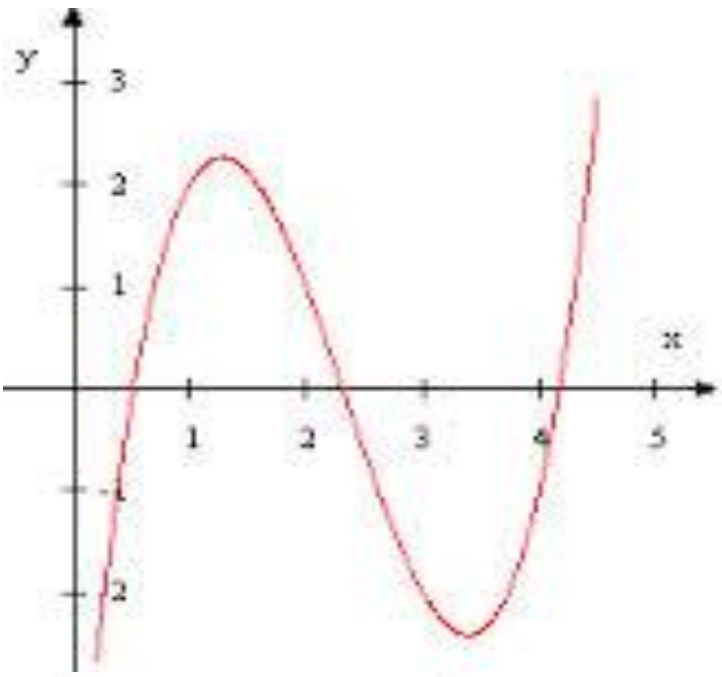
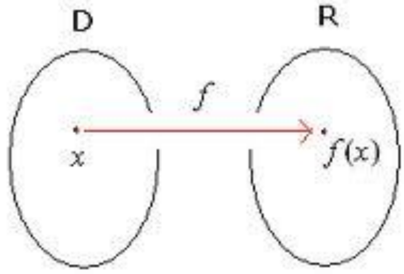
فصل دوم

تابع





بازه ها

نمایش هندسی بازه ها :

اگر نقاط a و b را روی محور اختیار کنیم هر یک از بازه های تعریف شده ی بالا را می توان به وسیله ی یک پاره خط یا یک نیم خط باز یا بسته از محور نشان داد . نقطه هایی را که متعلق به بازه نیستند با دایره های توخالی روی محور مشخص می کنند .

اگر a و b دو عدد حقیقی و a < b باشد ، داریم :

بازه ی باز دو عدد a و b :	$(a,b)=\{x\in\mathbb{R}\ \|a<x<b\}$
بازه ی بسته دو عدد a و b :	$[a,b]=\{x\in\mathbb{R}\ \|a\le x\le b\}$
بازه ی نیم باز از چپ :	$(a,b]=\{x\in\mathbb{R}\ \|a<x\le b\}$
بازه ی نیم باز از راست :	$[a,b)=\{x\in\mathbb{R}\ \|a\le x<b\}$
بازه ی نیم باز a و $+\infty$:	$[a,+\infty)=\{x\in\mathbb{R}\ \|x\ge a\}$
بازه ی باز a و $+\infty$:	$(a,+\infty)=\{x\in\mathbb{R}\ \|x>a\}$
بازه ی نیم باز $-\infty$ و a :	$(-\infty,a]=\{x\in\mathbb{R}\ \|x\le a\}$
بازه ی باز $-\infty$ و a :	$(-\infty,a)=\{x\in\mathbb{R}\ \|x<a\}$

اجتماع و اشتراک بازه ها :

با استفاده از مفهوم اجتماع و اشتراک در مجموعه ها می توان اجتماع و اشتراک بازه ها را به دست آورد ، که یکی از راه های ساده استفاده از محور اعداد است .

نکته : اجتماع بازه ی بسته و باز روی یک عدد ، بسته است و اشتراک بازه ی بسته و باز روی یک عدد باز است .

مثال ۲۳

اگر $A=[-1,3)$ و $B=[2,3]$ باشند آن گاه $A\cup B$ برابر است با .... (۰/۲۵ نمره) (سوال ۱ نهایی دی ماه ۹۲)

تمرین :

۱) اگر $A=\{x\in\mathbb{R}\ |-1<x<3\}$ و $B=\{x\in\mathbb{R}\ |x>0\}$ باشند ، بازه هایی را که با مجموعه های $A\bigcup B$ و $A\bigcap B$ تعریف شده اند مشخص کنید . (۰/۷۵ نمره) (سوال ۴ نهایی دی ماه ۸۹)

۲) اگر $A=\{x\in\mathbb{R}\ |-1<x<3\}$ و $B=\{x\in\mathbb{R}\ |x>0\}$ باشند ، $A\bigcup B$ و $A\bigcap B$ را به صورت بازه نوشته و روی محور اعداد مشخص کنید . (۱/۵ نمره) (سوال ۵ نهایی دی ماه ۹۰)

اجتماع و اشتراک روی سه بازه : در این حالت ابتدا باید بین دو بازه (عبارت داخل پرانتز) اجتماع یا اشتراک را به دست آورده و سپس حاصل را با بازه ی دیگر در نظر می گیریم .

نامعادله ها

حل نامعادله :

حالت اول : نامعادله ای که فقط یک نامساوی دارد .

نمونه : $\frac{1-3x}{2}\le 4$

در چنین سوالاتی ، مثل حل معادله عمل می کنیم . یعنی با توجه به اعداد کنار متغیر ، سعی می کنیم که مجهول را تنها کنیم . دقت کنید که برای از بین بردن اعدادی که با مجهول جمع شده اند ، از تفریق و برای از بین بردن اعداد تفریق شده از جمع استفاده می کنیم و همچنین برای حذف عدد ضرب شده از تقسیم و برای تقسیم از ضرب استفاده می کنیم .

تذکر : در حل نامعادلات جبری ، اگر دو طرف نامعدله را در عددی منفی ضرب یا بر عددی منفی تقسیم کنیم باید جهت نامعدله را تغییر دهیم .

مثال ۲۴

اگر $A=\left\{x\in\mathbb{R}\ |\frac{5}{x}\ge 2\right\}$ و $B=(-1,2)$ باشد آن گاه : (۱/۲۵ نمره) (سوال ۵ نهایی خرداد ماه ۹۳)

الف) جواب مجموعه ی A را تعیین کنید . (راه حل نوشته شود)

ب) مجموعه ی $A\bigcap B$ را به وسیله ی بازه نمایش دهید .

