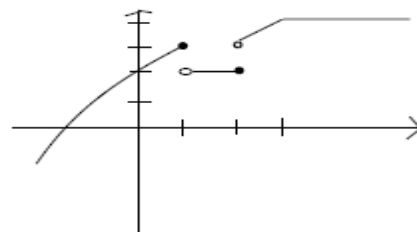
۴) با استفاده از نمودار زیر عبارت خواسته شده را در صورت وجود بیابید. (خرداد ۹۴)

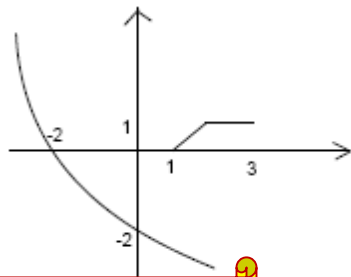
• $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) + 2f(1)$



۵) با توجه به نمودار تابع f حاصل عبارت مقابل را بیابید. (خرداد ۸۹)

❖ $3 \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) + 2f(3)$





قضایای حد

۶) با توجه به نمودار تابع f حدود مقابل را محاسبه کنید. (خرداد ۸۸)

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \quad \text{الف)} \quad \lim_{x \rightarrow -2} f(x) \quad \text{ب)} \quad \lim_{x \rightarrow 3} f(x) \quad \text{ج)}$$

تعیین حد با استفاده از تعریف و جدول کاری طولانی است.
بنابراین از قضایای زیر برای تعیین حد استفاده می‌کنیم.
۱) اگر $f(x) = k$ باشد که در آن k یک عدد ثابت است داریم

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} f(x) = k$$

۲) اگر $f(x) = x$ باشد داریم

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} f(x) = a$$

۳) اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_2$ باشند داریم

- A) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = L_1 \pm L_2$
- B) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) = L_1 - L_2$
- C) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \times g(x)) = L_1 \times L_2$
- D) $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{L_1}{L_2}$
- $(L_2 \neq 0)$

از قضایای گفته شده نتایج زیر را خواهیم داشت:

✓ اگر m یک عدد ثابت باشد $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ خواهیم داشت:

$$\star \lim_{x \rightarrow a} mf(x) = mL$$

$$\lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n \quad \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^n = L^n \quad \text{اگر } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \quad \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L} \quad \text{اگر } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \quad \checkmark$$

✓ اگر $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ یک چند جمله‌ای باشد داریم:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

★ حد توابع مثلثاتی:

۱) در هر نقطه مانند a

$$\star \lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a$$

$$\star \lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a$$

(۲) در هر نقطه مانند a که $a \in D_f$:

$$\star \lim_{x \rightarrow a} \tan x = \tan a, \lim_{x \rightarrow a} \cot x = \cot a$$

مثال (۲۵) در تابع مقابل ابتدا حد چپ و راست تابع را در $x = 2$ یافته سپس بررسی کنید که تابع در این نقطه حد دارد یا نه؟

$$\circ f(x) = \begin{cases} 2x + 5 & x \leq 2 \\ x^3 + 1 & x > 2 \end{cases}$$

$$\triangleright \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2 \times 2 + 5 = 9 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2^3 + 1 = 9 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 9$$

مثال (۲۶) در تابع $f(x) = \begin{cases} ax - 3 & x < 2 \\ bx^2 - 5x & x > 2 \end{cases}$ مقادیر a, b را طوری بیابید که:

$$\circ \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 5 \end{cases}$$

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = a(-1) - 3 = 4 \Rightarrow a = -7$$

$$\triangleright \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2 \times (-7) - 3 = -14 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = b(2)^2 - 5(2) = 4b - 10 \end{cases} \Rightarrow 4b - 10 = -14 \Rightarrow b = -1$$

تمرین



(۱) مقدار a را چنان بیابید که تابع $f(x) = \begin{cases} |x + 2| - a & x \geq 2 \\ x^2 + 3 & x < 2 \end{cases}$ در نقطه $x = 2$ دارای حد باشد.

(۲) تابع $f(x) = \begin{cases} (a + 1)x + 3 & x > -3 \\ -2x^2 + b & x < -3 \end{cases}$ مفروض است مقادیر a, b را طوری بیابید که:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -4} f(x) = -1 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -4$$

(۳) در صورتی که $f(x + 2) = \frac{x + 4}{x}$ ، $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ را حساب کنید.

(۴) مقادیر a, b را طوری بیابید که در $f(x) = \begin{cases} ax + b & x \geq -1 \\ ax^2 - 1 & x < -1 \end{cases}$ داشته باشیم

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 1$$

(۵) a, b را طوری بیابید که تابع داده شده در $x = 2$ حد داشته باشد و $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{2x^2 - 4} & x \geq 2 \\ x + b & -2 < x < 2 \\ x^2 + bx + 3a & x < -2 \end{cases}$$

۶) تابع $f(x) = \begin{cases} (a+1)x + 3 & x > -2 \\ -2x^2 + 1 & x < -2 \end{cases}$ مفروض است. عدد a را چنان بیابید که تابع در نقطه -2 حد داشته باشد.

۷) تابع $f(x) = \begin{cases} ax + b & x > 3 \\ ax^2 + bx + 2 & x < 3 \end{cases}$ مفروض است. عدد های a, b را چنان بیابید که

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 6, \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 2$$

۸) در صورتی که $f(x-3) = \frac{x+5}{x-1}$ باشد $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ را حساب کنید. (خرداد ۹۵)

درس نامه ۲) بررسی حالت $\frac{0}{0}$

بررسی حالت $\frac{0}{0}$

همانطور که در مباحث قبل دیدید برای تعیین حد یک تابع کافی است

به جای x عدد داده شده را قرار دهیم ولی ممکن است به

حالتی به نام ابهام برخورد کنیم. از جمله این حالت ها حالت $\frac{0}{0}$ است. اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ آنگاه داریم $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$.

در محاسبه حد هایی که به صورت ابهام $\frac{0}{0}$ در می آیند و برای رفع ابهام به نکات زیر توجه کنید

✓ اگر صورت و مخرج به صورت چند جمله ای باشند $a \rightarrow x$ ، ابتدا باید $x - a$ به عنوان عامل صفر کننده در صورت و

مخرج ایجاد شود. این کار می تواند با تجزیه و یا تقسیم صورت و مخرج بر $x - a$ و یا روشهایی مانند هورنر انجام شود.

✓ اگر صورت یا مخرج و یا هر دو به صورت رادیکالی باشند، ابتدا باید آنها را گویا کرد (به چه صورت؟) سپس عامل صفر

کننده را در صورت و مخرج ظاهر کرد.

مثال (۲۷)

$$1) \lim_{x \rightarrow (-1)} \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow (-1)} \frac{(x+1)^2}{x+1} = \lim_{x \rightarrow (-1)} (x+1) = 0$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x+\sqrt{x+2}} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x-\sqrt{x+2})}{(x+\sqrt{x+2})(x-\sqrt{x+2})} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x-\sqrt{x+2})}{x^2 - x - 2} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x-\sqrt{x+2})}{(x-2)(x+1)} = \frac{2}{3}$$

تمرین



۱) حاصل حدهای زیر را بیابید.

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2 + 2x - 8}$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - 2x}{x - 1}$$

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{2x^2 + x - 21}$$

$$\textcircled{4} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + \sqrt{x+6}}{x+2}$$

$$\textcircled{5} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$$

$$\textcircled{6} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{5}}{x-3}$$

۲) حد توابع زیر را بیابید.

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x^2 - 4}$$

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2 - \sqrt{x-1}}{x^2 - 6x + 5}$$

$$\textcircled{4} \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x + \sqrt{6-x}}{x+3}$$

$$\textcircled{5} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - x^2 - 2x}{x-2}$$

$$6 \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - \sqrt{x}}{3 - \sqrt{2x+1}}$$

$$7 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x - \sqrt{2-x}}$$

$$8 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 2x - 3}$$

$$9 \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 - 12}{2 - x - x^2}$$

$$10 \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x + \sqrt{x+18}}{\sqrt{3x+7} - 1}$$

$$\circ \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^3 + x^2 + x + 3}{x^2 + 2x + 1}$$

❖ سوالات چهار گزینه ای

(۱۱۵) حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}$ کدام است؟

1. $\frac{1}{4}$
2. $\frac{1}{2}$
3. ۱
4. ۲

(۱۱۶) حاصل $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + \sqrt{2 + \sqrt{2-x}}}{x+2}$ کدام است؟

1. $\frac{1}{2}$
2. $\frac{3}{4}$
3. $\frac{7}{8}$
4. $\frac{15}{16}$

(۱۱۷) حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[x^2]}{x^2}$ کدام است؟

1. صفر
2. ۱
3. ∞
4. تعریف نشده

(۱۱۸) حاصل $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{x^2 - [x^2]}{\sqrt{-2x^2 + 2}}$ کدام است؟

1. -۲
2. -۳
3. -۶
4. ∞

(۱۱۹) حد عبارت $\frac{|x^2 - x - 2|}{2x - \sqrt{x^2 + 12}}$ وقتی $x \rightarrow 2^-$ کدام است؟ (سراسری ریاضی ۹۰)

۳(۴) ۲(۳) -۲(۲) -۳(۱) >

(۱۲۰) حد کسر $\frac{(x-1)^4 + 2(x^2-1)}{(x^2-1)^4 + 3(x-1)}$ وقتی $x \rightarrow 1$ کدام است؟ (آزاد ۹۰)

۱(۴) $\frac{1}{16}$ (۳) $\frac{4}{3}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۱) >

(۱۲۱) حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{2 - \sqrt{5-x}}$ کدام است؟ (سراسری تجربی خارج کشور ۸۸)

۴(۴) ۲(۳) -۲(۲) -۴(۱) >

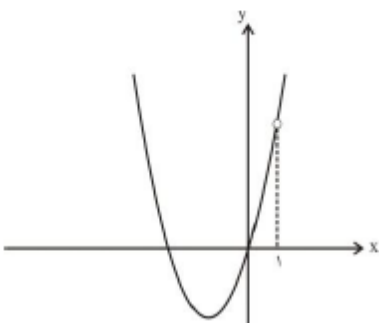
(۱۲۲) اگر $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax+9}{1-x+\sqrt{x+1}} = 3$ باشد آنگاه حد کسر وقتی $x \rightarrow 3$ کدام است؟ (سراسری ۹۲)

