به نام خدا

جزوه دست نویس ریاضی ۳ (پایه دوازدهم تجربی)

سال تحصیلی ۱۳۹۹-۱۴۰۰ شاهسون

فصل ۱ : تابع

درس اول : توابع چندجمله‌ای - توابع صعودی و نزولی

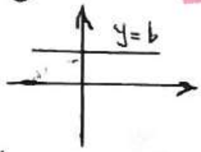
بیشترین توان x عدد n می‌باشد

توابع چندجمله‌ای : یک تابع چندجمله‌ای درجه n درحالت کلی به صورت زیر است :

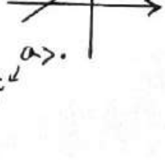
$$\boxed{f(x)=a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}$$

مثال : برخی توابع چندجمله‌ای که سال‌های گذشته آشنا شدیم :

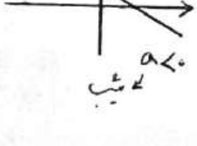
1) $f(x)=b$ ⟵ تابع چندجمله‌ای درجه صفر ⟵ نام خاص این تابع: تابع ثابت ⟵ نمودار آن خط افقی



۲) $f(x)=\overset{\neq 0}{a}x+b$ (مخالف صفر) ⟵ تابع چندجمله‌ای درجه ۱ ⟵ نام خاص: تابع خطی ⟵



$a>0$ شیب خط



$a<0$ شیب

۳) $f(x)=ax^2+bx+c$ ⟵ تابع چندجمله‌ای درجه ۲ ⟵ نام خاص: سهمی ⟵

$a>0$

$a<0$

نکته : دامنه توابع چندجمله‌ای مجموعه اعداد حقیقی می‌باشد $D_f=\mathbb{R}$

تابع چند جمله‌ای درجه ۳ :

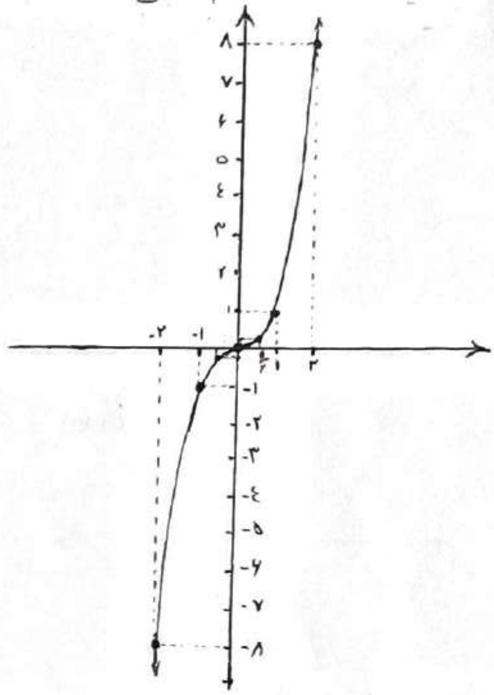
a مخالف صفر

ضابطه تابع چند جمله‌ای درجه ۳ در حالت کلی به صورت $\boxed{f(x)=ax^3+bx^2+cx+d}$ می‌باشد.

توجه: دامنه و بُرد این تابع $\mathbb{R}$ می‌باشد.

در این درس به طور خاص تابع درجه ۳ ← $f(x)=x^3$ را بررسی می‌کنیم.

x	...	-۲	-۱	$-\frac{1}{2}$	۰	$\frac{1}{2}$	۱	۲	...
$y=x^3$		-۸	-۱	$-\frac{1}{8}$	۰	$\frac{1}{8}$	۱	۸	



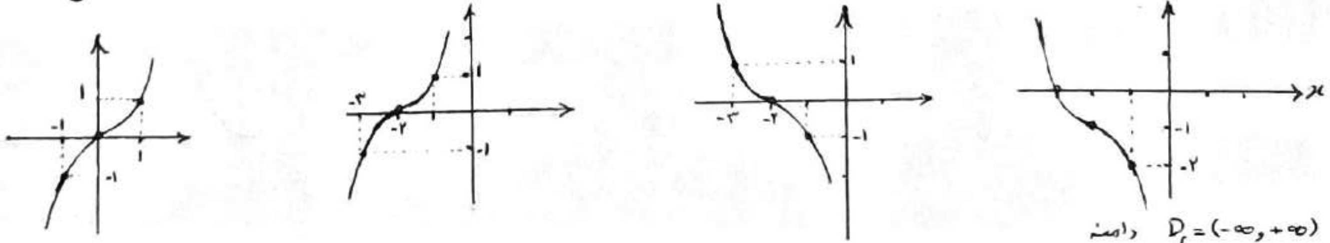
دامنه $D_f=(-\infty,+\infty)$

بُرد $R_f=(-\infty,+\infty)$

توجه: نقاط $(\frac{1}{2},\frac{1}{8})$ و $(-\frac{1}{2},-\frac{1}{8})$ را به این خاطر در نظر گرفتیم که انحنای نمودار واضح‌تر شود از این به بعد فقط ۱ و ۱- را برای x در نظر می‌گیریم.

توجه: با استفاده از قوانین انتقال نمودار، می‌توانیم نمودار توابعی مانند $y=-(x+2)^3-1$ را رسم کرد:

$y=x^3 \xrightarrow{\text{۲ واحد به چپ}} y=(x+2)^3 \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور xها}} y=-(x+2)^3 \xrightarrow{\text{یک واحد به پایین}} y=-(x+2)^3-1$

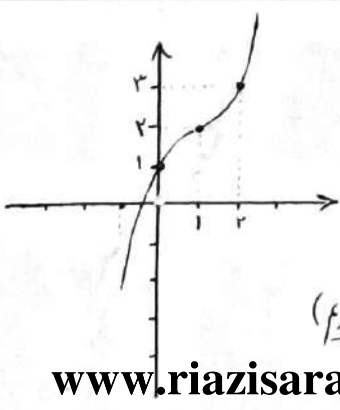


دامنه $D_f=(-\infty,+\infty)$

برد $R_f=(-\infty,+\infty)$

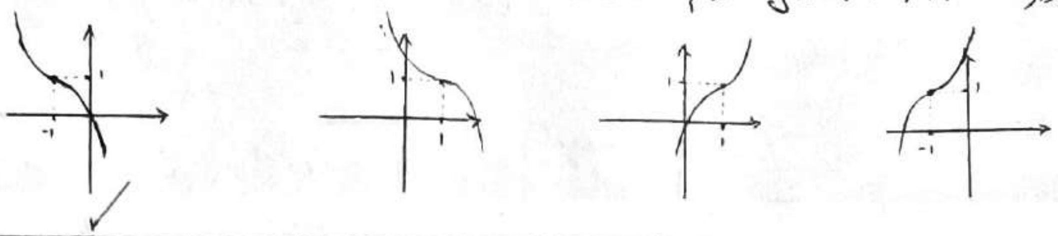
مثال: نمودار تابع $y=(x-1)^3+2$ را از طریق انتقال رسم کنید.

پاسخ ← همه انتقالها را می‌توان همزمان انجام داد یعنی نقاط نمودار $y=x^3$ را ابتدا یک واحد به راست و سپس ۲ واحد به بالا انتقال می‌دهیم. نقاط نمودار تابع $y=(x-1)^3+2$ حاصل می‌شود (فقط سه نقطه نمودار $y=x^3$ را برای انتقال در نظر می‌گیریم)



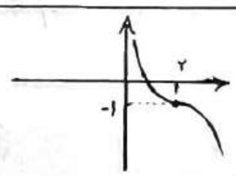
توجه: فعالیت و کار در کلاس صفحه ۴ و ۵ کتاب درسی در مورد انتقال نمودار تابع $y=x^3$ می‌باشد
به طور دقیق مورد بررسی قرار دهید.

تست: نمودار $y=-(x+1)^3+1$ کدام است؟



تمرین: نمودار تابع $y=(x-1)^3+2$ را رسم کنید دامنه و برد آن را مشخص کنید.

مثال: اگر نمودار تابع $y=-x^3+ax^2+bx+c$ به صورت



باشد $a-b+2c$ را بدست آورید.

پاسخ ← باتوجه به اینکه ضریب پشت x^3 برابر ۱- می‌باشد پس نمودار داده شده از انتقال نمودار $y=-x^3$
به صورت زیر حاصل می‌شود

$$y=-x^3 \xrightarrow{\text{۲ واحد به راست}} y=-(x-2)^3 \xrightarrow{\text{یک واحد به پائین}} y=-(x-2)^3-1$$

حال معادله بدست آمده را طبق اتحاد مکعب باز می‌کنیم و با معادله تابع داده شده برابر قرار می‌دهیم a و b و c حاصل می‌شود:

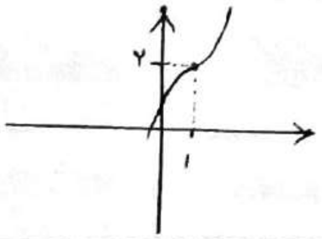
$$y=-(x-2)^3-1 \xrightarrow{\text{اتحاد مکعب}} y=-(x^3-6x^2+12x-8)-1=-x^3+6x^2-12x+7$$

طبق فرض $y=-x^3+ax^2+bx+c$

$\rightarrow a=6,\ b=-12,\ c=7$

$$a-b+2c=6-(-12)+2(7)=32$$

تمرین: نمودار تابع با ضابطه $y=(x-a)^3+b$ به صورت مقابل است
حاصل $a.b$ را بدست آورید.



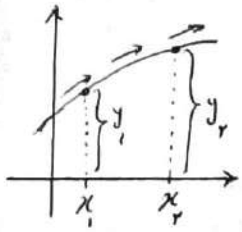
تمرین: برای رسم تابع $y=(x+a)^3-b$ باید نمودار $y=x^3$ را ۲ واحد به چپ و ۴ واحد به بالا
منتقل کنیم، حاصل $a+b$ کدام است؟

پاسخ ←

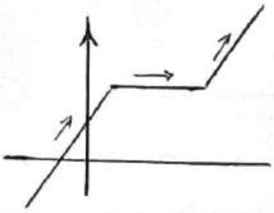
$$y=x^3 \xrightarrow{\text{۲ واحد به چپ}} y=(x+2)^3 \xrightarrow{\text{۴ واحد به بالا}} y=(x+2)^3+4$$

$\rightarrow a=2$

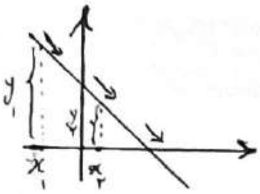
$-b=4 \rightarrow b=-4 \rightarrow \boxed{a+b=-2}$



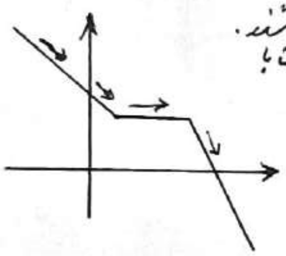
تابع اکیداً صعودی: توابعی که در نمودار آن با افزایش طول نقاط، عرض نقاط افزایش یابد
(به عبارت دیگر وقتی نمودار را از سمت چپ نگاه می‌کنیم جهت حرکت آن فقط رو به بالا باشد)



تابع صعودی: اگر با افزایش طول نقاط عرضها افزایش یابند یا عرضها برابر باشند.
(به عبارت دیگر وقتی نمودار آنرا از سمت چپ نگاه می‌کنیم در قسمتهایی جهت حرکت رو به بالا و در قسمتهایی حرکت افقی باشد)



تابع اکیداً نزولی: اگر در نمودار تابع با افزایش طول نقاط، عرض نقاط کاهش یابد
(به عبارت دیگر وقتی نمودار را از سمت چپ نگاه می‌کنیم جهت حرکت آن فقط رو به پایین باشد)



تابع نزولی: اگر با افزایش طول نقاط (یعنی حرکت از چپ به راست) عرضها کاهش یابند یا عرضها ثابت باشند.
(به عبارت دیگر وقتی نمودار را از سمت چپ نگاه می‌کنیم جهت حرکت آن در قسمتهایی رو به پایین و در قسمتهایی افقی باشد)

توجه: با توجه به تعاریف بالا نتیجه می‌گیریم تابع ثابت در یک بازه هم صعودی است و هم نزولی.

مثال: اگر تابع $f(x)=(x-1)^2+mx^2-nx+3$ هم صعودی و هم نزولی باشد حاصل $m\times n$ کدام است؟

پاسخ ← می‌دانیم فقط تابع ثابت $f(x)=k$ در یک بازه هم صعودی است و هم نزولی است

$$f(x)=(x-1)^2+mx^2-nx+3=x^2-2x+1+mx^2-nx+3$$

$$\xrightarrow{\text{ساده شود}} f(x)=(1+m)x^2+(-2-n)x+4 \longrightarrow$$

برای اینکه f ثابت باشد باید ضریب x^2 و ضریب x صفر شوند و f فقط برابر عدد ثابت شود

$$\longrightarrow \begin{cases} 1+m=0 \rightarrow m=-1 \\ -2-n=0 \rightarrow n=-2 \end{cases}$$

بنابراین: $m\times n=-1\times -2=2$

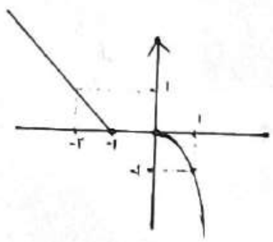
مثال: کدام یک از موارد زیر در مورد تابع f با ضابطه $f(x)=\begin{cases}|x+1| & x\le -1\\ -x^2 & , x\ge 0\end{cases}$ درست است؟

۱) صعودی است ولی اکیداً صعودی نیست

۲) اکیداً صعودی است

۳) نزولی است ولی اکیداً نزولی نیست

۴) اکیداً نزولی است



پاسخ ← می توان مستقیماً از نقطه یابی نمودار را رسم کرد

x	$\dots$	-2	-1
$y=\lvert x+1\rvert$	$\dots$	1	0

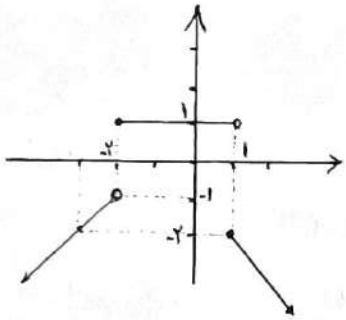
و

x	0	1	$\dots$
$y=-x^2$	0	-1	$\dots$

توجه

با توجه به نمودار واضح است که تابع f نزولی است ولی چون $f(-1)=f(0)=0$ تابع اکیداً نزولی نمی باشد

مثال: تابع $f(x)=\begin{cases}x+1 & x<-2\\ 1 & -2\le x<1\\ -2x & x\ge 1\end{cases}$ را رسم کنید و بازه هایی که در آن تابع صعودی، نزولی یا ثابت است را مشخص کنید.



پاسخ ← به روش نقطه یابی رسم کنید ولی لازم نیست جدول بکشید مثلاً برای ضابطه اول -2 (نقاط مرز) و اعداد کوچکتر از آن را قرار دهید چون نقطه مرزی -2 مساوی ندارد نقطه توخالی روی نمودار در نظر گیریم.

در بازه $(-\infty,-2)$ اکیداً صعودی (صعودی)

در $[-2,1)$ ثابت (هم صعودی - هم نزولی)

در $[1,+\infty)$ اکیداً نزولی (نزولی)

اجتماع بازه ها: صعودی ← $(-\infty,1)$ ؛ نزولی ← $[-2,+\infty)$

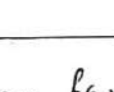
تمرین: تابع $f(x)=\begin{cases}x-3 & x<-2\\ 2 & -2\le x<3\\ -2x+4 & x\ge 3\end{cases}$ روی بازهٔ $(-\infty,a)$ صعودی است بیشترین مقدار a کدام است؟ (رسم نمودار)

تمرین: ابتدا تابع مقابل را رسم کنید سپس بازه هایی که در آن تابع صعودی اکید، نزولی اکید یا ثابت است را مشخص کنید

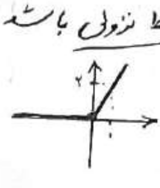
$$f(x)=\begin{cases}x^2 & x<0\\ 1 & 0\le x\le 1\\ x-1 & x>1\end{cases}$$

نکته: به تابعی که در یک بازه فقط اکیداً صعودی یا فقط اکیداً نزولی باشد، تابع اکیداً یکنوا گوئیم.

مثلاً تابع $y=x^3$ با نمودار اکیداً صعودی است ← اکیداً یکنوا

$y=-x^3$ با نمودار  اکیداً نزولی است ← اکیداً یکنوا

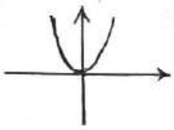
نکته: تابعی که در یک بازه فقط صعودی یا فقط نزولی باشد، تابع یکنوا گوئیم.

مثلاً تابع $y=\begin{cases}0 & x<0\\ 2x & x\ge 0\end{cases}$ با نمودار  در $(-\infty,+\infty)$ صعودی است ← یکنوا

توجه: یکنوا یعنی جهت تغییرات y همواره یکسان است.

نکته: ممکن است تابعی در یک بازه صعودی (اکیداً صعودی) و در بازهٔ دیگر نزولی (اکیداً نزولی) باشد. می گوییم این تابع در کل دامنه اش نه صعودی است و نه نزولی (غیر یکنوا)

مثلاً تابع $y=x^2$ با نمودار

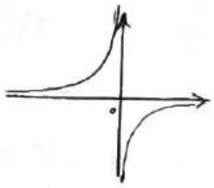


در $(-\infty,0]$ اکیداً نزولی
در $[0,+\infty)$ اکیداً صعودی
اما در کل دامنه اش ($\mathbb{R}$) نه صعودی است نه نزولی (غیر یکنوا)

توجه: با توجه به مطالب بیان شده تا اینجا مسائل کار در کلاس صفحه ۸ و کار در کلاس پایینی صفحه ۹ بررسی شوند.

مثال: نمودار تابعی را رسم کنید که در هر یک از بازه های $(-\infty,0)$ و $(0,+\infty)$ اکیداً صعودی باشد ولی در $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی نباشد. (غیر یکنوا)

پاسخ ← نمودار تابع به صورت

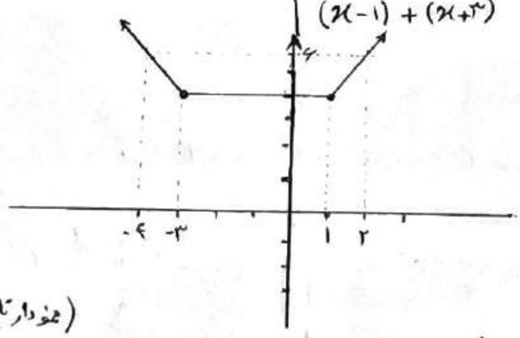


مثال: نمودار تابع با ضابطه $f(x)=|x-1|+|x+3|$ را ابتدا رسم کرده سپس مشخص کنید در چه بازه هایی صعودی و در چه بازه هایی نزولی است؟

یک عبارت قدر مطلقی به ازای مقادیر کوچکتر از ریشه اش پس از حذف قدر مطلق منفی می شود
به ازای مقادیر بزرگتر مساوی ریشه اش مثبت می شود

پاسخ ← ابتدا قدر مطلق ها را حذف می کنیم و تابع را به صورت چند ضابطه ای می نویسیم

$$f(x)=|\underbrace{x-1}_{\text{ریشه عبارت}=1}|+|\underbrace{x+3}_{\text{ریشه عبارت}=-3}| = \begin{cases} -(x-1)-(x+3) & x<-3 \\ -(x-1)+(x+3) & -3\le x<1 \\ (x-1)+(x+3) & x\ge 1 \end{cases} \overset{\text{ساده شود}}{=} \begin{cases} -2x-2 & x<-3 \\ 4 & -3\le x<1 \\ 2x+2 & x\ge 1 \end{cases}$$



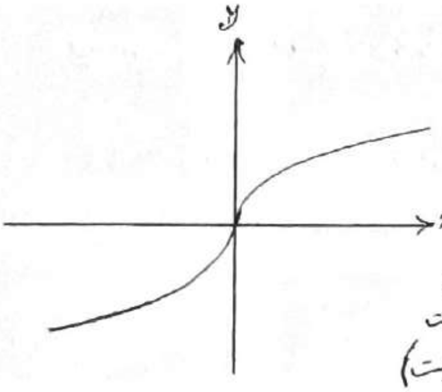
(نمودار تابع گلدانی)

در $(-\infty,-3]$ اکیداً نزولی
در $[-3,1]$ ثابت
در $[1,+\infty)$ اکیداً صعودی

با در نظر گرفتن تابع ثابت به عنوان هم صعودی و هم نزولی داریم:
نزولی ← در $(-\infty,1]$
صعودی ← در $[-3,+\infty)$

تست: (کنکور ۹۸) تابع با ضابطه $f(x)=|x+2|+|x-1|$ در کدام بازه اکیداً نزولی است؟

۱) $(-\infty,-2)$ ✓ ۲) $(-\infty,1)$ ۳) $(-2,1)$ ۴) $(1,+\infty)$



نکته: به نمودار تابع مقابل دقت کنید.

اکیداً صعودی است

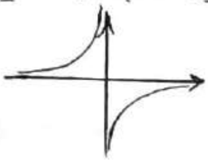
یک به یک است (زیرا هر خط افقی نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند)

نتیجه می‌گیریم هر تابع اکیداً صعودی (اکیداً یکنوا) حتماً یک به یک است (زیرا توابع اکیداً صعودی همواره در حال افزایش می‌باشند پس هیچ قسمت نمودار افقی نیست لذا یک به یک است به عبارت دیگر در توابع اکیداً صعودی دو x متمایز دارای عرض‌های متمایزی باشند پس یک به یک است)

توجه: مطلب بالا به طور مشابه برای توابع اکیداً نزولی برقرار است.

نتیجه: با توجه به نکته بالا اگر تابعی اکیداً یکنوا باشد حتماً یک به یک نیز هست ولی عکس این مطلب درست نیست یعنی ممکن است تابعی یک به یک باشد ولی یکنوا نباشد.

مثال:



سؤالات امتحان نهایی:

۱- درستی یا نادرستی را مشخص کنید:

(دی ۹۷، خرداد ۹۹) الف) تابع ثابت در یک بازه، هم صعودی و هم نزولی محسوب می‌شود ☐

(خرداد ۹۸) ب) تابع $f(x)=\sqrt{x}$ در دامنهٔ خود اکیداً یکنوا است ☐

(ش ۹۸) ج) تابع $f(x)=-x^3+2$ در دامنهٔ تعریفش صعودی است ☐

۲- در جاهای خالی عبارت مناسب قرار دهید:

(شهریور ۹۹) الف) توابع اکیداً یکنوا همواره .... هستند.

(دی ۹۸) ب) تابعی که در یک بازه، هم صعودی و هم نزولی محسوب می‌شود، تابع .... نامیده می‌شود.

(خ ۹۸) ج) تابع $y=(x+1)^3$ در دامنه تعریف خود .... (صعودی، نزولی) است.

(ش ۹۸) د) تابع $y=x^2|x|$ در بازهٔ $(-\infty,a]$ نزولی است. حداکثر مقدار a برابر .... است.

توجه: تمرینات صفحه ۱۰ کتاب درسی مهم می‌باشد پس از مطالعه دقیق جزوه تا اینجا حتماً مورد حل و بررسی قرار گیرد.

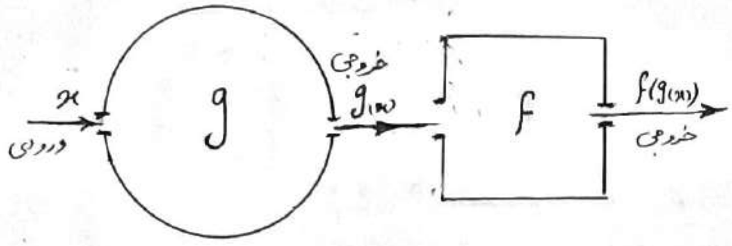
درس دوم

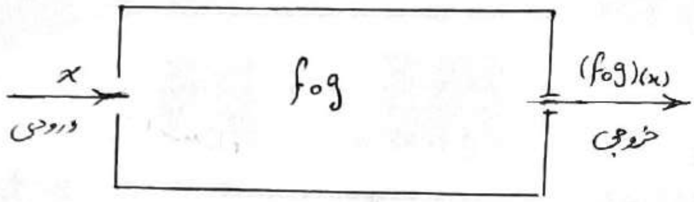
«ترکیب توابع»

می‌خوانیم gof

تابع مرکب: اگر f و g دو تابع باشند آنگاه، ترکیب دو تابع f و g را با نماد fog نشان می‌دهیم و به آن تابع مرکب گویند.

تابع fog به صورت شکل مقابل تعریف می‌شود:





ضابطه تابع مرکب: با توجه به شکلهای بالا ضابطه تابع مرکب به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\boxed{(fog)(x) = f(g(x))}$$

برای به خاطر سپردن این ضابطه بگوئید تابعی که نزدیک x است به درون پرانتز می‌رود

توجه: به طور مشابه ضابطه تابع gof نیز تعریف می‌شود:

$$(gof)(x) = g(f(x))$$

تابع f نزدیک x است به داخل پرانتز می‌رود

مثال: اگر $f(x)=\frac{x}{x-1}$ و $g(x)=\sin x$ آنگاه ضابطه تابع مرکب fog را بدست آورید.

$$(fog)(x) = f(g(x)) = \frac{g(x)}{g(x)-1} = \frac{\sin x}{\sin x - 1}$$

در ضابطه $f(x)$ به جای x ها باید $g(x)$ قرار دهیم. مثلاً $f(\square) = \frac{\square}{\square - 1}$

حال با توجه به صورت مثال جایگزین می‌کنیم

مثال: اگر $f(x)=\frac{2}{x-1}$, $g(x)=\sqrt{x-5}$ ضابطه توابع fog , gof , fof , gog را بدست آورید.

پاسخ ←

g نزدیک x است داخل پرانتز می‌رود

در ضابطه f به جای x ها g(x) قرار می‌دهیم

به جای g(x) جایگزین می‌کنیم

$$(fog)(x) = f(g(x)) = \frac{2}{g(x)-1} = \frac{2}{\sqrt{x-5}-1}$$

$$(gof)(x) = g(f(x)) = \sqrt{f(x)-5} = \sqrt{\left(\frac{2}{x-1}\right)-5}$$

f نزدیک x است داخل پرانتز می‌رود

در ضابطه g به جای x ها f(x) قرار می‌دهیم

حال به جای f(x) جایگزین می‌کنیم.

$$(fof)(x) = f(f(x)) = \frac{2}{f(x)-1} = \frac{2}{\left(\frac{2}{x-1}\right)-1}$$

$$(gog)(x) = g(g(x)) = \sqrt{g(x)-5} = \sqrt{\sqrt{x-5}-5}$$

g نزدیک x است داخل پرانتز می‌رود

در ضابطه g به جای x ها g(x) قرار می‌دهیم

جایگزینی به جای g(x)

توجه: با مقایسه ضابطه توابع fog , gof در مثال بالا نتیجه می‌گیریم در حالت کلی: $gof \neq fog$

تمرین: اگر $f(x)=\frac{2}{x-1}$, $g(x)=\frac{3}{x}$ ضابطه fog را بدست آورید.

تمرین: اگر $f(x)=\sqrt{2-x}$ و $g(x)=\sqrt{x+3}$ دو تابع باشند ضابطه fog و gof را محاسبه کنید.

تمرین: توابع f و g با ضابطه‌های $f(x)=x^2$ و $g(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ مفروضند. fog و gof را محاسبه کنید سپس درست یا نادرست بودن $gof=fog$ را نتیجه بگیرید.

مثال (خرداد ۹۹): اگر $f(g(x))=3x^2-6x+14$ و $f(x)=3x-4$ ضابطه تابع $g(x)$ را بدست آورید.

پاسخ ←

$$f(x)=3x-4 \xrightarrow[\text{قرار دهیم}]{\text{به جای } x \text{ تابع } g(x)} f(g(x))=3g(x)-4$$

از طرفی (طبق صورت مسئله): $f(g(x))=3x^2-6x+14$

$$\xrightarrow[\text{برابر قرار دهیم}]{\text{سمت چپ ها برابرند، پس سمت راست را}} 3g(x)-4=3x^2-6x+14$$

$$3g(x)=3x^2-6x+18 \xrightarrow{\div 3} \boxed{g(x)=x^2-2x+6}$$

جواب

تمرین: اگر $f(x)=x^2+2x+2$ باشد تابع $g(x)$ را به گونه‌ای بیابید که: $(f\circ g)(x)=x^2-4x+5$

مثال: اگر $f(x)=3x^2+x-1$ و $g(x)=1-2x$ آنگاه جواب‌های معادله $(g\circ f)(x)=-5$ را بدست آورید.

پاسخ ← ابتدا $(g\circ f)(x)$ را تشکیل می‌دهیم سپس آن را مساوی ۵- قرار دهیم:

به جای $f(x)$ جایگزین می‌کنیم

$$\begin{cases}(g\circ f)(x)=g(f(x))=1-2f(x)=1-2(3x^2+x-1)=1-6x^2-2x+2=\boxed{-6x^2-2x+3}\\(g\circ f)(x)=-5\end{cases}$$

$$\Rightarrow -6x^2-2x+3=-5 \rightsquigarrow -6x^2-2x+8=0 \xrightarrow{\div(-2)} 3x^2+x-4=0$$

$$\rightsquigarrow (3x+4)(x-1)=0 \quad \begin{matrix}\nearrow x=1\\ \searrow x=-\frac{4}{3}\end{matrix}$$

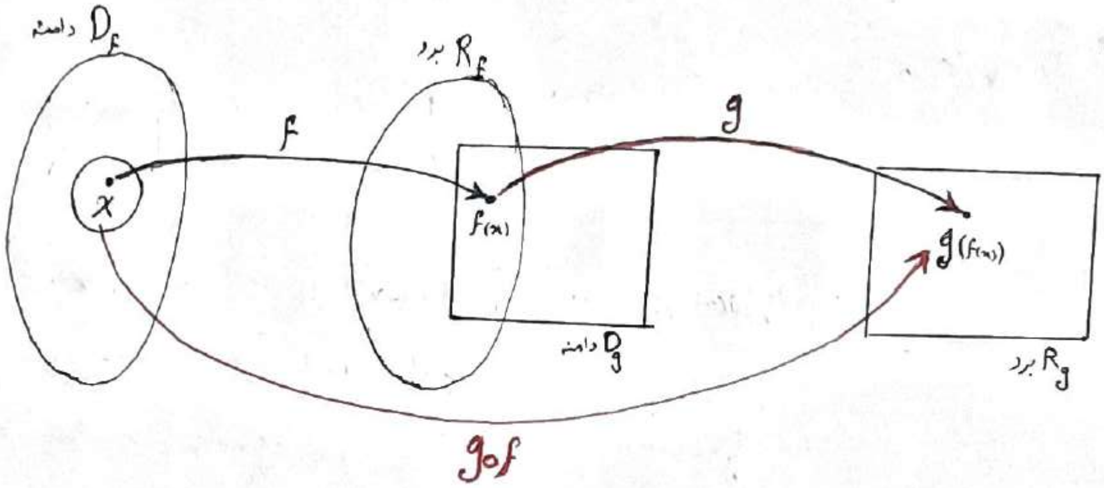
نکته: در عبارت $3x^2+x-4=0$ چون مجموع ضرائب صفر است یکی از ریشه‌ها $x=1$ و ریشه دیگر $x=+\frac{c}{a}=+\frac{-4}{3}=-\frac{4}{3}$ است (روش دوم برای بدست آوردن جواب‌های معادله درجه دوم آخر)

تمرین: اگر $f(x)=3x+2$ و $g(x)=x^2+x+5$ آنگاه معادله $(g\circ f)(x)=17$ را حل کنید.