نکته : اگر در نامعادله ها قدر مطلق داشته باشیم می توانیم با کمک قانون زیر قدر مطلق را از بین برده و نامعادله را حل می کنیم .

اگر $|x|<a$ و a مثبت ،آن گاه $-a<x<a$ و اگر $|x|>a$ آن گاه $x<-a$ یا $x>a$ می باشد .

مثال ۲۵

نامعادله ی زیر را حل کنید و مجموعه جواب را به صورت بازه بنویسید .(۱/۵ نمره) (سوال نهایی خرداد ماه ۸۷)

$$\frac{|۲x-۱|}{۳}<۱$$

تمرین :

۳) اگر $A=\left\{x\in\mathbb{R}\ |\ \frac{|x-۲|}{۳}\le\frac{۱}{۲}\right\}$ و $B=[۰,۳)$ باشد حاصل $A\cap B$ را به صورت بازه بنویسید .

(سوال ۱ نهایی خرداد ماه ۸۹)

حالت دوم : نامعادله ای که دو تا نامساوی دارد .

چنین نامعادله هایی را با ۲ روش می توان حل کرد :

روش اول : این روش مانند روش حل حالت اول است .

روش دوم : در این روش هر نامساوی را جدا حل کرده و سپس از بین جواب ها اشتراک می گیریم .

تذکر : زمانی که متغیر (مانند x) در دو طرف یا در سه طرف نامعادله باشد حتما باید از روش دوم استفاده کرد .

مثال ۲۶

۱) مجموعه جواب نامعادله ی مقابل را به صورت بازه نوشته و روی محور نمایش دهید. (۱/۲۵ نمره) (سوال ۱ نهایی شهریور ماه ۸۹)

$$-۱<\frac{۱-۳x}{۲}\le ٤$$

۲) نامعادله ی $۲<\frac{x}{۲}+۱<٤$ را حل کنید و مجموعه ی جواب را روی محور اعداد حقیقی نشان دهید. (۰/۷۵ نمره)

(سوال ۵ نهایی دی ماه ۹۲)

۳) اگر $A=\left\{x\in\mathbb{R}\ |\ -۲\le\frac{x}{۲}-۱<۲\right\}$ و $B=[۰,۷)$ باشد ، حاصل $A\cap B$ را روی محور نمایش دهید .

(۱ نمره) (سوال ۱ نهایی خرداد ماه ۸۸)

۴) نامعادله ی $\frac{4x-3}{x} > 3$ را حل کرده و مجموعه جواب را به صورت بازه نمایش دهید. (۱/۲۵ نمره) (سوال ۵ نهایی دی ماه ۹۳)

تمرین :

۴) نامعادله ی زیر را حل کرده و مجموعه جواب را به صورت بازه نشان دهید . (۰/۷۵ نمره) (سوال نهایی خرداد ماه ۸۵)

$$-\frac{1}{2} < 2-2x < x-1$$

۵) اگر $A=\left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{2x-2}{3} \geq -2\right\}$ و $B=\{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \leq 7\}$ باشد ، مجموعه های زیر را به وسیله ی بازه نمایش دهید . (۱/۲۵ نمره) (سوال ۴ نهایی شهریور ماه ۹۲)

الف) A   ب) B   ج) A-B   د) $A \cap B$

معادلات و نامعادلات شامل عبارات گویا :

معادلاتی که به صورت کسری باشند به نام معادلات گویا معروفند .

دستور حل این معادلات : برای حل این گونه معادلات ، ابتدا مخرجهای کسرها را در صورت امکان از روشهای تجزیه و فاکتورگیری تجزیه می کنیم سپس کوچکترین مضرب مشترک را تعیین کرده و مخرج کسرها را از بین می بریم ، سپس نامعادله را با توجه به مثال های قبل حل می کنیم . دقت کنید که باید ریشه های مخرج را از مجموعه جواب بدست آمده حذف کنیم .

تذکر : جواب های بدست آمده از معادله های گویا نباید مخرج هیچ یک از کسرها را صفر کنند .

برای محاسبه ی کوچکترین مضرب مشترک (ک . م . م) مخرج کسرها ، کافی است در صورت امکان مخرج هر کسر را تجزیه کنیم ، سپس حاصل ضرب عوامل مشترک با نمای (توان) بزرگتر در عوامل غیر مشترک را به دست آوریم .

مثال ۲۷

۱) معادله ی $\frac{x}{x-1}+\frac{3}{x^2-1}=\frac{x-2}{x+1}$ را حل کنید . (۱ نمره)

(سوال ۵ نهایی شهریور ماه ۹۰)
(سوال ۴ نهایی شهریور ماه ۹۱)

۲) به ازای چه مقدار a، معادله ی $\frac{x+a}{x}-\frac{x}{x+a}=\frac{4a}{x+a}$ دارای جواب $x=1$ است؟ (۱/۲۵نمره) (سوال ۵ نهایی خرداد ماه ۹۴)

تمرین :

۶) معادله ی رو به رو را حل کنید . (۱ نمره) (سوال نهایی خرداد ماه ۸۹)

$$\frac{3x-2}{x}+\frac{2x+5}{x+3}=5$$

نامعادله های شامل عبارت های گویا :

برای حل این نامعـادله ها ، ابتدا همه ی عبارت های جبـری را به یک طـرف نامعادله منتقل می کنیم ، سپس با مخـرج مشترک گیری و ساده کردن عبارت های جبری به دست آمده به نامعادله هایی نظیر $\frac{P(X)}{Q(X)}\le$. یا ... می رسیم (کـه در آن صورت و مخرج کسر چندجمله ای بر حسب متغیر x هستند) سپس برای یافتن مجموعه جواب هر یک از نامعادله های بالا (برای مثال $\frac{P(X)}{Q(X)}>0$) عبارت $\frac{P(X)}{Q(X)}$ را در یک جدول تعیین علامت می کنیـم و در این حالت قسمت هایی از جدول تعیین علامت که به ازای آن ها عبارت فوق مثبت هستند ، مجموعه جواب نامعادله است .