۵(۴) ۴(۳) ۲(۲) ۱(۱) >

(۱۲۳) شکل مقابل نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{4x^2 + ax + b}{x-1}$ است. دوتایی مرتب (a, b) کدام است؟

(سراسری تجربی - ۸۷)

(۴و۰)(۴) (-۴و۱)(۳) (-۴و۰)(۲) (۰و-۴)(۱) >



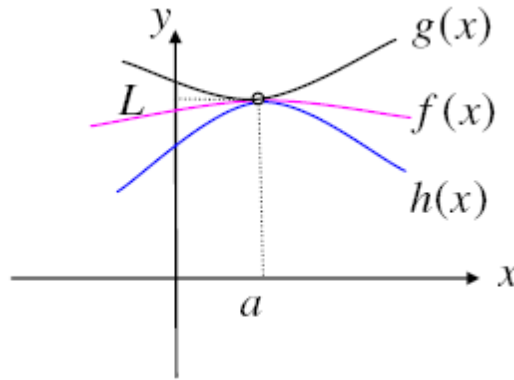
(۱۲۴) حاصل $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 2x - 3}{x + \sqrt{x+12}}$ کدام است؟

$-\frac{4}{7}$ (۴) $\frac{4}{7}$ (۳) $\frac{24}{7}$ (۲) $-\frac{24}{7}$ (۱) >

قضیه فشردگی

$$\forall x \in I: h(x) \leq f(x) \leq g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L$$



اگر برای سه تابع f, g, h داشته باشیم:

آنگاه خواهیم داشت:

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$



(۱) فرض کنید به ازای هر $x \neq 0$ داشته باشیم:

- $3 - x^2 \leq f(x) \leq 3 + x^2$

حد $f(x)$ را در $x = 0$ بیابید.

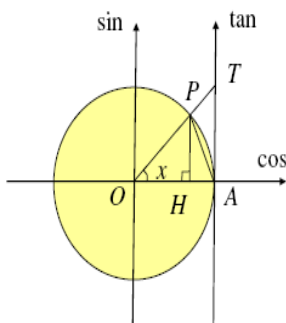
(۲) اگر به ازای هر x داشته باشیم: $|3f(x) - 1| \leq (x - 2)^2$ حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ را بیابید.

(۳) اگر به ازای هر $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ داشته باشیم $3 - (\cos x)^2 \leq f(x) \leq 2 + x^2$ مطلوب است:

➤ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

قضیه: اگر x بر حسب رادیان زاویه ای دلخواه باشد:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$



اگر x در ربع اول باشد داریم: (ربع چهارم به طور مشابه)

با توجه به شکل داریم:

$$\text{مساحت مثلث } OAT < \text{مساحت قطاع } OAP < \text{مساحت مثلث } OAP$$

$$\diamond \frac{1}{2} OA \times PH < \frac{1}{2} x \times (OA)^2 < \frac{1}{2} OA \times AT$$

$$\frac{PH}{OA} < x < \frac{AT}{OA} : \text{در نتیجه داریم:}$$

اما داریم

$$\bullet \frac{AT}{OA} = \tan x, \frac{PH}{OA} = \frac{PH}{OB} = \sin x$$

بنا بر این خواهیم داشت: $\tan x \geq x \geq \sin x$

با تقسیم طرفین نامساوی بر $\sin x$ و سپس معکوس کردن نامساوی داریم:

$$\bullet \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

با استفاده از قضیه فشردگی خواهیم داشت:

$$\star \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\star \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$$

$$\star \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x} = 1$$

$$\star \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x} = 1$$

فرمول های زیر در حد گیری با استفاده از قضیه فشردگی می تواند مورد استفاده قرار گیرد.

$$\star 1 - \cos^2 x = \sin^2 x$$

$$\star 1 - \cos 2x = 2\sin^2 x$$

$$\star 1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2}$$

$$\star \sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

مثال (۲۸) حد های زیر را بیابید.

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \cos 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \times \frac{x}{\sin x} \times \frac{x}{\sin x} = \frac{1}{2}$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\tan(x+2)}{4-x^2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\tan(x+2)}{x+2} \times \frac{-1}{x-2} = 1 \times \frac{-1}{-2-2} = \frac{1}{4}$$



(۱) حاصل حد های زیر را بیابید.

$$① \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$$

$$② \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{3x} \sin \frac{3x}{2}$$

$$③ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \sin 2x \sin 3x}{x^3}$$

$$④ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$$

$$⑤ \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{8}} \frac{\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)}{x - \frac{\pi}{8}}$$

$$⑥ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \times \sin x}{1 - \cos 2x}$$

(۲) حد های زیر را بیابید.

$$① \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x}$$

$$② \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin 3x}{1 - \cos 2x}$$

$$③ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{3x^2}$$

$$4 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{1 - \cos 2x}$$

$$5 \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin(3x - \pi)}{x - \frac{\pi}{3}}$$

۳) اگر به ازای هر x داشته باشیم $2 - x^2 \leq g(x) \leq 2\cos x$ حد تابع $g(x)$ را در $x = 0$ تعیین کنید. (خرداد ۹۲)

۴) اگر به ازای هر $x \in (-\pi, \pi)$ داشته باشیم $3 - \cos^2 x \leq f(x) \leq 4 - \tan \frac{x}{2}$ حد تابع $f(x)$ وقتی $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ را بیابید (خرداد ۹۱)

۵) اگر به ازای هر x داشته باشیم $(x - 2)^2 \leq 2f(x) \leq 4 + x^2$ حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) + 3)$ را به دست آورید. (خرداد ۸۹)

❖ سوالات چهار گزینه ای

۱۲۵) حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \cos \pi x}{x^3 - x^2 - x + 1}$ کدام است؟

1. $\frac{\pi}{4}$
2. $\frac{\pi}{2}$
3. $\frac{\pi^2}{4}$
4. $\frac{\pi^2}{2}$

۱۲۶) حاصل $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\tan \pi x}{|x^2 - 1|}$ کدام است؟

1. $-\pi$
2. $\frac{-\pi}{2}$
3. $\frac{\pi}{2}$
4. π

۱۲۷) حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \tan 3x}{\sqrt{1 - \cos x}}$ کدام است؟

1. $-2\sqrt{2}$
2. $-\sqrt{2}$
3. ۲
4. $2\sqrt{2}$

۱۲۸) حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\tan x - 1}{\cos 2x}$ کدام است؟ (سراسری تجربی خارج کشور ۹۱)

۱) ۱ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۱

۱۲۹) حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sin 2x}{(1 - \tan x)^2}$ کدام است؟ (سراسری ریاضی ۸۲)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ∞

۱۳۰) حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x^2 - \sqrt{x}}$ کدام است؟ (سراسری ریاضی ۸۷)

۱) $\frac{\pi}{3}$ ۲) $-\frac{\pi}{3}$ ۳) $\frac{2\pi}{3}$ ۴) $\frac{3\pi}{2}$

۱۳۱) حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \tan x}$ کدام است؟ (سراسری تجربی خارج کشور ۹۰)

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) ۲

۱۳۲) حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt{\cos 3x}}{1 - \cos x}$ کدام است؟

۱. ۱
۲. ۲
۳. ۳
- ۴.

۱۳۳) حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 2x}{x^2}$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۱)

۱) $\frac{-1}{2}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{3}{2}$

۱۳۴) حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \tan 3x}{\sqrt{1 - \cos x}}$ برابر کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج کشور ۸۵)

۱) $-2\sqrt{2}$ ۲) $-\sqrt{2}$ ۳) ۲ ۴) $2\sqrt{2}$

۱۳۵) حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\sqrt{1 + \cos 2x}}{\cot x}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) $-\sqrt{2}$ ۳) ۲ ۴) -۲

۱۳۶) حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{2x^3}$ کدام است؟

1. $\frac{1}{6}$
2. $\frac{-1}{6}$
3. $\frac{1}{4}$
4. $\frac{-1}{4}$

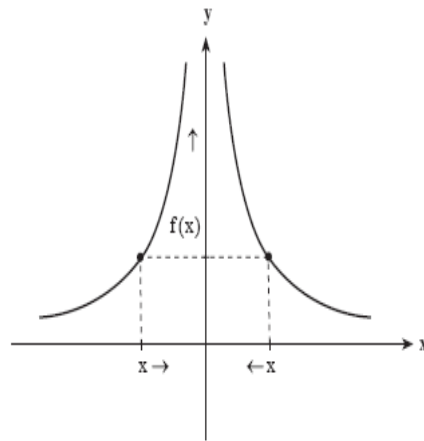
درس نامه ۴) تعمیم حد

حد بینهایت

این حد زمانی رخ می دهد که متغیر x به عددی مانند a نزدیک می شود

و مقدار تابع از هر عدد مثبت بزرگتر یا از هر عدد منفی کوچکتر شود در این حالت می گوئیم حد تابع بینهایت است.

- $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \end{cases}$

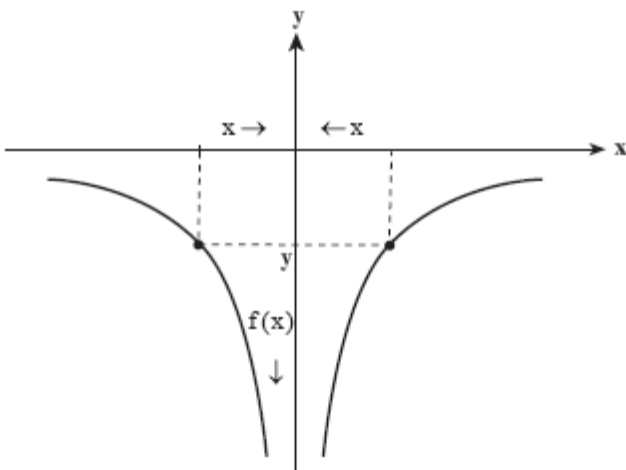


نمودار زیر رفتار تابع $f(x) = \frac{1}{|x|}$ را در اطراف

صفر نمایش می دهد.