تست کنکور ۹۶ : اگر $f(x)=\frac{3x-1}{x+1}$ و $g(x)=\frac{2x+2}{3-x}$ ضابطه تابع $g(f(x))$ کدام است؟

۱) $x-1$ ۲) $x+1$ ۳) x ۴) $2x$ ✓

دامنه تابع مرکب : برای درک بهتر دامنه تابع مرکب gof به شکل زیر دقت کنید:



بنابراین دامنه تابع gof به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\boxed{D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}}$$

✱ به طور مشابه دامنه تابع fog به صورت مقابل محاسبه می‌شود:

$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}$$

تابع داخلی

دامنه تابع داخلی را ابتدا می‌نویسیم و همیشه x عضو آن است

دامنه تابع بیرونی در مرحله بعد نوشته می‌شود

$$(fog)(x)=f(g(x))$$

تابعی که داخل پرانتز رود را تابع داخلی می‌گوییم

مثال : اگر $f(x)=\frac{2}{x-1}$ و $g(x)=\frac{3}{x}$ دامنه و ضابطه تابع fog را بدست آورید.

پاسخ ⟵ f یک تابع کسری گویا است $\rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{1\}$ ؛ g یک تابع کسری گویا است $\rightarrow D_g=\mathbb{R}-\{0\}$

ضابطه: $(fog)(x)=f(g(x))=\frac{2}{g(x)-1}=\frac{2}{(\frac{3}{x})-1}$

دامنه $D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}=\{x\in \overbrace{\mathbb{R}-\{0\}}^{\text{شرط اول}} \mid \overbrace{\frac{3}{x}\in\mathbb{R}-\{1\}}^{\text{شرط دوم}}\}\ \overset{\text{اشتراک شرط اول و ساده شده شرط دوم}}{=}\ (\mathbb{R}-\{0\})\cap(\mathbb{R}-\{3\})=\mathbb{R}-\{0,3\}$

ساده کردن شرط دوم در چرک نویس: $\frac{3}{x}\in\mathbb{R}-\{1\} \rightarrow \frac{3}{x}\neq 1 \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} x\neq 3$ یا $\mathbb{R}-\{3\}$

مثال: اگر $f(x)=2x+1$ و $g(x)=\sqrt{x-3}$ دامنه تابع مرکب gof را حساب کنید.

پاسخ ← $D_f=\mathbb{R}$ (دامنه) $D_g=[3,+\infty)$ (دامنه)

$$D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}=\{\overbrace{x\in\mathbb{R}}^{\text{شرط اول}} \mid \overbrace{2x+1\in[3,+\infty)}^{\text{شرط دوم}}\}=\mathbb{R}\cap[1,+\infty)=[1,+\infty)$$

اشتراک شرط اول و ساده شده شرط دوم

جواب

محاسبات ساده کردن شرط دوم در چرک نویس: $2x+1\in[3,+\infty)\longrightarrow 2x+1\geq 3\longrightarrow 2x\geq 2 \xrightarrow{\div 2} x\geq 1$

$[1,+\infty)$

مثال: اگر $f(x)=\sqrt{1-x}$ و $g(x)=\sqrt{x-1}$، دامنه تابع $(fog)(x)$ را حساب کنید.

ب) ضابطه fog را بنویسید.

پاسخ ← $1-x\geq 0\Rightarrow x\leq 1\rightarrow D_f=(-\infty,1]$ $\quad x-1\geq 0\Rightarrow x\geq 1\longrightarrow D_g=[1,+\infty)$

الف) $$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}=\{\overbrace{x\in[1,+\infty)}^{\text{شرط اول}} \mid \overbrace{\sqrt{x-1}\in(-\infty,1]}^{\text{شرط دوم}}\}$$

$$=[1,+\infty)\cap(-\infty,2]=[1,2]$$

اشتراک شرط اول و ساده شده شرط دوم

جواب

محاسبات ساده کردن شرط دوم در چرک نویس: $\sqrt{x-1}\in(-\infty,1]\longrightarrow\sqrt{x-1}\leq 1$

$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} x-1\leq 1\longrightarrow x\leq 2$

$(-\infty,2]$ شرط دوم

ب) به عهده دانش آموز

نکته: اگر تابع f و g به صورت زوج مرتب داده شده باشند در این صورت برای محاسبه تابع مرکب gof به صورت زوج‌های مرتب چون

$$\boxed{D_{gof}\subseteq D_f}$$

همواره دامنه تابع مرکب زیر مجموعه دامنه تابع داخلی آن است

لذا کافیست gof را روی تک تک اعضای D_f تأثیر دهیم اگر جوابی بدست آمد یک زوج مرتب از تابع gof حاصل شده است (که مؤلفه اول همان عضو D_f و مؤلفه دوم همین عددی که از تأثیر gof حاصل و شود)

مثال: اگر $f=\{(-1,1)\ (1,2)\ (2,3)\ (4,5)\}$ و $g=\{(-1,0)(1,2)(2,4)(5,3)\}$ آنگاه تابع مرکب fog را به صورت زوج مرتب بنویسید.

پاسخ ← $D_{fog} \subseteq D_g=\{-1,1,2,5\}$: همواره دامنه تابع مرکب زیرمجموعه دامنه تابع داخلی آن می باشد

بنابراین fog را روی تک تک اعداد ۱-، ۱، ۲، ۵ تاثیر می‌دهیم.

$$\left.\begin{array}{l}(fog)(-1)=f(\overset{0}{g(-1)})=f(0)=\text{وجود ندارد}\\ (fog)(1)=f(\overset{2}{g(1)})=f(2)=3\\ (fog)(2)=f(\overset{4}{g(2)})=f(4)=5\\ (fog)(5)=f(\overset{3}{g(5)})=f(3)=\text{وجود ندارد}\end{array}\right\} \Longrightarrow fog=\{(1,3)\ (2,5)\}$$

جواب

تمرین: با توجه به مثال بالا تابع مرکب gof را به صورت زوج مرتب بنویسید.

مثال: اگر $f=\{(0,-1)\ (5,2)\ (3,5)\ (-2,4)\}$ و $g=\{(1,2)\ (3,-1)\ (2,0)(-1,4)(5,7)\}$ باشند آنگاه تابع gof را به صورت زوج مرتب بنویسید.

پاسخ ← $\underset{\downarrow\ \text{تابع داخلی}}{D_{gof}} \subseteq D_f=\{0,5,3,-2\}$: همواره دامنه تابع مرکب زیرمجموعه دامنه تابع داخلی آن می باشد.

بنابراین gof را روی تک تک اعداد ۲-، ۳، ۵، ۰ تاثیر می‌دهیم.

$$\left.\begin{array}{l}(gof)(0)=g(\overset{-1}{f(0)})=g(-1)=4\\ (gof)(5)=g(\overset{2}{f(5)})=g(2)=0\\ (gof)(3)=g(\overset{5}{f(3)})=g(5)=7\\ (gof)(-2)=g(\overset{4}{f(-2)})=g(4)=\text{وجود ندارد}\end{array}\right\} \Longrightarrow gof=\{(0,4)\ (5,0)\ (3,7)\}$$

تمرین: با توجه توابع $f=\{(1,2)\ (2,-1)\ (3,1)\ (4,2)\}$ و $g=\{(1,-2)\ (2,3)(5,2)(-1,3)\}$ تابع مرکب gof را به صورت زوج مرتب بنویسید.

مثال: اگر $f(x)=\sqrt{x-3}$ و $g=\{(0,4)(3,2)(5,6)\}$ دو تابع باشند تابع fog را به صورت زوج مرتب بنویسید.

پاسخ ⟵ می‌دانیم: $D_{fog} \subseteq D_g = \{0,3,5\}$

لذا fog را روی تک‌تک اعداد ۰، ۳، ۵ تأثیر دهیم تا مؤلفه دوم زوج‌ها در صورت وجود بدست آید:

$$\left.\begin{aligned}
(fog)(0) &= f(\overset{4}{g(0)}) = f(4) = \sqrt{4-3} = \sqrt{1} = 1 \\
(fog)(3) &= f(\overset{2}{g(3)}) = f(2) = \sqrt{2-3} = \sqrt{-1} \rightarrow \text{وجود ندارد} \\
(fog)(5) &= f(\overset{6}{g(5)}) = f(6) = \sqrt{6-3} = \sqrt{3}
\end{aligned}\right\} \longrightarrow \underbrace{fog = \{(0,1)\ (5,\sqrt{3})\}}_{\text{جواب}}$$

توجه: تمرینات ۱ تا ۹ صفحه ۲۲ کتاب درسی در این مرحله پس از مطالعه دقیق جزوه حل و بررسی شود.

---

* چند تمرین از سؤالات امتحان نهایی:

۱- (دی ۹۷) توابع $f(x)=\frac{x+3}{2x}$ و $g(x)=3x-1$ را در نظر بگیرید دامنه تابع fog را با استفاده از تعریف بدست آورید.

۲- (خرداد ۹۸) دو تابع $f(x)=\sqrt{x-4}$ و $g(x)=\frac{1}{x^2-1}$ را در نظر بگیرید دامنه تابع gof را با استفاده از تعریف بدست آورید.

۳- (~~شهریور ۹۸~~ شهریور ۹۹) اگر $f(x)=\sqrt{x-1}$ و $g(x)=2x^2-1$ باشد دامنه و ضابطه $(fog)(x)$ را بدست آورید.

۴- (دی ۹۸) اگر $f(x)=x^2-5$ و $g(x)=\sqrt{x+6}$ باشد دامنه تابع fog را به کمک تعریف محاسبه کنید.

۵- (خرداد ۹۹) اگر $f(g(x))=3x^2-6x+14$ ، $f(x)=3x-4$ ضابطه تابع $g(x)$ را بدست آورید.

۶- اگر $f(x)=\sqrt{3-2x}$ ، $g(x)=\frac{6}{x-5}$ ، دامنه تابع gof را بدست آورید.
(جواب: $(-\infty,\frac{3}{2}]-\{-1\}$)

انتقال نمودار توابع :

یادآوری : ۱) اگر نمودار $y=f(x)$ را a واحد به بالا انتقال دهیم نمودار $y=f(x)+a$ حاصل می‌شود.

۲) " " " " " " به پائین " " $y=f(x)-a$ " " "

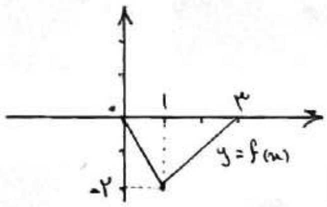
۳) " " " " " " " به راست " " $y=f(x-a)$ " " "

۴) " " " " " " " به چپ " " $y=f(x+a)$ " " "

رسم نمودار $y=kf(x)$:

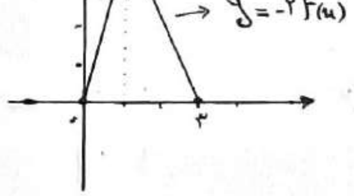
برای رسم نمودار تابع $y=kf(x)$ کافیست فقط عرض نقاط $y=f(x)$ را k برابر کنیم.

مثال : اگر نمودار $y=f(x)$ به صورت مقابل باشد با استفاده از آن نمودار $y=-2f(x)$ را رسم کنید.
دامنه و برد آنرا با دامنه و برد $y=f(x)$ مقایسه کنید.



پاسخ ←

نقاط $y=f(x)$		نقاط $y=-2f(x)$
(۰, ۰)		(۰, ۰)
(۱, -۲)	$\xrightarrow[\text{عرض} \times -2]{\text{طول ثابت}}$	(۱, ۴)
(۳, ۰)		(۳, ۰)

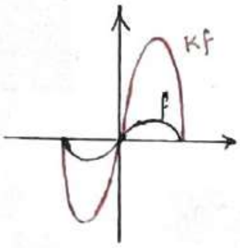


ب)

دامنه‌ها: $D_f=[0,3]$ ، $D_{-2f}=[0,3]$

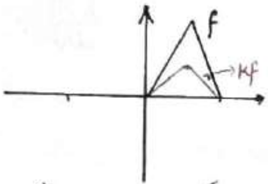
بردها: $R_f=[-2,0]$ ، $R_{-2f}=[0,4]$

نکته : دامنه تابع $y=kf(x)$ همان دامنه تابع $y=f(x)$ است ، اما برد آنها لزوماً یکسان نیست.



نکته: (تغییرات نمودار $y=kf(x)$ نسبت به نمودار $y=f(x)$)

اگر $k>1$ نمودار $y=f(x)$ در امتداد محور y ها با ضریب k کشیده می‌شود (انبساط عمودی)



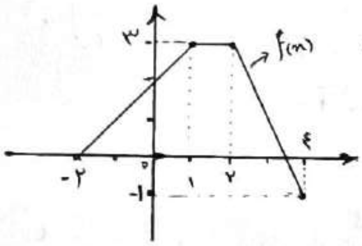
اگر $0<k<1$ نمودار $y=f(x)$ در امتداد محور y ها با ضریب k فشرده می‌شود (انقباض عمودی)

اگر $k<0$ ابتدا نمودار نسبت به محور x ها قرینه می‌شود سپس با ضریب $|k|$ در امتداد محور y ها کشیده یا فشرده می‌شود.

رسم نمودار $y=f(kx)$

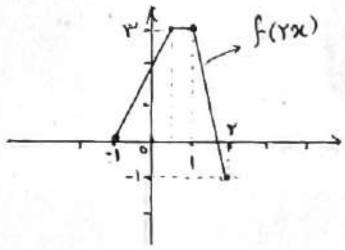
برای رسم نمودار $y=f(kx)$ کافیست طول نقاط نمودار $y=f(x)$ را در $\frac{1}{k}$ ضرب کنیم.

مثال: با توجه به نمودار تابع f به صورت مقابل نمودار تابع $y=f(\underbrace{2}_{k}x)$ را رسم کنید.



پاسخ ←

نقاط $f(x)$		نقاط $f(2x)$
$(-2,0)$	$\xrightarrow[\text{عرض ثابت}]{\text{طول} \times \frac{1}{k}}$ ($\frac{1}{k}=\frac{1}{2}$)	$(-1,0)$
$(1,3)$		$(\frac{1}{2},3)$
$(2,3)$		$(1,3)$
$(4,-1)$		$(2,-1)$

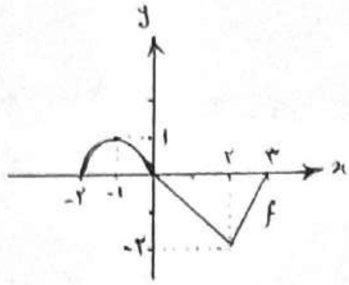


$D_f=[-2,4] \xrightarrow{\times \frac{1}{2}} D_{f(2x)}=[-1,2]$

برد‌ها: $R_f=[-1,3]$ ، $R_{f(2x)}=[-1,3]$

نکته: از مثال بالا نتیجه می‌گیریم $D_f=[a,b] \xrightarrow{\times \frac{1}{k}} D_{f(kx)}=\left[\frac{a}{k},\frac{b}{k}\right]$

ولی بردهای $f(kx)$ و $f(x)$ یکسان است.



مثال: (خرداد ۹۹) نمودار تابع $y=f(x)$ در شکل مقابل رسم شده

الف) نمودار تابع $y=3f(\frac{1}{2}x)$ را رسم کنید.

ب) دامنه و برد تابع $y=3f(\frac{1}{2}x)$ را تعیین کنید.

پاسخ →

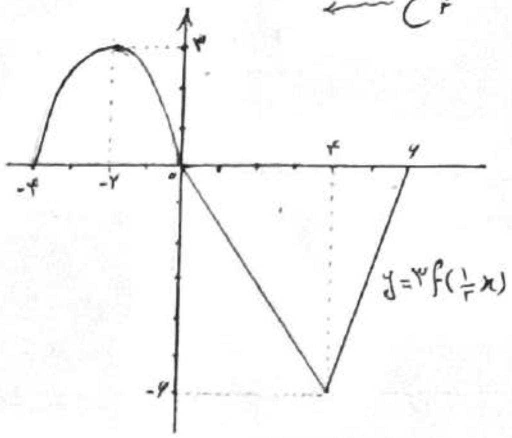
نقاط f
$(-2,0)$
$(-1,1)$
$(0,0)$
$(2,-2)$
$(3,0)$

$\frac{1}{k}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$

$2\times$ طول

$3\times$ عرض

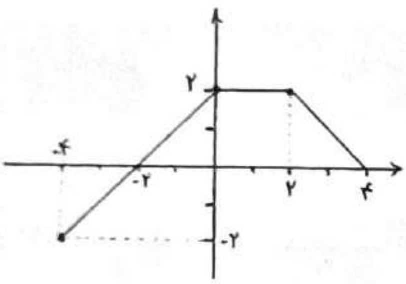
نقاط $3f(\frac{1}{2}x)$
$(-4,0)$
$(-2,3)$
$(0,0)$
$(4,-6)$
$(6,0)$



ب) دامنه $D=[-4,6]$

برد $R=[-6,3]$

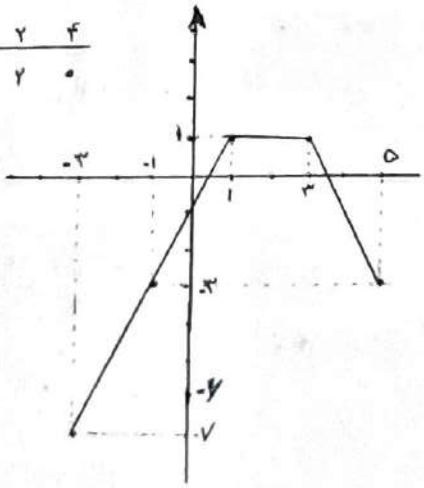
مثال: (تمرین ۱۲ ص ۲۳ کتاب) با استفاده از نمودار تابع f، نمودار $y=2f(x-1)-3$ را رسم کنید.



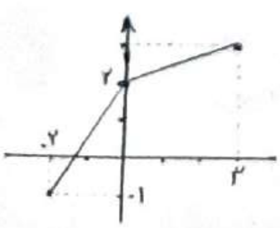
x	-4	-2	0	2	4
y	-2	0	2	2	0

پاسخ → نقاط $y=f(x)$ را یک واحد به راست سپس عرض‌ها دو برابر و در انتها سه واحد به پایین منتقل می‌کنیم.

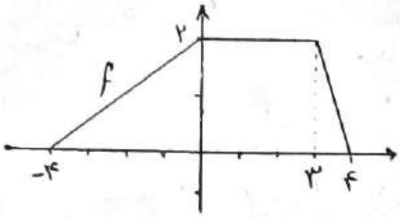
x	$-4+1 \to -3$	$-2+1$	$0+1$	$2+1$	$4+1 \to 5$
$y=2f(x-1)-3$	$2(-2)-3 \to -7$	$2(0)-3$	$2(2)-3$	$2(2)-3$	$2(0)-3 \to -3$



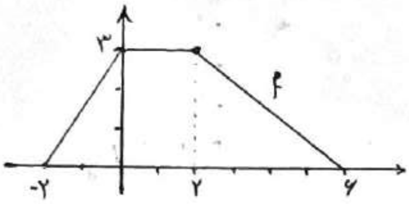
چند مسئله امتحان نهایی:



۱_ (دی ۹۷) با استفاده از نمودار تابع f نمودار $y=f(\frac{x}{2})-2$ را رسم کنید.



تمرین ۲ (خرداد ۹۸) با استفاده از نمودار $y=f(x)$ نمودار $y=\frac{1}{2}f(4x)$ را رسم کنید
دامنه و برد تابع جدید را بدست آورید.



تمرین ۳ (شهریور ۹۹): نمودار تابع $y=f(x)$ در شکل مقابل رسم شده
نمودار $y=\frac{1}{2}f(2x)$ را رسم کنید.

نکته: (تغییرات نمودار $y=f(kx)$ نسبت به نمودار $y=f(x)$)

۱) اگر $k>1$ نمودار $f(x)$ در امتداد محور x ها با ضریب $\frac{1}{k}$ فشرده می‌شود (انقباض افقی)

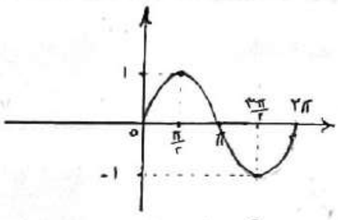
۲) اگر $0<k<1$ نمودار $f(x)$ در امتداد محور x ها با ضریب $\frac{1}{k}$ کشیده می‌شود (انبساط افقی)

۳) اگر $k<0$ ابتدا نمودار f نسبت به محور y ها قرینه می‌شود سپس با ضریب $\left|\frac{1}{k}\right|$ به طور افقی منبسط یا منقبض می‌شود.

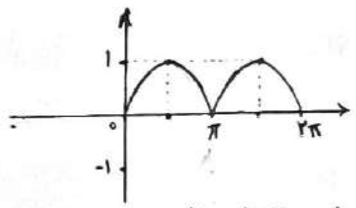
رسم نمودار $|f|$

برای رسم نمودار $|f|$، ابتدا نمودار $y=f(x)$ را رسم می‌کنیم سپس قسمتی از نمودار که زیر محور x ها است را آینه‌وار نسبت به محور x قرینه می‌کنیم.

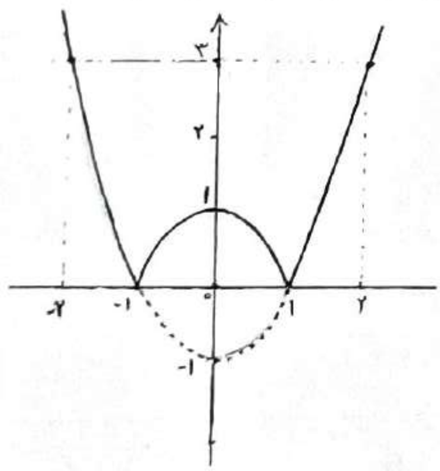
مثال:



$y=\sin x$



$y=|\sin x|$



$y=|x^2-1|$

مثال: نمودار تابع $y=|x^2-1|$ را رسم کنید.

پاسخ: ابتدا نمودار $y=x^2-1$ را از انتقال $y=x^2$ یک واحد به پایین رسم می‌کنیم سپس قسمتهایی که زیر محور x ها قرار دارند را آینه‌وار نسبت به محور x قرینه می‌کنیم.

تمرین: نمودار $y=||x|-1|$ را رسم کنید.

درس سوم : (تابع وارون)

اگر f تابعی یک به یک باشد آنگاه وارون پذیر است و تابع وارون را با نماد f^{-1} نشان می دهند.

نکته: اگر f به صورت زوج مرتبی داده شده باشد و جای مؤلفه های اول و دوم زوج ها را عوض کنیم f^{-1} حاصل می شود.

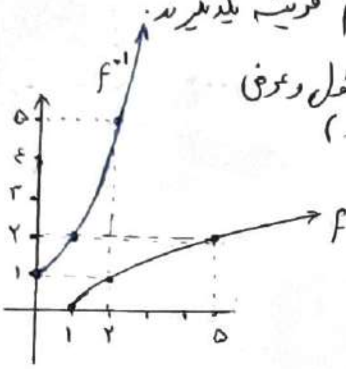
$$f=\{(۳,۲)(۵,۱)(۰,۷)\} \longrightarrow f^{-1}=\{(۲,۳)(۱,۵)(۷,۰)\}$$

توجه: به طور کلی اگر $(a,b)\in f$ آنگاه $(b,a)\in f^{-1}$

$$\begin{cases} \text{دامنه } D_f = \overset{\text{برد}}{R_{f^{-1}}} \\ \text{دامنه } D_{f^{-1}} = R_f \end{cases}$$

نکته: نمودار f و f^{-1} نسبت به نیمساز ربع اول و سوم قرینه یکدیگرند.
(بنابراین اگر نمودار f را داشته باشیم کافیست جای طول و عرض نقاط f را عوض کنیم مختصات نقاط f^{-1} حاصل می شود)

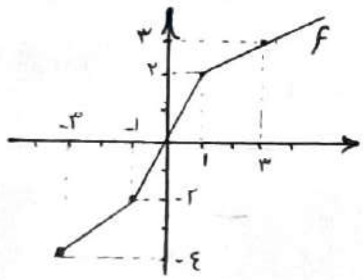
مثال:



$D_f=R_{f^{-1}}=[1,+\infty)$

نقاط نمودار f		نقاط نمودار f^{-1}
(۱,۰)		(۰,۱)
(۲,۱)	$\rightsquigarrow$	(۱,۲)
(۵,۲)		(۲,۵)

مثال: نمودار f به صورت مقابل است نمودار f^{-1} از کدام یک از نقاط زیر عبور نمی کند؟



۱) (۲,۱) ۲) (۳,۳) ۳) ✓ (-۳,-۴) ۴) (-۲,-۱)

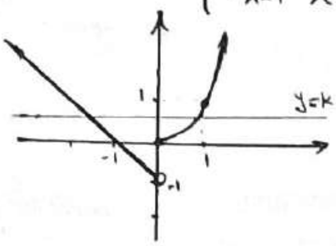
تمرین: با توجه به نمودار بالا حاصل $\dfrac{f^{-1}(۲)+f(-۳)}{f^{-1}(-۴)+f^{-1}(-۲)}$ را بدست آورید.

مثال: اگر $f(x)=۳ax-۵$ و نقطه $(۴,۷)$ روی نمودار تابع f^{-1} باشد مقدار a را بدست آورید.

$$(۴,۷)\in f^{-1} \Rightarrow (۷,۴)\in f \rightsquigarrow f(۷)=۴$$
$$۳a(۷)-۵=۴$$
$$۲۱a=۹$$
$$\boxed{a=\frac{۹}{۲۱}}$$

مثال: به کمک رسم نمودار ثابت کنید تابع مقابل وارون پذیر نیست.

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & x\geq 0 \\ -x-1 & x<0 \end{cases}$$



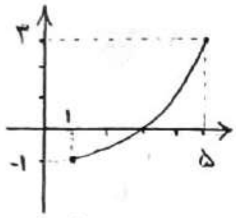
پاسخ ـــــ خط افقی $y=k$ نمودار تابع را در بیش از یک نقطه قطع می کند. بنابراین تابع یک به یک نیست پس معکوس پذیر هم نخواهد بود.

نکته مهم: اگر f تابعی وارون پذیر و f^{-1} وارون آن باشد همواره داریم:

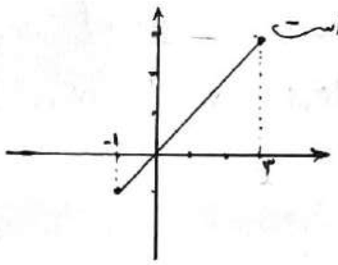
$$\begin{cases} (f\circ f^{-1})(x)=x & ; \quad x\in \underbrace{D_{f^{-1}}}_{\text{دامنه تابع داخلی}} \\ (f^{-1}\circ f)(x)=x & ; \quad x\in \underbrace{D_{f}}_{\text{دامنه تابع داخلی}} \end{cases}$$

به عبارت دیگر ترکیب هر تابع با تابع وارون خود حتماً تابع همانی است.

مثال: شکل مقابل نمودار تابع $y=f(x)$ است. نمودار $y=(f\circ f^{-1})(x)$ کدام است؟



پاسخ ـــــ طبق نکته بالا گفتیم $(f\circ f^{-1})(x)$ همان تابع همانی $y=x$ است فقط دامنه آن همان دامنه f^{-1} (تابع داخلی) یعنی برد f است، در شکل برد f بازه $[-1,3]$ است.



به طور کلی: دو تابع f و g وارون یکدیگرند هرگاه:

$$\begin{cases} (f\circ g)(x)=x & x\in D_g \\ (g\circ f)(x)=x & x\in \underbrace{D_f}_{\text{دامنه تابع داخلی}} \end{cases}$$

(یعنی اگر ترکیب دو تابع f و g برابر تابع همانی باشد f و g وارون یکدیگرند)

مثال: نشان دهید دو تابع $f(x)=\frac{1}{x}+3$ و $g(x)=\frac{1}{x-3}$ وارون یکدیگرند.

پاسخ ـــــ

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=\frac{1}{g(x)}+3=\frac{1}{\frac{1}{x-3}}+3=(x-\cancel{3})+\cancel{3}=x$$

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=\frac{1}{f(x)-3}=\frac{1}{(\frac{1}{x}+\cancel{3})-\cancel{3}}=\frac{1}{\frac{1}{x}}=x$$

دی ۹۸

تمرین: نشان دهید توابع $f(x)=3x-4$ و $g(x)=\frac{x+4}{3}$ وارون یکدیگرند.

نحوهٔ محاسبهٔ ضابطهٔ تابع وارون:

برای بدست آوردن ضابطهٔ تابع وارون f^{-1}

ابتدا در معادله $y=f(x)$: متغیر x را برحسب y محاسبه می‌کنیم (یعنی x را تنها در یک طرف نگه داریم)

سپس جای x و y را عوض می‌کنیم (y به x و برعکس).

مثال: برای توابع زیر ضابطهٔ تابع وارون را بدست آورید:

الف) $f(x)=1+\sqrt[3]{x-5}$

$$y=1+\sqrt[3]{x-5} \xrightarrow{\text{محاسبه } x \text{ برحسب } y} y-1=\sqrt[3]{x-5} \xrightarrow{\text{به توان ۳}} (y-1)^3=x-5$$

$$\longrightarrow x=(y-1)^3+5$$

$$\xrightarrow{\text{جای } x \text{ و } y \text{ عوض}} \boxed{y=(x-1)^3+5} : f^{-1}(x)$$

ب) $g(x)=\frac{3x+8}{5}+4$

$$y=\frac{3x+8}{5}+4 \xrightarrow{\text{محاسبه } x \text{ برحسب } y} y-4=\frac{3x+8}{5} \longrightarrow 3x+8=5y-20$$

$$\longrightarrow 3x=5y-28$$

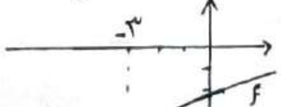
$$\longrightarrow x=\frac{5y-28}{3}$$

$$\xrightarrow{\text{جای } x \text{ و } y \text{ عوض}} \boxed{y=\frac{5x-28}{3}} : g^{-1}(x)$$

مثال: وارون پذیری تابع زیر را بررسی کنید و در صورت وارون پذیر بودن تابع، ضابطهٔ تابع وارون را بدست آورید.

$f(x)=\sqrt{x+3}-5$

پاسخ ← نمودار تابع f از طریق انتقال به صورت



است، چون خط‌های افقی نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کنند لذا f یک به یک است

درنتیجه وارون پذیر است.

$$y=\sqrt{x+3}-5 \xrightarrow{\text{محاسبه } x \text{ برحسب } y} y+5=\sqrt{x+3} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} (y+5)^2=x+3 \longrightarrow x=(y+5)^2-3$$

$$\xrightarrow{\text{تعویض}} \boxed{y=(x+5)^2-3} : f^{-1}(x)$$

$$D_{f^{-1}}=R_f=[-5,+\infty)$$

مثال (کنکور ۹۹) : اگر $g(x)$ وارون تابع $f(x)=x+\sqrt{x}$ باشد مقدار $g(6)+g(12)$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۱۳ ۴) ۱۴

$f(x)=x+\sqrt{x}$, $g(x)=f^{-1}(x) \xrightarrow[\text{قرار می‌دهیم}]{\text{به جای } x \text{ عدد } 6}$ $g(6)=f^{-1}(6)=x$ (فرض کنیم) $\rightsquigarrow f(x)=6 \rightsquigarrow x=4$ (به ازای چه مقداری از x)

$\xrightarrow[\text{قرار می‌دهیم}]{\text{به جای } x \text{ عدد } 12}$ $g(12)=f^{-1}(12)=x$ (فرض کنیم) $\rightsquigarrow f(x)=12 \rightsquigarrow x=9$

$\Rightarrow g(6)+g(12)=4+9=\boxed{13}$

توجه: $y=f(x) \Rightarrow f^{-1}(y)=x$

تمرین: اگر $f(x)=\sqrt{x+5}$ دامنه و برد توابع f و f^{-1} را بدست آورده و نمودار آنها را رسم کنید و ضابطه f^{-1} را نیز بدست آورید.