مثال ۲۸

۱) مجموعه جواب نامعادله ی زیر را به صورت بازه نوشته و روی محور نمایش دهید .(۰/۷۵ نمره) (سوال ۱ نهایی شهریور ماه ۸۹)

$$-1<\frac{1-3x}{2}\le 4$$

۲) نامعادله ی $\frac{6-x^2}{x}>1$ را حل کرده و مجموعه ی جواب را به صورت بازه نشان دهید.(۱/۵ نمره) (سوال ۴ نهایی دی ماه ۹۱)

۳) نامعادله ی $\frac{x}{x+1}-\frac{x-1}{x}\ge -1$ را حل کرده وجواب را به صورت بازه نشان دهید.(۱/۷۵ نمره) (سوال ۵ نهایی خرداد ماه ۹۰)

۴) نامعادله ی $\frac{2x-1}{x+2}\le x-2$ را حل کنید و سپس مجموعه جواب آن را به صورت بازه بنویسید . (۱/۷۵ نمره)

(سوال ۴ نهایی خرداد ماه ۹۱)

۵) نامعدله ی $\frac{1}{x-2}\le\frac{x+2}{2x-1}$ را حل کنید و مجموعه ی جواب را به صورت بازه نشان دهید . (۱/۵ نمره)

(سوال ۴ نهایی خرداد ماه ۹۲)

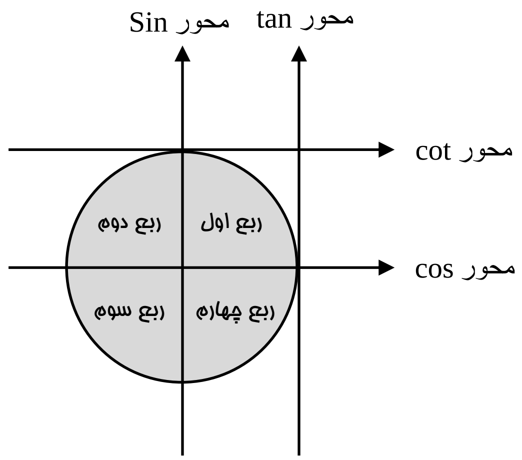
تمرین :

۷) نامعادله ی $\frac{2x^2-16}{x^2+3x+2}<1$ را حل کرده و جواب آن را روی محور نشان دهید . (۱/۵ نمره) (سوال ۵ نهایی دی ماه ۸۹)

۸) نامعادله ی $\frac{8}{x^2-16}>\frac{5}{x+4}+\frac{3}{x-4}$ را حل کنید . (۱/۷۵ نمره) (سوال ۶ نهایی دی ماه ۹۰)

مثلثات

دایره مثلثاتی :



ربع اول دایره مثلثاتی : sin و cos و tan و cot زاویه های واقع در ربع اول مثبت می باشد .

ربع دوم دایره مثلثاتی : sin مثبت و cos و tan و cot زاویه های واقع در ربع دوم منفی می باشد .

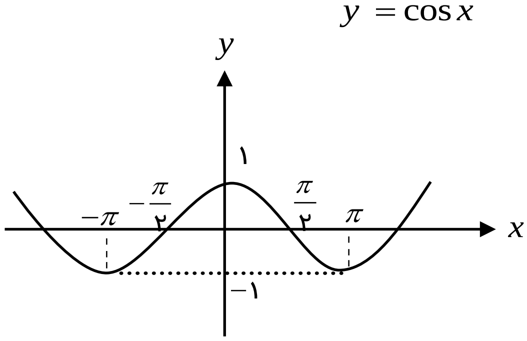
ربع سوم دایره مثلثاتی : sin و cos منفی و tan و cot زاویه های واقع در ربع سوم مثبت می باشد .

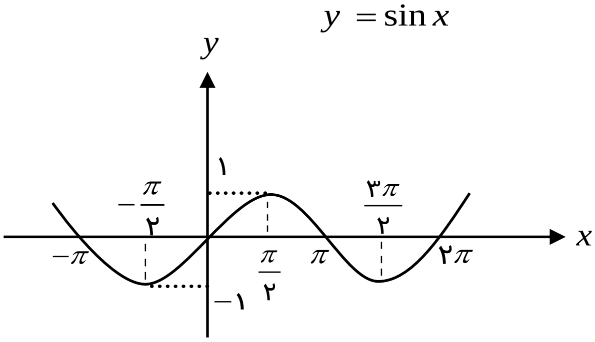
ربع چهارم دایره مثلثاتی : cos مثبت و sin و tan و cot زاویه های واقع در ربع چهارم منفی می باشد .

یاد آوری :

توابع $y = \sin x$ و $y = \cos x$:

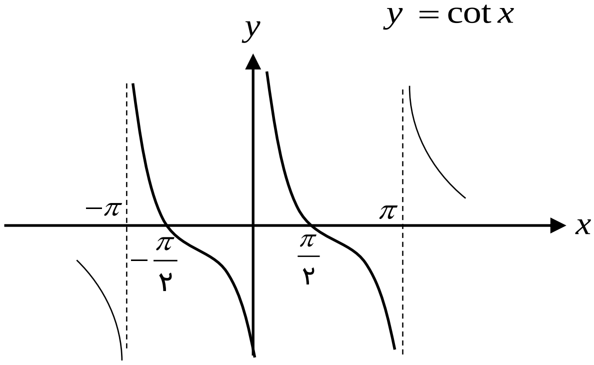
نمودار این دو تابع را در دو شکل زیر مشاهده می کنید . چنان که می بینید دو نمودار شباهت هایی دارند ، هر دو دارای بیشترین مقدار ۱ و کمترین مقدار ۱- هستند .

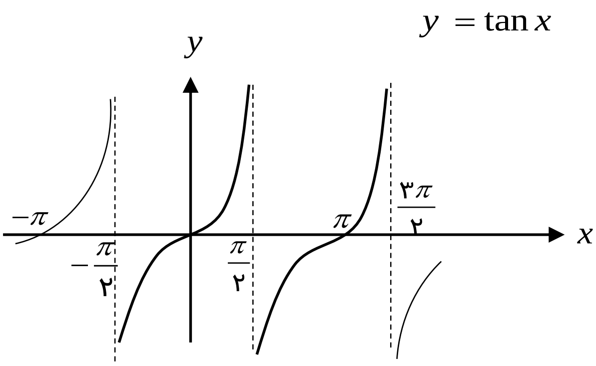




توابع $y = \tan x$ و $y = \cot x$:

در شکل های زیر نمودار این دو تابع را رسم کرده ایم . چنان که می بینید نمودار این دو تابع شبیه یکدیگر است .در واقع اگر نمودار $y = \tan x$ را نسبت به محور yها قرینه کنیم و سپس آن را به اندازه ی $\frac{\pi}{۲}$ واحد به راست منتقل کنیم به نمودار $y = \cot x$ می رسیم . این نتیجه معادل اتحاد $\cot x = \tan\left(\frac{\pi}{۲} - x\right)$ است .