همچنین نمودار زیر رفتار تابع $f(x) = -\frac{1}{|x|}$ را در اطراف

صفر نمایش می دهد.



توجه به قضایا و نکات زیر در حل این نوع حدود لازم است.

- اگر n یک عدد طبیعی زوج باشد آنگاه

★ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^n} = +\infty$

• اگر n یک عدد طبیعی فرد باشد آنگاه

$$\star \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^n} = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$$

• اگر $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = L > 0$ در یک همسایگی نقطه a مثبت باشد آن گاه

$$\star \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$$

• اگر $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = L > 0$ در یک همسایگی نقطه a منفی باشد آن گاه

$$\star \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$$

• در دو قسمت بالا اگر $L < 0$ آنگاه علامت بینهایت ها در جواب عوض می شود.

• وقتی در مخرج کسر، حد به سمت صفر میل کند با توجه به اینکه از سمت اعداد بزرگتر از صفر به صفر نزدیک شده است یا

از سمت اعداد کوچکتر از صفر به ترتیب از نمادهای 0^+ و 0^- استفاده می کنیم.

(مثال ۲۹)

- 1) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-5x^2}{x^2-1} = \frac{-5}{0^+} = -\infty$
- 2) $\lim_{x \rightarrow \pi^+} \cot x = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$
- 3) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{4x+1}{2x-1} = \frac{3}{0^+} = +\infty$



(۱) حاصل حد های زیر را بیابید.

- ① $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{1}{1-\sin x}$
- ② $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{2x-3}{(x-4)^2}$
- ③ $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \tan^2 x$

$$④ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin 5x}{x \cdot \tan 3x}$$

$$⑤ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-5x^2}{x^2 - 1}$$

۲) حاصل حد های زیر را بیابید.

$$① \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+3}{|x-2|}$$

$$② \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos x}$$

$$③ \lim_{x \rightarrow \pi} \cot x$$

$$④ \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2+5}{2-x}$$

$$⑤ \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3}{(x-3)^2}$$

$$⑥ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x+3}{x-1}$$

$$⑦ \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{-1}{(x+1)^2}$$

$$⑧ \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-x+3}{(x-2)^3}$$

$$⑨ \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{9}^+} \tan \left(3x - \frac{\pi}{3} \right)$$

$$\textcircled{10} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\tan x + \sqrt{3}}{\tan x - \sqrt{3}}$$

$$\circ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 - \cos x}$$

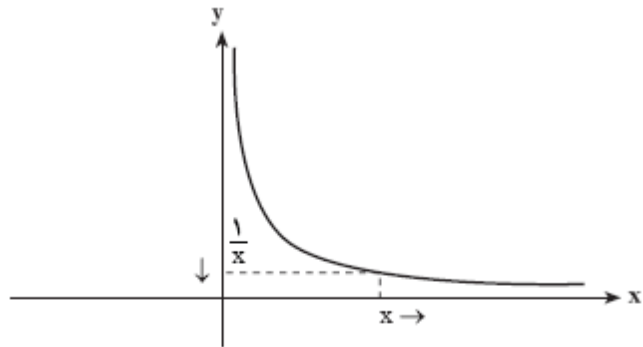
حد در بینهایت

هنگامی که می‌گوییم متغیر x به سمت $+\infty$ میل می‌کند یعنی

هر چقدر که بخواهیم x می‌تواند بزرگ و بزرگتر شود به طوری که

از هر عدد دلخواه مثبتی بزرگتر باشد و می‌نویسیم $x \rightarrow +\infty$ (به طور مشابه می‌توانیم $x \rightarrow -\infty$ را تعریف کنیم)

حالا می‌خواهیم رفتار تابع را وقتی $x \rightarrow \pm\infty$ بررسی کنیم.



$$\star f(x) = k \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = k$$

$$\star \begin{cases} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^n = +\infty & \text{زوج } n \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty & \text{فرد } n \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty & \text{فرد } n \end{cases}$$

$$\star \lim_{x \rightarrow L} g(x) = g(L), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} g(f(x)) = g(L)$$

$$\star \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L_1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = L_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) \pm g(x)) = L_1 \pm L_2 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) \times g(x)) = L_1 \times L_2 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2} \end{cases}$$

$$\star \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = L \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L} & \text{فرد } n \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L} & \text{زوج } n, L \geq 0 \end{cases}$$

★ برای تعیین حد یک چند جمله‌ای کافی است جمله‌ای که بزرگترین توان را دارد در نظر گرفته حد آن را بیابیم.

★ در تعیین حد یک تابع کسری که صورت و مخرج چند جمله‌ای هستند، جمله‌ای که بیشترین درجه را در صورت و مخرج دارد

را انتخاب می‌کنیم:

✓ اگر توان صورت بیشتر از مخرج باشد حاصل ∞ می‌شود.

✓ اگر توان صورت و مخرج برابر باشد حاصل برابر است با ضریب بزرگترین درجه صورت به ضریب بزرگترین

درجه مخرج .

✓ اگر توان صورت کمتر باشد حاصل صفر می شود

مثال (۳۰)

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^4 - 3x^2 + 5}{-x^3 + 2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^4}{-x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -2x = +\infty$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-1}{\sqrt{4x^2+x+1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(2-\frac{1}{x})}{\sqrt{x^2(4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(2-0)}{|x|\sqrt{4+0+0}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{-2x} = -1$$



(۱) حاصل حد های زیر را بیابید

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^4 + 2x^3 + 1}{6x^3 + 3x^4 - 1}$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x+1}{3x+\sqrt{x^2-1}}$$

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x+7}{6x+\sqrt{4x^2-1}}$$

$$\textcircled{4} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 + \sqrt{3x+5}}{4x^2 - 5x + 1}$$

(۲) حاصل حد های زیر را بیابید

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{\sqrt{3x^2+x}}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x - \sqrt{x^2+1}}{5x + \sqrt{4x^2+1}}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(3x^2-1)(x+1)}{x^2-2}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + \sqrt{x-1}}{5x - \sqrt{x}}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + \sqrt{x+2}}{4x + \sqrt{4x^2 + 1}}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x}{3} + 4$$

$$7. \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (-x^4 + x^2 + 2)$$

$$8. \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x^3 - x^2 + 1}{-2x^3 + x - 2}$$

$$9. \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x-5}{2x^2 + x - 1}$$

$$10. \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{6x^2 + x - 2}{3x - 5}$$

$$11. \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^4 + x^2 - 1}{-x^2 + 5}$$

$$12. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^2 + \sqrt{x-2}}{x^2 + 5x - 1}$$

$$13. \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^n - 7x + 2}{2x^{n+1} + 6x^n - 1}$$

۳) حد های زیر را در صورت وجود بیابید. (خرداد ۹۳)

A. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{3 - \sqrt{x} + 7}$

B. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos 2x}$

C. $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x+1}{9-x^2}$

D. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{10x^2 + \sqrt{x^2 + x}}{2x^2 + 1}$

۴) هر یک از حد های زیر را بیابید. (خرداد ۹۵)

A. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x+6} + x}{x^2 - 4}$

B. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-2}{\sin x}$

C. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 4x}{\cos 4x \sin 2x}$

D. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-6x + \sqrt{x+1}}{3x - \sqrt{4x^2 - 1}}$

۵) حد های زیر را محاسبه کنید (خرداد ۹۴)

A. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt{x+3}}{x^2 - 1}$

B. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{2}{\cos x}$

$$C. \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{8x^3 - 2x^2 + 5}{-2x^4 + 3x - 1}$$

$$D. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \sin 2x \sin 3x}{x^3}$$

(6) حاصل هر یک از حد های زیر را بیابید. (خرداد ۹۲)

$$A. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 16}$$

$$B. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x \tan 3x}{x^2}$$

$$C. \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 + 1}{3 - x}$$

$$D. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + \sqrt{6x + 2}}{4x^2 + 5x} 6$$

(7) حاصل حد های زیر را بیابید. (خرداد ۹۱)

$$A. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{3 - \sqrt{x + 7}}$$

$$B. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \sqrt{x + 1}}{5x + \sqrt{4x^2 + 1}}$$

$$C. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2}$$

$$D. \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3}{(x - 1)^2}$$

8) هر یک از حد های زیر را بیابید. (خرداد ۹۰)

A. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{\sqrt{x+12} - x}$

B. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 - \cos x}$

C. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(x-1)(x-2)(4-x)}{2x^3 + 1}$

9) حد توابع زیر را بیابید. (خرداد ۸۹)

A. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$

B. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - \sqrt{x^2 + 2x}}{1 - x}$

C. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$

D. $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+3}{|x-2|}$

10) هر یک از حد های زیر را بیابید. (خرداد ۸۸)

A. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2 - \sqrt{x-1}}{x^2 - 6x + 5}$

B. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{2x + 3}$

C. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin 3x}{1 - \cos 2x}$

D. $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x+1}{9-x^2}$

11) اگر تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{2x^2 - 4} & x \geq 2 \\ x + b & -2 \leq x \leq 2 \\ x^2 + bx + 3a & x < -2 \end{cases}$ باشد a, b را طوری بیابید که تابع f در نقطه $x = -2$ دارای حد بوده و

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2 \text{ باشد. (خرداد ۸۸)}$$

❖ سوالات چهار گزینه ای

۱۳۶) اگر $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{ax+3}{6+x-x^2} = -\infty$ حدود a کدام است؟

1. $a < 1$
2. $a > 1$
3. $a > 0$
4. $a < 0$

۱۳۷) اگر $f(x) = \frac{2x+5}{x^2-4x+3}$ ، $g(x) = 2^x$ آنگاه $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(f(x))$ کدام است؟

1. صفر
2. ۱
3. ∞
4. $\frac{1}{2}$

۱۳۸) در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{ax^n - 3x + 1}{3x^2 + x}$ اگر $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{2}{3}$ آنگاه $f(-1)$ کدام است؟ (سراسری تجربی خارج کشور ۹۱)

$$\triangleright \begin{matrix} 2(1) & -2(1) & \frac{3}{2}(2) & 2(3) & 3(4) \end{matrix}$$