مثال: (کنکور ۹۸ داخل) اگر $f(x)=x^2-2x-3$ ؛ $x\geq 1$ باشد، نمودارهای دو تابع f^{-1} و $g(x)=\frac{x-9}{2}$ با کدام طول متقاطع هستند؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۵ ۳) ۱۸ ۴) ۲۱ ✓

پاسخ ⟵ $f(x)=x^2-2x-3 = (x-1)^2-4$ ؛ $x\geq 1$
$\quad\quad\quad\quad +1-4$

حال وارون f را پیدا می‌کنیم:

$\Longrightarrow y=(x-1)^2-4 \xrightarrow{\text{محاسبه } x \text{ برحسب } y} y+4=(x-1)^2 \rightsquigarrow \sqrt{y+4}=x-1 \longrightarrow x=\sqrt{y+4}+1$

$\xrightarrow{\text{تغییر نام}} f^{-1}(x): \boxed{y=\sqrt{x+4}+1}$

حال نقطه تلاقی $f^{-1}(x)$ و $g(x)$ را می‌یابیم:

$\sqrt{x+4}+1=\frac{x-9}{2} \xrightarrow{\text{کنترل گزینه‌ها}} x=\boxed{21}$

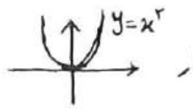
تمرین: وارون هر یک از توابع زیر را بدست آورید.

الف) $y=(x+1)^3-2$ ج) $g(x)=-5-\sqrt{3x+1}$

ب) $f(x)=1+\sqrt{x-2}$ د) $g(x)=-\frac{x}{2}+3$

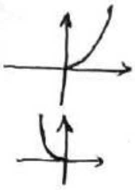
نکته: می دانیم اگر تابعی یک به یک نباشد وارون پذیر هم نیست. اما گاهی با محدود کردن دامنه یک تابع، می توان تابعی یک به یک بدست آورد.

مثلاً تابع f با نمودار



$D_f=(-\infty,+\infty)$

یک به یک نیست ولی با محدود کردن دامنه تابع به بازه $[0,+\infty)$

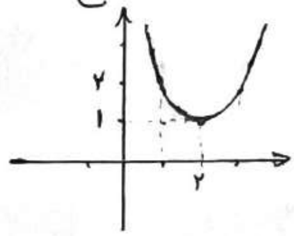


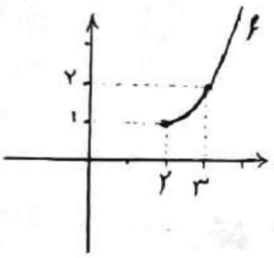
و یا بازه $(-\infty,0]$ تابع یک به یک بدست می آید.

مثال: با محدود کردن دامنه تابع $f(x)=x^2-4x+5$ یک تابع یک به یک بدست آورید. دامنه و برد تابع (یک به یک) و وارون آن را بنویسید و این دو تابع را رسم کنید.

پاسخ ←

$$f(x)=x^2-4x+\overset{4+1}{5}=(x-2)^2+1$$





دامنه f را به بازه $[2,+\infty)$ محدود می کنیم نمودار آن به صورت مقابل حاصل شد که یک به یک است و لذا وارون پذیر است. (ضابطه تغییر نمی کند ولی دامنه تغییر می کند)

$f(x)=(x-2)^2+1$ $\quad D_f=[2,+\infty)$ و $R_f=[1,+\infty)$

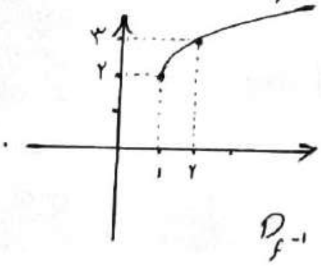
محاسبه ضابطه تابع وارون: $y=(x-2)^2+1 \xrightarrow{\text{محاسبه x بر حسب y}} y-1=(x-2)^2 \xrightarrow{\text{جذر}} x-2=\pm\sqrt{y-1}$

چون $D_f=[2,+\infty)$ یعنی $x\geq 2 \rightarrow x-2\geq 0$ لذا علامت منفی طرف دوم غیرقابل قبول است

$\rightarrow x-2=\sqrt{y-1}$

$\rightarrow x=\sqrt{y-1}+2$

$\xrightarrow{\text{تعویض نام}} \boxed{y=\sqrt{x-1}+2} : f^{-1}(x)$



حال جای طول و عرض نقاط f را عوض کنیم نقاط f^{-1} بدست می آید:

$D_{f^{-1}}=[1,+\infty)$, $R_{f^{-1}}=[2,+\infty)$

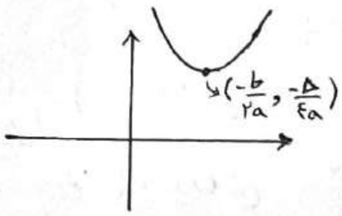
توجه: در مثال بالا اگر دامنه را به $(-\infty,2]$ نیز محدود کنیم جواب مشابه است.

$\boxed{y=-\sqrt{x-1}+2} : f^{-1}(x)$

منفی

تمرین: (خرداد ۹۹ خارج) : الف) وارون تابع $y=\sqrt{x+2}$ را بدست آورید.
ب) با محدود کردن دامنه تابع $f(x)=x^2-4x+5$ یک تابع یک به یک بدست آورید و ضابطه تابع وارون را بدست آورید.

نکته: تابع $f(x)=ax^2+bx+c$ با دامنه $(-\infty,+\infty)$ یک به یک نیست ولذا وارون پذیر نمی باشد
اما در بازه های محدود $(-\infty,-\frac{b}{2a}]$ و $[-\frac{b}{2a},+\infty)$ یک به یک ولذا وارون پذیر است
طول رأس سهمی



برد این توابع $R_f=[-\frac{\Delta}{4a},+\infty)$ می باشد (وقتی $a>0$ باشد)
عرض رأس سهمی

نکته: برای محاسبه ضابطه تابع وارون در توابع چندضابطه‌ای کافیست در تک تک ضابطه‌ها x را برحسب y بدست آورده و سپس جای x و y را عوض کنیم.

مثال: ضابطه وارون تابع $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & x\geq 0\\ -\sqrt{-x} & x<0\end{cases}$ را بدست آورید.

$$y=\sqrt{x} \xrightarrow{\text{محاسبه x برحسب y}} y^2=x \rightarrow x=y^2 \xrightarrow[\text{عوض}]{\text{جای x و y}} \boxed{y=x^2} : f^{-1}$$

$$y=-\sqrt{-x} \rightsquigarrow y^2=-x \rightarrow x=-y^2 \rightarrow \boxed{y=-x^2} : f^{-1}$$

$D_{f^{-1}}=R_f$

$$\Rightarrow f^{-1}(x)=\begin{cases}x^2 & x\geq 0\\ -x^2 & x<0\end{cases} \quad \text{یا} \quad f^{-1}(x)=x|x|$$

وارون تابع مرکب: همواره داریم

$$\boxed{(f\circ g)^{-1}=g^{-1}\circ f^{-1}}$$

یعنی اگر ترکیب دو تابع را وارون کنیم تک تک تابع‌ها وارون می‌شود و جای آنها عوض می‌شود.

نهایی ۹۸،۹۷

مثال (تمرین کتاب درسی) : اگر $f(x)=\frac{1}{8}x-3$ و $g(x)=x^3$ مقادیر زیر را بدست آورید.

الف) $(f\circ g)^{-1}(5)$ ب) $(g^{-1}\circ f^{-1})(5)$

پاسخ ←

الف) $(f\circ g)(x)=f(g(x))=\frac{1}{8}g(x)-3=\frac{1}{8}x^3-3$

$\underbrace{(f\circ g)(x)}_{y}$ حال x را برحسب y بدست می‌آوریم:

$$y=\frac{1}{8}x^3-3 \xrightarrow{\text{محاسبه x برحسب y}} y+3=\frac{1}{8}x^3 \xrightarrow{\times 8} 8(y+3)=x^3 \xrightarrow{\text{ریشه سوم}} x=\sqrt[3]{8(y+3)}$$

$$\xrightarrow{\text{جای x و y عوض}} \boxed{y=\sqrt[3]{8(x+3)}} : (f\circ g)^{-1}(x)$$

$$(f\circ g)^{-1}(x)=\sqrt[3]{8(x+3)} \xrightarrow{x=5} (f\circ g)^{-1}(5)=\sqrt[3]{64}=4$$

ب) $g(x)=x^3$

$$y=x^3 \xrightarrow{\text{محاسبه x برحسب y}} \sqrt[3]{y}=x \longrightarrow x=\sqrt[3]{y} \xrightarrow{\text{جای x و y عوض}} \boxed{y=\sqrt[3]{x}} : g^{-1}(x)$$

$f(x)=\frac{1}{8}x-3$

$$y=\frac{1}{8}x-3 \xrightarrow{\text{محاسبه x برحسب y}} y+3=\frac{1}{8}x \xrightarrow{\times 8} x=8(y+3) \xrightarrow{\text{جای x و y عوض}} \boxed{y=8(x+3)} : f^{-1}(x)$$

$$(g^{-1}\circ f^{-1})(5)=g^{-1}(f^{-1}(5))=g^{-1}(64)=\sqrt[3]{64}=4$$

تست کنکور ۹۸ خارج: اگر $f(x)=\frac{2}{5}x-4$ و $g(x)=x^3+x$ باشند مقدار $g^{-1}of^{-1}(8)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{5}$ ۲) ۲ ۳) ۲,۵ ۴) ۳ ✓

تست (کنکور ۹۹ ریاضی)

اگر $f(x)=x+\sqrt{x}$ و $g(x)=\frac{9x+4}{1-x}$ باشند مقدار $(g^{-1}of^{-1})(20)$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{5}$ ✓ ۲) $\frac{3}{5}$ ٤) $\frac{2}{3}$ ۵) $\frac{3}{4}$

$f^{-1}(20)=?$

$$x+\sqrt{x}=20 \longrightarrow \sqrt{x}=20-x \Longrightarrow x^2-41x+400=0 \Rightarrow (x-25)(x-16)=0 \Rightarrow \boxed{x=16},\ x=25\ \times$$

$g^{-1}(16)$?

$$\frac{9x+4}{1-x}=16 \Longrightarrow 16-16x=9x+4 \longrightarrow x=\frac{2}{5}$$

روش دوم، فرض کنیم $(g^{-1}of^{-1})(20)=a$

$20 \xrightarrow{f^{-1}} b \xrightarrow{g^{-1}} a$

$a \xrightarrow{g} b \xrightarrow{f} 20$

$f(b)=20 \longrightarrow b+\sqrt{b}=20 \longrightarrow b=16$

$$g(a)=16 \longrightarrow \frac{9a+4}{1-a}=16 \longrightarrow 9a+4=16-16a \longrightarrow a=\boxed{\frac{2}{5}}$$

(توجه: با توجه به مطالب بیان شده تا اینجا تمرینات صفحه ۲۹ کتاب درسی حل و بررسی شوند)

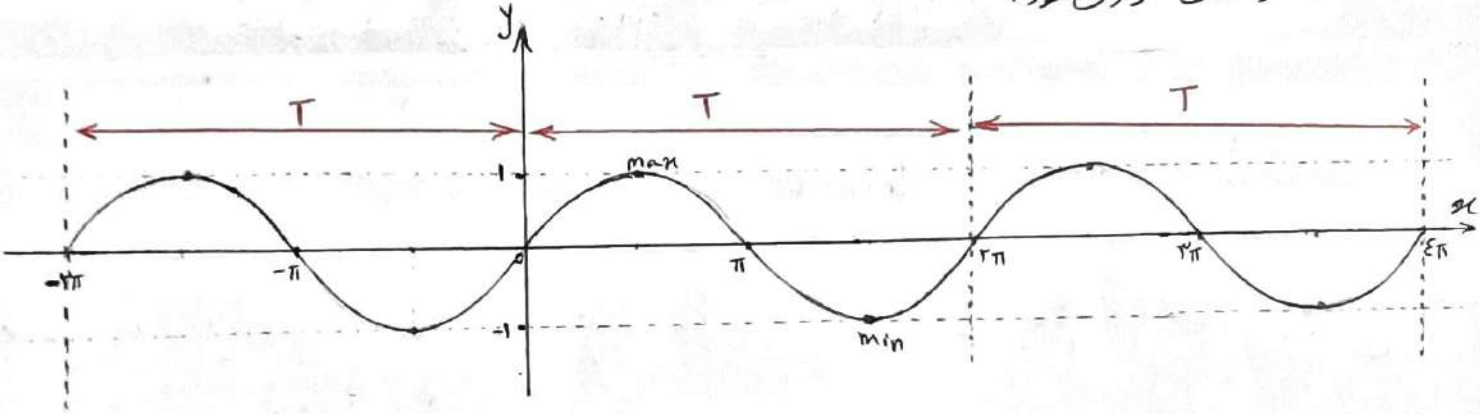
فصل ۲ مثلثات

درس اول : تناوب و تانژانت

تعریف : تابع f را متناوب می نامیم هرگاه یک عدد حقیقی مثبت مانند T موجود باشد به طوری که برای هر $x\in D_f$ داشته باشیم $x\pm T\in D_f$ و $f(x\pm T)=f(x)$

(کوچکترین عدد مثبت T با این خاصیت را دوره تناوب f گویند.)

اگر دوره تناوب T باشد آنگاه نمودار تابع در فاصله T واحدی تکرار می شود مثل نمودار تابع سینوس که در فاصله های ۲π واحدی تکرار می شود.



دوره تناوب : $T=2\pi$

$1=$ بیشترین مقدار (max)

$-1=$ کمترین مقدار (min)

نکته : در توابع $y=a\sin(bx)+c$ و $y=a\cos(bx)+c$

$\boxed{T=\frac{2\pi}{|b|}}$ دوره تناوب و $\boxed{max=|a|+c}$ و $\boxed{min=-|a|+c}$

مثال: دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم توابع زیر را مشخص کنید.

الف) $y=\overset{a}{2}\sin(\overset{b}{3}x)+\overset{c}{1}$

دوره تناوب $T=\frac{2\pi}{|b|}=\boxed{\frac{2\pi}{3}}$, $max=|a|+c=|2|+1=\boxed{3}$, $min=-|a|+c=-|2|+1=\boxed{-1}$

ب) $y=8\cos(\frac{\pi}{2}x)$

دوره تناوب $T=\frac{2\pi}{|b|}=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=\frac{4\pi}{\pi}=\boxed{4}$, $max=|a|+c=8+0=\boxed{8}$, $min=-|a|+c=-8+0=\boxed{-8}$

تمرین (شهریور ۹۹) : دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع زیر را بدست آورید: $y = \pi \sin(-x) + 1$

تمرین (خرداد ۹۹) : دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع مقابل را بدست آورید: $y = \sqrt{3} - \cos(\frac{\pi}{2}x)$

تمرین (دی ۹۸) : " " " " " " " " $y = -\pi \sin(\frac{x}{3}) - 2$

تمرین ← مثال اول صفحه ۳۵ کتاب درسی

مثال: ضابطه تابع مثلثاتی (سینوسی) را بدست آورید که دوره تناوب آن π و مقدار ماکزیمم آن ۴ و مقدار مینیمم آن ۲- باشد.

پاسخ ←

$T = \frac{2\pi}{|b|} \longrightarrow \pi = \frac{2\pi}{|b|} \longrightarrow |b| = \frac{2\pi}{\pi} \Rightarrow \boxed{b = \pm 2}$

$max = 4 \longrightarrow |a| + c = 4$
$min = -2 \longrightarrow -|a| + c = -2$ $\xrightarrow{\text{حل دستگاه}}$ $|a| = 3 \longrightarrow \boxed{a = \pm 3}$, $c = 1$

توجه: $\left(|a| = \frac{max - min}{2} , \quad c = \frac{max + min}{2} \right)$

ضابطه: $y = a\sin(bx) + c \longrightarrow \boxed{y = \pm 3\sin(\pm 2x) + 1}$

تمرین : ضابطه تابع کسینوس را بدست آورید که در آن $T = 3$ و $max = -1$ و $min = -7$ باشد.

تمرین (خرداد ۹۹ خارج) اگر در یک تابع مثلثاتی دوره تناوب 4π و مقدار ماکزیمم ۱- و مقدار مینیمم ۷- باشد، تابع سینوسی آنرا بنویسید.

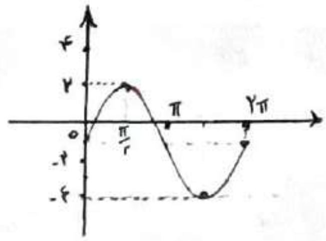
نکته : در نمودار تابع $y = a\sin(bx) + c$ اگر نمودار به صورت ... یعنی از محور yها صعودی شروع کند $ab > 0$ (یعنی a و b هم علامتند)

اگر نمودار به صورت ... یعنی از محور yها نزولی شروع کند $ab < 0$ (یعنی a و b مختلف العلامه)

نکته : در نمودار تابع $y = a\cos(bx) + c$ اگر نمودار به صورت ... یعنی از محور yها نزولی شروع کند $ab > 0$ (a و b هم علامتند)

اگر نمودار به صورت ... یعنی از محور yها صعودی شروع کند $ab < 0$ (a و b مختلف العلامه)

مثال: اگر نمودار تابع $y = a\sin(bx) + c$ باشد مقادیر a و b و c را بیابید.



پاسخ ←

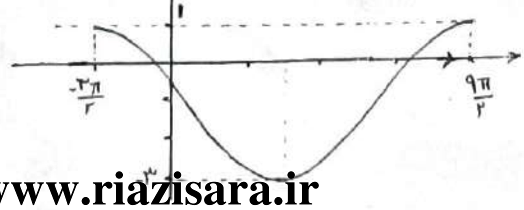
$max = |a| + c = 2$
$min = -|a| + c = -4$ $\xrightarrow{\text{حل دستگاه}}$ $c = -1$, $|a| = 3 \longrightarrow a = \pm 3 \xrightarrow{\text{با توجه به نمودار}} \boxed{a = 3}$ قابل قبول

دوره تناوب $T = \frac{2\pi}{|b|} \longrightarrow 2\pi = \frac{2\pi}{|b|} \longrightarrow |b| = \frac{2\pi}{2\pi} = 1 \longrightarrow b = \pm 1 \xrightarrow{\text{طبق نمودار}} \boxed{b = 1}$ قابل قبول

طبق نکته: $ab > 0$, $a > 0 \longrightarrow b > 0$

$\xrightarrow{\text{جایگذاری در ضابطه}} \boxed{y = 3\sin(x) - 1}$

تست (کنکور ۹۹) : شکل مقابل نمودار تابع $y = a\sin(bx) + c$ را در یک بازه تناوب نشان می‌دهد نسبت $\frac{a}{b}$ کدام است؟



۱) ۲-
۲) ۳-
۳) ۴-
۴) ۶-

پاسخ ← نکته: $\boxed{\text{ابتدای نمودار} - \text{انتهای نمودار} = \text{دوره تناوب}}$

$T = \frac{9\pi}{2} - (-\frac{3\pi}{2}) = 4\pi$ دوره تناوب

$max = |a| + c = 1$

$min = -|a| + c = -3$ $\xrightarrow[\text{جمع طرفین}]{\text{حل دستگاه}}$ $c = -1$, $|a| = 2 \rightarrow a = \pm 2$

a و b مختلف العلامه $ab<0$ ← نمودار سینوسی نزولی قطع و محور y را

$T = \frac{2\pi}{|b|} \rightarrow 4\pi = \frac{2\pi}{|b|} \rightarrow |b| = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2} \rightarrow b = \pm\frac{1}{2}$

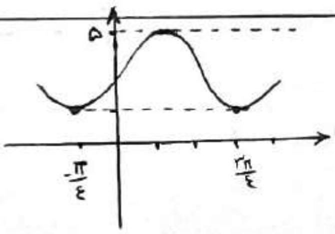
با فرض $a=-2$ و $b=\frac{1}{2}$ باشد: پس $\frac{a}{b} = \frac{-2}{\frac{1}{2}} = -4$

درست بالا $c = \frac{max+min}{2} = \frac{1+(-3)}{2} = -1$ لذا ضابطه تابع به صورت $y = -2\sin(\frac{1}{2}x) - 1$ می‌باشد.

نکته: ۱- فاصله بین دو نقطه ماکزیمم متوالی، یک دوره تناوب است.

۲- فاصله بین دو نقطه مینیمم متوالی، یک دوره تناوب است.

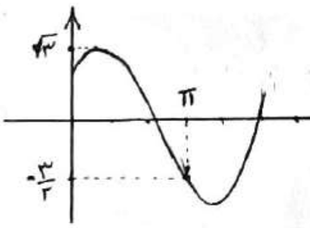
۳- فاصله بین نقاط ماکزیمم و مینیمم متوالی، نصف دوره تناوب است.



تمرین: اگر نمودار تابع به معادله $f(x) = c + 2\sin(bx)$ به صورت مقابل باشد.

حاصل $c \times b$ را بدست آورید.

$a = 2 > 0$



تست (۹۸ داخل) شکل روبه رو قسمتی از نمودار تابع $y = c + a\sin(x + \frac{\pi}{3})$ است.

a کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $\sqrt{3}$ ✓ ۴) ۲

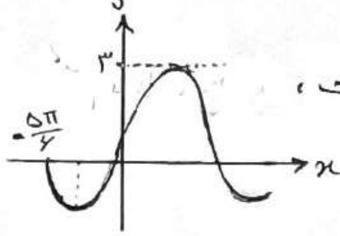
$max = |a| + c = \sqrt{3} \xrightarrow{a>0} \boxed{a + c = \sqrt{3}}$

$y = c + a\sin(x + \frac{\pi}{3}) \xrightarrow[\text{نقطه روی نمودار در معادله صدق می‌کند}]{(\pi, -\frac{3}{2})} -\frac{3}{2} = c + a\sin(\pi + \frac{\pi}{3}) \xrightarrow{= -\sin\frac{\pi}{3}} -\frac{3}{2} = c - a\sin\frac{\pi}{3}$ ($\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$)

$\xrightarrow{\times -2} \boxed{3 = \sqrt{3}a - 2c}$

$\times 2 \begin{cases} a + c = \sqrt{3} \\ \sqrt{3}a - 2c = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2a + \cancel{2c} = 2\sqrt{3} \\ \sqrt{3}a - \cancel{2c} = 3 \end{cases}$

جمع: $(2 + \sqrt{3})a = 2\sqrt{3} + 3 \rightarrow a = \frac{2\sqrt{3} + 3}{2 + \sqrt{3}} \overset{\text{گویا}}{=} \sqrt{3}$



مثال ٤ : (۹۸ خارج) شکل مقابل قسمتی از نمودار تابع $y=c+a\cos(\frac{\pi}{2}-x)$ است، مقدار تابع در $\frac{\pi}{6}$ کدام است؟

۱) ۱٫۵ ۲) ۲ ✓ ۳) ۲٫۵ ٤) $1+\sqrt{3}$

پاسخ ← اولا دقت کنید که ضابطه تابع $y=c+a\sin x$ است (چون $\cos(\frac{\pi}{2}-x)$ همان $\sin x$ است.)

$$y=c+a\cos(\frac{\pi}{2}-x)=\boxed{c+a\sin x}$$

$$\max=|a|+c=3 \xrightarrow{a>0} a+c=3$$

$$\xrightarrow{\text{ضابطه}} y=c+a\sin x \xrightarrow[\text{نقطه روی نمودار است / در ضابطه تابع صدق میکند}]{(-\frac{5\pi}{6},0)} 0=c+a\underbrace{\sin(-\frac{5\pi}{6})}_{-\frac{1}{2}} \rightarrow c-\frac{a}{2}=0 \xrightarrow{\times -2} a-2c=0$$

$$\times 2\begin{cases}a+c=3\\a-2c=0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}2a+\cancel{2c}=6\\a-\cancel{2c}=0\end{cases}$$

جمع: $3a=6 \rightarrow a=2,\ c=1$

$$\xrightarrow{\text{در ضابطه قرار دهیم}} \underset{f(x)}{y}=1+2\sin x \rightarrow f(\frac{\pi}{6})=1+2\underbrace{\sin\frac{\pi}{6}}_{\frac{1}{2}}=\boxed{2}$$

توجه : مثال پایانی صفحه ۳۵ و ۳۶ مربوط به مطالب بیان شده نیز مورد مطالعه دقیق قرار گیرد.

تابع تانژانت : تابعی با ضابطه $f(x) = \tan x$ می‌باشد

نکته : می‌دانیم $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ لذا $D_f = \mathbb{R} - \{\text{ریشه‌های مخرج}\}$ دامنه

$\text{مخرج} = 0 \longrightarrow \cos x = 0 \longrightarrow x = \frac{\pi}{2}\,,\ \overset{\frac{3\pi}{2}}{(\pi + \frac{\pi}{2})}\,,\ \overset{\frac{5\pi}{2}}{(2\pi + \frac{\pi}{2})}\,, \dots \longrightarrow \boxed{x = k\pi + \frac{\pi}{2}}$ ریشه‌های مخرج

دامنه تانژانت : $\boxed{D_f = \mathbb{R} - \{x = k\pi + \frac{\pi}{2}\}}$

برد تابع تانژانت $R_f = \mathbb{R}$

مثال : (دی ۹۷) دامنه تابع $f(x) = \tan(2x)$ را بدست آورید.

پاسخ ⟵ $\tan 2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x}$

$\text{مخرج} = 0 \longrightarrow \cos 2x = 0 \longrightarrow (2x) = \overbrace{k\pi + \frac{\pi}{2}}^{\text{همواره}} \xrightarrow{\div 2} \boxed{x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}}$ ریشه‌های مخرج

$D_f = \mathbb{R} - \{\text{ریشه‌های مخرج}\} = \mathbb{R} - \{x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\}$

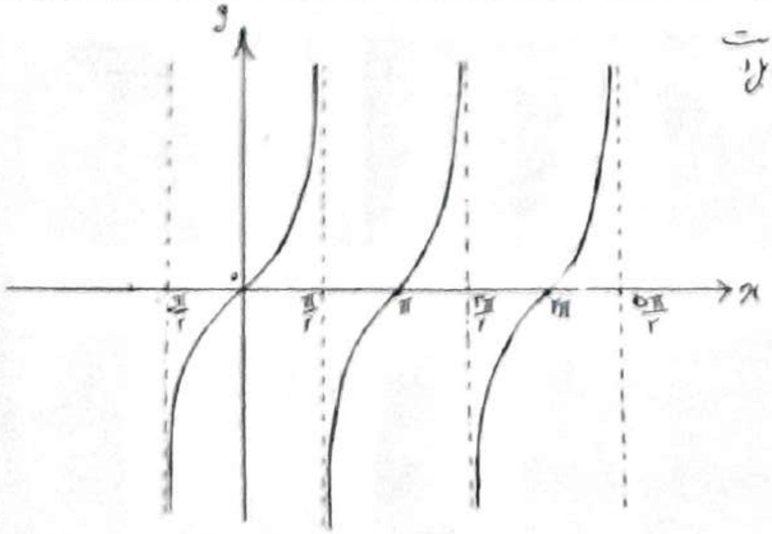
نکته : تابع تانژانت $f(x) = \tan x$ متناوب است و دوره تناوب آن $T = \pi$ می‌باشد

زیرا $\tan(\pi + x) = \tan x$ (به عبارت دیگر نمودار آن در هر π رادیان تکرار می‌شود)

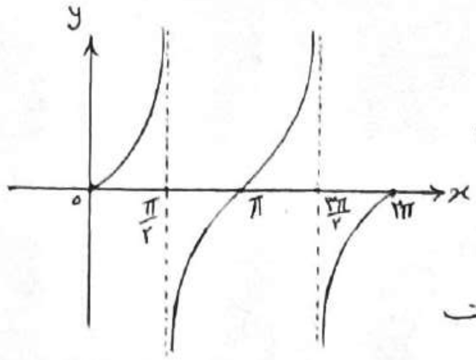
نکته : دوره تناوب $f(x) = \tan(bx)$ به صورت $T = \frac{\pi}{|b|}$ می‌باشد.

نکته : نمودار تابع $y = \tan x$ در بازه $[-\frac{\pi}{2}, \overset{2\pi + \frac{\pi}{2}}{\frac{5\pi}{2}}]$ به صورت مقابل است

این نمودار در بازه‌های به طول π رادیان تکرار می‌شود



کار در کلاس ص ۳۹:



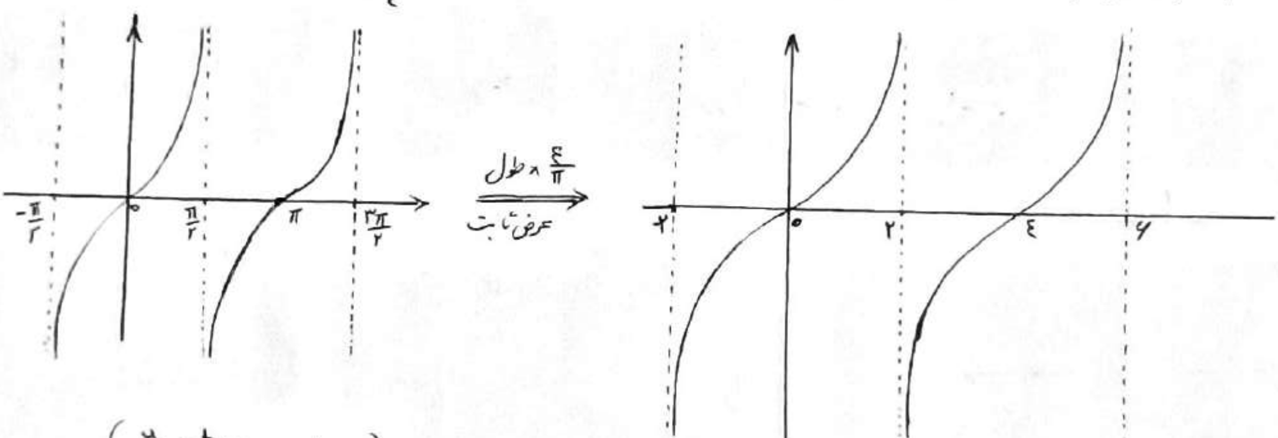
با رسم نمودار تابع $y=\tan x$ در بازهٔ $[0, 2\pi]$ صعودی یا نزولی بودن آن را بررسی کنید.

پاسخ ← در بازه‌های $[0,\frac{\pi}{2})$ و $(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$ و $(\frac{3\pi}{2},2\pi]$ تابع تانژانت اکیداً صعودی (صعودی) است.

نکته: تابع تانژانت در کل دامنه‌اش صعودی نمی‌باشد (فقط در بازه‌هائی که در آنها تعریف شده صعودی است) بازه‌ای وجود ندارد که تابع تانژانت در آن نزولی باشد.