از نکات قابل توجه در نمودارهای دو تابع بالا وجود خط چین های عمودی است . می دانیم دامنه ی این توابع نیست . به همین دلیل برای بعضی مقادیر تعریف نشده اند ، در این مقادیر خط چین های عمودی رسم شده اند . اصطلاحاً به این خط چین های عمودی " مجانب قائم " می گوییم . می بینید که وقتی به این خطوط نزدیک می شویم ، مقدار تابع به سرعت زیاد یا به سرعت کم می شود (اصطلاحاً به $+\infty$ یا $-\infty$ میل می کند) .

نکته : ویژگی های اصلی نمودارهای $y = \tan x$ و $y = \cot x$:

۱) تابع $y = \tan x$ مجانب های قائمی در نقاط $x = n\pi + \frac{\pi}{۲}$ دارد و تابع $y = \cot x$ در نقاط $x = n\pi$

$(n \in Z)$. به ازای این مقادیر توابع تعریف نشده اند .

۲) دوره ی تناوب هر دو تابع برابر π است .

اگر α یک زاویه ی دلخواه باشد آن گاه :

$\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{۱}{\tan\alpha}$	$\sin^{۲}\alpha + \cos^{۲}\alpha = ۱$
$۱ + \tan^{۲}\alpha = \dfrac{۱}{\cos^{۲}\alpha}$	$\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

نکته : ۱) $\tan$ و $\cot$ قابل تعریف برای یک زاویه ، همواره هر دو هم علامت می باشند .

۲) در زاویه هایی که مقدار $\tan$ صفر است مقدار $\cot$ تعریف نشده خواهد بود و بالعکس . یعنی هر جا که مقدار $\cot$ صفر است مقدار $\tan$ تعریف نشده خواهد بود ، زیرا $\tan$ و $\cot$ بر عکس یکدیگرند .

دامنه توابع مثلثاتی :

دامنه توابع $\sin$ و $\cos$ برابر با تمام اعداد حقیقی یعنی R است .

دامنه تابع $\tan$ برابر است با : $R - \left\{ k\pi + \dfrac{\pi}{۲} \mid k \in z \right\}$

دامنه تابع $\cot$ برابر است با : $R - \left\{ k\pi \mid k \in z \right\}$

محاسبه ی برخی نسبت های مثلثاتی $(\alpha + \beta)$:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin ۲\alpha = ۲\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos ۲\alpha = \cos^{۲}\alpha - \sin^{۲}\alpha = ۲\cos^{۲}\alpha - ۱ = ۱ - ۲\sin^{۲}\alpha$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

مثال ۲۹

۱) دامنه ی تابع زیر را بیابید . (۱ نمره) $g(x)=\cot\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)$

(سوال ۲ نهایی شهریور ماه ۸۹)

۲) اگر α زاویه ای حاده و β زاویه ای منفرجه باشد و $\sin\alpha=\frac{1}{3}$ و $\sin\beta=\frac{2}{5}$ آن گاه حاصل $\sin(\alpha+\beta)$ را بدست آورید . (۱/۵ نمره) (سوال ۶ نهایی دی ماه ۹۱)

۳) مقدار $\cos 75^\circ$ را محاسبه کنید . (۱/۲۵ نمره) (سوال ۸ نهایی شهریور ماه ۹۱)

۴) درستی رابطه ی مقابل را نشان دهید . (۰/۷۵ نمره) $\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\sin\beta$

(سوال ۵ نهایی خرداد ماه ۹۱)

۵) اگر $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ و α زاویه ای منفرجه باشد ، حاصل $\tan 2\alpha$ را به دست آورید . (۱/۲۵ نمره) (سوال ۵ نهایی خرداد ماه ۹۲)

۶) فرض کنید $\sin\alpha=\frac{4}{5}$ و α زاویه ای حاده باشد، حاصل $\cos 2\alpha$ را بدست آورید. (۰/۷۵ نمره) (سوال ۶ نهایی دی ماه ۹۳)

۷) درستی برابری زیر را ثابت کنید. (۱ نمره) (سوال ۶ نهایی خرداد ماه ۹۴)

$$\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=\tan\alpha$$

تمرین :

۹) اگر $\sin\alpha = \frac{۳}{۵}$ و $\cos\beta = \frac{۵}{۱۳}$ و α منفرجه و β حاده باشند ، حاصل $\sin(\alpha+\beta)$ را به دست آورید .

(۱/۵ نمره) (سوال ۸ نهایی دی ماه ۹۲)

۱۰) فرض کنید $\tan\alpha = \frac{۳}{٤}$ و α زاویه ای حاده باشد . حاصل $\sin ۲\alpha$ را به دست آورید . (۱/۲۵ نمره)

(سوال ۶ نهایی خرداد ماه ۹۳)

۱۱) دامنه ی تابع $f(x) = \tan\left(x + \frac{\pi}{۳}\right)$ را به دست آورید . (۰/۷۵ نمره) (سوال ۷ نهایی خرداد ماه ۹۰)

۱۲) درستی تساوی زیر را ثابت کنید . (۰/۷۵ نمره) (سوال ۶ نهایی شهریور ماه ۹۲)

$$\frac{\sin x}{۱+\cos x} = \tan\frac{x}{۲}$$

تابع

زوج مرتب :

هر دو تایی که بتوان آن را روی صفحه مختصاتی نشان داد به عنوان زوج مرتب تعریف می شود . هر زوج مرتب به صورت

(x , y) می باشد که x نشان دهنده ی طول و y نشان دهنده ی عرض نقطه است .

تساوی دو زوج مرتب : دو زوج مرتب (a , b) و (c , d) را مساوی گویند هر گاه a = c و b = d .

رابطه : به مجموعه ای از زوج مرتب ها رابطه می گوییم .