✍

۱۳۹) نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{ax+1+\sqrt{4x^2+9}}{3x-2}$ از نقطه $(2,1)$ می گذرد $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۱)

$$\triangleright \begin{matrix} 1(1) & \frac{-1}{3}(1) & \frac{1}{3}(2) & \frac{2}{3}(3) & 1(4) \end{matrix}$$

✍

۱۴۰) در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{3-\sqrt{x^2+5}}{ax^n+4}$ اگر $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{1}{2}$ باشد $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۰)

$$\triangleright \begin{matrix} 1(1) & \frac{1}{3}(2) & \frac{2}{3}(3) & \frac{3}{4}(4) \end{matrix}$$

✍

(۱۴۱) حاصل $\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{3}{2x^2+5x+2} - \frac{4}{x^2-4} \right)$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۳)

$\frac{7}{12}$ (۴) $\frac{5}{12}$ (۳) $\frac{-5}{12}$ (۲) $\frac{-7}{12}$ (۱) >

✍

(۱۴۲) اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^n - 2x + 1}{(2x-1)^2} = 3$ باشد $\frac{a}{n}$ کدام است؟

3 (۴) 12 (۳) 6 (۲) 24 (۱) >

✍

(۱۴۳) هرگاه $f(x) = \frac{x-x^2}{\sqrt{1+x}-1}$ باشد حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x + \sqrt{x^2 - 1})$ کدام است؟

2 (۴) 1 (۳) -2 (۲) -1 (۱) >

✍

(۱۴۴) در تابع $f(x) = \frac{ax - \sqrt{x^2 - x + 3}}{x - 3}$ اگر $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$ باشد حاصل $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ کدام است؟

$\frac{9}{5}$ (۴) $\frac{-9}{5}$ (۳) 1 (۲) -1 (۱) >

✍

(۱۴۵) در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{ax^n + 15}{3x - \sqrt{4x^2 + 15x}}$ اگر $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ باشد آنگاه $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ کدام است؟ (تجربی ۹۴)

1. -۶
2. -۴
3. ۳
4. ۵

(۱۴۶) حاصل $\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{3}{2x^2+5x+2} - \frac{4}{x^2-4} \right)$ کدام است؟ (سراسری ۹۳)

1. $\frac{-7}{12}$
2. $\frac{-5}{12}$
3. $\frac{5}{12}$
4. $\frac{7}{12}$

(۱۴۷) اگر $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax+9}{1-x+\sqrt{x+1}} = 3$ باشد آنگاه حد کسر وقتی $x \rightarrow 3$ کدام است؟ (سراسری ۹۲)

5 (۴) 4 (۳) 2 (۲) 1 (۱) >

✍

۱۴۸) اگر در تابع $f(x) = \frac{ax^3 + bx^2 - bx + 4}{2x^3 - 2}$ داشته باشیم $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$ حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ کدام است؟

1. -1
2. -4
3. -2
4. -8

درس نامه ۵ (پیوستگی)

تابع f را پیوسته گوئیم هر گاه در هیچ نقطه ای بریدگی نداشته باشد.

از این مطلب کلی، تعریف زیر را داریم:

تابع f را در نقطه $x = a$ پیوسته گوئیم هرگاه شرایط زیر برقرار باشد:

$$x \in D_f \quad *$$

* حد تابع در این نقطه موجود باشد.

* حد تابع در این نقطه = مقدار تابع در این نقطه

به بیان دیگر تابع f در $x = a$ پیوسته است هرگاه:

$$* f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

❖ نکات و قضایای مربوط به پیوستگی

* اگر دو تابع f, g در یک نقطه پیوسته باشند مجموع و حاصل تفریق و حاصل ضرب و حاصل تقسیم دو تابع در نقطه مورد نظر

پیوسته است. با این تذکر که در حالت تقسیم مخرج باید مخالف صفر باشد.

* اگر تابع f در نقطه $x = a$ پیوسته باشد آنگاه تابع $kf(x)$ در $x = a$ پیوسته است.

* اگر تابع f در نقطه $x = a$ پیوسته باشد آنگاه تابع $|f(x)|$ در $x = a$ پیوسته است

* اگر تابع f در نقطه $x = a$ پیوسته باشد و در یک همسایگی از این نقطه مثبت باشد تابع $\sqrt{f(x)}$ در این نقطه پیوسته

است.

* اگر تابع f در نقطه $x = a$ پیوسته باشد و تابع $g(x)$ در $f(a)$ پیوسته باشد آنگاه تابع $g \circ f(x)$ در $x = a$

پیوسته است.

* توابع چند جمله ای در هر نقطه از اعداد حقیقی پیوسته است.

* توابع گویا در همه نقاط به جز ریشه های مخرج پیوسته است.

* توابع رادیکالی با فرجه فرد در هر نقطه از دامنه تعریفشان پیوسته است.

* توابع رادیکالی با فرجه زوج در هر نقطه از دامنه تعریفشان پیوسته است به شرط آنکه در آن نقاط مقدار زیر

رادیكال مثبت و در همسایگی آن نقطه تعریف شده باشد.

مثال (۳۱)

پیوستگی تابع زیر را در $x = 2$ بررسی کنید.

$$\bullet f(x) = \begin{cases} x^3 + 5x & x \geq 2 \\ 7x + 4 & x < 2 \end{cases}$$

$$\triangleright \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2^3 + 5 \times 2 = 18 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 7 \times 2 + 4 = 18 \\ f(2) = 18 \end{cases}$$

پس تابع در $x = 2$ پیوسته است.

مثال (۳۲)

$$\text{مقادیر } a, b \text{ را به گونه ای بیابید که تابع } f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 1 & x > 2 \\ 3 & x = 2 \\ (a + 1)x - b & x < 2 \end{cases} \text{ در } x = 2 \text{ پیوسته باشد.}$$

$$\triangleright \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4a + 2b + 1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2(a + 1) - b \\ f(2) = 3 \end{cases}$$

برای این که تابع پیوسته باشد باید سه مقدار بدست آمده با هم برابر باشند که خواهیم داشت:

$$\triangleright \begin{cases} 4a + 2b + 1 = 3 \\ 2(a + 1) - b = 3 \end{cases}$$

در نتیجه $a = \frac{1}{2}, b = 0$



پیوستگی توابع داده شده را در نقاط داده شده بررسی کنید.

$$\bullet 1) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} & , x \neq 1 \\ \frac{1}{2} & , x = 1 \end{cases}$$

$$\bullet 2) f(x) = \begin{cases} x^2 - \frac{x-1}{|x-1|} & , x \neq 0 \\ 2 & , x = 0 \end{cases}$$

• 3) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ $x = -2$

(4) مقادیر a, b را به گونه ای بیابید که تابع زیر در $x = 0$ پیوسته باشد.

• $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2x}{\sqrt{2-2\cos x}} & x > 0 \\ a & x = 0 \\ x - 1 + b & x < 0 \end{cases}$

(5) حدود a را طوری بیابید که تابع $f(x) = \begin{cases} -2x + a & x \geq 1 \\ x^2 + 3x & x < 1 \end{cases}$ در $x = 1$ پیوسته نباشد.

(6) پیوستگی توابع زیر را در نقاط داده شده بیابید.

• 1) $f(x) = \begin{cases} -3x + 5 & x \geq 1 \\ x^2 + 4 & x < 1 \end{cases}$

• 2) $f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x-1} & x > 3 \\ 2 & x = 3 \\ 5x - 13 & x < 3 \end{cases}$

• 3) $f(x) = \begin{cases} \sin 2x & x > \frac{\pi}{4} \\ \frac{1}{2} + \cos^2 x & x \leq \frac{\pi}{4} \end{cases}$

• 4) $f(x) = \sqrt{1-x}$ $x = 1$

(7) اعداد a, b را طوری بیابید که تابع $f(x) = \begin{cases} ax + 1 & x > -2 \\ 13 & x = -2 \\ 2ax^2 + bx - 1 & x < -2 \end{cases}$ در نقطه $x = -2$ پیوسته باشد

(8) پیوستگی تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{|x-2|}{x-2} & x < 2 \\ -1 & x = 2 \\ 3 - x^2 & x > 2 \end{cases}$ را در نقطه ای به طول $x=2$ بررسی کنید. (خرداد ۹۳)

(9) عدد های a, b را چنان بیابید که تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|+ax}{x} & x < 0 \\ 2 & x = 0 \\ x^3 + 4b & x \geq 0 \end{cases}$ در نقطه ی صفر پیوسته باشد. (خرداد ۹۵)

(10) حدود a را چنان بیابید که تابع $f(x) = \begin{cases} -2x + a & x \geq 1 \\ x^2 + 3x & x < 1 \end{cases}$ در نقطه ی $x=1$ پیوسته نباشد. (خرداد ۹۴)

(11) مقدار a را طوری بیابید که تابع $f(x) = \begin{cases} -4x + a & x > -1 \\ -6x & x = -1 \\ x^2 - 5x & x < -1 \end{cases}$ در نقطه ی $x = -1$ پیوسته باشد. (خرداد ۹۲)

(12) پیوستگی تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x^2-3x+2} & x \neq 1 \\ -3 & x = 1 \end{cases}$ را در $x = 1$ بررسی کنید. (خرداد ۹۱)

(13) حدود a را طوری بیابید که تابع $f(x) = \begin{cases} 2a + x^2 & x \geq 2 \\ x^3 - x & x < 2 \end{cases}$ در $x = 2$ پیوسته نباشد. (خرداد ۹۰)

(14) فاصله پیوستگی تابع $f(x) = \sqrt{\frac{6}{x^2-4x+3}}$ را تعیین کنید. (خرداد ۸۹)

۱۵) پیوستگی تابع $f(x) = \begin{cases} 3x + \frac{|2x|}{x} & x \neq 0 \\ 2 & x = 0 \end{cases}$ را در نقطه $x = 0$ بررسی کنید (خرداد ۸۷)

۱۶) فاصله پیوستگی تابع $f(x) = \frac{x^2-1}{x^3-2x^2}$ را به دست آورید. (خرداد ۸۷)

❖ سوالات چهار گزینه ای

۱۵۰) تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} ax^2 - 3 & x > 2 \\ 5 & x = 2 \\ 2x + b & x < 2 \end{cases}$ در نقطه $x=2$ پیوسته است $a+b$ کدام است؟