مثال: تابع $f(x)=\tan\frac{\pi x}{4}$ با دامنهٔ $(2, a)$ اکیداً صعودی است حداکثر مقدار a را بدست آورید.

پاسخ ← ابتدا نمودار $y=\tan x$ را رسم می‌کنیم سپس طول نقاط را در $\underbrace{\frac{1}{(\frac{\pi}{4})}}_{\frac{1}{k}}=\frac{4}{\pi}$ ضرب می‌کنیم (عرضها ثابت)

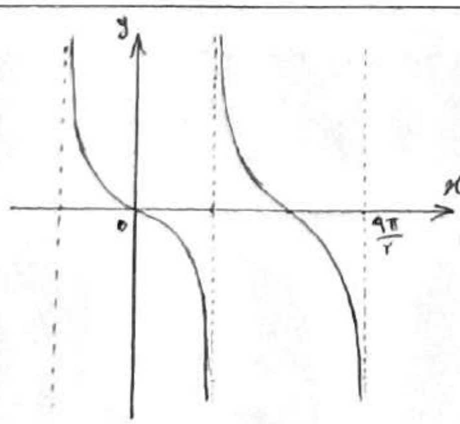


(نمودار $y=\tan x$)

(نمودار $y=\tan\frac{\pi}{4}x$) (منبسط شده نمودار $\tan x$ در راستای محور x‌ها)

با توجه به نمودار حداکثر مقدار a برای آنکه تابع روی بازهٔ $(2, a)$ صعودی باشد برابر 6 می‌باشد.

مثال: بخشی از نمودار $y=\tan(bx)$ به صورت مقابل است. مقدار b کدام است؟



پاسخ ← دوره تناوب $y=\tan(bx)$ به صورت $T=\frac{\pi}{|b|}$ است.

با توجه به شکل از 0 تا $\frac{9\pi}{2}$ یک و نیم دوره تناوب می‌باشد لذا:

$$\frac{T}{2}+T=\frac{9\pi}{2} \xrightarrow{\times 2} T+2T=9\pi \longrightarrow 3T=9\pi \longrightarrow \boxed{T=3\pi}$$ دوره تناوب

از طرفی $T=\frac{\pi}{|b|} \longrightarrow \frac{\pi}{|b|}=3\pi \longrightarrow |b|=\frac{1}{3} \longrightarrow b=\pm\frac{1}{3} \xrightarrow{\text{با توجه به شکل واضح است نمودار نسبت به محور y‌ها قرینه شده}} \boxed{b=-\frac{1}{3}}$ قابل قبول

درس دوم : معادلات مثلثاتی

نسبتهای مثلثاتی 2α :

نسبتهای مثلثاتی $\alpha+\beta$ به صورت مقابل است:

$$\begin{cases} 1)\ \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \\ 2)\ \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \end{cases}$$

اگر در هر دو رابطه قرار دهیم $\alpha=\beta$ خواهیم داشت:

$$\xrightarrow{(1)} \sin(\alpha+\alpha)=\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha$$

$$\rightsquigarrow \boxed{\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha}$$

نصف

مثلاً : $\sin 4x = 2\sin 2x \cdot \cos 2x$ و $\sin x = 2\sin\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{2}$

نصف

$$\xrightarrow{(2)} \cos(\alpha+\alpha)=\cos\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sin\alpha \Longrightarrow \boxed{\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$$

$1-\sin^2\alpha$ $1-\cos^2\alpha$

نتیجه۱: $\boxed{\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1}$

نتیجه۲: $\boxed{\cos 2\alpha = 1-2\sin^2\alpha}$

مثال : (خرداد ۹۹ و تمرین کتاب)

اگر $\cos\alpha=\frac{5}{13}$ و α زاویه حاده باشد الف) $\cos 2\alpha$ ب) $\sin 2\alpha$ را حساب کنید.

پاسخ الف) $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 2\left(\frac{5}{13}\right)^2 - 1 = \frac{50}{169} - 1 = \frac{50-169}{169} = \frac{-119}{169}$

ب) ابتدا $\sin\alpha$ را از رابطه مقابل بدست می‌آوریم:

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \rightarrow \sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha = 1-\left(\frac{5}{13}\right)^2 = \frac{169-25}{169} = \frac{144}{169}$

$\rightarrow \sin\alpha = \pm\frac{12}{13} \xrightarrow[\text{یعنی ربع اول}]{\alpha\ \text{حاده}} \boxed{\sin\alpha=\frac{12}{13}}$ قابل قبول

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\left(\frac{12}{13}\right)\left(\frac{5}{13}\right) = \frac{120}{169}$$

مثال (ش ۹۸) مقدار $\sin 22.5^\circ$ را حساب کنید.

پاسخ ←　$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

$\xrightarrow{\alpha = 22.5^\circ} \cos 45^\circ = 1 - 2\sin^2 22.5 \longrightarrow 2\sin^2 22.5 = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{2} \xrightarrow{\div 2} \sin^2 22.5 = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$

$\xrightarrow{\text{جذر}} \sin 22.5 = +\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

۲۲٫۵ ربع اول

تمرین: مقدار $\sin 15^\circ$ و $\cos 15^\circ$ را حساب کنید. (ش ۹۹)

مثال: اگر $\sin x - \cos x = \frac{1}{3}$ باشد حاصل $\cos 4x$ را بدست آورید.

$\xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} (\sin x - \cos x)^2 = (\frac{1}{3})^2 \longrightarrow \overbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}^{1} - 2\sin x \cos x = \frac{1}{9}$

$\longrightarrow 2\sin x \cos x = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \longrightarrow \sin 2x = \frac{8}{9}$

$\cos 4x = 1 - 2\sin^2 2x = 1 - 2(\frac{8}{9})^2 = 1 - \frac{128}{81} = -\frac{47}{81}$

نصف

تمرین: اگر $\frac{\tan\alpha + 1}{\tan\alpha - 1} = \frac{3}{2}$ آنگاه حاصل $\sin 2\alpha$ را بدست آورید.

معادله مثلثاتی: معادلاتی که در آنها نسبت مثلثاتی باشد. مثلاً: معادله‌ی مثلثاتی $2\sin x - \sqrt{3} = 0$

یا $\cos 2x - \cos x + 1 = 0$

حل معادله مثلثاتی: با استفاده از روابط جبری و فرمولهای مثلثاتی که آموخته‌ایم سعی می‌کنیم یک معادله مثلثاتی را به صورت ساده شده‌ی $\boxed{\sin x = \sin\alpha}$ یا $\boxed{\cos x = \cos\alpha}$ تبدیل کنیم. سپس

از روابط زیر جوابهای کلی آنها را بدست می‌آوریم:

$$\sin x = \sin\alpha \longrightarrow \begin{cases} x = \overbrace{2k\pi + \alpha}^{\text{در ربع اول}} \\ x = \underbrace{2k\pi + (\pi - \alpha)}_{\text{در ربع دوم}} \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

سینوس در ربع اول و دوم مثبت است

توجه: اگر در جوابهای کلی به k مقادیر صحیح بدهیم جوابهای متعلق به یک بازه مثلاً $[0, 2\pi]$ بدست می‌آید.

مثال: معادله مثلثاتی زیر را حل کنید و جوابهای موجود در بازه $[0,2\pi]$ را مشخص کنید. $2\sin x-1=0$

پاسخ:

$2\sin x=1 \longrightarrow \sin x=\frac{1}{2}$ سینوس چه زاویه‌ای $\frac{1}{2}$ است

$\longrightarrow \sin x=\sin\frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} x=2k\pi+\frac{\pi}{6} \\ x=2k\pi+\underbrace{(\pi-\frac{\pi}{6})}_{\frac{5\pi}{6}} \end{cases}$ جوابهای کلی:

چون جوابهای موجود در $[0,2\pi]$ را خواسته پس تا جایی به k مقدار صحیح می‌دهیم که جوابها از بازهٔ $[0,2\pi]$ خارج نشوند. $\Longrightarrow$

$k=0 \longrightarrow \boxed{x=\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}}$ ✓ قابل قبول

$k=1 \longrightarrow x=2\pi+\frac{\pi}{6}$ ✗ , $2\pi+\frac{5\pi}{6}$ ✗

$k=-1 \longrightarrow x=-2\pi+\frac{\pi}{6}$ ✗

مثال: معادله مثلثاتی مقابل را حل کنید و جوابهای کلی و موجود در بازهٔ $[0,2\pi]$ را مشخص کنید. $2\sin x+\sqrt{2}=\underbrace{\sqrt{8}}_{2\sqrt{2}}$

پاسخ:

$2\sin x=\underbrace{2\sqrt{2}-\sqrt{2}}_{\sqrt{2}} \longrightarrow \sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ سینوس چه زاویه‌ای $\frac{\sqrt{2}}{2}$ است

$\longrightarrow \sin x=\sin\frac{\pi}{4} \longrightarrow \begin{cases} x=2k\pi+\frac{\pi}{4} \\ x=2k\pi+\underbrace{(\pi-\frac{\pi}{4})}_{\frac{3\pi}{4}} \end{cases}$ جوابهای کلی:

$k=0 \longrightarrow \boxed{x=\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}}$ قابل قبول

$k=1 \longrightarrow$ جوابها خارج $[0,2\pi]$

$k=-1$

$\vdots$

مثال: (۹۹ خارج) معادله مثلثاتی مقابل را حل کنید. $2\sin 3x-\sqrt{2}=0$

پاسخ:

$2\sin 3x=\sqrt{2} \longrightarrow \sin 3x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ سینوس چه زاویه‌ای $\frac{\sqrt{2}}{2}$ است

$\longrightarrow \sin 3x=\sin\frac{\pi}{4} \longrightarrow \begin{cases} 3x=2k\pi+\frac{\pi}{4} \\ 3x=2k\pi+\underbrace{(\pi-\frac{\pi}{4})}_{\frac{3\pi}{4}} \end{cases} \xrightarrow[\text{x تنها باشد}]{\div 3} \begin{cases} x=\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{12} \\ x=\frac{2k\pi}{3}+\frac{3\pi}{12} \end{cases}$ جوابهای کلی

توجه: اگر طرف راست معادله پس از ساده شدن منفی شد بدون در نظر گرفتن منفی، ابتدا سینوس آن عدد را محاسبه می‌کنیم سپس علامت را پشت زاویه قرار می‌دهیم:

مثلاً:

$2\sin x+\sqrt{3}=0 \longrightarrow \sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}=-\sin\frac{\pi}{3}$

$\longrightarrow \sin x=\sin(-\frac{\pi}{3}) \longrightarrow \begin{cases} x=2k\pi+(-\frac{\pi}{3}) \\ x=2k\pi+(\pi-(-\frac{\pi}{3})) \end{cases}$ جوابهای کلی:

مثال: معادله مثلثاتی $\sin 3x = \sin 5x$ را حل کنید.

$$\sin(\overset{x}{3x}) = \sin(\overset{\alpha}{5x}) \xrightarrow{\begin{cases} x = 2k\pi+\alpha \\ x = 2k\pi+(\pi-\alpha)\end{cases}} \begin{cases} 3x = 2k\pi + 5x \\ 3x = 2k\pi + (\pi - 5x) \end{cases} \to \begin{cases} -2x = 2k\pi \xrightarrow{\div(-2)} \\ 8x = 2k\pi + \pi \xrightarrow{\div 8} \end{cases}$$

جوابهای کلی:
$$\longrightarrow \begin{cases} x = -k\pi \\ x = \dfrac{(2k+1)\pi}{8} \end{cases}$$

مثال: (شهریور ۹۹ / تمرین کتاب) معادله مثلثاتی $\cos^2 x - \sin x = \frac{1}{4}$ را حل کنید و جوابهای کلی آنرا بدست آورید.

پاسخ ← از رابطه $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ داریم $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

$$\longrightarrow (1 - \sin^2 x) - \sin x = \frac{1}{4}$$

$$\longrightarrow \sin^2 x + \sin x - \frac{3}{4} = 0 \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = -\frac{3}{4} \end{cases} \qquad \Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4(1)(-\tfrac{3}{4}) = 1 + 3 = 4 > 0$$

معادله دو ریشه حقیقی متمایز دارد.

$$\longrightarrow \sin x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{4}}{2(1)} = \frac{-1 \pm 2}{2} \to \frac{1}{2}, \ -\frac{3}{2}$$

$$\sin x = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6} \longrightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \underbrace{(\pi - \tfrac{\pi}{6})}_{\frac{5\pi}{6}} \end{cases}$$

$$\sin x = -\frac{3}{2}$$ جواب ندارد ← غیرممکن

زیرا همواره $-1 \le \sin x \le 1$

نکته: (حالات خاص) اگر به حالات $\sin x = 0$ یا $\sin x = 1$ یا $\sin x = -1$ رسیدیم

بهتر است جوابها را به صورت زیر بنویسیم:

انتهای زاویه‌هایی که $\sin$ صفر شود

$\sin x = 0 \to \boxed{x = k\pi}$

انتهای زاویه‌ای که $\sin$ برابر ۱ شود

$\sin x = 1 \Rightarrow \boxed{x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}}$

$\sin x = -1 \Rightarrow \boxed{x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}}$

مثال: معادله مثلثاتی $2\sin^2 x - \sin x = 0$ را حل کنید.

$$2\sin^2 x - \sin x = 0 \xrightarrow{\text{فاکتورگیری}} \sin x(2\sin x - 1) = 0 \to \sin x = 0 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} \boxed{x = k\pi}$$

$$\to 2\sin x - 1 = 0 \to \sin x = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6} \to \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \underbrace{(\pi - \tfrac{\pi}{6})}_{\frac{5\pi}{6}} \end{cases}$$

تمرین: معادله مثلثاتی $\sin x - \cos 2x = 0$ را حل کنید. (دی ۹۷، خرداد ۹۸)

تمرین: (ش ۹۸) معادله مثلثاتی $\sin x \cos x = \frac{\sqrt{2}}{4}$ را حل کنید و جوابهای کلی آنرا بدست آورید. (ضرب)

نکته: اگر $\cos x = \cos\alpha \Longrightarrow \boxed{x = 2k\pi \pm \alpha}$ جوابهای کلی

کسینوس در ربع اول و چهارم مثبت است

مثال: $2\cos x - \sqrt{3} = 0 \rightsquigarrow \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{6} \rightsquigarrow$ جوابهای کلی: $\boxed{x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6}}$

کسینوس چه زاویه‌ای $\frac{\sqrt{3}}{2}$ است

نکته: (حالات خاص) اگر به حالات $\cos x = 0$ یا $\cos x = 1$ یا $\cos x = -1$ رسیدیم

می‌توان جوابهای کلی آنها را به صورتهای زیر بدست آورد.

۲ انتهای زاویه‌ها که کسینوس آنها صفر است

$\cos x = 0 \longrightarrow \boxed{x = k\pi + \frac{\pi}{2}}$

$\cos x = -1 \rightsquigarrow \boxed{x = 2k\pi + \pi}$

$\cos x = 1 \rightsquigarrow \boxed{x = 2k\pi}$

مثال: معادله مثلثاتی مقابل را حل کنید و جوابهای کلی آنرا بدست آورید:

$2\cos^2 x - \cos x = 0$

$\xrightarrow{\text{فاکتورگیری}} \cos x(2\cos x - 1) = 0$

$\cos x = 0 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} \boxed{x = k\pi + \frac{\pi}{2}}$ جوابهای کلی

$2\cos x - 1 = 0 \rightsquigarrow \cos x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} \rightsquigarrow \boxed{x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}}$ جوابهای کلی

مثال (خرداد ۹۹، تمثال کتاب): معادله مقابل را حل کنید: $\underset{a}{2}\cos^2 x - \underset{b}{9}\cos x - \underset{c}{5} = 0$ را حل کنید.

پاسخ ←

$\Delta = b^2 - 4ac = (-9)^2 - 4(2)(-5) = 81 + 40 = 121 > 0$

$\cos x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{9 \pm \sqrt{121}}{2(2)} = \frac{9 \pm 11}{4}$ ، $\frac{20}{4} = 5$ ، $\frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$

اگر $\cos x = 5$ غیرقابل قبول (زیرا همواره $-1 \le \cos x \le 1$)

اگر $\cos x = -\frac{1}{2} = -\cos\frac{\pi}{3} = \cos(\pi - \frac{\pi}{3}) = \cos\frac{2\pi}{3} \rightsquigarrow \boxed{x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}}$

مخرج مشترک

ابتدا علامت منفی را در نظر نمی‌گیریم کسینوس چه عددی $\frac{1}{2}$ است

علامت منفی طبق نکته زیر به پشت زاویه منتقل می‌شود
$\cos x = -\cos\alpha = \cos(\pi - \alpha)$

تمرین: جوابهای کلی معادله مثلثاتی $\cos^2 x + 3\cos x + 2 = 0$ به کدام صورت است؟

مثال : معادله مثلثاتی $\cos x = \cos 2x$ را حل کنید.

پاسخ ←

$$\cos 2x = \cos x \longrightarrow 2x = 2k\pi \pm x$$

$$2x = 2k\pi + x \rightsquigarrow x = 2k\pi \longrightarrow \boxed{x = 2k\pi}$$

$$2x = 2k\pi - x \rightsquigarrow 3x = 2k\pi \xrightarrow{\div 3} \boxed{x = \frac{2k\pi}{3}}$$

مثال : جواب‌های معادله مثلثاتی $\cos^2 x + 3\sin(\frac{\pi}{2}+x) + 2 = 0$ را بدست آورید.

پاسخ ←

ربع دوم ← سینوس مثبت است ← $+$ تغییر نام به کسینوس $= +\cos x$

$$\cos^2 x + 3\cos x + 2 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{اتحاد یک جمله مشترک}} (\cos x + 1)(\cos x + 2) = 0$$

$\longrightarrow \cos x = -1 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x = 2k\pi + \pi$

$\longrightarrow \cos x = -2$ غیرقابل قبول

کنکور ۹۸ : مجموع جوابهای معادله مثلثاتی $4\sin x \times \sin(\frac{3\pi}{2} - x) = 1$ در بازهٔ $[0, 2\pi]$ کدام است؟

پاسخ ←

ربع سوم ← منفی است سینوس ← $-$ = تغییر نام به کسینوس $= -\cos x$

$$\rightsquigarrow 4\sin x \times (-\cos x) = 1 \rightsquigarrow -4\sin x\cos x = 1 \rightsquigarrow -2\sin 2x = 1$$

$$\rightsquigarrow \sin 2x = -\frac{1}{2} = -\sin\frac{\pi}{6} = \sin(-\frac{\pi}{6}) \rightsquigarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + (-\frac{\pi}{6}) \\ 2x = 2k\pi + (\pi - (-\frac{\pi}{6})) \end{cases} \xrightarrow{\div 2} \begin{cases} x = k\pi - \frac{\pi}{12} \\ x = k\pi + \frac{7\pi}{12} \end{cases}$$

جوابهای کلی

$k = 0 \rightsquigarrow \cancel{-\frac{\pi}{12}}, \frac{7\pi}{12}$

$k = 1 \rightsquigarrow \frac{11\pi}{12}, \frac{19\pi}{12}$

$k = 2 \rightsquigarrow \frac{23\pi}{12}, \cancel{\frac{31\pi}{12}}$

چون صورت از دو برابر مخرج بیشتر است پس از 2π بیشتر است

$$\xrightarrow{\text{مجموع جوابها}} \frac{60\pi}{12} = 5\pi$$

تمرین : جواب‌های کلی معادله $\sin(x+\pi)\cos(\frac{\pi}{2}+x) - 2\sin(\pi - x) + 1 = 0$ را بدست آورید.

تمرین : مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی $\sin 2x + \cos(\frac{\pi}{2} - x) = 0$ در بازهٔ $[0, 2\pi]$ کدام است؟

توجه : تمرینات صفحه ۴۸ کتاب درسی با توجه به مطالب تدریس شده تا اینجا قابل حل می‌باشد

تست (کنکور ۹۹)

فصل ۳ (حد بی‌نهایت و حد در بی‌نهایت)

درس ۱ : حد بی‌نهایت

بخش‌پذیری چندجمله‌ایها بر $(x-a)$: تقسیم مقابل را درنظر بگیرید.

$$\begin{array}{l|l} f(x) & x-a \\ \hline R & Q(x) \end{array}$$

مقسوم — مقسوم‌علیه — خارج قسمت — باقی مانده

رابطهٔ تقسیم را به صورت خطی به شکل

$$\boxed{f(x) = (x-a)\times Q(x) + R}$$

نیز نشان می‌دهند.

مقسوم — مقسوم‌علیه — خارج قسمت — باقی مانده

اگر در رابطهٔ تقسیم $x=a$ قرار دهیم داریم:

$$f(a) = (\cancel{a-a})\times Q(a) + R \longrightarrow \boxed{f(a)=R}$$

بنابراین برای بدست آوردن باقی مانده تقسیم بدون انجام تقسیم ابتدا ریشهٔ مقسوم‌علیه را بدست آورده و در مقسوم به جای x ها جایگزین می‌کنیم.

مثال: باقی مانده تقسیم $f(x)=4x^2+7x+5$ بر $(x-3)$ را بدست آورید.

پاسخ ←

$$x-3=0 \longrightarrow x=3$$

$$R=f(3)=4(3)^2+7(3)+5 = 36+21+5=\boxed{62}$$

باقی مانده

ب) با انجام تقسیم $f(x)$ بر $(x-3)$ نیز به باقیمانده بدست آمده در (الف) برسید.

$$\begin{array}{l|l} 4x^2+7x+5 & x-3 \\ -(4x^2-12x) & \overline{4x+19} \\ \hline 0 \quad 19x+5 & \\ -(19x-57) & \\ \hline 0 \quad +62 & \end{array}$$

باقی مانده — خارج قسمت

محاسبات:

$$\frac{4x^2}{x}=4x \qquad \frac{19x}{x}=19$$

نکته: اگر باقی مانده تقسیم $f(x)$ بر $(x-a)$ برابر صفر باشد آنگاه $f(x)$ بر $(x-a)$ بخش‌پذیر است.

$$R=f(a)=0$$

مثال: (الف) نشان دهید چند جمله‌ای $f(x) = 2x^3 + x^2 + 1$ بر دو جمله‌ای $x+1$ بخش‌پذیر است.

پاسخ ← $x+1=0 \rightsquigarrow x=-1$

باقیمانده: $R = f(-1) = 2(-1)^3 + (-1)^2 + 1 = -2+1+1 = 0$

چون باقی مانده صفر شد بنابراین $f(x)$ بر $x+1$ بخش‌پذیر است.

ب) به کمک تقسیم $f(x)$ را به صورت حاصلضرب عاملها بنویسید (یعنی تجزیه کنید)

پاسخ ← وقتی باقی مانده تقسیم صفر باشد، تجزیه f عبارت $\boxed{\text{خارج قسمت} \times \text{مقسوم علیه}}$ می‌باشد.

$$\begin{array}{l|l} 2x^3 + x^2 + 1 & x+1 \\ \hline -(2x^3 + 2x^2) & 2x^2 - x + 1 \\ \quad 0 \quad -x^2 + 1 & \\ \quad -(-x^2 - x) & \\ \quad\quad 0 \quad +x + 1 & \\ \quad\quad -(x+1) & \\ \quad\quad\quad 0 \quad 0 & \end{array}$$

خارج قسمت

$\frac{2x^3}{x} = 2x^2$

$\frac{-x^2}{x} = -x$

$\frac{x}{x} = 1$

مقسوم علیه — خارج قسمت

$$\boxed{f(x) = 2x^3 + x^2 + 1 = (x+1)(2x^2 - x + 1)}$$

تست (کنکور ۹۹): فرض کنید چندجمله‌ای $P(x)$ بر x^2-1 بخش‌پذیر باشد. اگر $Q(x) = P(x-1) + P(1-x)$ آنگاه حاصل تقسیم (باقیمانده) $Q(x)$ بر $x-2$ کدام است؟

-1 $\boxed{\text{صفر}}$ 1 2

پاسخ ← $P(x)$ بر x^2-1 بخش‌پذیر است یعنی بر $(x-1)(x+1)$ بخش‌پذیر است پس باقیمانده تقسیم $P(x)$ بر $x-1$ صفر است و باقیمانده تقسیم $P(x)$ بر $x+1$ صفر است.

$$\begin{cases} P(1) = 0 \\ P(-1) = 0 \end{cases}$$

باقی مانده تقسیم $Q(x)$ بر $(x-2)$ برابر $Q(2)$ است:

$$Q(x) = P(x-1) + P(1-x) \xrightarrow{x=2} Q(2) = P(1) + P(-1) = 0 + 0 = 0$$

مثال: اگر $f(x) = x^3 + ax^2 + 4x - 1$ بر $x-1$ بخش‌پذیر باشد، مقدار a را بدست آورید و سپس $f(x)$ را تجزیه کنید.

پاسخ ← چون f بر $x-1$ بخش‌پذیر است پس:

باقی مانده: $R = f(1) = 0$

$$\rightsquigarrow 1^3 + a(1)^2 + 4(1) - 1 = 0 \rightsquigarrow a + 4 = 0 \rightsquigarrow \boxed{a = -4}$$

$$\xrightarrow[\text{جایگذاری}]{a=-4} f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x - 1$$

$$\begin{array}{l|l} x^3 - 4x^2 + 4x - 1 & x-1 \\ \hline -(x^3 - x^2) & x^2 - 3x + 1 \\ \quad 0 \quad -3x^2 + 4x - 1 & \\ \quad -(-3x^2 + 3x) & \\ \quad\quad 0 \quad x - 1 & \\ \quad\quad -(x-1) & \\ \quad\quad\quad 0 \quad 0 & \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \boxed{x^3 + 4x^2 + 4x - 1 = (x-1)(x^2 - 3x + 1)}$$

تجزیه

تمرین ۱: اگر باقی مانده تقسیم چند جمله‌ای $P(x)=2x^4+mx+2$ بر $x+1$ برابر ۲ باشد، باقی مانده تقسیم $P(x)$ بر $x-1$ را بیابید.

تمرین ۲: مقدار k را طوری تعیین کنید که عبارت $8x^3+4x^2-kx-8$ بر $2x-1$ بخش‌پذیر باشد.

توجه: با توجه به مطالب بیان شده تا اینجا کار در کلاس صفحه ۵۱ حل و بررسی شود.

حد توابع کسری:

اگر حد تابع f و g وقتی $x\to a$ به ترتیب L و m باشد آنگاه:

$$\lim_{x\to a}\frac{f}{g}=\frac{L}{m}$$

چهار حالت برای حد توابع کسری $\frac{f}{g}$ وقتی $x\to a$ ممکن است حاصل شود:

1) $\lim_{x\to a}\frac{f}{g}=\frac{L\neq 0}{m\neq 0}$ 2) $\lim_{x\to a}\frac{f}{g}=\frac{0}{m}=0$ 3) $\lim_{x\to a}\frac{f}{g}=\frac{L}{0}$ وجود ندارد

4) $\lim_{x\to a}\frac{f}{g}=\frac{0}{0}$ مبهم

حالت (۱) و (۲) جواب حد مستقیماً حاصل می‌شود. حالت (۳) را در حد بی‌نهایت مورد بررسی قرار می‌دهیم. حالت (۴) را مبهم گویند و باید عامل صفرکننده $(x-a)$ را در صورت و مخرج ظاهر و سپس حذف کنیم. (عامل صفرکننده را به روش تجزیه، تقسیم کردن یا گویا کردن بوجود می‌آوریم)

مثال: حاصل حدهای زیر را بدست آورید:

الف) $\lim_{x\to 2}\frac{2x^3+x^2+1}{x+1}=\frac{2(2)^3+2^2+1}{2+1}=\frac{21}{3}=7$

ب) $\lim_{x\to -2}\frac{x^2-5x-14}{x^2+4}=\frac{(-2)^2-5(-2)-14}{(-2)^2+4}=\frac{4+10-14}{4+4}=\frac{0}{8}=0$

مثال: حد توابع زیر را بدست آورید:

الف) $\lim_{x\to 5}\frac{x^2-7x+10}{x^2-25}=\frac{25-35+10}{25-25}=\frac{0}{0}\to$ مبهم $\to$ عامل صفرکننده $(x-5)$ را از صورت و مخرج حذف می‌کنیم.

ترتیب جمله مشترک / مزدوج

$$=\lim_{x\to 5}\frac{\cancel{(x-5)}(x-2)}{\cancel{(x-5)}(x+5)}=\frac{5-2}{5+2}=\boxed{\frac{3}{7}}$$

ب) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^2-9}{x^2+3x} = \dfrac{0}{0}$ مبهم $= \lim\limits_{x\to -3} \dfrac{(x-3)\cancel{(x+3)}}{x\cancel{(x+3)}} = \dfrac{-3-3}{-3} = \dfrac{-6}{-3} = 2$

ج) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{2x^3+3x^2+4}{x^2+5x+6} = \dfrac{0}{0}$ مبهم $= \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\cancel{(x+2)}(2x^2-x+2)}{\cancel{(x+2)}(x+3)} = \dfrac{8+2+2}{-2+3} = \dfrac{12}{1} = 12$

(هرگاه در صورت یا مخرج چندجمله‌ای درجه ۳ یا درجه ۲ باشد که تجزیه آن راحت نباشد می‌توان از تقسیم آن بر عامل صفرکننده در چرکنویس تجزیه را بدست آورد.)

$$2x^3+3x^2+4 \;\Big|\; \underline{x+2} \quad 2x^2-x+2$$

باقیمانده ← 0

لذا $\boxed{2x^3+3x^2+4=(x+2)(2x^2-x+2)}$

مقسوم علیه (عامل صفرکننده)

خارج قسمت

د) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x^2-3x-2}{x^3-8} = \dfrac{0}{0}$ مبهم $= \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\overbrace{\cancel{(x-2)}(2x+1)}^{\text{تجزیه از تقسیم بر عامل صفرکننده}}}{\underbrace{\cancel{(x-2)}(x^2+2x+4)}_{\text{تجزیه از اتحاد چاق و لاغر یا تقسیم کردن بر عامل صفرکننده}}} = \dfrac{4+1}{4+4+4} = \dfrac{5}{12}$

اتحاد چاق و لاغر:

$$\begin{cases} a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2) \\ a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2) \end{cases}$$

$x^3-2^3=(x-2)(x^2+2x+2^2)$

$$2x^2-3x-2 \;\Big|\; \underline{x-2} \quad 2x+1$$

0

ه) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{2x^2+x-1}{4x^2+4x-3} = \dfrac{0}{0}$ مبهم $= \lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{\cancel{(x-\frac{1}{2})}(2x+2)}{\cancel{(x-\frac{1}{2})}(4x+6)} = \dfrac{1+2}{2+6} = \dfrac{3}{8}$

تجزیه از تقسیم بر عامل صفرکننده.

$$2x^2+x-1 \;\Big|\; \underline{x-\tfrac{1}{2}} \quad 2x+2 \qquad\qquad 4x^2+4x-3 \;\Big|\; \underline{x-\tfrac{1}{2}} \quad 4x+6$$

$0 \qquad\qquad 0$

محاسبات تقسیم در چرکنویس به عهده دانش‌آموز

و) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-5x+6}{2x^3-13x^2+24x-9} =$

نکته: اگر در حدهای $\frac{0}{0}$ صورت یا مخرج یا هردو عبارت رادیکالی داشته باشد برای ایجاد عامل صفرکننده صورت و مخرج را در مزدوج عبارت رادیکالی ضرب می کنیم تا گویا شود.