تابع به عنوان مجموعه ای از زوج های مرتب :

تابع رابطه ای است که در آن هیچ دو زوج متمایزی دارای مختص اول برابر نیست . اگر دو زوج دارای مختص های اول برابر

باشند آن گاه مختص های دوم آن ها نیز مساوی خواهد بود .

مثال ۳۰.

مقادیر a و b را چنان بیابید که مجموعه ی $g = \{ (-1 , b+۳) , (۷ , ۱) , (-۱ ,۴ - a) , (a , ۷) \}$ یک تابع باشد .

(۰/۷۵ نمره) (سوال ۶ نهایی خرداد ماه ۹۰)

مقدار تابع :

معمولا از x برای نشان دادن متغیر ، از f برای نشان دادن تابع و از y یا f (x) برای نشان دادن مقدار تابع استفاده می کنیم .

نکته : هر نقطه ای که مختصاتش در معادله ی $y = f (x)$ صدق کند ، بر نمودار تابع f قرار دارد و برعکس ، اگر نقطه ای بر نمودار تابع f واقع باشد مختصاتش در معادله ی فوق صدق خواهد کرد .

سوالات مربوط به مبحث تابع در سه دسته قابل تقسیم بندی هستند :

دسته ی اول

معلوماتی درباره ی نمودار تابع (از قبیل محل برخورد نمودار تابع با محورهای مختصات و نیز یک نقطه از نمودار تابع) بیان می شود که به کمک این معلومات باید مقادیر مجهول خواسته شده را بیابیم .

مثال ۳۱

۱) مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که سهمی $f (x) = ax^۲ + bx$ از نقطه ی (۳ , ۵) بگذرد و تساوی $f (-1) = ۳$ برقرار باشد .(۱/۲۵ نمره) (سوال ۸ نهایی دی ماه ۹۱)

۲) اگر $f (x) = ax^۲ + bx + c$ ، a و b و c را طوری بیابید که این سهمی محور y ها را در نقطه ای به عرض ۳ و محور x ها را در نقطه ای به طول ۱ قطع کند و از نقطه ی A (۲ , ۳) نیز بگذرد . (۱/۲۵ نمره) (سوال ۹ نهایی دی ماه ۹۲)

۳) سهمی به معادله ی $f (x) = ax^۲ + bx + c$ مفروض است. اگر نمودار آن محور yها را در نقطه ای به عرض -۱ و محور x ها را در نقطه ای به طول ۱ قطع کند و داشته باشیم $f (۲) = ۳$ ، مقادیر a و b و c را بیابید . (۱/۲۵ نمره)

(سوال ۹ نهایی شهریور ماه ۹۰)

۴) سهمی به معادله ی $f(x) = ax^{۲} + bx + c$ مفروض است . مقادیر a و b و c را طوری بیابید که این سهمی محور y ها را در نقطه ای به عرض ۱ و محور x ها را در نقطه ای به طول ۱- قطع کند و از نقطه ی M (۱ , ۴) نیز بگذرد .

(۱/۷۵ نمره) (سوال ۵ نهایی شهریور ماه ۹۱)

۵) در تابع $y = ax^{۲} + bx - ۲$ مقادیر a و b را طوری بیابید که نمودار تابع از نقطه ی A (-۱ , ۲) بگذرد و محور x ها را در نقطه ای به طول ۱ قطع کند . (۱ نمره) (سوال ۸ نهایی خرداد ماه ۹۲)

تمرین :

۱۳) دو تابع $y = x^{۲} + ax - ۳b$ و $y = -x + b$ داده شده اند . مقادیر a و b را چنان محاسبه کنید که نمودارهای این دو تابع روی محور x ها در نقطه ای به طول ۱ همدیگر را قطع کنند . (۱ نمره) (سوال ۸ نهایی خرداد ماه ۹۳)

۱۴) اگر $f(x) = ax^{۲} + bx + c$ ، مقادیر a و b و c را طوری بیابید که این سهمی محور y ها را در نقطه ای به عرض ۴ و محور x ها را در نقطه ای به طول ۱- قطع کند و از نقطه ی (۲ , ۱) نیز بگذرد . (۱/۷۵ نمره) (سوال ۶ نهایی خرداد ماه ۹۱)

۱۵) در تابع $y = x^{۲} + ax + b$ مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که نمودار تابع محور طول ها را در نقطه ی ۲ قطع کرده و داشته باشیم : f (-۲) = ۶ (۱/۵ نمره) (سوال ۲ نهایی دی ماه ۸۸)

دسته ی دوم

رسم نمودار تابع

برای رسم نمودار یک تابع کافی است مختصات چند نقطه از آن را به دست آوریم و نمودار تابع را در دستگاه مختصات رسم کنیم . اگر ضابطه ی تابع به صورت $y = ax + b$ (تابع درجه ی اول) باشد ، نمودار آن یک خط راست خواهد بود و اگر نمودار تابع به صورت $y = ax^{۲} + bx + c$ (تابع درجه ی دوم) باشد ، نمودار آن سهمی می باشد .

تذکر : نمودار برخی از توابع درجه ی دوم را می توان به کمک انتقال تابع با ضابطه ی $y = x^{۲}$ رسم کرد

تعریف تابع چندضابطه ای : در برخی توابع مقدار تابع با یک ضابطه مشخص نمی شود و دامنه ی تابع ، اجتماع دو یا چند مجموعه ی جدا از همی باشد . به این نوع توابع ، توابع چندضابطه ای می گویند .

دسته ی سوم

یافتن مقدار تابع در یک نقطه

برای یافتن (محاسبه ی) مقدار تابع در یک نقطه مانند x ، با توجه به ناحیه ای که x در دامنه ی آن قرار دارد مقدار تابع را محاسبه می کنیم . (برای بدست آوردن مقدار تابع در یک نقطه با توجه به ضابطه ی تعریف تابع مقدار تابع را به ازای نقطه ی موردنظر به دست می آوریم.)

مثال ۳۲

۱) نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}1+x^{2} & x\geq 0\\ 1-\dfrac{x}{2} & x<0\end{cases}$ را رسم کرده ، سپس $f(f(-4))$ را به دست آورید . (۱ نمره)

(سوال ۷ نهایی خرداد ماه ۹۱)

۲) تابع $f(x)=\begin{cases}1+x & x<-1\\ x^{2} & x\geq -1\end{cases}$ را در نظر بگیرید . (۱ نمره) (سوال ۶ نهایی دی ماه ۹۲)

الف) نمودار تابع f را رسم کنید . ب) دامنه ی تابع f را به دست آورید .