1. 2
2. 3
3. 4
4. 5

۱۵۱) به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x^2-9} & x \neq 3 \\ a & x = 3 \end{cases}$ در نقطه $x=3$ پیوسته است؟

1. $\pm \frac{1}{6}$
2. $-\frac{1}{6}$
3. $\frac{1}{6}$
4. هیچ مقدار

۱۵۲) اگر تابع $g(x) = \begin{cases} x^2 + ax & x > 1 \\ x^3 + 2x & x = 1 \\ 3b + \cos(x-1) & x < 1 \end{cases}$ در نقطه $x=1$ پیوسته باشد مقدار $b-a$ کدام است؟

1. $-\frac{4}{3}$
2. $\frac{-2}{3}$
3. $\frac{8}{3}$
4. -2

۱۵۳) تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} a \sin 2x & \frac{\pi}{4} \leq x < \frac{3\pi}{4} \\ \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) & \frac{3\pi}{4} \leq x < 2\pi \end{cases}$ در $\frac{3\pi}{4}$ پیوسته است. مقدار a کدام است؟ (سراسری تجربی خارج کشور ۹۰)

➤ (۱) -۱ (۲) صفر (۳) $\frac{-1}{2}$ (۴) ۱

۱۵۴) اگر تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} ax + b & x > 2 \\ x^2 + bx - 1 & x < 2 \end{cases}$ با شرط $f(2) = 5$ بر روی مجموعه اعداد حقیقی پیوسته باشد a کدام است؟ (سراسری تجربی خارج کشور ۹۱)

➤ (۱) -۱ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۱۵۵) به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax - 5 & x > 2 \\ ax - 1 & x \leq 2 \end{cases}$ بر روی مجموعه اعداد حقیقی پیوسته است؟ (سراسری تجربی ۹۱)

➤ (۱) هر مقدار (۲) هیچ مقدار (۳) $-2(۳)$ (۴) $2(۴)$

۱۵۶) تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{|x^2+x-2|}{x-1} & x \neq 1 \\ a & x = 1 \end{cases}$ به ازای کدام مقدار a در 1 پیوسته است؟ (سراسری تجربی ۹۰)

➤ (۱) هر مقدار (۲) $-3(۲)$ (۳) $3(۳)$ (۴) هیچ مقدار

۱۵۷) با کدام مجموعه مقادیر a تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+a} & x \geq -1 \\ x^2 + ax & x < -1 \end{cases}$ در -1 پیوسته است؟ (سراسری خارج کشور ۸۷)

➤ (۱) $\{1, \sqrt{2}\}$ (۲) $\{1 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}\}$ (۳) \emptyset (۴) R

۱۵۸) تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{1-\tan^2 x}{\cos 2x} & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \\ a \cos 3x & \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$ به ازای کدام مقدار a در نقطه $\frac{\pi}{4}$ پیوسته است؟ (سراسری تجربی ۹۳)

➤ (۱) $-2\sqrt{2}$ (۲) -1 (۳) $\sqrt{2}$ (۴) 2

۱۵۹) به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} 3x - [x] & x < 2 \\ a & x = 2 \\ x + 2 & x > 2 \end{cases}$ در نقطه $x = 2$ پیوسته است؟ (سراسری ۹۲)

➤ (۱) 4 (۲) $4/5$ (۳) 5 (۴) هیچ مقدار

۱۶۰) تابع $f(x) = \left[\frac{-3}{x-1} \right]$ در بازه $\left(a, \frac{7}{4} \right)$ فقط در دو نقطه ناپیوسته است. حداقل مقدار a کدام است؟

➤ (۱) $\frac{8}{5}$ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{10}{7}$ (۴) $\frac{11}{8}$

۱۶۱) تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{1-\sin x}{\cos x} & x \neq \frac{\pi}{2} \\ a & x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$ به ازای کدام مقدار a در نقطه $x = \frac{\pi}{2}$ پیوسته است؟

➤ (۱) صفر (۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳) هیچ مقدار (۴) 1

(۱۶۲) به ازای کدام مقدار a تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{4x-\pi}{1-\tan x} & 0 < x < \frac{\pi}{4} \\ a \sin 2x & x \geq \frac{\pi}{4} \end{cases}$ در نقطه ای به طول $\frac{\pi}{4}$ پیوسته است؟

۱(۱) > ۲(۲) -۱(۳) -۲(۴)

✍

(۱۶۳) به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{\pi}{x} & 1 \leq x \leq 6 \\ a + \cos^2 \frac{\pi x}{36} & x > 6 \end{cases}$ بر روی مجموعه اعداد حقیقی بزرگتر از ۱ پیوسته است

؟(تجربی ۹۴)

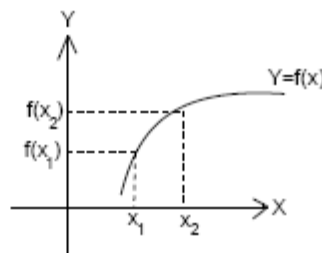
1. $\frac{-1}{2}$
2. $\frac{-1}{4}$
3. $\frac{1}{4}$
4. $\frac{1}{2}$

فصل چهارم مشتق

درس نامه (۱) آهنگ تغییر

فرض کنیم تابعی مانند $y = f(x)$ را در اختیار داریم. به متغیر x متغیر مستقل و به y متغیر وابسته گوییم. بنابراین اگر مقدار x تغییر کند مقدار y نیز تغییر خواهد کرد. اگر تغییرات x بین دو مقدار x_1, x_2 را با Δx و تغییرات y بین دو مقدار $f(x_1), f(x_2)$ را با Δy نمایش دهیم خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \Delta x = x_2 - x_1 \\ \Delta y = f(x_2) - f(x_1) \end{cases}$$



آهنگ متوسط تغییر

آهنگ متوسط تغییر تابع $y = f(x)$ وقتی متغیر روی بازه ای از x_1 تا x_2 تغییر کند از رابطه زیر به دست می آید.

$$\star \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

با قرار دادن $x_2 - x_1 = h \Rightarrow x_2 = x_1 + h$ کسر بالا به صورت زیر در می آید.

$$\star \frac{f(x_1+h) - f(x_1)}{h}$$

مثال (۳۳)

در تابع $f(x) = x^2 - 3x + 2$ آهنگ متوسط تغییر تابع را وقتی $x_1 = 3$ و $x_2 = 5$ تعیین کنید.

- $f(x_1) = f(3) = 9 - 9 + 2 = 2$
- $f(x_2) = f(5) = 25 - 15 + 2 = 12$

$$\triangleright \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(5) - f(3)}{5 - 3} = \frac{12 - 2}{2} = \frac{10}{2} = 5$$



تمرین

در تابع $f(x) = x^2 - 3x + 2$ آهنگ متوسط تغییر تابع را وقتی $x_1 = 1, x_2 = 3$ است را بیابید.

آهنگ آنی تغییر

آهنگ لحظه ای تغییر تابع f در x_1 از رابطه

$$\star \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$

به دست می آید .

مثال (۳۴)

متحرکی که بر روی محور x ها در حرکت است دارای معادله حرکت $x(t) = t^2 - 4t + 3$ است.

الف) سرعت متوسط این متحرک را در فاصله زمانی $t = 2 \rightarrow t = 6$ بیابید.

ب) سرعت لحظه ای آن را در زمان $t = 12$ بیابید.

$$\text{سرعت متوسط} = \frac{x(6) - x(2)}{6 - 2} = \frac{15 - (-1)}{4} = 4$$

$$\text{سرعت لحظه ای} = \lim_{t \rightarrow 12} \frac{x(t) - x(12)}{t - 12} = \lim_{t \rightarrow 12} \frac{t^2 - 4t + 3 - 99}{t - 12} = \lim_{t \rightarrow 12} t + 8 = 20$$



تمرین

۱) معادله حرکت متحرکی بر یک محور افقی به صورت $x(t) = t^2 - 2t - 1$ است. آهنگ آنی تغییر x را در ۵ ثانیه بیابید.

۲) در تابع $f(x) = x^2 - 3x$ مطلوبست محاسبه:

الف) آهنگ متوسط تغییر آن از $x_1 = 2$ تا $x_2 = 4$

ب) آهنگ لحظه ای تغییر آن در نقطه $x_0 = 5$

۳) نقطه $M(x, y)$ را بر نمودار تابع $y = x^2$ انتخاب می کنیم و تصاویر M را بر ox و oy به ترتیب A و B می نامیم. اگر S اندازه مساحت مستطیل $OAMB$ باشد، S را بر حسب تابعی از x مشخص کنید. آهنگ تغییر S نسبت به x و آهنگ لحظه ای تغییر را در $x_0 = 4$ به دست آورید.

۴) حجم آب یک استخر در حال تخلیه بر حسب لیتر به وسیله برابری $V = 120(2500 - 50t + t^2)$ به زمان t بر حسب دقیقه بستگی دارد. آهنگ متوسط تغییر در ۸ دقیقه اول را پیدا کنید. آهنگ لحظه ای خالی شدن را در دقیقه دهم از آغاز تخلیه بیابید.

۵) معادله حرکت یک متحرک به صورت $y = x^2 + x + 1$ است. آهنگ آنی تغییرات y را در $x = 3$ به دست آورید.

۶) آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x) = 2x - 1$ را به ازای $x = 2$ و $\Delta x = 0/1$ به دست آورید.

۷) تابع $f(x) = x^2 + 6x - 7$

الف) آهنگ متوسط تغییر تابع وقتی متغیر از ۲ تا ۶ تغییر می کند را بیابید.
ب) آهنگ لحظه ای تغییر تابع در $x_0 = 4$ را بیابید.

۸) آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x) = \sqrt{x+1}$ وقتی متغیر از ۳ تا ۸ تغییر می کند را بیابید. (خرداد ۹۲)

۹) معادله حرکت متحرکی به صورت $f(t) = \frac{1}{2}t^2 - 3t + 1$ می باشد. (خرداد ۹۱)

الف) سرعت متوسط این متحرک را در فاصله زمانی $t = 0$ تا $t = 4$ بیابید.

ب) آهنگ آنی تغییرات $f(t)$ را در $t = 7$ بیابید.