مثال: حدهای زیر را محاسبه کنید

الف) $\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x^2-16} \overset{\text{مبهم } \frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x^2-16} \times \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} \overset{\text{اتحاد مزدوج}}{=} \lim_{x\to 4} \frac{(\sqrt{x})^2-2^2}{(x^2-16)(\sqrt{x}+2)}$

$= \lim_{x\to 4} \frac{\cancel{(x-4)}^{1}}{\cancel{(x-4)}_{1}(x+4)(\sqrt{x}+2)} = \frac{1}{8\times 4} = \boxed{\frac{1}{32}}$

ب) ۹۸ $\lim_{x\to 1} \frac{x-\sqrt{x}}{x^2+x-2} \overset{\text{مبهم } \frac{0}{0}}{=} \times \frac{x+\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}} \overset{\text{اتحاد مزدوج}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{x^2-x}{(x^2+x-2)(x+\sqrt{x})} = \lim_{x\to 1} \frac{x\cancel{(x-1)}^{1}}{(x+2)\cancel{(x-1)}_{1}(x+\sqrt{x})} = \frac{1}{3\times 2} = \boxed{\frac{1}{6}}$

ج) ۹۷ و ۹۹ ش $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{\sqrt{x+1}-2} \overset{\text{مبهم } \frac{0}{0}}{=} \times \frac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x+1}+2} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+1}+2)}{(\sqrt{x+1})^2-2^2}$

مخرج اتحاد مزدوج

$x+1-4 = x-3$

$= \lim_{x\to 3} \frac{\cancel{(x-3)}^{1}(x+3)(\sqrt{x+1}+2)}{\cancel{(x-3)}_{1}} = \frac{6\times 4}{1} = 24$

د) کنکور $\lim_{x\to -1} \frac{2x+\sqrt{3-x}}{x^2+x} =$

هـ) کنکور $\lim_{x\to 1} \frac{1-\sqrt{x}}{2-\sqrt{5-x}} =$

و) ۹۹ خ $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-2x-3}{x-\sqrt{x+6}} =$

نکته: اگر در حد توابع کسری که $\frac{0}{0}$ می‌شود در صورت و مخرج عبارت رادیکالی با ریشه ۳ باشد از اتحاد چاق و لاغر برای گویا کردن عبارت رادیکالی استفاده می‌کنیم. (معمولاً پرانتز لاغر اتحاد چاق و لاغر را داده اند باید صورت و مخرج را در پرانتز چاق اتحاد ضرب کنیم)

$$\underbrace{(\sqrt[3]{x}+2)}_{\text{لاغر}}\underbrace{(\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+2^2)}_{\text{چاق}}=(\sqrt[3]{x})^3+2^3=\underbrace{x+8}_{\text{گویا شد}}$$

مثال: حدهای زیر را حساب کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{\sqrt[3]{x}+1}{x^2+3x+2}=$ مبهم $\frac{0}{0}$

در پرانتز چاق اتحاد صورت و مخرج را ضرب می‌کنیم

$$=\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt[3]{x}+1}{x^2+3x+2}\times\frac{(\sqrt[3]{x^2}-1\sqrt[3]{x}+1^2)}{(\sqrt[3]{x^2}-1\sqrt[3]{x}+1^2)}\overset{\text{اتحاد چاق و لاغر}}{=}\lim_{x\to -1}\frac{(\sqrt[3]{x})^3+1^3}{(x+1)(x+2)(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1)}$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{\cancel{(x+1)}}{\cancel{(x+1)}(x+2)(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1)}=\frac{1}{1\times(1+1+1)}=\boxed{\frac{1}{3}}$$

ب) $\lim\limits_{x\to 8}\frac{x^2-8x}{\sqrt[3]{x}-2}=$ مبهم $\frac{0}{0}$

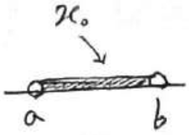
$$=\lim_{x\to 8}\frac{(x^2-8x)}{(\sqrt[3]{x}-2)}\times\frac{(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}{(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}=\lim_{x\to 8}\frac{(x^2-8x)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}{(\sqrt[3]{x})^3-2^3}$$

$$=\lim_{x\to 8}\frac{x\cancel{(x-8)}(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}{\cancel{(x-8)}}=\frac{8\times\overset{12}{(4+4+4)}}{1}=96$$

ج) کنکور ۹۸ $\lim\limits_{x\to -8}\frac{x^2+10x+16}{12+6\sqrt[3]{x}}=$

د) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3+x-2}{\sqrt[3]{x}-1}$

توجه: با توجه به مطالب بیان شده تا اینجا، کار در کلاس صفحه ۵۳ به طور کامل حل شوند.



مفهوم همسایگی : هر بازهٔ باز که x_0 در آن باشد را یک همسایگی از x_0 گویند

(بنابراین وقتی (a,b) یک همسایگی از x_0 باشد آنگاه حتماً $x_0 \in (a,b)$)

مثلاً بازهٔ $(1,3)$ یک همسایگی برای اعداد ۲ و ۱٫۵ و $\sqrt{3}$ و .... است زیرا $2 \in (1,3)$ و ....

ولی $(1,3)$ یک همسایگی برای ۳ و ۱ نیست زیرا $3 \notin (1,3)$, $1 \in (1,3)$

همسایگی محذوف : اگر (a,b) یک همسایگی از x_0 باشد آنگاه مجموعه $(a,b)-\{x_0\}$ یک همسایگی محذوف x_0 است.

همسایگی راست : بازه‌ای که شامل فقط نقاط سمت راست x_0 باشد

همسایگی چپ : بازه‌ای که شامل فقط نقاط سمت چپ x_0 باشد.

مثلاً : بازهٔ $(2,4)$ یک همسایگی چپ ۴ و یک همسایگی راست ۲ می‌باشد

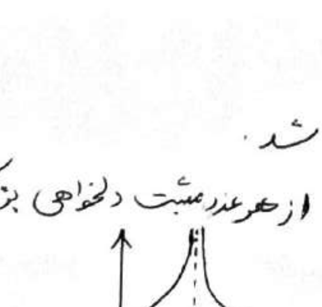
حد بی‌نهایت : (حد نامتناهی)

حدهایی که حاصل آنها $+\infty$ یا $-\infty$ می‌شود را حد بی‌نهایت گویند $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$

توجه : می‌دانیم $\pm\infty$ یک عدد حقیقی نیست و رابطهٔ $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ به حالت خاصی از عدم وجود حد اشاره دارد.

تعریف : فرض کنیم f در یک همسایگی محذوف a تعریف شده باشد.

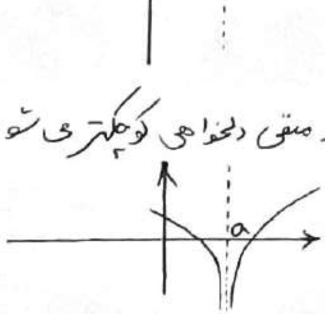
رابطهٔ $\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = +\infty}$ به این معناست که $f(x)$ از هر عدد مثبت دلخواهی بزرگتر می‌شود



به شرط آنکه x به قدر کافی به a نزدیک شود

تعریف ۲ : فرض کنیم f در یک همسایگی محذوف a تعریف شده باشد

رابطهٔ $\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = -\infty}$ به این معناست که $f(x)$ از هر عدد منفی دلخواهی کوچکتر می‌شود به شرط

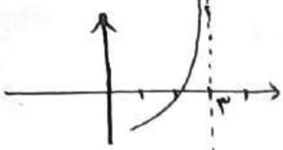


آنکه x به قدر کافی به a نزدیک شود

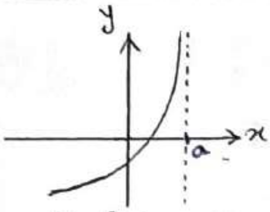
مثال: عبارت $\lim_{x\to 3^-} f(x) = +\infty$ به چه معناست؟ توضیح دهید و نمودار برای آن رسم کنید.

پاسخ ← یعنی $f(x)$ از هر عدد مثبت دلخواهی بزرگتر می‌شود به شرط آنکه x به قدر کافی از سمت مقادیر کوچکتر از ۳ به ۳ نزدیک شود.

(یا می‌توان گفت: وقتی x از سمت مقادیر کوچکتر از ۳ به ۳ نزدیک می‌شود، $f(x)$ از هر عدد مثبت دلخواهی بزرگتر می‌گردد)



تمرین: برای حدهای $\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$ نمودار رسم کنید.



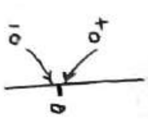
$\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty$

انواع صفر

صفر مطلق ← 0

صفر حدی ← 0^+ : عددی مثبت بسیار بسیار نزدیک صفر

صفر حدی ← 0^- : عددی منفی بسیار بسیار نزدیک صفر



نکته: می‌دانیم $\boxed{\frac{\text{عدد}}{0} = \text{وجود ندارد}}$ اما در حالت حدی $\boxed{\frac{\text{عدد}}{\text{صفر حدی}} = \pm\infty}$

$$\frac{\text{صفر مطلق}}{\text{صفر حدی}} = \frac{0}{0^+} = 0$$

$$\begin{cases} \frac{\text{عدد منفی}}{0^+} = -\infty \\ \frac{\text{عدد منفی}}{0^-} = +\infty \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\text{عدد مثبت}}{0^+} = +\infty \\ \frac{\text{عدد مثبت}}{0^-} = -\infty \end{cases}$$

نکته: برای محاسبه مقدار جزء صحیح یک عدد حقیقی باید ببینیم عدد حقیقی داده شده بین کدام دو عدد صحیح متوالی است. عدد صحیح کوچکتر حاصل جزء صحیح می‌باشد.

$$n \leq \overset{\text{عدد حقیقی}}{x} < n+1 \Longrightarrow [x] = n$$

مثلاً $-4 < -3{,}9 < -3 \rightarrow [-3{,}9] = -4$ و $5 < 5{,}7 < 6 \rightarrow [5{,}7] = 5$

$[0^+] = 0$ ، $0 < 0^+ < 1$ و $[0^-] = -1$ ، $-1 < 0^- < 0$

مثال: حاصل حدهای زیر را در صورت وجود بدست آورید:

الف) $\lim_{x\to 0^+}\frac{[x]}{x} = \frac{[0^+]}{0^+} = \frac{0}{0^+} = 0$

$\frac{0}{\text{عدد}} = 0$

ب) $\lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{[x]-1} = \frac{1^+-1}{[1^+]-1} = \frac{0^+}{1-1} = \frac{0^+}{0}$ وجود ندارد

$1<1^+<2$

ج) $\lim_{x\to 3^-}\frac{[x]-3}{x-3} = \frac{[3^-]-3}{3^- - 3} = \frac{2-3}{0^-} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$

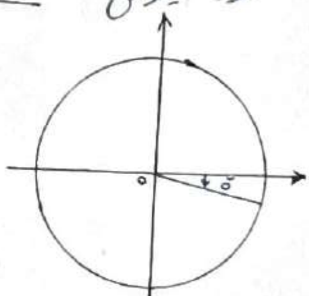
د) $\lim_{x\to 5}\frac{2}{|x-5|} = \lim_{x\to 5^\pm}\frac{2}{|x-5|} = \frac{2}{|5^\pm - 5|} = \frac{2}{|0^\pm|} = \frac{2}{0^+} = +\infty$

ه) $\lim_{x\to 0^-}\frac{[x]}{\sin x} = \frac{[0^-]}{\sin 0^-} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$

ربع چهارم

می دانیم $\sin 0 = 0$

و چون زاویه 0^- در ربع چهارم است و سینوس در ربع چهارم منفی است لذا $\sin 0^- = 0^-$

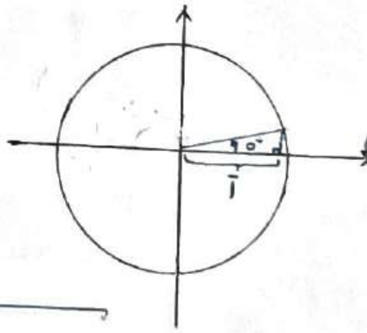


و) $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{1-\cos x} = \frac{1}{1-\cos 0^+} = \frac{1}{1-1^-} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

ربع اول

می دانیم $\cos 0 = 1$

و چون زاویه 0^+ در ربع اول است اگر از انتهای زاویه عمود بر محور کسینوسها رسم کنیم مقدار آن از ۱ کمتر می شود $\cos 0^+ = 1^-$



ز) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+}\frac{2}{\cos x} = \frac{2}{\cos\frac{\pi}{2}^+} = \frac{2}{0^-} = -\infty$

ربع دوم

علامت کسینوس منفی

$\cos\frac{\pi}{2} = 0$ اما $\cos\frac{\pi}{2}^+ = 0^-$

ح) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-}\tan x = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\cos\frac{\pi}{2}^-} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

$\frac{\pi}{2}^-$ از $\frac{\pi}{2}$ کمتر است ← ربع اول

علامت کسینوس مثبت است

ژ) $\lim_{x\to\pi^+}\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{\sin\pi^+} = \frac{1}{0^-} = -\infty$

π^+ از ۱۸۰ بیشتر لذا در ربع سوم
علامت سینوس در این ربع منفی است
$\sin\pi^+=0^-$ اما $\sin\pi=0$

تست (کنکور ۹۹): حاصل $\lim_{x\to-2^-}\frac{[x]+3}{x+2}$ کدام است؟

۱) $-\infty$ ۲) -1 ۳) صفر ✓ ۴) ۱

$\lim_{x\to-2^-}\frac{[x]+3}{x+2} = \frac{[(-2)^-]+3}{-2^-+2} = \frac{-3+3}{0^-} = \frac{0}{0^-} = 0$

مثلاً $-2{,}1$

تست (کنکور ۹۸ داخل): در مورد تابع $f(x)=\frac{x^2-1}{x+|x|}$، کدام بیان درست است؟

۱) $\lim_{x\to0^-}f(x)=+\infty$ ۲) $\lim_{x\to0^-}f(x)=-\infty$ ۳) $\lim_{x\to0^+}f(x)=+\infty$ ۴) $\lim_{x\to0^+}f(x)=-\infty$ ✓

$\lim_{x\to0^-}f(x) = \lim_{x\to0^-}\frac{x^2-1}{x+|x|} = \lim_{x\to0^-}\frac{x^2-1}{x-x} = \lim_{x\to0^-}\frac{x^2-1}{0} = \frac{-1}{0} =$ وجود ندارد

$\lim_{x\to0^+}f(x) = \lim_{x\to0^+}\frac{x^2-1}{x+|x|} = \lim_{x\to0^+}\frac{x^2-1}{x+x} = \lim_{x\to0^+}\frac{x^2-1}{2x} = \frac{0-1}{2(0^+)} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$

تست (کنکور ۹۸ خارج): در مورد تابع با ضابطه $f(x)=\frac{\sin x}{1+2\cos x}$، کدام بیان درست است؟

۱) $\lim_{x\to\frac{2\pi}{3}^+}f(x)=-\infty$ ✓ ۲) $\lim_{x\to\frac{2\pi}{3}^+}f(x)=+\infty$ ۳) $\lim_{x\to\frac{2\pi}{3}^-}f(x)=-\infty$ ۴) $\lim_{x\to\frac{4\pi}{3}}f(x)=+\infty$

می‌دانیم

$\cos\frac{2\pi}{3} = \cos(\pi-\frac{\pi}{3}) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ (ربع دوم)

$\cos\frac{4\pi}{3} = \cos(\pi+\frac{\pi}{3}) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ (ربع سوم)

$\lim_{x\to(\frac{2\pi}{3})^-}f(x) = \lim_{x\to(\frac{2\pi}{3})^-}\frac{\sin x}{1+2\cos x} = \frac{\sin\frac{2\pi}{3}}{1+2\cos(\frac{2\pi}{3})^-} = \frac{\frac{\sqrt3}{2}}{1+2(-\frac{1}{2}^+)} = \frac{\frac{\sqrt3}{2}}{1-1^-} = \frac{\frac{\sqrt3}{2}}{0^+} = +\infty$

مثلاً $(-0{,}49)$ $(0{,}98)$

$\lim_{x\to(\frac{2\pi}{3})^+}f(x) = \lim_{x\to(\frac{2\pi}{3})^+}\frac{\sin x}{1+2\cos x} = \frac{\frac{\sqrt3}{2}}{1+2(-\frac{1}{2})^-} = \frac{\frac{\sqrt3}{2}}{1-1^+} = \frac{\frac{\sqrt3}{2}}{0^-} = -\infty$

مثلاً $(-0{,}51)$ $1{,}02$

جواب گزینه ۴ باید $\pm\infty$ نوشته می‌شد.

تمرین : حاصل حدهای زیر را بدست آورید:

الف) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{۲}{|x|} \times \frac{x+1}{\sin^{۲} x} =$

ب) $\lim\limits_{x\to ۳} \frac{x^{۲}-۲x-۱}{۹-x^{۲}} =$

ج) $\lim\limits_{x\to ۱^{+}} \frac{۱-[x]}{x-۱} =$

د) $\lim\limits_{x\to \pi^{+}} \frac{\sin x}{1+\cos x} =$

هـ) $\lim\limits_{x\to ۳^{+}} \frac{[x]-۳}{x|x|-۹} =$

و) $\lim\limits_{x\to (\frac{\pi}{۲})^{+}} \tan x \times \lim\limits_{x\to \pi^{+}} \cot x =$

توجه : با توجه به مطالب تدریس شده تمرینات صفحه ۵۷ کتاب درسی به طور کامل حل و بررسی شوند.

یادداشت :

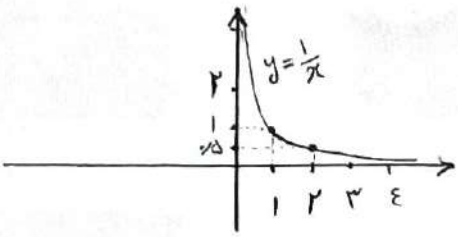
فصل ۳

درس دوم : حد در بی نهایت

حد تابع f وقتی $x \to \pm\infty$ ، را حد در بی نهایت گویند و به صورت $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ نشان می دهند.

(به عبارت دیگر بررسی رفتار تابع f وقتی x خیلی بزرگ می‌شود یا وقتی x خیلی کوچک می‌شود را حد در بی‌نهایت گویند).

مثال: رفتار تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ را در بی‌نهایت (یعنی وقتی $x\to\pm\infty$) مورد بررسی قرار دهید.



x	۱	۲	۱۰	۱۰۰	۱۰۰۰	۱۰۰۰۰	$\cdots \to +\infty$
$f(x)=\frac{1}{x}$	۱	۰/۵	۰/۱	۰/۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۰۰۱	$\cdots \to 0$

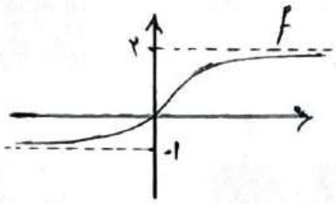
جدول و نمودار نشان می‌دهد وقتی x خیلی بزرگ می‌شود، مقادیر تابع کم‌کم کمتر شده و به صفر نزدیک می‌شوند.

به عبارت دیگر $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$

به طور مشابه در جدول و نموداری توان نشان داد حد تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ در $-\infty$ نیز برابر صفر است یعنی $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$

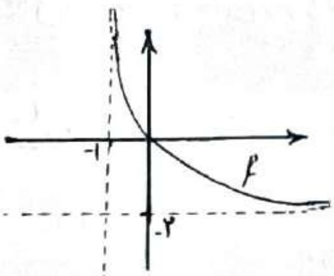
مثال: با توجه به نمودارهای مقابل حدهای زیر را بدست آورید.

الف)



$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$

ب)

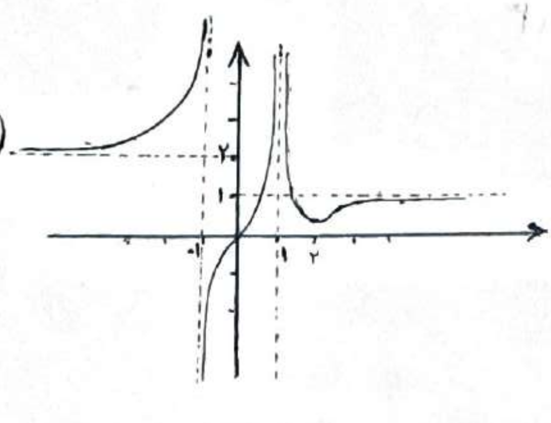


$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-2$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x)=$ وجود ندارد $\qquad$ $\lim\limits_{x\to0} f(x)=0$

x از دو طرف به صفر نزدیک می‌شود

ج)



$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=+\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=+\infty$

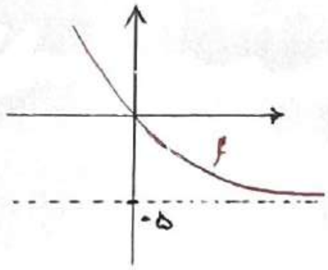
$\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x)=+\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)=-\infty$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = L}$$

تعریف: فرض کنیم تابع f در بازه‌ای به صورت $(a,+\infty)$ تعریف شده باشد. رابطه
به این معناست که $f(x)$ را به هر مقدار دلخواه می‌توان به L نزدیک کرد، مشروط بر آنکه x به قدر کافی بزرگ اختیار شود.

به طور مشابه رابطه $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$ تعریف می‌شود.

مثال: رابطه $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -5$ به چه معناست؟ توضیح دهید.



پاسخ ← یعنی اگر x به اندازه کافی بزرگ انتخاب شود، تابع $f(x)$ را می‌توان به مقدار دلخواه به 5- نزدیک کرد.

تمرین: رابطه $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 4$ به چه معناست؟ توضیح دهید و نمودار رسم کنید.

نکته: برای محاسبه حد توابع کسری ابتدا از بیشترین توان x در صورت و مخرج فاکتور گرفته سپس از اینکه $\boxed{\frac{\text{عدد}}{\infty}=0}$ جملاتی که در آنها x در مخرج است حذف شده و فقط جملاتی که بیشترین درجه در صورت و مخرج را دارند باقی می‌مانند.

مثال: حد $\lim_{x\to+\infty} \frac{15x^2-3x+1}{5x^2+7x-6}$ را محاسبه کنید.

پاسخ ← در صورت و مخرج x^2 بیشترین توان را دارد که از همه جملات فاکتور می‌گیریم

فاکتورگیری از بیشترین توان x

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{15x^2-3x+1}{5x^2+7x-6} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(15-\cancel{\frac{3}{x}}+\cancel{\frac{1}{x^2}}\right)}{x^2\left(5+\cancel{\frac{7}{x}}-\cancel{\frac{6}{x^2}}\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{15x^2}{5x^2} = \frac{15}{5} = \boxed{3}$$

فاکتورگیری از x^2

توجه: در روش تشریحی همانطور که در مثال بالا دیدیم از صورت و مخرج از بزرگترین توان x فاکتور می‌گیریم.
اما در روش تستی کافی است جمله دارای بیشترین توان را نگه داشته و از بقیه جملات صرف‌نظر کنیم.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{15x^2-3x+1}{5x^2+7x-6} = \lim_{x\to+\infty}\frac{15x^2}{5x^2} = \frac{15}{5} = \boxed{3}$$

نکته : $\boxed{\text{عدد}>0 \times \infty = \infty}$

$\boxed{(+\infty)^{\text{زوج}} = +\infty}$ $\boxed{(+\infty)^{\text{فرد}} = +\infty}$

$\boxed{(-\infty)^{\text{عدد زوج}} = +\infty}$ $\boxed{(-\infty)^{\text{فرد}} = -\infty}$

نکته : حد توابع چندجمله‌ای وقتی $x\to\pm\infty$ برابر حد جمله‌ای که بیشترین درجه را دارد.

بیشترین درجه

$$\lim_{x\to\pm\infty}(\boxed{ax^n}+bx^{n-1}+\dots+k)=\lim_{x\to\pm\infty}ax^n$$

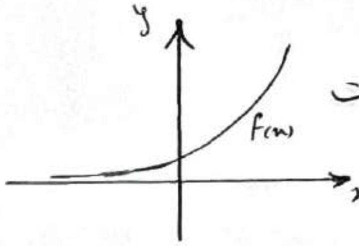
مثال : $\lim_{x\to+\infty}\boxed{7x^2}+3x-4=\lim_{x\to+\infty}x^2(7+\cancel{\frac{3}{x}}-\cancel{\frac{4}{x^2}})=\lim_{x\to+\infty}\boxed{7x^2}$

مثال : حاصل حدهای زیر را بدست آورید.

الف) $\lim_{x\to-\infty}(-3x^4+5x^2\boxed{-7x^5}+2x)=\lim_{x\to-\infty}\boxed{-7x^5}=-7(-\infty)^5=-7(-\infty)=+\infty$

ب) $\lim_{x\to+\infty}\boxed{3x^2}-2x+4=\lim_{x\to+\infty}\boxed{3x^2}=3(+\infty)^2=3(+\infty)=+\infty$

تعریف (حد نامتناهی در بی‌نهایت) : حدهایی به شکل $\boxed{\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\pm\infty}$ می‌باشند.



رابطه $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ به این معناست که مقدارهای $f(x)$ را می‌توان از هر عدد مثبت دلخواهی بزرگتر کرد، مشروط بر آنکه x به قدر کافی بزرگ اختیار شود.

توجه : کار در کلاس صفحه ۶۲ مربوط به حد نامتناهی در بی‌نهایت می‌باشد.

حد توابع کسری گویا وقتی $x \to \pm\infty$:

$$\text{حاصل حد} = \frac{\text{ضریب بیشترین درجه صورت}}{\text{ضریب بیشترین درجه مخرج}}$$

الف) اگر درجه صورت و مخرج مساوی باشند جواب حد عدد است

ب) اگر درجه صورت از مخرج بیشتر باشد حاصل $\pm\infty$ است.

ج) اگر درجه مخرج از صورت بیشتر باشد حاصل حد 0 است.

به عبارت دیگر :

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{ax^n + bx^{n-1} + \dots + k}{a'x^m + b'x^{m-1} + \dots + k'} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{ax^n}{a'x^m} = \begin{cases} \frac{a}{a'} & n = m \\ 0 & n < m \\ \pm\infty & n > m \end{cases}$$

مثال : حدهای زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \to -\infty} \frac{5x + 7}{3x - 1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{5\cancel{x}}{3\cancel{x}} = \frac{5}{3}$

ب) $\lim_{x \to +\infty} \frac{3x - 14x^2}{7x^2 + 2x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-14\cancel{x^2}}{7\cancel{x^2}} = \frac{-14}{7} = -2$

ج) $\lim_{x \to +\infty} \frac{15x^4 + 3x^3 + 2x - 5}{3x^2 + 4x + 6} = \lim_{x \to +\infty} \frac{15x^4}{3x^2} = \lim_{x \to +\infty} 5x^2 = 5(+\infty)^2 = 5(+\infty) = +\infty$

د) $\lim_{x \to -\infty} \frac{4x + 7}{x^3 + 2x - 1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{4x}{x^3} = \lim_{x \to -\infty} \frac{4}{\cancel{x^2}} = \frac{4}{\infty} = 0$

تست : اگر $\lim_{x \to -\infty} \frac{ax^n + 2x + 4}{3x^2 - 5x - 4}$ برابر -6 باشد حاصل $a+n$ کدام است؟

۱) 15 ۲) 12 ۳) -16 ۴) -2

پاسخ ← چون حاصل حد در بینهایت عدد شده پس صورت و مخرج هم درجه اند یعنی $\boxed{n=2}$

و حاصل حد برابر $\frac{\text{ضریب بیشترین درجه صورت}}{\text{ضریب بیشترین درجه مخرج}}$

$$\xrightarrow{n=2} \lim_{x \to -\infty} \frac{ax^2 + 2x + 4}{3x^2 - 5x - 4} = -6 \longrightarrow \lim_{x \to -\infty} \frac{ax^2}{3x^2} = -6 \longrightarrow \frac{a}{3} = -6 \longrightarrow \boxed{a = -18}$$

$$a + n = 2 - 18 = -16$$

تست (کنکور ۹۸ داخل) اگر $f(x) = 2x + \sqrt{4x^2+x}$ باشد حاصل $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ کدام است؟

۱) -1 ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $-\frac{1}{4}$ ۴) صفر

پاسخ ← ابتدا تابع f را گویا می‌کنیم:

$$f(x) = 2x + \sqrt{4x^2+x} \overset{\text{اتحاد مزدوج}}{=} \frac{(2x)^2 - (\sqrt{4x^2+x})^2}{2x - \sqrt{4x^2+x}}$$

$$= \frac{4x^2 - (4x^2+x)}{2x - \sqrt{4x^2+x}} = \frac{-x}{2x - \sqrt{4x^2+x}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{-x}{2x - \sqrt{4x^2+x}} \underset{\text{جملات با بیشترین توان را می‌نویسیم}}{=} \lim_{x\to -\infty} \frac{-x}{2x - \sqrt{4x^2}} = \lim_{x\to -\infty} \frac{-x}{2x - |2x|} = \lim_{x\to -\infty} \frac{-x}{2x-(-2x)}$$

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{-x}{4x} = -\frac{1}{4}$$

تست (کنکور ۹۸ خارج): اگر $f(x) = x - \sqrt{4x^2+x}$ باشد، حاصل $\lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x}$ کدام است؟

۱) -2 ۲) -1 ۳) 2 ۴) 3

پاسخ ←

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x - \sqrt{4x^2+x}}{x} \underset{\text{بیشترین توانها}}{=} \lim_{x\to -\infty} \frac{x - \sqrt{4x^2}}{x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x - |2x|}{x}$$

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{x-(-2x)}{x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{3x}{x} = \frac{3}{1} = \boxed{3}$$

تست (کنکور ۹۹): تابع با ضابطه $f(x) = \frac{ax - \sqrt[3]{x^2-1}}{4x^n - 12}$ در نظر بگیرید. اگر $\lim_{x\to \infty} f(x) = \frac{1}{4}$ باشد آنگاه $\lim_{x\to 3} f(x)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{24}$ ۲) $\frac{1}{18}$ ۳) $\frac{1}{12}$ ۴) $\frac{5}{36}$

پاسخ ← چون حاصل حد در بی‌نهایت عدد غیرصفر شده لذا درجه صورت و مخرج برابرند لذا: $\boxed{n=1}$

$$\lim_{x\to \infty} f(x) = \frac{1}{4} \xrightarrow{n=1} \lim_{x\to \infty} \frac{ax - \sqrt[3]{x^2}}{4x-12} = \frac{1}{4} \xrightarrow[\text{جملات با بزرگترین توان}]{} \lim_{x\to \infty} \frac{ax}{4x} = \frac{1}{4}$$

$$\longrightarrow \frac{a}{4} = \frac{1}{4} \to a = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} \frac{\frac{2}{3}x - \sqrt[3]{x^2-1}}{4x-12} \overset{\text{صفر صفرم}}{=} \lim_{x\to 3} \frac{\frac{2}{3} - \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}}{4} = \frac{\frac{2}{3} - \frac{6}{3\sqrt[3]{64}}}{4} = \frac{\frac{2}{3} - \frac{2}{4}}{4} = \boxed{\frac{1}{24}}$$

هوپیتال ← در مشتق یاد میگیریم

از اتحاد چاق و لاغر هم می‌توان گویا کرد ولی طولانی است چون در اینجا حاصل می‌شود که باز عمل تقسیم بر عامل صفرکننده نیز لازم است.

تمرین ۱: حاصل حدهای زیر را بدست آورید.