۳) تابع $f(x)=\begin{cases}1-x^{2} & x\geq 0\\ x-3 & x<0\end{cases}$ مفروض است ، $f(f(2))$ را محاسبه کنید . (۰/۷۵ نمره)

(سوال ۶ نهایی شهریور ماه ۹۱)

۴) نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}x & x\geq 1\\ 4-x^{2} & x<1\end{cases}$ را رسم کنید . (۱/۷۵ نمره) (سوال ۹ نهایی خرداد ماه ۹۰)

۵) تابع $f(x)=\begin{cases}x^{2}-1 & x\geq 1\\ x & x\leq 0\end{cases}$ داده شده است . (۱/۲۵ نمره) (سوال ۹ نهایی شهریور ماه ۹۲)

الف) نمودارتابع f را رسم کنید . ب) مقدار $f(f(1))$ را به دست آورید .

۶) تابع $f(x)=\begin{cases} x^{2}+3 & x<0 \\ x-1 & x\geq 0 \end{cases}$ داده شده است .(۱/۷۵ نمره) (سوال ۹ نهایی خرداد ماه ۹۲)

الف) نمودار تابع f را رسم کنید . ب) حاصل $f(f(-1))$ را بدست آورید .

۷) تابع $f(x)=\begin{cases} 4-x^{2} & x<0 \\ x+4 & x\geq 0 \end{cases}$ داده شده است. (۱ نمره) (سوال ۷ نهایی دی ماه ۹۳)

الف) نمودار تابع را رسم کنید. ب) مقدار $f\left(f\left(-1\right)\right)$ را محاسبه کنید.

۸) تابع $f(x)=\begin{cases} 1-x^{2} & x\geq 0 \\ -x+2 & x<0 \end{cases}$ داده شده است. (۱ نمره) (سوال ۷ نهایی خرداد ماه ۹۴)

الف) نمودار تابع f را رسم کنید. ب) مقدار $f\left(f\left(-2\right)\right)$ را محاسبه کنید.

تمرین :

۱۶) تابع $f(x)=\begin{cases} 2+x^{2} & x<0 \\ 2 & x>0 \end{cases}$ را در نظر بگیرید . (۱ نمره) (سوال ۷ نهایی خرداد ماه ۹۳)

الف) نمودار تابع f را رسم کنید . ب) دامنه ی تابع f را به دست آورید .

۱۷) تابع با ضابطه ی $f(x)=\begin{cases} 2x+1 & x\geq 1 \\ x^{2} & x<1 \end{cases}$ را در نظر بگیرید . (۱ نمره) (سوال ۶ نهایی دی ماه ۸۹)

الف) نمودار تابع f را رسم کنید . ب) حاصل $f(f(-1))$ را به دست آورید .

مولف: **حمید اصلانی** ۰۹۳۰۲۰۱۰۳۹۹ (فقط پیام) @math۳۰۲۰۱۰ و مشاهده ویدیوهای آموزشی در آپارات

۱۸) اگر $f(x)=\frac{x-۲}{x+۲}$ باشد ، $f(\frac{-٤}{x})$ را به دست آورید و درستی تساوی $f(x)\times f(\frac{-٤}{x})=-۱$ را بررسی نمایید . ($x\neq \pm ۲,۰$) (۱/۲۵ نمره) (سوال ۲ نهایی خرداد ماه ۸۹)

۱۹) ضابطه ی تابع f به صورت $f(x)=\begin{cases} ax-۳ & x<۰ \\ ۲bx^{۲} & x\geq ۰\end{cases}$ می باشد . مقادیر a و b را طوری بیابید که f (-۲) =۳ و نمودار تابع از نقطه ی (۳ -, ۲) A بگذرد . (۱/۵ نمره) (سوال ۳ نهایی خرداد ماه ۸۹)

روش محاسبه ی دامنه ی تعریف ضابطه ها

تابع	دامنه ی تابع
۱ – توابع چند جمله ای $f(x)=ax^{n}+bx^{n-۱}+...+c$	مجموعه ی اعداد حقیقی $D_f=\mathbb{R}$
۲ - توابع کسری گویا که صورت و مخرج آن ها چند جمله ای باشند. به طور کلی $y=\frac{f(x)}{g(x)}$	$D=\mathbb{R}-\{$ ریشه های مخرج $\}$
۳ – توابع رادیکالی با فرجه ی زوج $f(x)=\sqrt[۲n]{p(x)}$	$D_f=p(x)\geq ۰$
۴ – توابع رادیکالی با فرجه ی فرد $f(x)=\sqrt[۲n+۱]{p(x)}$	دامنه ی این تابع همان دامنه ی عبارت زیر رادیکال است.
۵ – توابع به صورت قدر مطلق $f(x)=\lvert p(x)\rvert$	دامنه ی تابع با دامنه ی عبارت داخل قدرمطلق برابراست.
۶ – توابع کسری با مخرج رادیکالی و فرجه ی زوج $y=\frac{f(x)}{\sqrt[۲n]{g(x)}}$	$D_y=g(x)>۰$

۷ – دامنه توابع لگاریتمی $y=\log_{g(x)} f(x)$	$\begin{cases} f(x)>۰ \\ g(x)>۰ \Rightarrow D_y = \\ g(x)\neq ۱ \end{cases}$ اشتراک در هر سه شرط
۸ – دامنه توابع مثلثاتی $f(x)=\sin x$ یا $\cos x$	$D_f=\mathbb{R}$ مجموعه اعداد حقیقی
۹ – توابع $y=\cos(f(x))$ و $y=\sin(f(x))$	$D_y=D_f$
۱۰ – تابع $f(x)=\tan x$	$D_f=\left\{x\in\mathbb{R} \mid x\neq k\pi+\frac{\pi}{۲}\right\}$
۱۱ – تابع $f(x)=\cot x$	$D_f=\{x\in\mathbb{R} \mid x\neq k\pi\}$
۱۲ – تابع $y=\tan f(x)$	$D_y=\left\{x\in\mathbb{R} \mid f(x)\neq k\pi+\frac{\pi}{۲}\right\}$
۱۳ – تابع $y=\cot f(x)$	$D_y=\{x\in\mathbb{R} \mid f(x)\neq k\pi\}$
۱۴ – دامنه ی توابع چندضابطه ای برابر با اجتماع دامنه ی ضابطه ها است.	$f(x)=\begin{cases} g_۱(x) & x\in D_۱ \\ g_۲(x) & x\in D_۲ \end{cases} \Rightarrow D_f=D_۱\cup D_۲$