۱۰) معادله حرکت یک متحرک روی خط مستقیم به صورت $x(t) = 3t^2 - 4t + 2$ است. سرعت متوسط این متحرک را در فاصله زمانی $t = 1$ و $t = 3$ محاسبه کنید. (خرداد ۹۰)

۱۱) آهنگ تغییرات تابع $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ وقتی x از ۲ به $\frac{۲}{۲}$ تغییر کند را به دست آورید. (خرداد ۸۷)

۱۲) تابع $f(x) = x^2 + 2x - 1$ داده شده است. (خرداد ۹۴)

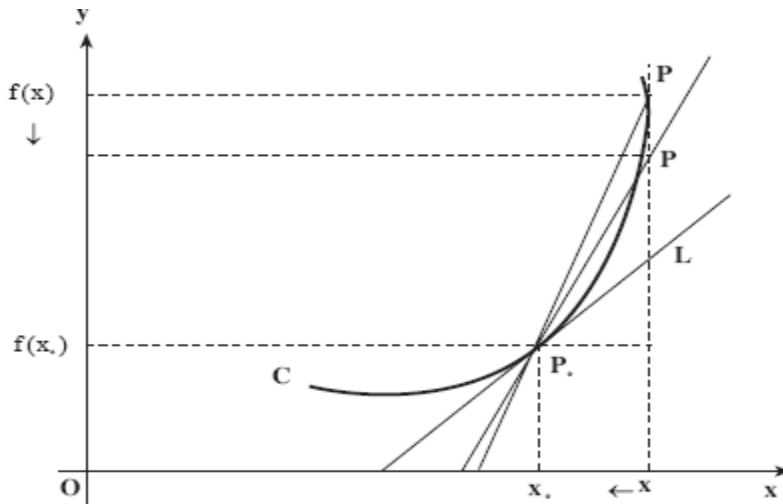
الف) آهنگ متوسط تغییر این تابع را وقتی متغیر از نقطه y یک تا سه تغییر میکند تعیین کنید.

ب) آهنگ لحظه ای تغییر این تابع را در نقطه $x=2$ به دست آورید.

۱۳) آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x) = 2x - 1$ را وقتی متغیر از 3 به $3/5$ تغییر می کند به دست آورید. (خرداد ۹۳)

۱۴) یک بادکنک کره ای شکل را باد کرده ایم تا به صورت یک کره به شعاع 10 سانتی متر در بیاید. اگر به باد کردن بادکنک ادامه دهیم به طوریکه در هر ثانیه یک میلی متر به شعاع آن افزوده شود، آهنگ متوسط تغییر مساحت این بادکنک را در 20 ثانیه اول به دست آورید. آهنگ لحظه ای افزایش مساحت سطح کره را در ثانیه 10 به دست آورید.

📖 درس نامه ۲) مشتق



در شکل بالا شیب خط P_0P خط قاطع است که شیب آن از رابطه زیر به دست می آید.

★
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

اگر نقطه P را به P_0 نزدیک کنیم خط قاطع به خط مماس نزدیک می شود. پس شیب خط مماس به صورت زیر خواهد بود.

★
$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

(چقدر آشنا!)

اگر نقطه ای از دامنه تابع f باشد در این صورت مشتق تابع f را در نقطه x_0 به صورت زیر تعریف می کنیم.

★
$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

اگر $x - x_0 = h$ بگیریم خواهیم داشت.

★
$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

با توجه به مطالب گذشته می توان رابطه بین شیب خط مماس و آهنگ لحظه ای تابع در یک نقطه و مشتق تابع در آن نقطه را به صورت زیر بیان کرد .

اگر $f'(x_0)$ وجود داشته باشد، تابع را در نقطه x_0 مشتق پذیر می گوئیم .

تابع f را در بازه (a, b) مشتق گوئیم هر گاه در هر نقطه این بازه مشتق پذیر باشد .

برای یافتن مشتق کلی یک تابع کافی است از رابطه زیر استفاده کنیم .

$$\star f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

(مثال ۳۵)

مشتق تابع $f(x) = x^2$ را در $x = 2$ با استفاده از تعریف بیابید.

$$\triangleright f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x+2) = 4$$

(مثال ۳۶)

مشتق تابع $f(x) = 3x + 1$ را با استفاده از تعریف بیابید.

$$\triangleright f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(x+h) + 1 - (3x+1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x+3h+1-3x-1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h}{h} = 3$$



تمرین



مشتق توابع زیر را با استفاده از تعریف در نقطه داده شده بدست آورید.

❶ $f(x) = x^2 + 4x$, $x = 1$

❷ $f(x) = \sqrt{5x-1}$, $x = 2$

❸ $f(x) = 3x - 1$, $x = 2$

❹ $f(x) = 2\sqrt{1-x}$, $x = -3$

❺ با استفاده از تعریف مشتق تابع $y = \sqrt{4-x}$ را به دست آورید. (خرداد ۸۸)

۶) مشتق تابع زیر را با استفاده از تعریف به دست آورید.

① $f(x) = \frac{x}{x-1}$, $x = 2$

② $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $x = -1$

③ $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2$, $x = 1$

۷) با استفاده از تعریف مشتق تابع $y = \sqrt{4-x}$ را بدست آورید.

۸) با استفاده از تعریف مشتق تابع $f(x) = x^3 + 2x$ را در نقطه $x_0 = -1$ بیابید (خرداد ۹۱)

۹) با استفاده از تعریف مشتق تابع $f(x) = \frac{x}{x-1}$ را در نقطه $x = 2$ به دست آورید. (خرداد ۸۹)

❖ سوالات چهار گزینه ای

۱۶۵) اگر $f(x) = (x-2)^3 \sqrt{x^2}$ حاصل $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(-1+\Delta x) - f(-1)}{\Delta x}$ کدام است؟ (تجربی خارج ۸۴)

➤ $\frac{4}{3}$ (۴) $\frac{2}{3}$ (۳) ۳(۲) ۲(۱)

✍

۱۶۶) در تابع با ضابطه $f(x) = x + \frac{1}{x}$ آهنگ متوسط تغییر تابع وقتی متغیر از عدد ۲ به عدد $2+h$ تغییر می کند برابر $\frac{8}{9}$ است

مقدار h کدام است؟ (سراسری تجربی ۸۶)

➤ 3 (۴) $2/5$ (۳) 2 (۲) $1/5$ (۱)

✍

۱۶۷) آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x) = \sqrt{x+1}$ در بازه $[1/25, 3]$ چقدر است؟

➤ 1 (۴) $\frac{2}{11}$ (۳) $\frac{2}{7}$ (۲) $\frac{6}{7}$ (۱)

✍

۱۶۸) آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x) = \log_2(x+2)$ در فاصله $[-\frac{7}{4}, 6]$ کدام است؟

➤ $\frac{10}{31}$ (۴) $\frac{10}{17}$ (۳) $\frac{20}{17}$ (۲) $\frac{20}{31}$ (۱)

✍

۱۶۹) آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ از $x = -1$ تا $x = 8$ چند برابر آهنگ لحظه ای تغییر در $x = -1$ است؟

➤ $\frac{1}{2}$ (۱) ۲(۲) $\frac{-1}{2}$ (۳) -۲ (۴)

✍

۱۷۰) در تابع با ضابطه $y = \frac{36}{x^2}$ آهنگ متوسط تابع از ۲ تا ۳ چقدر از آهنگ لحظه ای آن در $\sqrt[3]{12}$ بیشتر است؟

(سراسری تجربی ۹۰)

➤ ۱ (۱) $\frac{۱}{۵}$ (۲) ۲ (۳) $\frac{۲}{۵}$ (۴)

✍

۱۷۱) در تابع با ضابطه $f(x) = (2x + 1)^{-\frac{1}{2}}$ آهنگ متوسط تغییر تابع از نقطه ۴ تا ۱۲ از آهنگ لحظه ای آن در نقطه ۴ چقدر

بیشتر است؟ (سراسری تجربی ۹۳)

➤ $\frac{7}{540}$ (۱) $\frac{11}{540}$ (۲) $\frac{7}{270}$ (۳) $\frac{11}{270}$ (۴)

✍

۱۷۲) مقدار مشتق $\frac{1 - \cos^2 x}{2 - \sin^2 x}$ به ازای $x = \frac{\pi}{4}$ کدام است؟ (سراسری تجربی - ۹۱)

➤ $\frac{4}{9}$ (۱) $\frac{5}{9}$ (۲) $\frac{7}{9}$ (۳) $\frac{8}{9}$ (۴)

✍

۱۷۳) مقدار مشتق $\sqrt{1 + \tan^2 \frac{1}{x}}$ به ازای $x = \frac{3}{\pi}$ کدام است؟ (سراسری تجربی خارج ۹۱)

➤ $\frac{-2\pi^2\sqrt{3}}{9}$ (۱) $\frac{-2\pi^2}{9}$ (۲) $\frac{2\pi^2}{9}$ (۳) $\frac{2\pi^2\sqrt{3}}{9}$ (۴)

✍

۱۷۴) اندازه مشتق تابع به معادله $y = \frac{1 - \tan 2x}{1 + \tan 2x}$ به ازای $x = \frac{\pi}{8}$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۸۹)

➤ -۲ (۱) -۱ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۱ (۴)

۱۷۵) مشتق تابع $y = \cos^3(\pi x^2)$ در نقطه $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ کدام است؟

➤ $\frac{3\pi}{8}$ (۱) $\frac{-3\pi}{8}$ (۲) $\frac{3\pi}{4}$ (۳) $-\frac{3\pi}{4}$ (۴)

✍

۱۷۶) مقدار مشتق تابع $y = \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}$ در $x = \frac{5\pi}{6}$ چقدر است؟

➤ $4\sqrt{3}$ (۱) $2\sqrt{3}$ (۲) $-4\sqrt{3}$ (۳) $-2\sqrt{3}$ (۴)

✍

۱۷۷) مشتق تابع $y = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{4}\right)$ به ازای $x = \frac{\pi}{3}$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۳)

$$\frac{-1}{8}(\text{ع}) \quad \frac{-1}{4}(\text{س}) \quad \frac{-1}{2}(\text{ز}) \quad \frac{-\sqrt{3}}{2}(\text{ا}) \quad \triangleright$$