خرداد ۹۹

الف) $\lim_{x\to-\infty} \frac{5x+4}{x^3+x-8} =$

شهریور ۹۹

ب) $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^4-5x+1}{6x^4-11x^2+3} =$

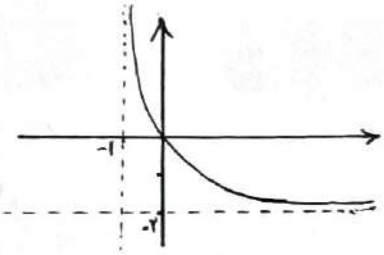
دی ۹۸

ج) $\lim_{x\to-\infty} \frac{-4x^7+5x^2}{2x^3+9} =$

تمرین ۲: (دی ۹۷) حد تابع زیر وقتی $x\to-\infty$ برابر ..... است.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & x>0\\ \frac{5x^2-4x}{-x^2+1} & x\leq 0\end{cases}$$

تمرین ۳ (خرداد ۹۸) با استفاده از نمودار تابع $y=f(x)$ ، حدهای خواسته شده را بنویسید.



الف) $\lim_{x\to+\infty} f(x) =$

ب) $\lim_{x\to-1^+} f(x) =$

تمرین ۴: حاصل حد $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{(x-1)(x-2)(4-x)}{2x^3}$ را بدست آورید.

توجه: تمرینات صفحه ۶۳ و ۶۴ کتاب درسی با توجه به مطالب تدریس شده حتماً حل و بررسی شوند.

فصل ۴

درس اول: آشنایی با مفهوم مشتق.

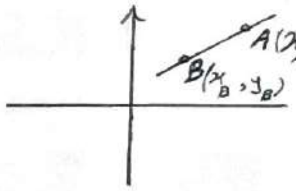
مشتق یکی از مفاهیم اساسی ریاضی است که دارای کاربردهای وسیع در ریاضیات و علوم دیگر است.

ایده اولیه در مورد مفهوم مشتق، به شیب یک خط مربوط می‌شود.

یادآوری: هرگاه دو نقطه از یک خط معلوم باشد آنگاه:

شیب خط = $\dfrac{\text{تفاضل عرض‌ها}}{\text{تفاضل طول‌ها}}$

مثلاً برای شکل مقابل



$$m_{AB} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$$

توجه: شیب خط افقی صفر است.

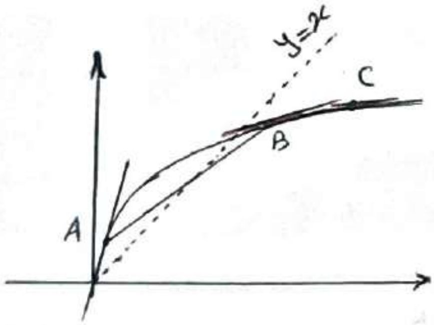
شیب خط عمودی وجود ندارد.

شیب خط مایل با نگاه از سمت چپ به آن

اگر سربالائی باشد شیب مثبت

اگر سرپایینی باشد شیب منفی

مثال: با توجه به شکل مقابل شیب‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.



پاسخ ← $m_C < m_B < m_{AB} < m < m_A$

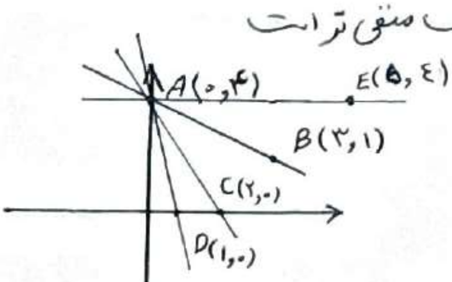
شیب خط $y=x$

در شیب‌های مثبت هرچقدر خط عمودی‌تر باشد عدد شیب بیشتر است و هرچقدر خط افقی‌تر باشد عدد شیب کمتر است.

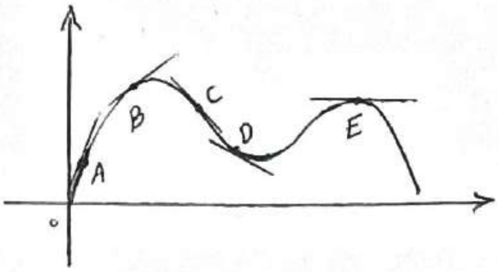
(یا خط مماس بر منحنی)

توجه: در شیب‌های منفی نیز هرچقدر خط عمودی‌تر باشد عدد شیب منفی‌تر است.

مثال: در شکل مقابل شیب‌ها را با هم مقایسه کنید.



پاسخ ← $\underset{\frac{0-4}{1-0}=\frac{-4}{1}=-4}{m_{AD}} < \underset{-2}{m_{AC}} < \underset{-1}{m_{AB}} < \underset{0}{m_{AE}}$



مثال: با توجه به نمودار مقابل جدول زیر را کامل کنید.

نقطه	شیب
C	-3
E	0
A	2
D	-2
B	$\frac{2}{3}$

پاسخ: ابتدا در هر نقطه یک خط مماس بر منحنی با رنگ دیگر مشخص می‌کنیم در اینصورت راحت‌تر به جواب می‌رسیم.

تعریف مشتق: حد زیر را در (صورت وجود) مشتق تابع f در نقطه a می‌نامند و با نماد $f'(a)$ نشان می‌دهند:

$$\boxed{f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}}$$: مشتق f در نقطه $x=a$

مثال: مشتق تابع $f(x)=x^2+3x$ را با استفاده از تعریف مشتق در نقطه‌ای به طول $x=5$ واقع بر منحنی تابع بدست آورید.

پاسخ ← هرگاه در صورت مسئله کلمه تعریف مشتق آمده باشد باید حتماً از حد بیان شده استفاده کنیم.

$$f'(5) = \lim_{x\to 5}\frac{f(x)-f(5)}{x-5} = \lim_{x\to 5}\frac{(x^2+3x)-40}{x-5} \overset{\text{ابهام }\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 5}\frac{\cancel{(x-5)}(x+8)}{\cancel{(x-5)}} = \boxed{13}$$

مثال (خرداد ۹۸): مشتق تابع $f(x)=x^3-2$ را با استفاده از تعریف مشتق در نقطه‌ای به طول $x=-1$ بدست آورید.

پاسخ ←

$$f'(-1) = \lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \lim_{x\to -1}\frac{(x^3-2)-(-3)}{x+1}$$

$$= \lim_{x\to -1}\frac{x^3+1}{x+1} \underset{\text{اتحاد چاق و لاغر}}{=} \lim_{x\to -1}\frac{\cancel{(x+1)}(x^2-x+1)}{\cancel{(x+1)}} = 1+1+1=\boxed{3}$$

تمرین (دی ۹۷): اگر $f(x)=1-2x$ باشد $f'(-1)$ را با استفاده از تعریف مشتق بدست آورید.

نکته: (تعریف مشتق به روش دیگر): در این روش علاوه بر محاسبه مشتق تابع در یک نقطه داده شده می‌توان فرمولهای مشتق گیری را (که مشتق تابع در نقطه دلخواه x است) ثابت کرد.

مشتق تابع f در نقطه دلخواه : $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

مشتق تابع f در نقطه $x=a$: $f'(a) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

مثال: مشتق تابع $f(x)=x^2+5$ را با استفاده از تعریف مشتق در نقطه‌ای به طول ۲ بدست آورید.

پاسخ ←

$$f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\overbrace{(2+h)^2+5}^{f(2+h)} - \overbrace{(9)}^{f(2)}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{4}+4h+h^2+\cancel{5}-\cancel{9}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}(4+h)}{\cancel{h}} = 4+0 = \boxed{4}$$

مثال: اگر $f'(5)=12$ باشد حاصل حد $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(5)-f(5+h)}{3h}$ را بدست آورید.

پاسخ ← حد داده شده را طبق حد تعریف مشتق در $x=5$ می‌نویسیم:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(5)-f(5+h)}{3h} \overset{\text{فاکتور از منفی}}{=} -\frac{1}{3}\underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{f(5+h)-f(5)}{h}}_{f'(5)} = -\frac{1}{3}\times f'(5) = -\frac{1}{3}\times 12 = -4$$

فاکتور از ۳

تست: اگر $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = 2\sqrt{x}$ آنگاه $f'(4)$ کدام است؟

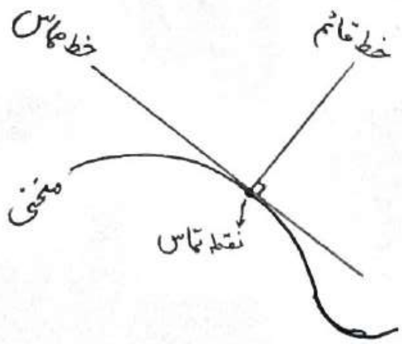
۱) ۲ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۴ ۴) $\frac{1}{4}$

پاسخ ←

می‌دانیم : $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} \overset{\text{طبق فرض}}{=} 2\sqrt{x}$

$$\Rightarrow f'(x) = 2\sqrt{x} \longrightarrow f'(4) = 2\sqrt{4} = 2\times 2 = 4$$

تمرین: اگر $f'(2)=6$ باشد آنگاه حاصل $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(2+3h)-f(2)}{5h}$ را بدست آورید.



معادله خط مماس و خط قائم بر منحنی در نقطه‌ای روی منحنی :

مشتق تابع به ازاء طول نقطه تماس = شیب خط مماس

$$m_{\text{مماس}} = f'(a)$$

چون خط قائم بر منحنی، در نقطه تماس بر خط مماس عمود است لذا : $m_{\text{قائم}} = -\frac{1}{m_{\text{مماس}}}$

نقطه تماس (x_1, y_1)

معادله خط مماس : $\boxed{y-y_1 = m_{\text{مماس}}(x-x_1)}$

مثال: معادله خط مماس بر منحنی تابع $f(x)=x^2+10x$ را در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر منحنی را بیابید.

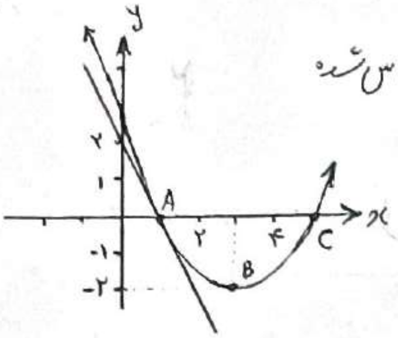
پاسخ ⟵ ابتدا با جایگزین کردن $x=2$ در معادله تابع عرض نقطه تماس را نیز بدست می‌آوریم.

$$y=x^2+10x \xrightarrow{x=2} y=24 \longrightarrow \underset{x_1 \ \ y_1}{(2, 24)} \text{ نقطه تماس}$$

شیب مماس $m = f'(2) = \lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{(x^2+10x)-(24)}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x+12)}{\cancel{(x-2)}} = \boxed{14}$

معادله خط مماس : $y-y_1 = m_{\text{مماس}}(x-x_1) \longrightarrow y-24=14(x-2) \longrightarrow \boxed{y=14x-4}$

تمرین : معادله خط مماس بر منحنی تابع $f(x)=3x^2-1$ را در نقطه‌ای به طول $x=-3$ واقع بر منحنی بنویسید.



مثال (خرداد ۹۹) : در نمودار مقابل خط d در نقطه $x=1$ بر نمودار f مماس شده است :

الف) مشتق تابع f را در نقطه $x=1$ محاسبه کنید.

ب) شیب نمودار را در نقاط B و C مقایسه کنید.

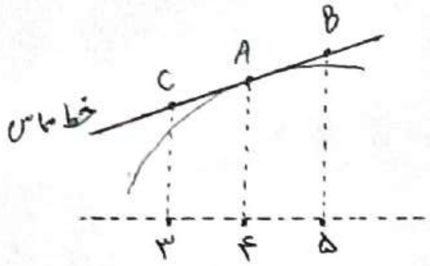
پاسخ ⟵ دو نقطه خط مماس $(0,2)$ و $(1,0)$ و با شیب لذا:

$$f'(1) = \underbrace{m}_{\text{شیب مماس}} = \frac{2-0}{0-1} = \frac{2}{-1} = -2$$

ب) $m_B < m_C$

m_B : ۰ (زیرا خط مماس در این نقطه افقی است)

m_C : عددی مثبت



مثال (خرداد ۹۹) : برای تابع f در شکل روبه‌رو داریم $f(4)=25$ و $f'(4)=\frac{3}{2}$
با توجه به شکل مختصات نقاط A و B را بیابید.

پاسخ ⟵ چون $f(4)=25 \rightsquigarrow A(4,25)$

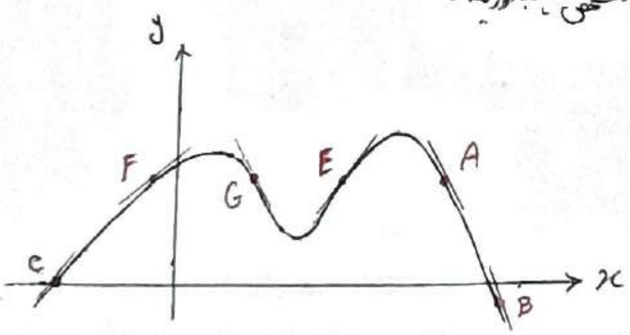
$$f'(4)=\frac{3}{2} \Rightarrow m_{AB}=\frac{3}{2} \longrightarrow \frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{3}{2}$$

$$\longrightarrow \frac{y_B-25}{\cancel{5-4}}=\frac{3}{2}$$

$$\longrightarrow y_B = 25+1{,}5 = 26{,}5 \rightsquigarrow B(5,26{,}5)$$

توجه: مختصات نقطه C نیز مشابه به مختصات B حاصل می‌شود.

مثال: نقاطی مانند A و B و C و D و E و F و G را روی نمودار $y=f(x)$ مقابل مشخص کنید به طوری که :



الف) در A شیب مماس بر نمودار منفی باشد

ب) در B مقدار تابع و مقدار مشتق منفی باشد

پ) در C مقدار تابع صفر باشد ولی مشتق مثبت باشد

ت) در D مشتق صفر باشد

ث) E و F نقاطی از روی منحنی باشند که شیب یکسان داشته باشند (متفاوت)

ج) در G مقدار تابع مثبت ولی مقدار مشتق منفی باشد

پاسخ ⟵ نقاط مورد نظر با رنگ دیگر مشخص شده و در هر نقطه مماس بر منحنی را رسم می‌کنیم

مقدار مشتق = شیب مماس

مقدار تابع = عرض یک نقطه

توجه : تمرینات کتاب درسی صفحه ۷۵ و ۷۶ حل و بررسی شوند.

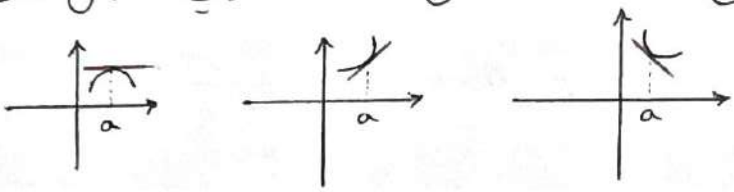
فصل ۴ ← درس ۲

مشتق پذیری

تابع f را در نقطه $x=a$ مشتق پذیر گویند هرگاه حد تعریف مشتق (یعنی) وجود داشته باشد (متناهی باشد)

$\boxed{f \text{ در } a \text{ مشتق پذیر است} \Longleftarrow \text{اگر } f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \text{ وجود داشته باشد}}$

توجه: می‌دانیم مشتق یعنی شیب خط مماس، پس اگر تابع (منحنی) در یک نقطه خط مماس داشته باشد و این خط مماس موازی محور y ها نباشد مشتق پذیر است.



مثال: مشتق پذیری تابع $f(x)=|x-3|$ را در نقطه $x=3$ بررسی کنید.

$$f'(3)=\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{|x-3|-0}{x-3}$$

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{(x-3)}{x-3}=+1 \qquad \lim_{x\to 3^-}\frac{-(x-3)}{x-3}=-1$$

← حد وجود ندارد ($f'(3)$ وجود ندارد) ← f در ۳ مشتق پذیر نیست.

مثال: مشتق پذیری تابع $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\neq 2 \\ 1 & x=2 \end{cases}$ را در نقطه $x=2$ بررسی کنید.

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-1}{x-2}$$

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-1}{x-2}=\frac{3}{0^+}=+\infty \qquad \lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-1}{x-2}=\frac{3}{0^-}=-\infty$$

← حد وجود ندارد ($f'(2)$ وجود ندارد) ← f در $x=2$ مشتق پذیر نیست.

مشتق راست: حد تعریف مشتق را از راست، مشتق راست f گویند و با نماد $f'_+(a)$ نشان می‌دهند.

مشتق راست: $f'_+(a) = \lim\limits_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

مشتق چپ: حد تعریف مشتق را از چپ، مشتق چپ f گویند و با نماد $f'_-(a)$ نشان می‌دهند.

مشتق چپ: $f'_-(a) = \lim\limits_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

بنابراین: چون شرط وجود حد آنستکه حد چپ = حد راست لذا شرط مشتق پذیری آنستکه $\boxed{f'_+(a)=f'_-(a)}$

مثال: در تابع با ضابطه $f(x)=|x|.[x]$ مشتق پذیری در $x=0$ را بررسی کنید.

پاسخ:

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|[x]-0}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cancel{x}[x]}{\cancel{x}} = \boxed{[0^+]=0}$$

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|[x]-0}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-\cancel{x}[x]}{\cancel{x}} = \lim_{x\to 0^-} -[0^-] = \boxed{-(-1)=1}$$

$f'_+(0) \neq f'_-(0)$ لذا f در $x=0$ مشتق پذیر نیست.

تمرین (خرداد ۹۹): به کمک تعریف مشتق، مشتق پذیری تابع $f(x)=|x^2-4|$ را در $x=-2$ بررسی کنید.

قضیه: اگر تابع f در $x=a$ مشتق پذیر باشد آن‌گاه f در a پیوسته است؟

فرض: یعنی $f'(a)$ وجود دارد و یک عدد است

حکم: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

حد تابع — مقدار تابع

اثبات:

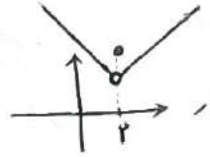
$$\lim_{x\to a}\left(f(x)-f(a)\right) = \lim_{x\to a}\left((x-a)\times \frac{f(x)-f(a)}{(x-a)}\right) = \lim_{x\to a}(x-a)\times \underbrace{\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}_{f'(a)\ \text{عدد}} = 0\times f'(a)=0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a}\left(f(x)-f(a)\right)=0 \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) - \underbrace{\lim_{x\to a} f(a)}_{f(a)} = 0 \Rightarrow \boxed{\lim_{x\to a} f(x) = f(a)}$$

خود عدد ثابت = حد عدد ثابت

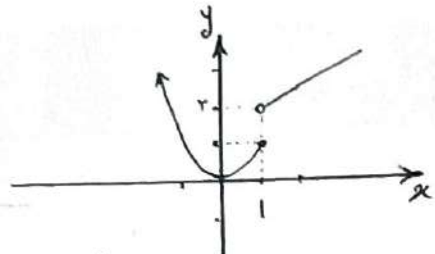
بنابراین طبق قضیه نتیجه می‌شود: اگر تابعی در یک نقطه مشتق پذیر باشد، الزاماً در آن نقطه باید پیوسته باشد.

همچنین نتیجه می‌شود: اگر تابع f در $x=a$ پیوسته نباشد آنگاه f در $x=a$ مشتق پذیر هم نیست

<u>مثلاً</u>: تابع f با نمودار  در $x=2$ پیوسته نیست و چون دارای نقطه نمی‌توان مماس بر نمودار رسم کرد

لذا $f'(2)$ وجود ندارد (یعنی f در ۲ مشتق پذیر نیست)

<u>کار در کلاس</u> صفحه ۷۸ کتاب:



نمودار تابع $g(x)=\begin{cases} x^2 & x\le 1 \\ x+1 & x>1\end{cases}$ را رسم کنید چرا $g'(1)$ موجود نیست؟

پاسخ ←

<u>روش اول</u>: با توجه به نمودار چون g در $x=1$ پیوسته نیست پس در $x=1$ مشتق پذیر نیست | یعنی $g'(1)$ وجود ندارد

(البته از اینکه تابع در $x=1$ حد ندارد نیز نتیجه می‌شود پیوسته نیست)

<u>روش دوم</u>: مشتق راست و چپ را با استفاده از تعریف مشتق بدست می‌آوریم:

$$g'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x+1)-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x}{x-1}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

$$g'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}}=2$$

بنابراین $g'(1)$ وجود ندارد (g در $x=1$ مشتق پذیر نیست)

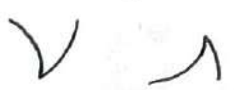
<u>نقاط مشتق ناپذیر تابع</u>: تابع f در $x=a$ مشتق پذیر نیست هرگاه حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد.

۱- f در a پیوسته نباشد.

۲- f در a پیوسته باشد ولی

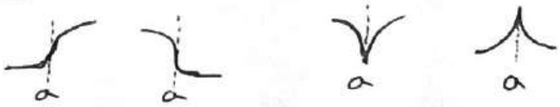
مشتق چپ و راست در a <u>هر دو موجود</u> (متناهی) و <u>نابرابر باشد</u> (نقطه گوشه‌ای یا زاویه دار)

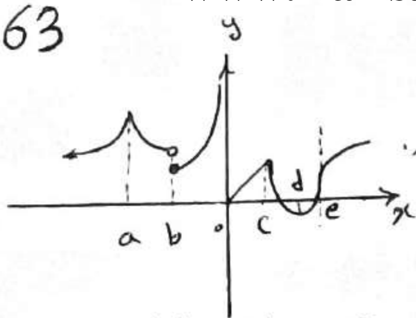
مشتق چپ و راست <u>یکی متناهی و دیگری نامتناهی</u> باشد (نقطه گوشه‌ای ـ زاویه‌دار)



مشتق چپ و راست <u>هر دو نامتناهی</u> باشند. (در این صورت $x=a$ را مماس قائم بر منحنی گویند)

مماس قائم ←





مثال: با توجه به نمودار مقابل نقاط مشتق ناپذیر تابع f را با ذکر دلیل مشخص کنید.

پاسخ ← تابع f در نقاط a و b و o و c و e مشتق ناپذیر است.

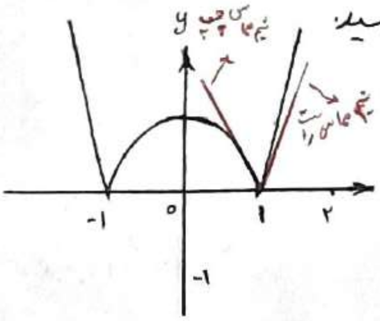
در این نقطه مماس قائم دارد — در این نقطه f ناپیوسته — f در این نقطه ناپیوسته است. — نقطه زاویه دار — f در این نقطه مماس قائم دارد

کار در کلاس صفحه ۸۲ کتاب بررسی شود

نکته: در نقاط زاویه دار خط مماس بر منحنی وجود ندارد اما دو نیم مماس می توان رسم کرد.

مثال: پس از رسم نمودار تابع $f(x)=|x^2-1|$ مشتق پذیری در $x=1$ را با توجه به نمودار بررسی کنید.

ب) اگر در این نقطه مشتق پذیر نیست معادله نیم مماس چپ و راست را بنویسید.



پاسخ ← نمودار $y=x^2$ را یک واحد به پایین انتقال می دهیم نمودار $y=x^2-1$ حاصل می شود سپس قرینه آن قسمتی که زیر محور xها است را آینه وار نسبت به محور x قرینه می کنیم نمودار $y=|x^2-1|$ حاصل می شود

در نقطه $x=1$ نمودار زاویه دار است ← لذا f در $x=1$ مشتق پذیر نیست (یعنی $f'(1)$ وجود ندارد)

توجه شود با اینکه f در $x=1$ پیوسته است ولی مشتق پذیر نیست

شیب نیم مماس چپ: $m=f'_-(1)=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{|x^2-1|-0}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{-(x^2-1)}{x-1}\overset{\text{مزدوج}}{=}\lim\limits_{x\to 1^-}-(x+1)=\boxed{-۲}$

شیب نیم مماس راست: $m=f'_+(1)=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{|x^2-1|-0}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{(x^2-1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}}=\boxed{۲}$

معادله نیم مماس چپ: $y-y_0=m(x-x_0)\xrightarrow[m=-۲]{(1,0)}y-0=-۲(x-1)\longrightarrow\boxed{y=-۲x+۲}$

معادله نیم مماس راست: $y-y_0=m(x-x_0)\xrightarrow[m=۲]{(1,0)}y-0=۲(x-1)\longrightarrow\boxed{y=۲x-۲}$

کار در کلاس صفحه ۷۹ بررسی و حل شود

تابع مشتق : مشتق تابع f در نقطه دلخواه x از دامنه‌اش را با $f'(x)$ نشان می‌دهیم و به آن تابع مشتق می‌گویند.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

دامنه f' : مجموعه تمام نقاطی از دامنه f که برای آنها f' موجود باشد را دامنه f' گویند.

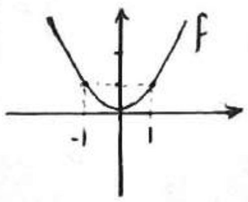
مثال: تابع مشتق، $f(x)=x^2$ را بدست آورید.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(\cancel{x^2}+2xh+h^2-\cancel{x^2})}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(2x+h)}{\cancel{h}}$$

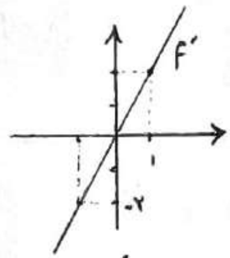
$$=\lim_{h\to 0}2x+h=\boxed{2x}$$

$\xrightarrow{\text{تابع مشتق}}$ $\boxed{f'(x)=2x}$

f' تابع چندجمله‌ای $\longrightarrow D_{f'}=\mathbb{R}$



(نمودار f)



(نمودار f')

توجه: می‌توان مقادیر مشتق تابع f را در نقاط مختلف دامنه اش با توجه به ضابطه بدست آمده حساب کرد مثلاً:

$f'(5)=10$, $f'(-3)=-6$ و $f'(0)=0$

مثال: برای تابع $f(x)=\sqrt{x}$ تابع مشتق و دامنه تابع مشتق را بدست آورید.

پاسخ ⟵

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\quad \frac{0}{0}\ \text{مبهم}$$

$$\overset{\text{گویا کردن صورت}}{=}\lim\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\times\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$

$$\overset{\text{اتحاد مزدوج}}{=}\lim_{h\to 0}\frac{(\cancel{x}+h)-\cancel{x}}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}}{\cancel{h}(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\frac{1}{\sqrt{x+0}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$\xrightarrow{\text{تابع مشتق}}$ $\boxed{f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}}$

$D_f=[0,+\infty)$

$D_{f'}=(0,+\infty)$

مثال: اگر $f(x)=\begin{cases} 3x & x\neq 2 \\ 4 & x=2 \end{cases}$ الف) ضابطه f' را حساب کنید.

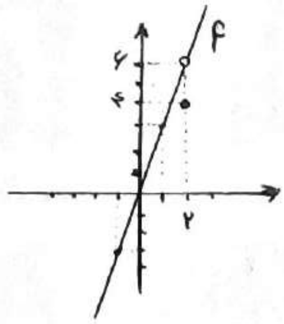
اگر $x\neq 2 \rightsquigarrow f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{3(x+h)-\cancel{3x}}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{3\cancel{h}}{\cancel{h}}=3$

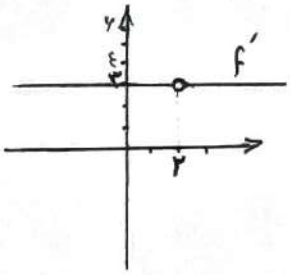
اگر $x=2 \rightsquigarrow f'(2)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x-4}{x-2} \begin{cases}+\infty \\ -\infty\end{cases} \longrightarrow$ $f'(2)$ وجود ندارد

$\xrightarrow{\text{ضابطه } f'} f'(x)=\begin{cases} 3 & x\neq 2 \\ \text{وجود ندارد} & x=2 \end{cases}$

(توجه: در این مثال ضابطه f' را از تعریف مشتق بدست آوردیم در درسهای بعد از فرمولهای مشتق‌گیری نیز می‌توان ضابطه f' را بدست آورد.)

ب) نمودار f و f' و دامنه هریک را مشخص کنید.





$D_f=\mathbb{R}$ $\qquad D_{f'}=\mathbb{R}-\{2\}$

کار در کلاس صفحه ۸۴ مشابه مثال بالا حل شود

مثال: (شهریور ۹۹) تابع $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\geq 0 \\ 2x+1 & x<0 \end{cases}$ داده شده است؟

الف) نشان دهید که $f'(0)$ وجود ندارد. ب) ضابطه تابع مشتق را بنویسید. پ) نمودار تابع f' را رسم کنید.

پاسخ ⟵ تابع در صفر پیوسته نیست (زیرا $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$) بنابراین $f'(0)$ وجود ندارد.

ب) از تعریف مشتق ضابطه را بدست می‌آوریم

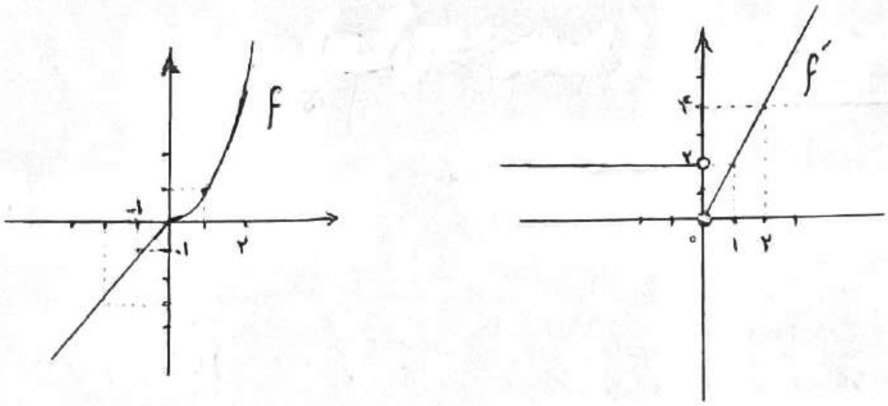
اگر $x>0$: $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\cancel{x^2}+2xh+h^2-\cancel{x^2}}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\cancel{h}(2x+h)}{\cancel{h}}=2x$

اگر $x<0$ $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(2(x+h)+1)-(2x+1)}{h}\overset{\text{ساده شود}}{=}\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2\cancel{h}}{\cancel{h}}=2$

$\xrightarrow{\text{ضابطه } f'} f'(x)=\begin{cases} 2x & x>0 \\ 2 & x<0 \end{cases}$

(توجه شود در ضابطه f دامنه $x\geq 0$ را داشتیم اما چون در $x=0$ مشتق نداریم لذا در ضابطه f' دامنه $x>0$ شد)

پ)



دستور محاسبهٔ تابع مشتق، توابع مختلف (فرمولهای مشتق گیری)

1) $\boxed{f(x) = \underset{\text{مقدار ثابت}}{C} \rightsquigarrow f'(x) = 0}$

(به عبارت دیگر مشتق تابع ثابت برابر صفر است.)