مثال ۳۳

۱) دامنه ی تابع $f(x)=\tan\left(x+\frac{\pi}{۳}\right)$ را به دست آورید. (۰/۷۵ نمره) (سوال ۷ نهایی خرداد ماه۹۰)

۲) دامنه ی توابع زیر را به دست آورید. (۰/۵ نمره) (سوال ۷ نهایی دی ماه ۹۰)

ب) $g(x)=\dfrac{-۵}{\sqrt[۳]{x+۱}}$

الف) $f(x)=\sin\dfrac{۱}{x+۲}$

۳) دامنه ی تعریف تابع $f(x)=\dfrac{x+۵}{x^۲-۲x-۳}$ را تعیین کنید. (۰/۵ نمره) (سوال نهایی دی ماه ۸۷)

۴) دامنه ی تابع زیر را به دست آورید. (۰/۵ نمره) (سوال ۷ نهایی خرداد ماه ۹۲)

$$f(x)=\frac{x+۵}{x^۲-۴x+۴}$$

تمرین :

۲۰) دامنه ی توابع زیر رابه دست آورده و به صورت بازه نشان دهید . (۱/۷۵ نمره) (سوال ۷ نهایی شهریور ماه ۹۰)

الف) $f(x)=\log\left(x^{۲}-۲x-۳\right)$ ب) $g(x)=\frac{x}{\sqrt{۲x-۱}}$

۲۱) دامنه ی تعریف تابع $f(x)=\frac{\sqrt{٤-x^{۲}}}{|x|}$ را به دست آورید . (۰/۵ نمره) (سوال نهایی خرداد ماه ۸۷)

۲۲) دامنه ی توابع زیر را به دست آورید . (۰/۷۵ نمره) (سوال ۲ نهایی شهریور ماه ۸۹)

الف) $f(x)=\sqrt{۲x-x^{۲}}$ ب) $g(x)=\cot\left(۲x-\frac{\pi}{۲}\right)$

اعمال جبری روی توابع

اعمال روی توابع :

۱ – مجموع ، تفاضل ، حاصل ضرب و خارج قسمت دو تابع حقیقی :

اگر f و g دو تابع باشند ، آن گاه توابع حاصل از چهار عمل اصلی و دامنه ی آن ها به صورت زیر تعریف می شوند .

$D_{f+g}=D_f\cap D_g$	$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$
$D_{f-g}=D_f\cap D_g$	$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$
$D_{f.g}=D_f\cap D_g$	$(f.g)(x)=f(x).g(x)$
$D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x\in D_g : g(x)=۰\}$	$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$

مثال ۳۴

۱) دو تابع $f(x)=\sqrt{x+3}$ و $g(x)=4-x$ مفروض اند . (۰/۷۵ نمره) (سوال ۷ نهایی دی ماه ۹۱)

مقدار $\frac{3g(0)-f(6)}{3}$ را محاسبه کنید .

۲) توابع $f(x)=\sqrt{1-x}$ و $g(x)=x^2$ داده شده اند . (۰/۷۵ نمره) (سوال ۷ نهایی دی ماه ۹۲)

مقدار $f(-3)+2g(1)$ را محاسبه کنید .

۳) توابع $f(x)=\frac{3x}{x-1}$ و $g(x)=\sqrt{x}$ داده شده اند . (۰/۵ نمره) (سوال ۹ نهایی خرداد ماه ۹۳)

مقدار $\left(\frac{f-g}{2g}\right)(4)$ را محاسبه کنید .

۴) توابع $f(x)=x-1$ و $g(x)=\sqrt{x+2}$ داده شده اند . (۱/۵ نمره) (سوال ۷ نهایی شهریور ماه ۹۱)

الف) دامنه توابع $f(x)$ و $g(x)$ را به دست آورید . ب) دامنه تابع $f\times g$ را به دست آورید .

۵) دو تابع $f(x)=3x^2-1$ و $g(x)=\frac{x}{x^2-4}$ داده شده اند . (۰/۵ نمره) (سوال ۸ نهایی خرداد ماه ۹۰)

مقدار $(f-3g)(1)$ را محاسبه کنید .

۶) دو تابع $f(x)=x^2-9$ و $g(x)=\frac{1}{x}$ مفروض اند . (۱ نمره) (سوال ۳ نهایی دی ماه ۸۸)

حاصل $(f+g)(1)$ را به دست آورید .

تمرین :

۲۳) اگر توابع $f(x)=\sqrt{x+7}$ و $g(x)=x^2-1$ باشند .مطلوب است : (۱ نمره) (سوال ۸ نهایی دی ماه ۹۰)

الف) محاسبه ی مقدار $(2f+g)(2)$ ب) تعیین دامنه ی f و g و $\frac{f}{g}$ (با استفاده از تعریف)

۲۴) اگر $f(x)=۳x+۵$ و $g(x)=\dfrac{x}{x^{۲}-۴}$ ، دامنه و ضابطه ی تابع $\dfrac{f}{g}$ را تعیین کنید. (۰/۷۵ نمره)
(سوال ۸ نهایی دی ماه ۸۹)

۲۵) توابع $f(x)=-۲$ و $g(x)=x^{۲}+۱$ داده شده اند . (۱/۵ نمره) (سوال ۶ نهایی شهریور ماه ۹۰)

الف) نمودار تابع $f+g$ را رسم کنید . ب) مقدار $(f.g)(-۳)$ را محاسبه کنید .

۲ – ترکیب دو تابع حقیقی

اگر f و g دو تابع باشند ، آن گاه ترکیب آن ها به صورت زیر خواهد بود :

$D_{fog}=\{x\in D_g : g(x)\in D_f\}$	$(fog)(x)=f(g(x))$
$D_{gof}=\{x\in D_f : f(x)\in D_g\}$	$(gof)(x)=g(f(x))$

تذکر : برای یافتن دامنه ی تابع fog ، دامنه ی f را پیدا می کنیم و به جای x آن g(x) را قرار داده و نامعادله ی به دست آمده را حل می کنیم و سپس جواب آن را با دامنه ی g اشتراک می گیریم .