✍

۱۷۸) اگر $f(x) = \sin^2 \pi x$ و $g(x) = \frac{1}{4}\sqrt{5x-9}$ مشتق تابع $f \circ g$ به ازای ۲ کدام است؟ (سراسری ریاضی ۹۱)

$$\frac{5}{8}\pi(\text{ع}) \quad \frac{3}{4}\pi(\text{س}) \quad \frac{5}{8}(\text{ز}) \quad \frac{3}{4}(\text{ا}) \quad \triangleright$$

✍

۱۷۹) اگر $u = \sin^2 x - \cos 2x$ و $y = \sqrt{2u} - \frac{1}{u}$ مقدار $\frac{dy}{dx}$ به ازای $x = \frac{\pi}{4}$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۸۸)

$$۱۵(\text{ع}) \quad ۱۲(\text{س}) \quad ۱۰(\text{ز}) \quad ۹(\text{ا}) \quad \triangleright$$

✍

۱۸۰) از رابطه $y = \sin(x - 2y) + \sqrt{x - 2y}$ مقدار مشتق y نسبت به x در نقطه (2و1) کدام است؟ (سراسری تجربی ۸۵)

$$\frac{3}{5}(\text{ع}) \quad \frac{2}{5}(\text{س}) \quad \frac{3}{7}(\text{ز}) \quad \frac{2}{7}(\text{ا}) \quad \triangleright$$

✍

۱۸۱) در تابع با ضابطه $f(x) = |x| \cdot [x]$ مقدار $f'_-(0) - f'_+(0)$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۸۷)

$$۲(\text{ع}) \quad ۱(\text{س}) \quad \text{صفر}(\text{ز}) \quad -۱(\text{ا}) \quad \triangleright$$

✍

۱۸۲) در تابع با ضابطه $f(x) = x\sqrt{x} + |x-1|$ مقدار $f'_+(1) + 3f'_-(1)$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۰)

$$۵(\text{ع}) \quad ۴(\text{س}) \quad ۳(\text{ز}) \quad ۲(\text{ا}) \quad \triangleright$$

✍

۱۸۳) اگر تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} 1 + \cos \pi x & x > 1 \\ bx^2 + x & x \leq 1 \end{cases}$ بر روی اعداد حقیقی مشتق پذیر باشد a کدام است؟

(سراسری ریاضی خارج کشور ۹۱)

$$\frac{1}{2}(\text{ع}) \quad -۱(\text{س}) \quad \frac{-1}{2}(\text{ز}) \quad ۱(\text{ا}) \quad \triangleright$$

✍

۱۸۴) تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \sin^2 x - \cos 2x & , 0 < x \leq \frac{\pi}{4} \\ a \tan x + b \sin 2x & , \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$ در نقطه $x = \frac{\pi}{4}$ مشتق پذیر است. b کدام است؟ (سراسری تجربی - ۹۳)

$$۱(\text{ع}) \quad \frac{1}{2}(\text{س}) \quad -\frac{1}{2}(\text{ز}) \quad -۱(\text{ا}) \quad \triangleright$$

✍

(۱۸۵) در تابع $f(x) = \frac{x^2+ax+b}{[x]}$ رابطه ی $f'_+(2) + f'_-(2) = 9$ برقرار است. مقدار $a + b$ کدام است؟

$$\text{➤ } -۸(۴) \quad -۷(۳) \quad -۶(۲) \quad -۵(۱)$$

✍

(۱۸۶) تابع با ضابطه ی $f(x) = \begin{cases} \ln x + a & x \geq 1 \\ bx^2 + 1 & x < 1 \end{cases}$ در نقطه $x = 1$ مشتق پذیر است. $a + b$ کدام است؟

$$\text{➤ } \frac{1}{2}(۴) \quad ۳(۳) \quad ۲(۲) \quad ۱(۱)$$

✍

همانطور که قبلا دیدیم شیب خط مماس بر نمودار در هر نقطه با مشتق

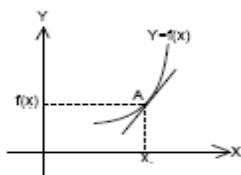
تابع در آن نقطه برابر است.

بنابراین برای یافتن معادله خط مماس بر یک نقطه

از تابع کافی است مشتق تابع در آن نقطه را یافته

و با استفاده از مختصات آن نقطه، معادله خط مماس بر

آن تابع را بنویسیم.



$$\star m = f'(x_0)$$

مثال (۳۷)

شیب خط مماس بر منحنی $y = x^3 + 1$ را در نقطه $x_0 = 1$ با استفاده از تعریف بیابید.

$$\text{➤ } m = f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 1 - 2}{x - 1}$$

$$\text{➤ } = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} x^2 + x + 1 = 3$$

مثال (۳۸)

معادله خط مماس بر منحنی تابع با ضابطه $f(x) = x^2 - x$ در نقطه $A \left[\begin{matrix} -1 \\ 2 \end{matrix} \right]$ را بیابید

$$\text{➤ } m = f'(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1}$$

$$\text{➤ } = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x-2)}{x+1} = -3$$

$$\text{➤ } y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 2 = -3(x + 1) \Rightarrow y = -3x - 1$$



تمرین

(۱) معادله خط مماس بر نمودار تابع $y = x^2$ در نقطه ای به طول $x = -1$ واقع بر منحنی را بیابید.

(۲) معادله خط مماس بر منحنی تابع $y = \sin x + \cos 2x$ را در نقطه ای به طول π واقع بر منحنی بنویسید. (خرداد ۸۹)

(۳) معادله خط قائم بر منحنی $y = \left(\frac{x}{2}\right)^3 - 1$ را در نقطه ای به طول ۲ واقع بر منحنی به دست آورید. (خرداد ۸۸)

(۴) معادله خط مماس بر منحنی $y = x^3 + x + 1$ را در نقطه ای به طول $x = 1$ واقع بر این منحنی به دست آورید.

(۵) برای تعیین شیب خط عمود بر نمودار تابع کافی است $f'(x_0)$ را معکوس و قرینه کنیم تا شیب خط عمود بدست آید.

(۶) معادلات خطوط مماس و قائم بر منحنی تابع $y = \sqrt{4x + 1}$ در نقطه ای به طول صفر واقع بر منحنی را بیابید.

(۷) شیب خط مماس بر نمودار تابع $y = x^2 - x$ را در نقطه $x = 5$ بیابید. (خرداد ۹۲)

(۸) معادله خط مماس بر منحنی تابع $y = 2\sin x - 1$ را در نقطه ای به طول $x = \frac{\pi}{6}$ واقع بر این منحنی به دست آورید. (خرداد ۸۷)

❖ سوالات چهار گزینه ای

(۱۸۷) خط مماس بر منحنی به معادله $y = x^3 - x^2$ در نقطه ۱ واقع بر آن منحنی را در نقطه ی دیگر A قطع می کند عرض این نقطه کدام است؟ (سراسری تجربی خارج کشور ۸۷)

➤ ۳(۴) ۲(۳) -۲(۲) -۳(۱)

✍

(۱۸۸) خط مماس بر منحنی به معادله $y = x^3 + 3x^2 + 1$ بر خط به معادله $x - 3y = 2$ عمود است. این خط مماس از

نقطه ای با کدام مختصات می گذرد؟ (سراسری تجربی ۸۹)

➤ (۱و۳)(۱و۴)(۲و۶)(۳و۶)(۴و۶)

✍

(۱۸۹) خط به معادله $y = 2x - 5$ در نقطه ای به طول ۱ بر منحنی به معادله $y = ax^2 + bx + 1$ مماس است. a .

کدام است؟ (سراسری تجربی ۸۶)

➤ ۶(۴) ۴(۳) ۳(۲) ۲(۱)

✍

(۱۹۰) خط مماس بر نمودار $y^3 + 3xy^2 - 3x^3y = 1$ در نقطه $(1,1)$ از کدام نواحی محورهای مختصات می گذرد؟

➤ (۱) اول و سوم (۲) اول و چهارم (۳) اول و دوم و سوم (۴) اول و دوم و چهارم

۱۹۱) خط قائم بر منحنی به معادله $e^{2y} + \ln x + \frac{y}{x} = 1$ در نقطه $(1,0)$ محور عمودی را با کدام عرض قطع می کند؟

(سراسری تجربی خارج کشور ۸۶)

➤ ۱) -3 ۲) -2 ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) 1

✍

۱۹۲) عرض از مبدا خط قائم بر منحنی به معادله $y^2 = y \ln(x^2 - 3) + 2x$ در نقطه $(2, -2)$ کدام است؟

(سراسری تجربی خارج کشور ۹۰)

➤ ۱) $\frac{-2}{3}$ ۲) $\frac{-1}{2}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{3}{4}$

✍

۱۹۳) خط مماس بر منحنی به معادله $\ln(x^2 - y) = \sqrt{y+1} - x$ در نقطه $(2,3)$ نیمساز ناحیه اول را در چه طولی قطع می کند؟

(سراسری تجربی ۹۰)

➤ ۱) $\frac{3}{4}$ ۲) $\frac{5}{4}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{5}{3}$

✍

۱۹۴) عرض از مبدا خط مماس بر معکوس تابع $f(x) = xe^x$ که $x > 0$ در نقطه $x = e$ واقع بر f^{-1} کدام است؟

➤ ۱) 1 ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{4}$

✍

۱۹۵) خط قائم بر منحنی $y = e^x - e^{-x} + 2$ در نقطه ای به طول صفر واقع بر منحنی نیمساز ناحیه اول را در نقطه با کدام طول قطع

می کند؟

➤ ۱) $\frac{4}{3}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) 2 ۴) 1

✍

۱۹۶) عرض از مبدا خط مماس بر منحنی به معادله $y = \ln \sqrt{\frac{\sin x}{1 + \cos x}}$ در نقطه $x = \frac{\pi}{2}$ واقع بر آن کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۲)

➤ ۱) $\frac{-\pi}{4}$ ۲) $\frac{-\pi}{2}$ ۳) $\frac{\pi}{4}$ ۴) $\frac{\pi}{2}$

✍

۱۹۷) در تابع ضمنی $4\sqrt{xy} + \frac{1}{y} - 2x = 1$ تابع y بر حسب متغیر x منظور شده است. معادله خط مماس بر منحنی آن