مثال: $f(x) = 5 \rightsquigarrow f'(x) = 0$, $y = \sqrt{3} \rightsquigarrow y' = 0$

2) $\boxed{f(x) = x \rightsquigarrow f'(x) = 1}$

3) $\boxed{f(x) = ax \rightsquigarrow f'(x) = a}$

مثال: $y = 3x \rightsquigarrow y' = 3$, $f(x) = -7x \rightsquigarrow f'(x) = -7$

4) $\boxed{f(x) = x^n \rightsquigarrow f'(x) = nx^{n-1}}$

مثال: $f(x) = x^5 \rightsquigarrow f'(x) = 5x^4$

$f(x) = -3x^7 \rightsquigarrow f'(x) = -3 \times 7x^6 = -21x^6$

5) $\boxed{f(x) = \sqrt{x} \rightsquigarrow f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}}$

۶) $\boxed{f(x) = \underset{\text{تابع}}{u} \pm \underset{\text{تابع}}{v} \rightsquigarrow f'(x) = u' \pm v'}$

یعنی برای محاسبه مشتق مجموع (یا تفاضل) دو تابع مشتق تک تک آنها را حساب می‌کنیم.

مثال: $f(x) = ۵x^{۴} + \sqrt{x} \rightsquigarrow f'(x) = ۲۰x^{۳} + \frac{۱}{۲\sqrt{x}}$

$y = ۳x^{۲} - ۴x + ۷ - x^{۵} \longrightarrow y' = ۶x - ۴ + ۰ - ۵x^{۴}$

۷) $\boxed{f(x) = \sqrt{\underset{\text{تابع}}{u}} \longrightarrow f'(x) = \frac{u'}{۲\sqrt{u}}}$

مثال: $f(x) = \sqrt{۲x+۳} \longrightarrow f'(x) = \frac{(۲x+۳)'}{۲\sqrt{۲x+۳}} = \frac{۲}{۲\sqrt{۲x+۳}}$

۸) $\boxed{f(x) = u^{n} \rightsquigarrow f'(x) = n u' u^{n-۱}}$

مثال: $f(x) = (۷x+۵)^{۴} \rightsquigarrow f'(x) = ۴(۷x+۵)'(۷x+۵)^{۴-۱}$

$f'(x) = ۴(۷)(۷x+۵)^{۳}$

۹) $\boxed{f(x) = \sqrt[n]{u} \xrightarrow{\text{توان}} f'(x) = \frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-۱}}}}$

مثال: $y = \sqrt[۳]{x} \rightsquigarrow y' = \frac{(x)'}{۳\sqrt[۳]{x^{۳-۱}}} = \frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^{۲}}}$

مثال: $y = \sqrt[۵]{۷x^{۲} - ۳x + ۲}$ ← توان کل عبارت زیر رادیکال

$$y' = \frac{(۷x^{۲}-۳x+۲)'}{۵\sqrt[۵]{(۷x^{۲}-۳x+۲)^{۵-۱}}} = \frac{۱۴x-۳}{۵\sqrt[۵]{(۷x^{۲}-۳x+۲)^{۴}}}$$

مثال: معادله خط مماس بر منحنی تابع $f(x)=-x^2+10x$ در نقطه‌ای به طول $x=2$ روی منحنی تابع را بنویسید.

پاسخ ←

$$y=-x^2+10x \xrightarrow{x=2} y=16 \rightarrow \underset{\text{نقطه تماس}}{(\overset{x_0}{2},\overset{y_0}{16})}$$

$$\begin{cases} m=f'(2) \text{ شیب مماس} \longrightarrow m=f'(2)=-2(2)+10=\boxed{6} \\ f'(x)=-2x+10 \end{cases}$$

معادله خط مماس: $y-y_0=m(x-x_0) \longrightarrow y-16=6(x-2) \rightarrow \boxed{y=6x+4}$

مثال (دی ۹۷): اگر $f'(2)=3$ و $g'(2)=5$ آنگاه حاصل عبارت $(2g-f)'(2)$ را بدست آورید.

$$(2g-f)'(2)=(2g'-f')(2)=2g'(2)-f'(2)=2(5)-3=7$$

مثال: اگر $f(x)=x+\sqrt{x}$، حاصل $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(4+h)-f(4)}{h}$ را بدست آورید.

پاسخ ← طبق تعریف مشتق $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(4+h)-f(4)}{h}=f'(4)$ بنابراین کافیست از تابع $f(x)=x+\sqrt{x}$ مشتق بگیرم، جای x عدد ۴ قرار دهم.

$$f'(x)=1+\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(4+h)-f(4)}{h}=f'(4)=1+\frac{1}{2\sqrt{4}}=1+\frac{1}{4}=\boxed{\frac{5}{4}}$$

مثال: مشتق تابع $f(x)=\sqrt{x^2+3x}$ را در $x=1$ بدست آورید (یعنی $f'(1)=?$)

$$f'(x)=\frac{(x^2+3x)'}{2\sqrt{(x^2+3x)}}=\frac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x}} \rightsquigarrow f'(1)=\frac{5}{2\sqrt{4}}=\boxed{\frac{5}{4}}$$

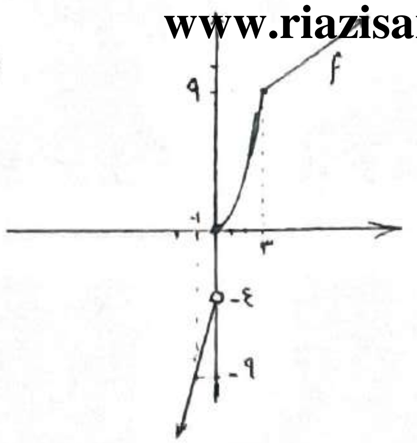
تمرین: اگر $f(x)=(x^3-3x+5)^6$ آنگاه حاصل $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ را بدست آورید.

تمرین: مشتق پذیری تابع زیر را در نقطه $x=1$ بررسی کنید.

$$f(x)=\begin{cases} x^2+x & x\geq 1 \\ 3x-1 & x<1 \end{cases}$$

پاسخ ← ابتدا پیوستگی را بررسی کنیم $\boxed{2=\text{مقدار تابع}=\text{حد چپ}=\text{حد راست}}$ لذا پیوسته است از طرفی $f'(x)=\begin{cases} 2x+1 & x>1 \\ 3 & x<1 \end{cases} \leftarrow f'_+(1)=f'_-(1)=3$

بنابراین f در $x=1$ مشتق پذیر است)



مثال: تابع $f(x)=\begin{cases}5x-4 & x<0\\ x^2 & 0\le x\le 3\\ x+6 & x>3\end{cases}$ داده شده است.

الف) نمودار f را رسم کنید. ← نمودار:

ب) نشان دهید $f'(0)$ و $f'(3)$ وجود ندارد.

پاسخ ← با توجه به نمودار، f در $x=0$ پیوسته نیست پس $f'(0)$ وجود ندارد.
نمودار f در $x=3$ زاویه دار است پس $f'(3)$ وجود ندارد.

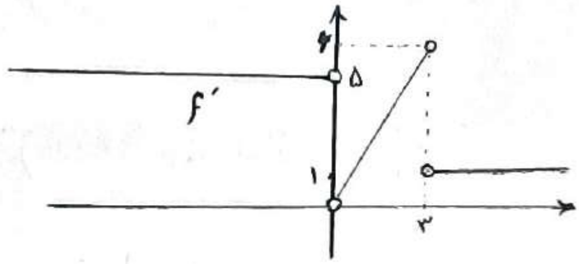
ب۲) ضابطه تابع مشتق را بنویسید

پاسخ ← از ضابطهٔ مشتق خاکریم مساوی‌ها را (از دامنه) حذف می‌کنیم چون در $x=0$ و $x=3$ مشتق وجود ندارد.

$$f'(x)=\begin{cases}5 & x<0\\ 2x & 0<x<3\\ 1 & x>3\end{cases}$$

ت) نمودار تابع f' را رسم کنید.

پاسخ ←



مشتق حاصلضرب دو تابع:

10) $\boxed{y=f.g \longrightarrow y'=f'.g+f.g'}$

عبارت اولی، دومی

$y'=($خود دومی × مشتق اولی$)+($مشتق دومی × خود اولی$)$

مثال: $y=\sqrt{x}\,(3x^2+5x) \longrightarrow y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}(3x^2+5x)+\sqrt{x}\,(6x+5)$

مثال: $f(x)=\sqrt{3x+1}\,(2x-4)^3$

$$f'(x)=\frac{3}{2\sqrt{3x+1}}(2x-4)^3+\sqrt{3x+1}\times 3(2)(2x-4)^2$$

مثال: $y=x.\sqrt[3]{x}$ چون x تنها زیر رادیکال است می‌توان به صورت توان کسری نوشت و ساده کرد سپس مشتق گرفت.

$\to y=x.x^{\frac{1}{3}}=x^{1+\frac{1}{3}}=x^{\frac{4}{3}}$

$\to y'=\frac{4}{3}x^{\frac{4}{3}-1}=\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}=\frac{4}{3}\sqrt[3]{x}$

مشتق تقسیم دوتابع :

11) $\boxed{y=\dfrac{f}{g} \longrightarrow y'=\dfrac{f'g-g'f}{g^2}}$

$$y'=\frac{(\text{خودصورت} \times \text{مشتق مخرج})-(\text{خودمخرج} \times \text{مشتق صورت})}{(\text{مخرج})^2}$$

(در حساب، مشتق تقسیم بهتر است همزمان با مشتق گیری جملات فارسی بالا را تکرار کنید)

مثال: $y=\dfrac{5x+4}{3x+1} \rightsquigarrow y'=\dfrac{5(3x+1)-3(5x+4)}{(3x+1)^2}$

مثال: $y=\dfrac{5x^3-x}{\sqrt{x}} \rightsquigarrow y'=\dfrac{(15x^2-1)\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}(5x^3-x)}{(\sqrt{x})^2}$

مثال: $y=\dfrac{3}{x} \longrightarrow y'=\dfrac{\overset{\text{مشتق صورت}}{0}(x)-\overset{\text{مشتق مخرج}}{1}(3)}{x^2} \longrightarrow y'=\dfrac{-3}{x^2}$

مثال (امتحانات نهایی) : مشتق توابع زیر را بدست آورید ساده کردن الزامی نیست.

خ ۹۹ 1) $f(x)=\left(\dfrac{-3x+1}{x^2+5}\right)^8 \rightsquigarrow f'(x)=8\left(\dfrac{-3x+1}{x^2+5}\right)'\times\left(\dfrac{-3x+1}{x^2+5}\right)^{8-1}$

$$\rightsquigarrow f'(x)=8\left(\frac{-3(x^2+5)-2x(-3x+1)}{(x^2+5)^2}\right)\times\left(\frac{-3x+1}{x^2+5}\right)^7$$

خ ۹۹ 2) $g(x)=\left(\dfrac{1}{x}\right)\sqrt{3x+2} \rightsquigarrow g'(x)=\left(\dfrac{1}{x}\right)'\left(\sqrt{3x+2}\right)+\left(\dfrac{1}{x}\right)\left(\sqrt{3x+2}\right)'$

$$\rightsquigarrow g'(x)=\left(-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{3x+2}+\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{3}{2\sqrt{3x+2}}\right)$$

ش ۹۹ 3) $f(x)=\dfrac{3x+1}{\sqrt{x}}$

ش ۹۹ 4) $g(x)=\left(\dfrac{1}{x}\right)(x^2+5x)^7$

خ ۹۹ خاج 5) $f(x)=\dfrac{x^2-3x+1}{-3x+1}$

خ ۹۹ خاج 6) $f(x)=(x^2+1)^3(5x-1)$

تمرین (کنکور ۹۸) مشتق تابع $f(x)=x\sqrt[3]{\dfrac{3x+1}{x+2}}$ در نقطه $x=-3$ کدام است؟ (جواب: $\frac{3}{4}$)

توجه : کار در کلاس صفحه ۸۷ و ۸۸ کتاب درسی حل و بررسی شود.

تست (کنکور ۹۸ داخل) در تابع با ضابطه $f(x)=\dfrac{1+\sqrt{x}}{5-2x}$ ، حاصل $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{f(x)-f(4)}{x-4}$ کدام است؟ $\to f'(4)$

۱) $\frac{4}{9}$ ۲) $\frac{5}{12}$ ۳) $\frac{7}{12}$ ۴) $\frac{5}{6}$

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(5-2x)+\overset{-(-2)}{2}(1+\sqrt{x})}{(5-2x)^2}\rightsquigarrow f'(4)=\frac{7}{12}$$

تست (۹۸ خارج) : در تابع با ضابطه $f(x)=\dfrac{-x-1}{\sqrt{x}}$ ، حاصل $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(\frac{1}{4}+h)-f(\frac{1}{4})}{h}$ کدام است؟ $\to f'(\frac{1}{4})$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

$$\xrightarrow{\text{مشتق گیری از } f} f'(x)=\frac{-1\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}(-x-1)}{(\sqrt{x})^2}\overset{\text{ساده شود}}{=}\frac{-\sqrt{x}+\frac{x+1}{2\sqrt{x}}}{x}\rightsquigarrow f'(\tfrac{1}{4})=3$$

تست (۹۹ داخل) : مشتق تابع با ضابطه $f(x)=\left(\dfrac{\sqrt[3]{x^2+2x}}{x^2-x}\right)^3$ در نقطه $x=2$ کدام است؟

۱) $-\frac{3}{4}$ ۲) $-\frac{5}{4}$ ۳) $-\frac{5}{2}$ ۴) $-\frac{15}{4}$

پاسخ ← ابتدا توان را در صورت و مخرج کسر تأثیر می دهیم سپس مشتق می گیریم :

$$\xrightarrow{\text{تأثیر توان}} f(x)=\frac{x^2+2x}{(x^2-x)^3}$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق گیری}} f'(x)=\frac{(2x+2)(x^2-x)^3-\overbrace{3(2x-1)(x^2-x)^2}^{\text{مشتق مخرج}}(x^2+2x)}{(x^2-x)^6}\rightsquigarrow f'(2)=-\frac{15}{4}$$

تست (۹۸ داخل) : تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x-1} & x\geq 2\\ -x^2+ax+b & x<2\end{cases}$ روی مجموعه اعداد حقیقی مشتق پذیر است، b کدام است؟

۱) -2 ۲) -1 ۳) ۱ ۴) ۲

پاسخ : چون تابع مشتق پذیر است پس پیوسته نیز می باشد لذا در حل اینگونه سوال { هم شرط پیوستگی را برقرار می کنیم ؛ $\boxed{\text{مقدار تابع} = \text{حد تابع}}$ ، حد راست = حد چپ

هم شرط مشتق پذیری را برقرار می کنیم : $f'_+(2)=f'_-(2)$ }

شرط پیوستگی : $\lim\limits_{x\to 2^-}(-x^2+ax+b)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\dfrac{1}{x-1}\right)=f(2)\rightsquigarrow -4+2a+b=1\Rightarrow\boxed{2a+b=5}$

$$f'(x)=\begin{cases}-\frac{1}{(x-1)^2} & x>2\\ -2x+a & x<2\end{cases}\xrightarrow{\text{شرط مشتق پذیری}} f'_+(2)=f'_-(2)\rightsquigarrow -1=-4+a\rightsquigarrow a=3$$

$b=-1$

تست (۹۸ خارج): در تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases}\dfrac{8}{ax+b} & ; x>2\\ -x^3+6x & ; x\leq 2\end{cases}$ اگر $f'(2)$ موجود باشد، a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ✓ ۴) ۴

پاسخ ← مث به تست قبل هم شرط پیوستگی و هم شرط مشتق پذیری را برقرار کنید.

تست (کنکور ۹۷): اگر $f(x)=\begin{cases}ax^2+bx+4 & x\geq -2\\ x^3-x & x<-2\end{cases}$ همواره مشتق پذیر باشد، $f(1)$ کدام است؟

۱) -3 ۲) صفر ✓ ۳) ۱ ۴) ۲

پاسخ ← چون در تمام نقاط مشتق پذیر است در نقطه مرزی پیوستگی و مشتق پذیری را برقرار می کنیم

پیوستگی
$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^+}(ax^2+bx+4)=\boxed{4a-2b+4}=f(-2)\\ \lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^-}(x^3-x)=(-2)^3-(-2)=-8+2=\boxed{-6}\end{cases}\longrightarrow 4a-2b+4=-6 \Rightarrow \boxed{4a-2b=-10}$$

$$f'(x)=\begin{cases}2ax+b & x>-2\\ 3x^2-1 & x<-2\end{cases}\rightsquigarrow \begin{array}{l} f'_+(-2)=-4a+b \longrightarrow \boxed{-4a+b=11}\\ f'_-(-2)=11\end{array}$$

از حل دستگاه $b=-1$, $a=-3$ بنابراین:

$$f(x)=\begin{cases}-3x^2-x+4 & x\geq -2\\ x^3-x & x<-2\end{cases}\rightsquigarrow f(1)=-3(1)^2-(1)+4=0$$

تست (کنکور ۹۹) تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases}\sqrt{5-2x} & x\leq -2\\ -\frac{1}{2}x^2+bx+c & x>-2\end{cases}$ در $x=-2$ مشتق پذیر است

مقدار c کدام است؟

۱) $-\frac{2}{3}$ ۲) $-\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ✓ ۴) $\frac{2}{3}$

مشتق تابع مرکب (قاعدهٔ زنجیری)

اگر f و g دو تابع مشتق‌پذیر باشند، در اینصورت تابع fog مشتق‌پذیر است و داریم:

$$\boxed{y=(f\circ g)(x)=f(g(x)) \longrightarrow y'=g'(x)\times f'(g(x))}$$

مثال: اگر $f(x)=\sqrt{x+1}$ و $g(x)=x^3+x+1$ باشد مشتق تابع gof را به ازای $x=0$ بدست آورید.
به عبارت دیگر $(gof)'(0)=?$

پاسخ ← روش اول: از فرمول مشتق تابع مرکب

$$y=(g\circ f)(x)=g(f(x)) \longrightarrow y'=(g\circ f)'(x)=f'(x)\cdot g'(f(x))$$

$$\longrightarrow (g\circ f)'(0)=f'(0)\times g'(f(0))=\frac{1}{2}\times 4=\boxed{2}$$

$$f(x)=\sqrt{x+1} \longrightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \longrightarrow f'(0)=\frac{1}{2}$$

$$g(x)=x^3+x+1 \longrightarrow g'(x)=3x^2+1 \longrightarrow g'(f(0))=g'(1)=3(1)^2+1=4$$

روش دوم: ابتدا ضابطه gof را تشکیل داده و سپس مشتق می‌گیریم:

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=f^3(x)+f(x)+1=(\sqrt{x+1})^3+\sqrt{x+1}+1$$

$$(g\circ f)'(x)=3\left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right)(\sqrt{x+1})^2+\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \Rightarrow (g\circ f)'(0)=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=\frac{4}{2}=\boxed{2}$$

مثال (کنکور ۹۸) اگر $g(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$ و $(fog)'(2)=6$ باشد، $f'(5)$ کدام است؟

۱) -2 ۲) -1 ۳) 2 ۴) 3

$$(f\circ g)'(2)=6 \xrightarrow{\text{مشتق زنجیری}} g'(2)\times f'(g(2))=6 \longrightarrow -3\times f'(5)=6 \longrightarrow \boxed{f'(5)=-2}$$

$$g'(x)=\frac{2(x-1)-1(2x+1)}{(x-1)^2} \longrightarrow g'(x)=\frac{-3}{(x-1)^2} \longrightarrow g'(2)=-3$$

$$g(x)=\frac{2x+1}{x-1} \longrightarrow g(2)=5$$

نکته: با استفاده از مشتق تابع مرکب داریم:

$$\boxed{y=f(\overset{g(x)}{u}) \Rightarrow y'=u'f'(u)}$$

مثال: اگر $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ و $y=f(\frac{1}{x})$ باشد مقدار $y'(\frac{3}{4})$ کدام است؟

پاسخ ←

$$y=f(\tfrac{1}{x}) \rightsquigarrow y'=(\tfrac{1}{x})'\times f'(\tfrac{1}{x}) = \frac{-1}{x^2}\times f'(\tfrac{1}{x})$$

$$\rightsquigarrow y'(\tfrac{3}{4}) = \frac{-1}{(\frac{3}{4})^2}\times f'(\frac{1}{\frac{3}{4}}) = \frac{-16}{9}\times f'(\tfrac{4}{3}) = \frac{-16}{9}\times\frac{3}{5} = \boxed{\frac{-16}{15}}$$

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \Rightarrow f'(\tfrac{4}{3})=\frac{1}{\sqrt{\frac{16}{9}+1}}=\frac{3}{5}$$

مثال: اگر $g(x)=f(\sqrt{x})$ و $f'(1)=5$ مطلوبست محاسبهٔ $g'(1)$.

پاسخ ←

$$g(x)=f(\overset{u}{\sqrt{x}})$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق}} g'(x)=(\sqrt{x})'f'(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\times f'(\sqrt{x}) \xrightarrow{x=1} g'(1)=\frac{1}{2\sqrt{1}}\times f'(1) = \frac{1}{2}\times 5 = \boxed{\frac{5}{2}}$$

مثال: اگر $\underbrace{\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h+2)-f(2)}{h}}_{f'(2)}=\dfrac{2}{3}$ آنگاه مشتق تابع $f(\sqrt{x-1})$ را به ازای $x=5$ بدست آورید.

$$y=f(\sqrt{x-1}) \longrightarrow y'=(\sqrt{x-1})'\times f'(\sqrt{x-1}) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}\times f'(\sqrt{x-1})$$

$$\xrightarrow{x=5} y'(5)=\frac{1}{2\times 2}\times f'(2) = \frac{1}{4}\times\frac{2}{3} = \boxed{\frac{1}{6}}$$

تمرین: اگر $f'(1)=-5$ آنگاه مشتق تابع $f(\dfrac{1}{x-1})$ در نقطه $x=2$ را بدست آورید.

مشتق مرتبه دوم : مشتق تابع $y=f(x)$ با نماد $y'=f'(x)$ نمایش داده شد

حال اگر f' مشتق پذیر باشد مشتق آن را با f'' نشان می دهیم (مشتق مرتبه دوم)

$$\boxed{y=f(x) \xrightarrow{\text{مشتق}} y'=f'(x) \xrightarrow{\text{مشتق گیری}} y''=f''(x)}$$

مثال: مشتق مرتبه دوم تابع $f(x)=5x^3-3x^2+6$ را محاسبه کنید. وسپس $f''(-1)$ را محاسبه کنید.

$$f'(x)=15x^2-6x+0 \xrightarrow{\text{مشتق}} f''(x)=30x-6$$

$$\boxed{f''(-1)=30(-1)-6=-36}$$

تمرین : اگر $f(x)=\frac{x+1}{x+2}$ ، حاصل $f''(0)$ را بدست آورید.

تست (ریاضی ۹۷) : اگر $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ در $\mathbb{R}$ مشتق پذیر از مرتبه دوم باشد و به ازای هر x حقیقی $g(x)=f(4-x^2)$ باشد و $f'(1)=-5$ و $f''(1)=-1$ مقدار $g''(\sqrt{3})$ کدام است؟

مشتق پذیری روی یک بازه :

تابع f روی بازهٔ (a,b) مشتق پذیراست هرگاه ، در هر نقطهٔ این بازه مشتق پذیر باشد.

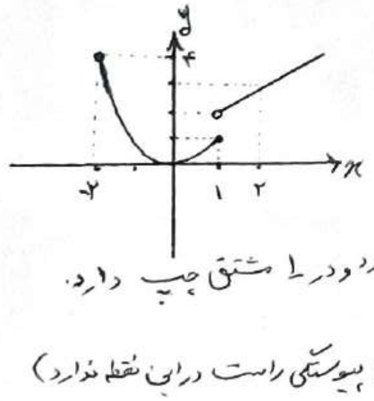
تابع f روی بازهٔ $[a,b]$ مشتق پذیراست هرگاه در بازهٔ (a,b) مشتق پذیر و در نقطهٔ a مشتق راست و در b مشتق چپ داشته باشد.

نکته : اگر تابع f در هر عدد حقیقی مشتق پذیر باشد ($D_f=\mathbb{R}$) ، گوئیم f روی بازه $(-\infty,+\infty)$ مشتق پذیراست.

نکته : f روی بازه $[a,b)$ مشتق پذیراست هرگاه f روی (a,b) مشتق پذیر و در نقطهٔ a مشتق راست داشته باشد

f روی بازه $(a,b]$ 〃 〃 〃 〃 〃 b مشتق چپ داشته باشد

مثال: نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} x^2 & -2\leq x\leq 1 \\ x+1 & x>1 \end{cases}$ را رسم کنید و



مشتق پذیری تابع را روی بازه‌های $[-2,1]$, $(1,+\infty)$, $[1,2]$, $(0,2)$ بررسی کنید.

پاسخ ← f در بازهٔ بستهٔ $[-2,1]$ مشتق پذیراست زیرا در بازهٔ باز $(-2,1)$ مشتق پذیر و در -2 مشتق راست دارد و در 1 مشتق چپ دارد.

در بازهٔ باز $(1,+\infty)$ 〃 〃 زیرا در همه نقاط این بازه مشتق پذیراست.

در 〃 بسته $[1,2]$ مشتق پذیرنیست زیرا در 1 مشتق پذیری راست ندارد (چون پیوستگی راست در این نقطه ندارد)

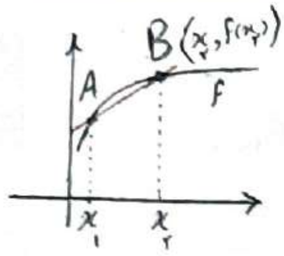
در $(0,2)$ مشتق پذیرنیست زیرا در $1\in(0,2)$ مشتق پذیر نیست.

توجه: با توجه به مطالب تدریس شده تا اینجا کار در کلاس ص ۸۹ و تمرینات صفحه ۹۰ تا ۹۲ کتاب درسی حل و بررسی شوند.

فصل ۴ ← درس سوم (آهنگ تغییر)

آهنگ متوسط تغییر یک تابع: برای تابع f، آهنگ متوسط تغییر در بازهٔ $[x_1, x_2]$ به صورت زیر می‌باشد:

$$\boxed{f \text{ آهنگ متوسط } = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_1-x_2}}$$



نکته: برای محاسبه آهنگ متوسط در نمودار تابع، با شیب پاره‌خطی که دو نقطه را به هم وصل می‌کند محاسبه کرد.

$$f \text{ آهنگ متوسط } \frac{\Delta f}{\Delta x} = \overset{\text{شیب خط قاطع}}{m_{AB}} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

مثال: (شهریور ۹۸): آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x)=\sqrt{x+2}$ را وقتی متغیر از $x_1=2$ به $x_2=7$ تغییر می‌کند.

پاسخ ← f آهنگ متوسط $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{f(7)-f(2)}{7-2} = \dfrac{\sqrt{9}-\sqrt{4}}{5} = \dfrac{3-2}{5} = \dfrac{1}{5}$

توجه: اگر $\Delta x = x_2 - x_1$ درنظر بگیریم ($x_2 = x_1+\Delta x$) آنگاه آهنگ متوسط تغییر f به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f \text{ آهنگ متوسط}: \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{\Delta x} = \frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}$$

مثال: آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x)=x^2+5x+4$ وقتی $x_1=3$, $\Delta x=0.4$ باشد بدست آورید.

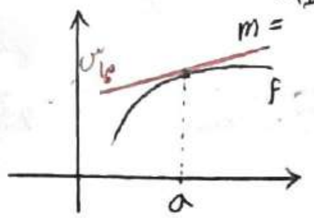
$\Delta x = x_2-x_1 \Rightarrow 0.4 = x_2 - 3 \to x_2 = 3.4$

پاسخ ← f آهنگ متوسط: $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \dfrac{f(3.4)-f(3)}{3.4-3} = \dfrac{32.56-28}{0.4} = 11.4$

آهنگ لحظه‌ای تغییر یک تابع (آنی): برای تابع f آهنگ لحظه‌ای تغییر در نقطه $x=a$ برابر مشتق تابع f در این نقطه:

$$\boxed{x=a \text{ در } f \text{ آهنگ لحظه‌ای } = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)}$$

بنابراین برای محاسبه آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در یک نقطه کافیست مقدار مشتق را در آن نقطه محاسبه کنیم.



نکته: برای محاسبه آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع با استفاده از نمودار کافیست شیب خط مماس به نمودار تابع در آن نقطه را بدست آوریم.

$$f \text{ آهنگ لحظه‌ای } = \underset{\text{مماس}}{\overset{\text{شیب خط مماس}}{m}} = f'(a)$$

مثال: آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x)=\sqrt{x^2+16}$ در بازهٔ $[0,3]$ ، از آهنگ لحظه‌ای در $x=\sqrt{2}$ چقدر کمتر است؟

پاسخ ←

$$f(x)=\sqrt{x^2+16} \xrightarrow{\text{مشتق}} f'(x)=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+16}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+16}}$$

$$x=\sqrt{2} \text{ در } f \text{ آهنگ لحظه‌ای } = f'(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{18}} = \sqrt{\frac{2}{18}} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$$

برابرند ← اختلاف آنها $=0$

$$[0,3] \text{ در } f \text{ آهنگ متوسط } = \frac{f(3)-f(0)}{3-0} = \frac{\sqrt{25}-\sqrt{16}}{3} = \frac{5-4}{3} = \frac{1}{3}$$

تست (کنکور ۹۸ داخل): در تابع با ضابطه $f(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{x}$ اختلاف آهنگ تغییر لحظه‌ای در $x=2$ از آهنگ تغییر متوسط در بازه $[1,4]$ کدام است؟

۱) ۰/۲۵ ۲) ۰/۵ ✓ ۳) ۰/۴۵ ۴) ۰/۷۵

مثال: اگر آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع $f(x)$ در نقطه $x=-1$ برابر ۲ باشد حاصل $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(-1-2h)-f(-1)}{h}$ را محاسبه کنید.

پاسخ ←

طبق حد تعریف مشتق باید اختلاف دو پرانتز صورت در مخرج ظاهر شود

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(-1-2h)-f(-1)}{h} = -2\lim_{h\to 0}\frac{f(-1-2h)-f(-1)}{-2h} = -2f'(-1) = -2\times 2 = -4$$

$$x=-1 \text{ آهنگ لحظه‌ای در } = 2 \rightsquigarrow f'(-1)=2$$

تمرین: در تابع با ضابطه $f(x)=\frac{1}{x^2}$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع وقتی x از ۱ تا ۳ تغییر کند با آهنگ لحظه‌ای در $x=a$ برابر است. مقدار a کدام است؟ (جواب: $a=\sqrt[3]{\frac{9}{2}}$)

تمرین: آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x)=\sqrt{x}$ در بازهٔ $[1, 2.25]$ با آهنگ لحظه‌ای تابع f در نقطه‌ای با کدام طول برابر است؟ (جواب: $x=\frac{25}{16}$)

سرعت متوسط : همان آهنگ متوسط تابع مکان - زمان است

$\boxed{\overset{\text{مکان}}{x} = f(\overset{\text{زمان}}{t})}$

$$\text{سرعت متوسط } \bar{V} = \frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1}$$

سرعت لحظه‌ای : همان آهنگ لحظه‌ای تابع مکان - زمان است.

$$\text{سرعت لحظه‌ای در لحظه } t \quad V = f'(t)$$

مثال : معادله حرکت متحرکی به صورت $f(t) = t^2 - 2t + 3$ است، در کدام لحظه، سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط در بازه زمانی $[0 , 4]$ برابر است؟

پاسخ ←

$$\text{سرعت متوسط } \bar{V} = \frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1} = \frac{f(4)-f(0)}{4-0} = \frac{11-3}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

$$\text{سرعت لحظه‌ای در لحظه } t_0 \quad V = f'(t_0) = 2t_0 - 2 \xrightarrow{\text{برابر}} 2t_0 - 2 = 2 \Rightarrow 2t_0 = 4 \rightarrow \boxed{t_0 = 2}$$

$$f'(t) = 2t - 2$$

یعنی در لحظه ۲ = t سرعت لحظه‌ای = سرعت متوسط

مثال (دی ۹۷) یک توده باکتری پس از t ساعت دارای جرم $m(t) = \sqrt{t} + 2t^2$ گرم است آهنگ تغییر متوسط جرم این توده در بازه زمانی $[1 , 4]$ چقدر است؟

فرض کنیم $f(t)$

$$\text{آهنگ متوسط تغییر جرم} = \frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1} = \frac{f(4)-f(1)}{4-1} = \frac{34-3}{3} = \frac{31}{3}$$

یا $\frac{\Delta m}{\Delta t}$

توجه : کاردرکلاس و تمرینات صفحه ۹۹ و ۱۰۰ کتاب درسی حل و بررسی شوند.