نکته :

۱) اگر دامنه ی تعریف تابع f ، $\mathbb{R}$ (مجموعه ی اعداد حقیقی) باشد آن گاه : $D_{fog}=D_g$

۲) اگر دامنه ی تعریف تابع g ، $\mathbb{R}$ (مجموعه ی اعداد حقیقی) باشد آن گاه : $D_{gof}=D_f$

توجه : برای به دست آوردن اعضای fog با استفاده از توابع f و g که به صورت زوج مرتب تعریف شده اند ، از نکته ی مقابل بهره می بریم : $(a,b)\in g\,,(b,c)\in f\ \Rightarrow (a,c)\in fog$

یافتن ضابطه ی یکی از توابع f و g و fog وقتی دو تای آن ها معلوم باشد :

۱) اگر f و g معلوم باشد ، کافی است در معادله ی f به جای x ، g(x) را قرار دهیم .

۲) اگر f و fog معلوم باشد ، کافی است در ضابطه ی f به جای x ، g(x) را قرار داده و سپس حاصل را با ضابطه ی fog مساوی قرار دهیم تا ضابطه ی g به دست آید .

۳) اگر g و fog معلوم باشد ، با فرض $t = g(x)$ ، x را بر حسب t حساب کرده و آن را در ضابطه ی fog قرار می دهیم

تا ضابطه ی f به دست آید .

نمونه :

اگر $g(x) = ۲x + ۱$ و $fog(x) = x + ۱$ آن گاه ضابطه ی f به صورت زیر به دست می آید .

$$g(x) = t = ۲x + ۱ \Rightarrow x = \frac{t-۱}{۲}$$

$$fog(x) = \frac{t-۱}{۲} + ۱ = \frac{t+۱}{۲} = \frac{g(x)+۱}{۲} \Rightarrow f(x) = \frac{x+۱}{۲}$$

مثال ۳۵

۱) توابع $f(x) = \frac{۳x}{x-۱}$ و $g(x) = \sqrt{x}$ داده شده اند . (۲/۵ نمره) (سوال ۹ نهایی خرداد ماه ۹۳)

الف) تابع fog را تشکیل دهید .

ب) دامنه ی تابع fog را با استفاده از تعریف به دست آورید.

ج) مقدار $\left(\frac{f-g}{۲g}\right)(٤)$ را محاسبه کنید .

۲) توابع $f(x) = x - ۱$ و $g(x) = \sqrt{x+۲}$ داده شده اند . (۱/۷۵ نمره) (سوال ۷ نهایی شهریور ماه ۹۱)

الف) دامنه توابع f (x) و g(x) را به دست آورید .

ب) دامنه تابع $f \times g$ را به دست آورید .

ج) ضابطه ی gof را بنویسید .

۳) اگر $f(x) = x + a$ و $g(x) = x^۲ + bx$ باشد ، a و b را طوری تعیین کنید که داشته باشیم : (۱ نمره)

(سوال ۸ نهایی شهریور ماه ۹۲)

$$fog(x) = x^۲ + ٤x + ۱$$

۴) اگر $f(x) = x + ۳$ و $g(x) = \sqrt{۱-x}$ دو تابع باشند . (۱/۷۵ نمره) (سوال ۸ نهایی خرداد ماه ۹۱)

الف) دامنه f و g را به دست آورید .

ب) دامنه تابع gof را با استفاده از تعریف محاسبه کنید .

ج) ضابطه fog را بنویسید .

تمرین :

۲۶) دوتابع $f(x) = ۳x^{۲} - ۱$ و $g(x) = \frac{x}{x^{۲} - ٤}$ داده شده اند . (۲/۲۵ نمره) (سوال ۸ نهایی خرداد ماه۹۰)

الف) ضابطه ی تابع gof و دامنه ی gof را با استفاده از تعریف تعیین کنید .

ب) مقدار $(f - ۳g)(۱)$ را محاسبه کنید .

۲۷) دو تابع $f(x) = x - ۲$ و $g(x) = \sqrt{x + ۱}$ داده شده اند . (۱/۷۵ نمره) (سوال ۷ نهایی دی ماه ۸۹)

الف) ضابطه ی تابع مرکب gof را مشخص کنید .

ب) دامنه ی تابع مرکب gof را تعیین کنید .

۲۸) دو تابع $f(x) = \frac{x + ۲}{x - ۳}$ و $g(x) = \frac{۱}{x - ۱}$ داده شده اند .(۱/۵ نمره) (سوال ۸ نهایی شهریور ماه ۹۰)

الف) ضابطه ی تابع fog را بنویسید .

ب) دامنه تابع fog را با استفاده از تعریف تعیین کنید .

۲۹) اگر $fog(x) = ۸x + ۱۲$ و $f(x) = ۲x + ٤$ باشند ، تابع g(x) را تعیین کنید . (۱ نمره)

(سوال ۹ نهایی دی ماه ۹۰)

۳۰) در معادله ی سهمی $f(x) = ax^{۲} + bx + c$ مقادیر a و b و c را طوری تعیین کنید که نمودار تابع از نقاط (۰,-۱) , (۱,۰) , (۲,۳) بگذرد. (۱/۵ نمره) (سوال ۸ نهایی دی ماه ۹۳)

۳۱) توابع $f(x)=\frac{۲x}{x-۲}$ و $g(x)=۳x-۱$ داده شده اند. (۲/۵ نمره) (سوال ۹ نهایی دی ماه ۹۳)

الف) دامنه ی تابع fog را با استفاده از تعریف بدست آورید .

ب) تابع fog را تشکیل دهید .

ج) حاصل عبارت $(۳f+۲g)(۳)$ را بدست آورید .

۳۲) اگر $f(x)=x^{۲}+ax-۳b$ ، مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که این سهمی محور x ها را در نقطه ای به طول ۳ قطع کند و از نقطه ی (۱,-۴) بگذرد . (۱/۵ نمره) (سوال ۸ نهایی خرداد ماه ۹۴)

۳۳) توابع $f(x)=\sin x$ و $g(x)=\sqrt{۱-x^{۲}}$ داده شده اند . (۲/۲۵ نمره) (سوال ۹ نهایی خرداد ماه ۹۴)

الف) دامنه ی تابع fog را با استفاده از تعریف بدست آورید .

ب) تابع gof را تشکیل دهید .

ج) حاصل عبارت $(۲f-۳g)(۰)$ را بدست آورید .