در نقطه $(4,1)$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۳)

➤ ۱) $y + 2x = 9$ ۲) $2y - x = -2$ ۳) $3y + x = 7$ ۴) $3y - x = -1$

۱۹۸) از نقطه وی محور عمودی با شیب های صفر و k بر منحنی $y = x^2 - 2x + a + 1$ رسم نموده ایم. مقدار k کدام است؟

➤ ۱) -2 ۲) -3 ۳) -4 ۴) -5

✍

سرعت یک متحرک

سرعت متوسط و لحظه ای:

فرض کنید متحرکی بر روی یک محور در حال حرکت است. اگر در لحظه t_0 فاصله آن از مبدا برابر $f(t_0)$ و در لحظه t برابر $f(t)$ باشد در این صورت سرعت متوسط متحرک از فرمول زیر بدست می آید.

$$V = \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

سرعت متوسط (آهنگ متوسط تغییر)

اگر $t - t_0$ به صفر میل کند سرعت متوسط به سرعت لحظه ای نزدیک می شود پس سرعت لحظه ای از فرمول زیر بدست می آید.

$$V'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

سرعت لحظه ای

چند نکته مهم:

- ★ مشتق دوم: مشتق تابع $y' = f'(x)$ را در صورت وجود مشتق دوم نامیده و با نماد y'' نمایش می دهیم
- ★ اگر معادله حرکت یک متحرک $S = f(t)$ باشد مشتق اول آن برابر سرعت و مشتق دوم را شتاب نامیده و به ترتیب با نماد $a(t), V(t)$ نمایش می دهیم
- ★ تابعی مانند f که در همه نقاط دامنه خود مشتق پذیر هستند را توابع مشتق پذیر می گوئیم.
- ★ تابعی که به هر نقطه از دامنه f مشتق f را نظیر می کند تابع مشتق نامیده می شود.
- ★ شرط لازم برای مشتق پذیر بودن یک تابع در یک نقطه این است که تابع در آن نقطه پیوسته باشد در نتیجه اگر تابع در نقطه ای پیوسته نباشد مشتق پذیر هم نیست.

تمرین



۱) متحرکی که روی محور x در حال حرکت است دارای معادله $x = t^2 - 2t - 1$ است. سرعت متوسط این متحرک را در فاصله زمانی ۱ تا ۴ و سرعت لحظه ای آن را در لحظه های ۰ و ۱ و ۳ بیابید.

۲) توپ تنیسی را به هوا پرتاب کرده ایم. اگر مسافت پیموده شده توسط توپ بر حسب متر به صورت تابعی از زمان t بر حسب ثانیه به صورت $S = 12t - 3t^2$ باشد. سرعت متوسط توپ را در ۲ ثانیه اول بیابید.

سرعت آن را در لحظه t حساب کنید و در چه ارتفاعی؟ در لحظه $t = 4$ پس از پرتاب وضعیت توپ چگونه است و سرعت آن چقدر است؟

۳) تویی را با سرعت اولیه ۳۰ متر بر ثانیه به هوا پرتاب می کنیم. اگر جهت مثبت فاصله از نقطه ی پرتاب به سمت

بالا باشد معادله ی حرکت به صورت $S = -\frac{1}{2}gt^2 + 30t$ است. بنابراین $x = -4/9t^2 + 30t$ است.

مطلوب است محاسبه:

الف) سرعت لحظه ای توپ در پایان یک ثانیه پس از پرتاب.

ب) سرعت لحظه ای توپ در پایان ۳ ثانیه پس از پرتاب.

📖 درس نامه ۴) قوانین مشتق گیری

- * $y = f(x) = k \Rightarrow y' = 0$
- * $y = f(x) = kx \Rightarrow y' = k$
- * $y = f(x) = x^n \Rightarrow y' = nx^{n-1}$
- * $y = u \pm v \pm w \pm \dots \Rightarrow y' = u' \pm v' \pm w' \pm \dots$
- * $y = u \times v \Rightarrow y' = u' \times v + v' \times u$
- * $y = \frac{u}{v} \Rightarrow y' = \frac{u' \times v - v' \times u}{v^2}$
- * $y = u^n \Rightarrow y' = n \times u' \times u^{n-1}$
- * $y = \sin u \Rightarrow y' = u' \times \cos u$
- * $y = \cos u \Rightarrow y' = u' \times (-\sin u)$
- * $y = \tan u \Rightarrow y' = u' \times (1 + \tan^2 u)$
- * $y = \cot u \Rightarrow y' = -u' \times (1 + \cot^2 u)$
- * $y = \sqrt{u} \Rightarrow y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
- * $y = f \circ g(x) \Rightarrow y' = f'(g(x)) \times g'(x)$
- * $y = \sqrt[n]{u^m} \Rightarrow y' = \frac{mu'}{n \sqrt[n]{u^{n-m}}}$

مثال (۳۹)

مشتق توابع زیر را بیابید.

- 1) $y = \sin 5x \Rightarrow y' = 5 \times \cos 5x$
- 2) $y = 3 \tan^2 5x \Rightarrow y' = 6 \times \tan 5x \times 5(1 + \tan^2 5x)$



تمرین

مشتق توابع زیر را بیابید.

① $y = x(x^2 - x - 1)^3$

② $y = \frac{1}{\cos x + \sin x}$

③ $y = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{4}\right)$

④ $y = \sin^3\sqrt{t}$

⑤ $y = \tan^2 x - 2\cot x$

⑥ $y = \frac{1}{x^2 + 3x + 2}$

⑦ $y = \frac{x}{2x + \sqrt{x}}$

⑧ $y = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$

⑨ $y = \sin x - 2\cos^3(2x)$

⑩ $y = 2\cos^3(x^2 - 5x)$

11) اگر $f(x) = \sqrt{x - x^2}$ باشد مقدار $f'\left(\frac{1}{2}\right)$ را بیابید.

12) مشتق تابع $y = x + \sin\sqrt{x}$ را در نقطه $x = \pi^2$ بیابید.

13) معادله خط قائم بر منحنی $y = x^2 - 3x + 2$ را در محل تلاقی آن با محور عرضها بنویسید.

14) مشتق توابع زیر را به دست آورید.

• $y = \sin^3 2x + 5 \cot x$

• $y = (5x + 1)(x^3 + 4x - 7)$

• $y = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^3}$

• $y = \left(\frac{2x+1}{3x+2}\right)^2$

• $y = \tan(2x^2 + 1) \sin x$

• $y = \sin x - \cos x$

• $y = 3\sin^2 x + 2\cos^3 x$

15) مشتق توابع زیر را در نقطه داده شده بیابید

• $y = 3\cos x \sin 2x, x = \pi$

- $y = \frac{\sin^2 x}{1 + \cos^2 x}, x = 0$
- $y = x + \sin\sqrt{x}, x = \pi^2$
- $y = \frac{1 - \tan\frac{x}{2}}{1 + \tan\frac{x}{2}}, x = \frac{\pi}{2}$

۱۶) مشتق تابع $f(x) = \sqrt{6 - 2x}$ را به دست آورید و دامنه مشتق پذیری آن را مشخص کنید. (خرداد ۹۴)

۱۷) دامنه مشتق پذیری تابع $f(x) = 2x + \sqrt{x}$ را مشخص کنید. (خرداد ۹۵)

۱۸) در جاهای خالی عبارات مناسب قرار دهید. (خرداد ۹۳)

الف) دامنه مشتق پذیری تابع $f(x) = \sqrt{x}$ برابر است با

ب) شیب خط مماس بر نمودار تابع $g(x) = \frac{1}{x}$ در $x=1$ برابر است با

۱۹) مشتق توابع زیر را به دست آورید. (خرداد ۹۴)

- A. $f(x) = \frac{(x-2)^5}{x^2-3x}$
- B. $g(x) = \sqrt{x} \left(\frac{1}{x}\right)$
- C. $h(x) = \cos^2(5x) - \tan(x^3 - 4x)$

۲۰) مشتق توابع زیر را بیابید. (خرداد ۹۵)

- A. $f(x) = \sqrt{\frac{2x-4}{x+5}}$
- B. $g(x) = (1 + \sin 4x)^4 \times \tan \frac{1}{x}$

۲۱) مشتق توابع زیر را به دست آورید. (خرداد ۹۳)

- A. $f(x) = \left(\frac{2x+1}{x}\right)^4$
- B. $g(x) = (\sqrt{5-7x}) \left(4 - \frac{x}{3}\right)$
- C. $h(x) = \tan x - 2\cos^3 x$

۲۲) مشتق توابع زیر را بیابید. (خرداد ۹۲)

- * $f(x) = (3x^4 - 2x + 1)(x^3 + x)$
- * $g(x) = \frac{\sqrt{x^3+1}}{4x-5}$
- * $h(x) = \cot 5x + \cos^3 x$

۲۳) مشتق توابع زیر را به دست آورید. (خرداد ۹۱)

$$* f(x) = \frac{1}{2x+1} + (\sqrt{x})(x+5)$$

$$* g(x) = 4\tan\left(\frac{x}{3}\right) + \cos^3 6x$$

۲۴) مشتق توابع زیر را بیابید. (خرداد ۹۰)

$$* g(x) = (x^5 - 3x)(x+1)^4$$

$$* h(x) = \sin^3\left(\frac{x}{2}\right) - \cot x$$

۲۵) مشتق توابع زیر را به دست آورید. (خرداد ۸۹)

$$* f(x) = (1 - 4x^3)\sqrt{1 + 2x + x^2}$$

$$* g(x) = \frac{-x^2 + x}{\frac{x}{3} + 2}$$

$$* h(x) = \sin^3 2x + 5\cot x$$

۲۶) مشتق توابع زیر را بیابید. (خرداد ۸۸)

$$* f(x) = (x^3 - 2x + 1)^4 + \frac{1}{2x+1}$$

$$* g(x) = \sin\sqrt{x} \cdot \cos 2x$$

$$* h(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^3}$$

۲۷) مشتق تابع های زیر را به دست آورید.

$$* f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 4x}$$

$$* g(x) = 5\sin^2(x-1) - \cot\sqrt{x}$$