تمرین (خرداد ۹۸) معادله حرکت متحرکی به صورت $f(t) = 2t^2 - t$ برحسب متر داده شده است.
تعیین کنید که در چه زمانی، سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط در بازه زمانی $[0 , 4]$ باهم برابرند.

تمرین (شهریور ۹۹) خودرویی در امتداد خط راست طبق معادله $d(t) = -5t^2 + 20t$ حرکت می‌کند، که در آن $0 \leq t \leq 5$ برحسب ثانیه است، سرعت لحظه‌ای در $t = 2$ چقدر است؟

تمرین (خرداد ۹۹ خارج) : معادله حرکت متحرکی به صورت $f(t) = t^2 - t + 10$ برحسب متر در بازه زمانی $[0 , 5]$ برحسب ثانیه داده شده است. درکدام لحظه سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط در بازه $[0 , 5]$ برابر است؟

تمرین (خرداد ۹۹) : یک توده باکتری پس از t ساعت دارای جرم $m(t) = \sqrt{t} + 2t^3$ گرم است.

الف) جرم این توده در بازه زمانی $1 \leq t \leq 4$ چند گرم افزایش می‌یابد؟ (یعنی آهنگ متوسط تغییر جرم)

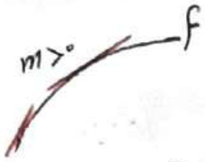
ب) آهنگ رشد جرم توده باکتری در لحظه $t = 4$ چقدر است؟ (یعنی آهنگ لحظه‌ای تغییر جرم)

فصل ۵ کاربرد مشتق

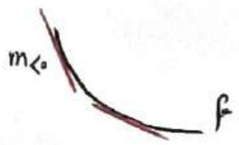
درس اول : (اکسترممهای تابع)

دراین درس می خواهیم ارتباط علامت مشتق یک تابع را با صعودی یا نزولی بودن آن تابع بررسی کنیم.

توجه : از فصل قبل یاد گرفتیم که مقدار مشتق تابع در یک نقطه ، با شیب خط مماس بر نمودار تابع در آن نقطه برابر است.



اکیداً صعودی



اکیداً نزولی

ثابت

بنابراین :

$f'=0 \sim \overset{\text{شیب}}{m}=0 \sim$ تابع ثابت

$f'<0 \sim \overset{\text{شیب}}{m}<0 \sim$ تابع اکیداً نزولی

$f'>0 \sim \overset{\text{شیب}}{m}>0 \sim$ تابع اکیداً صعودی

یعنی هرجا شیب مماس مثبت باشد مشتق مثبت است و تابع اکیداً صعودی است

آزمون یکنوایی تابع :

الف) در یک بازه از دامنه f اگر مقدار f' موجود و مثبت ($f'>0$) باشد آنگاه f در آن بازه اکیداً صعودی است.

ب) در یک بازه از دامنه f اگر مقدار f' موجود و منفی ($f'<0$) باشد آنگاه f در آن بازه اکیداً نزولی است.

ج) در یک بازه از دامنه f اگر مقدار f' موجود و برابر صفر باشد آنگاه f در آن بازه تابعی ثابت است.

نکته : با توجه مطالب بیان شده برای مشخص کردن بازه های مربوط به صعودی بودن یا نزولی بودن تابع f کافی است f' را تعیین علامت کنیم.

توجه : جدول تعیین علامت مشتق را جدول تغییرات تابع گویند. دراین جدول اکیداً صعودی را با علامت $\nearrow$ و اکیداً نزولی بودن را با علامت $\searrow$ نشان می دهیم.

مثال: بررسی کنید توابع زیر در چه بازه‌هایی اکیداً صعودی و در چه بازه‌هایی اکیداً نزولی اند؟

1) $f(x) = -7x+5$

$f'(x) = -7 < 0 \rightarrow$ (مشتق همواره منفی)

x	$-\infty$ ریشه ندارد $+\infty$
$f'(x)=-7$	$-$
f	$\searrow \quad \searrow$

در بازهٔ $(-\infty,+\infty)$ تابع f اکیداً نزولی است.

---

2) $f(x) = x^2-4x+5$

$f'(x) = 2x-4$

ریشه مشتق

$2x-4=0 \Rightarrow \boxed{x=2}$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)=2x-4$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$	

در بازهٔ $(-\infty,2)$ اکیداً نزولی

در بازهٔ $(2,+\infty)$ اکیداً صعودی

---

3) $f(x) = x^3-12x+1$

$f'(x) = 3x^2-12$

ریشه‌های مشتق

$3x^2-12=0 \rightarrow x^2=\frac{12}{3}=4 \rightarrow \boxed{x=\pm 2}$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)=3x^2-12$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

در بازهٔ $(-\infty,-2)$ اکیداً صعودی

در بازهٔ $(-2,2)$ اکیداً نزولی

در بازهٔ $(2,+\infty)$ اکیداً صعودی

مثال: بزرگترین بازه از $\mathbb{R}$ که تابع $f(x)=2x^3-9x^2+14$ در آن اکیداً نزولی باشد به صورت (a,b) می‌باشد $b-a$ کدام است؟

پاسخ $\rightarrow$ می‌دانیم اگر علامت مشتق در یک بازه منفی باشد تابع در آن بازه اکیداً نزولی است لذا علامت مشتق را تعیین می‌کنیم

$f'(x) = 6x^2-18x$

ریشه‌های مشتق

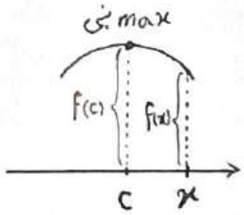
$\rightarrow 6x^2-18x=0 \rightarrow 6x(x-3)=0 \rightarrow \boxed{x=0}, \ \boxed{x=3}$

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f'(x)=6x^2-18x$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$		$\searrow$ اکیداً نزولی		$\nearrow$	

f در بازهٔ $(0,3)$ اکیداً نزولی است لذا: $b-a=3-0=3$

a,b

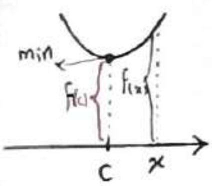
اکسترمم‌های نسبی تابع:



تعریف ماکزیمم نسبی: f در نقطه‌ای به طول c ماکزیمم نسبی دارد، هرگاه درون دامنه، یک همسایگی از c باشد که برای هر x از این همسایگی داشته باشیم $\boxed{f(c) \geq f(x)}$

توجه: تابع در نقطه $(c, \underbrace{f(c)}_{\text{مقدار max}})$ ماکزیمم نسبی دارد.

مثال: در شکلهای زیر عرض نقطه توپر از عرض نقاط اطراف خودش بالاتر (یا مساوی) است لذا تابع در این نقاط توپر ماکزیمم نسبی دارد.



تعریف مینیمم نسبی: تابع f در نقطه‌ای به طول c مینیمم نسبی دارد، هرگاه درون دامنه f یک همسایگی از c باشد به طوریکه برای هر x از این همسایگی داشته باشیم $\boxed{f(c) \leq f(x)}$

توجه: تابع در نقطه $(c, \underbrace{f(c)}_{\text{مقدار مینیمم}})$ مینیمم نسبی دارد و $f(c)$ را مقدار min نسبی گویند.

توجه: نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی تابع را نقاط اکسترمم نسبی آن تابع گویند.

مثال: در شکلهای زیر عرض نقطه توپر از عرض نقاط اطراف خودش پایین‌تر (یا مساوی است) لذا تابع دارای نقاط توپر مینیمم نسبی دارد.

مثال: جدول تغییرات تابع $f(x)=x^3-3x+4$ را رسم کنید و نقاط اکسترمم نسبی آنرا در صورت وجود مشخص کنید.

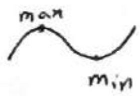
پاسخ:

$f'(x)=3x^2-3$ ریشه‌ی مشتق

$3x^2-3=0 \to x^2=1 \to x=\pm1$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)=3x^2-3$		+	0	−	0	+	
f		↗	6 (max)	↘	2 (min)	↗	

نقطه $(1,2)$ مینیمم نسبی تابع است و مقدار مینیمم نسبی ۲ می‌باشد.
" $(-1,6)$ ماکزیمم نسبی " " " ماکزیمم نسبی ۶ می‌باشد.

توجه: شکل کلی نمودار تابع در مثال قبل به صورت  است مشاهده می‌شود حرکت فلشها در جدول تغییرات شبیه به نمودار کلی است و ماکزیمم و مینیمم را نشان می‌دهد.

↗ max ↘ min ↗

مثال (خرداد ۹۹): تابع $f(x)=-2x^3+3x^2+12x-9$ را در نظر بگیرید. با رسم جدول تغییرات تابع نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی آنرا در صورت وجود مشخص کنید.

پاسخ ←

$f'(x)=-6x^2+6x+12$

$-6x^2+6x+12=0 \xrightarrow{\div(-6)} x^2-x-2=0 \to (x-2)(x+1)=0 \to x=2,\ x=-1$

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)=-6x^2+6x+12$		−	0	+	0	−	
f		↘	−14 (min)	↗	11 (max)	↘	

$(2,11) \longrightarrow$ max نسبی

$(-1,-14) \longrightarrow$ min نسبی

تمرین (شهریور ۹۸): جدول تغییرات تابع $f(x)=x^3-3x+4$ را رسم کنید و نقاط اکسترمم نسبی آنرا در صورت وجود مشخص کنید.

تمرین: جدول تغییرات تابع $f(x)=-2x^3+9x^2-13$ را رسم کنید و نقاط اکسترمم نسبی آنرا در صورت وجود مشخص کنید.

تمرین (دی ۹۹): جدول تغییرات تابع $f(x)=x^3+3x^2-9x-10$ را رسم کنید و نقاط اکسترمم آنرا در صورت وجود مشخص کنید.

توجه: کار در کلاس صفحه ۱۰۵ کتاب درسی حل و بررسی شود.

نکته: نقاطی که مشتق در آنها صفر است یا وجود ندارد به شرط اینکه حتماً مشتق در اطراف آن ها تغییر علامت داشته باشد، نقاط اکسترمم نسبی می باشند.

مثال: در تابع $f(x)=x^3$ با نمودار 

$f'(x)=3x^2=0 \to \boxed{x=0}$ ریشه مشتق

x		0	
$f'(x)=3x^2$	$+$	0	$+$
f	$\nearrow$		$\nearrow$

اما چون مشتق در اطراف این نقطه تغییر علامت ندارد پس f در نقطه بطول $x=0$ اکسترمم نیست

نکته: هر نقطه که روی نمودار یک تابع باشد مختصاتش در معادله تابع صدق می کند (و برعکس)

بنابراین مختصات نقاط اکسترمم نسبی در معادله تابع صدق می کند (چون روی نمودار تابع قرار دارند)

مثال (ش ۹۹): اگر تابع $f(x)=ax^2+bx$ در $x=1$ دارای ماکزیمم نسبی برابر ۳- باشد، مقادیر a و b را بدست آورید

پاسخ ← نقطه اکسترمم نسبی (۱و۳-) روی نمودار تابع قرار دارد پس در معادله تابع صدق می کند:

$$\underset{y}{f(x)}=ax^2+bx \xrightarrow{(1,-3)} -3=a(1)^2+b(1) \longrightarrow \boxed{a+b=-3}$$

طول نقطه اکسترمم ریشه مشتق تابع است لذا مشتق به ازای طول اکسترمم برابر صفر است.

$$\xrightarrow{\text{مشتق}} f'(x)=2ax+b \xrightarrow{f'(1)=0} 2a(1)+b=0 \longrightarrow \boxed{2a+b=0}$$

از تشکیل دستگاه معادلات داریم: $b=-6,\ a=3$

تمرین: (نهایی ۹۹ خارج و تمرین کتاب): اگر نقطه (۱و۲) نقطه اکسترمم نسبی تابع $f(x)=x^3+bx^2+d$ باشد مقادیر b و d را بدست آورید.

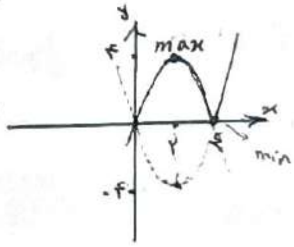
تست (کنکور ۹۸ داخل): در تابع با ضابطه $f(x)=x|x-4|$ فاصله دو نقطه ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی آن کدام است؟

$2\sqrt{5}$ $\quad 3\sqrt{2}$ $\quad 2\sqrt{2}$ $\quad \sqrt{5}$

پاسخ ← تابع داده شده بدون قدر مطلق به صورت مقابل است:

$$f(x)=x|x-4|=\begin{cases} x(x-4) & x\geq 4 \\ -x(x-4) & x<4 \end{cases}=\begin{cases} x^2-4x & x\geq 4 \\ -x^2+4x & x<4 \end{cases}$$

هر کدام از ضابطه‌ها یک سهمی است که از اجتماع آنها به ازای $x\geq 4$ و $x<4$ نمودار f به شکل



است در $x=2$ و $x=4$ به ترتیب ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی دارد.

$B(2,4)$ $\quad A(4,0)$

فاصله ماکزیمم تا مینیمم $AB=\sqrt{(2-4)^2+(4-0)^2}=\sqrt{(-2)^2+4^2}=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

تست (کنکور ۹۸ خارج): در تابع با ضابطه $f(x)=x|x|-2x$ فاصله دو نقطه ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی آن کدام است؟

4 $\quad 3\sqrt{2}$ $\quad 3$ $\quad 2\sqrt{2}$ ✓

پاسخ: (مشابه تست قبل نمودار دو سهمی داریم که از اجتماع آنها به ازای $x\geq 0$ و $x<0$) نمودار f به شکل کلی

می‌باشد. نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی

$B(1,-1)$ $\quad A(-1,1)$

تست (کنکور ۹۹ خارج) مقدار ماکسیمم نسبی تابع با ضابطه $f(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{x^2+1}$ کدام است؟

۱) $-1+\sqrt{5}$ ✓ $\quad$ ۲) $1+\sqrt{5}$ $\quad$ ۳) $-1+\sqrt{5}$ $\quad$ ۴) $1+\sqrt{3}$

پاسخ ← به کمک مشتق و برابر با صفر نقاط ماکسیمم نسبی را می‌یابیم $f'(x)=0$

$$f'(x)=\frac{(2x+2)(x^2+1)-2x(x^2+2x-3)}{(x^2+1)^2}=\frac{\cancel{2x^3}+2x+2x^2+2-\cancel{2x^3}-4x^2+6x}{(x^2+1)^2}=\frac{-2x^2+8x+2}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x)=0 \longrightarrow -2x^2+8x+2=0 \xrightarrow{\div(-2)} x^2-4x-1=0 \longrightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{4\pm\sqrt{20}}{2} \begin{matrix} \nearrow 2+\sqrt{5} \\ \searrow 2-\sqrt{5} \end{matrix}$$

مخرج کسر همواره مثبت است علامت f' همان علامت صورت کسر است

x	$-\infty$	$2-\sqrt{5}$		$2+\sqrt{5}$	$+\infty$
$f'=\frac{-2x^2+8x+2}{(x^2+1)^2}$	$-$	0	$+$	0	$-$
f	↘		↗	max	↘

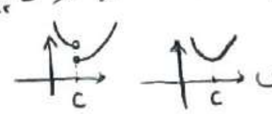
مقدار ماکسیمم نسبی $f(2+\sqrt{5})=-1+\sqrt{5}$

در تابع قرار می‌دهیم و ساده می‌کنیم

تست: اگر تابع f در نقطه c دارای اکسترمم نسبی باشد الزاماً تابع f چگونه است؟

۱) $f'(c)=0$ $\quad$ ۲) در c پیوسته است $\quad$ ۳) ✓ در همسایگی c تعریف شده است $\quad$ ۴) در c مشتق‌پذیر است.

پاسخ ← در شکلهای



تابع f در c مینیمم نسبی دارد، در اولی پیوسته (f در c) و در دومی ناپیوسته (f در c) است.

در اولی $f'(c)=0$ و در دومی $f'(c)$ وجود ندارد

لذا گزینه‌های ۱ و ۲ و ۴ لزوماً درست نمی‌باشند و فقط گزینه ۳ درست است.

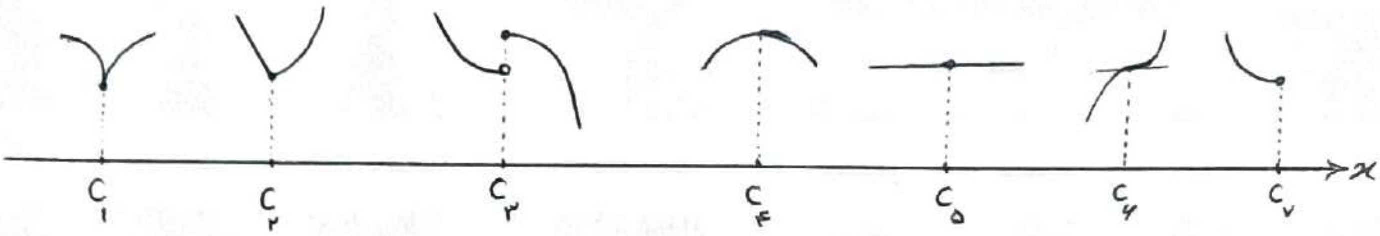
نقطه بحرانی: نقطه به طول $x=c$ از دامنه f را یک نقطه بحرانی این تابع می‌نامیم هرگاه: $\begin{cases} f'(c)=0 \\ \text{یا} \\ f'(c) \text{ موجود نباشد} \end{cases}$

$f'(c)=0$ یا $f'(c)$ موجود نباشد

اگر در $x=c$ پیوسته نباشد یا مشتق چپ و راست برابر نباشند یا مماس قائم باشد، $f'(c)$ وجود ندارد

اگر خط مماس در c افقی باشد، شیب مشتق صفر است

مثال: تابع f در نقاط به طول‌های c_1 تا c_7 بحرانی است.



مثال (تمرین کتاب): نقاط بحرانی تابع $y=\sqrt{4-x^2}$ را بدست آورید.

پاسخ ← ابتدا دامنه تابع را می‌یابیم: $4-x^2\geq 0 \to x^2\leq 4 \xrightarrow{\text{جذر}} |x|\leq 2 \to -2\leq x\leq 2 \to D_f=[-2,2]$

نقاطی از D_f که در آنجا $f'=0$ یا f' وجود ندارد را محاسبه می‌کنیم که همان طول نقاط بحرانی می‌باشد.

$$f'(x)=\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}$$

درجه نقاطی $f'=0$ ، درجه نقاطی f' وجود ندارد:

- $f'(x)=0 \xrightarrow{\text{صورت}=0} x=0\in D_f$
- f' کسری است به ازای ریشه‌های مخرج وجود ندارد $\longrightarrow 4-x^2=0 \to x=\pm 2\in D_f$

بنابراین طول نقاط بحرانی تابع $\{2,-2,0\}$ می‌باشند.

$x=0 \to y=\sqrt{4-0}=\sqrt{4}=2 \to (0,2)$

$x=-2 \to y=\sqrt{4-4}=\sqrt{0}=0 \to (-2,0)$

$x=2 \to y=\sqrt{4-4}=\sqrt{0}=0 \to (2,0)$

مختصات نقاط بحرانی

توجه: با توجه به مثال بالا اگر $D_f=[a,b]$ باشد آنگاه تابع در $x=a$ (اول بازه) و $x=b$ (آخر بازه) بحرانی است.

مثال (تمرین کتاب): نقاط بحرانی تابع $g(x)=x^3+3x^2-4$ را بدست آورید.

پاسخ ← g تابع چندجمله‌ای است $\boxed{D_g=\mathbb{R}}$ و در تمام نقاط دامنه مشتق وجود دارد لذا نقاطی که در آنجا مشتق صفر شود بحرانی است.

$g'(x)=3x^2+6x=0 \to 3x(x+2)=0 \to x=0\in D_g$ ، $x=-2\in D_g$ (ریشه‌های مشتق)

$g'(-2)=0$ ، $g'(0)=0$

بنابراین تابع g در نقاط به طول $x=0$ ، $x=-2$ بحرانی می‌باشد، مختصات نقاط بحرانی $(0,-4)$ $(-2,0)$

مثال: نقاط بحرانی تابع $f(x)=\frac{x^2}{x-1}$ را بدست آورید. دامنه $D_f=\mathbb{R}-\{1\}$

پاسخ ←

$$f'(x)=\frac{2x(x-1)-1x^2}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}=0 \xrightarrow{\text{صورت مساوی صفر}} x^2-2x=0 \begin{cases} x=0\in D_f \\ x=2\in D_f \end{cases}$$

f' به ازای ریشه‌ی مخرج موجود نیست $\longrightarrow \underbrace{x-1}_{\text{مخرج}}=0 \longrightarrow \underbrace{x=1}_{\text{ریشه مخرج}} \notin D_f$

بنابراین طول نقاط بحرانی $\{0,2\}$ می‌باشند.

نتیجه: در توابع کسری گویا ریشه‌ی مخرج کسر مشتق، نقطه‌ی بحرانی نمی‌باشند چون متعلق به دامنه تابع نیستند.

مثال: نقاط بحرانی تابع دوضابطه‌ای $f(x)=\begin{cases} x^2-2x & x\geq 0 \\ x+\sqrt{-x} & x<0 \end{cases}$ را بدست آورید.

پاسخ ← در توابع چندضابطه‌ای علاوه‌بر بررسی نقاط مرزی (از نظر پیوستگی و سپس از نظر مشتق چپ و راست) نقاطی از دامنه تک تک ضابطه‌ها که مشتق در آن صفر می‌شود یا وجود ندارد نقطه بحرانی است.

دامنه $D_f=[0,+\infty)\cup(-\infty,0)=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$

$$\xrightarrow{\text{مشتق‌گیری}} f'(x)=\begin{cases} 2x-2 & x>0 \\ 1+\frac{-1}{2\sqrt{-x}} & x<0 \end{cases}$$

f در نقطه مرز $x=0$ پیوسته است لذا مشتق چپ و راست را محاسبه و مقایسه می‌کنیم.

$$\left.\begin{array}{l} f'_+(0)=-2 \\ f'_-(0)=-\infty \end{array}\right\} \longrightarrow f'(0)=\text{وجود ندارد} \longrightarrow \underbrace{\boxed{x=0}}_{\text{بحرانی}}\in D_f$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \begin{cases} 2x-2=0 \longrightarrow \overset{\text{بحرانی}}{\boxed{x=1}}\in \overbrace{(0,+\infty)}^{\text{دامنه ضابطه اول}} \\ 1+\frac{-1}{2\sqrt{-x}}=0 \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{-x}}=1 \rightarrow 2\sqrt{-x}=1 \rightarrow 4(-x)=1 \rightarrow \overset{\text{بحرانی}}{\boxed{x=-\frac{1}{4}}}\in \overbrace{(-\infty,0)}^{\text{دامنه ضابطه دوم}} \end{cases}$$

بنابراین طول نقاط بحرانی $x=0,1,-\frac{1}{4}$ می‌باشند.

نکته: تابع ثابت $f(x)=k$ دارای بی‌شمار نقطه بحرانی است.

تمرین (دی ۹۹): در تابع زیر ابتدا نقاط بحرانی تابع را بدست آورید و سپس با رسم جدول تغییرات تابع، نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی آنرا در صورت وجود مشخص کنید.

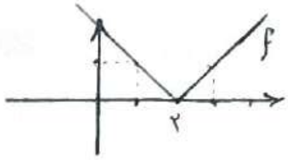
$$f(x)=x^3+3x^2-9x-10$$

مثال: (کار در کلاس صفحه ۱۰۷)

با رسم نمودار تابع $f(x)=|x-2|$

الف) نشان دهید f در $x=2$ مینیمم نسبی دارد. ب) آیا $f'(2)$ وجود دارد؟ چرا؟ پ) آیا $x=2$ طول نقطه بحرانی است؟ چرا؟

پاسخ ← رسم نمودار



الف) با توجه به نمودار به ازای هر x حوالی ۲ داریم $f(2)\le f(x)$ یعنی f در $x=2$ مینیمم نسبی دارد.

ب) $f'(2)$ وجود ندارد زیرا نمودار در این نقطه زاویه دار است

پ) $x=2$ طول نقطه بحرانی است زیرا اولاً $2\in D_f$ ثانیاً: $f'(2)$ وجود ندارد.

قضیه: اگر تابع f در نقطه به طول c ماکزیمم یا مینیمم نسبی داشته باشد و $f'(c)$ موجود باشد آنگاه $f'(c)=0$

(f در c بحرانی است)

(به عبارت دیگر هر نقطه اکسترمم نسبی تابع یک نقطه بحرانی است)

توجه: عکس قضیه بالا در حالت کلی درست نیست یعنی هر نقطه بحرانی لزوماً اکسترمم نسبی نیست.

مثلاً: در تابع $f(x)=(x-1)^3$ داریم: $f'(x)=3(x-1)^2=0 \Rightarrow x=1$ (ریشه مشتق)

یعنی $f'(1)=0$ ولی تابع در $x=1$ اکسترمم نسبی ندارد (جدول تغییرات و نمودار نشان میدهند f در $x=1$ اکسترمم ندارد)

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'=3(x-1)^2$		$+$	0	$+$	
f		$\nearrow$		$\nearrow$	

f' در اطراف $x=1$ تغییر علامت نداده

پس $x=1$ طول اکسترمم نیست

مماس در $x=1$ افقی است

لذا شیب و در نتیجه مشتق برابر صفر است

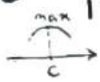
لذا بحرانی است ولی اکسترمم نیست

آزمون مشتق اول :

فرض کنید c طول نقطه بحرانی تابع f باشد که f در c پیوسته است و f در یک همسایگی محذوف c مشتق پذیر باشد.

الف) اگر علامت f' در $x=c$ از مثبت به منفی تغییر کند، آنگاه $x=c$ طول نقطه ماکزیمم نسبی تابع است.

x		c	
f'	+	0	−
f	↗	max	↘



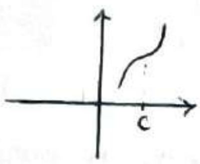
ب) اگر علامت f' در $x=c$ از منفی به مثبت تغییر کند، آنگاه $x=c$ طول نقطه مینیمم نسبی تابع است.

x		c	
f'	−	0	+
f	↘	min	↗

ج) اگر f' در $x=c$ تغییر علامت ندهد به طوریکه f' در یک همسایگی محذوف c همواره مثبت (یا همواره منفی) باشد آنگاه f در c ماکزیمم یا مینیمم نسبی ندارد.

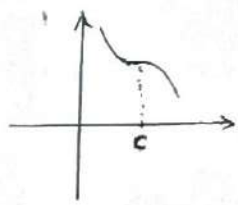
x		c	
f'	+	0	+
f	↗		↗

همواره صعودی



x		c	
f'	−	0	−
f	↘		↘

همواره نزولی



اکسترممهای مطلق تابع :

از تمام نقاط دامنه، بالاتر

ماکزیمم مطلق : نقطه ای از دامنه تابع که نسبت به تمام نقاط موجود در دامنه تابع عرض بیشتری داشته باشد.

مینیمم مطلق : نقطه ای از دامنه تابع که نسبت به تمام نقاط موجود در دامنه تابع عرض کمتری داشته باشد.

از تمام نقاط

توجه :

۱- نقاط ابتدایی و انتهایی نمودار می‌توانند نقاط اکسترمم مطلق باشند.

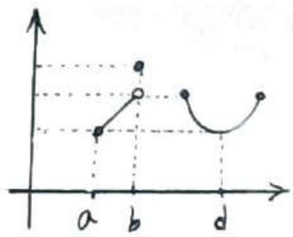
۲- اکسترممهای نسبی از نقاط همسایگی خودش بالاتر مساوی (پایین‌تر مساوی) است اما اکسترمم مطلق از تمام نقاط دامنه تعریف بالاتر (یا پایین‌تر) است.

۳- برای اکسترمم مطلق بودن نیازی به همسایگی نیست.

۴- برعکس اکسترممهای نسبی، عرض نقاط اکسترمم مطلق منحصر به فرد است (ولی ممکن است دو یا چند نقطه با طول متفاوت اکسترمم مطلق باشند)

۵- اگر تابع f در نقاط اکسترمم مطلق خود دارای همسایگی باشند، این نقاط اکسترمم نسبی هم خواهند بود.

مثال:

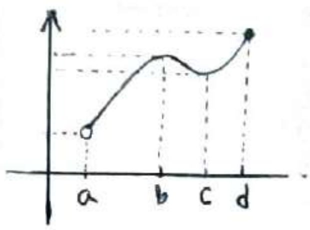


$x=a,d$ طول min مطلق

$x=b$ طول max مطلق

$x=d$ طول min نسبی

$x=a,b,d$ طول نقاط بحرانی



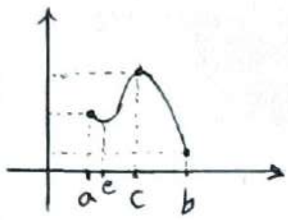
$x=a$ مینیمم مطلق نیست (تعریف نشده)

$x=b$ طول ماکزیمم نسبی

$x=c$ طول min نسبی

$x=d$ طول ماکزیمم مطلق

$x=b,c,d$ طول نقاط بحرانی



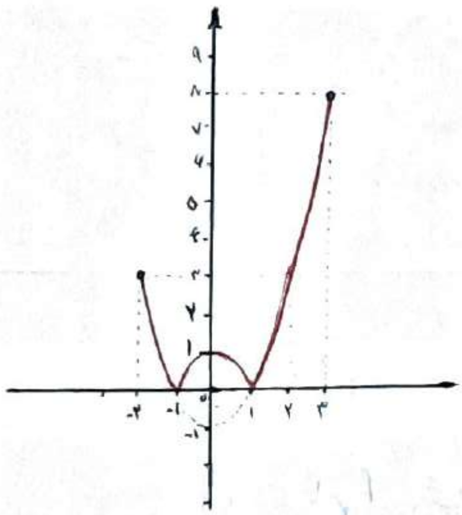
$x=c$ طول ماکزیمم مطلق و نسبی

$x=b$ طول min مطلق

$x=a,b,c,e$ طول نقاط بحرانی

$x=e$ طول min نسبی

مثال: تابع $f(x)=|x^2-1|$ را در بازهٔ $[-2,3]$ رسم کنید و با توجه به نمودار، نقاط اکسترمم مطلق و نسبی را تعیین کنید.



پاسخ: ابتدا نمودار x^2-1 را رسم کرده سپس آن قسمت از نمودار که زیر محور xها است را آینه وار نسبت به محور xها قرینه می کنیم نمودار $y=|x^2-1|$ حاصل می شود.

$x=-1,1$ طول min نسبی و مطلق $\xrightarrow{\text{مختصات}}$ $(1,0)$ و $(-1,0)$

$x=0$ طول max نسبی ← $(0,1)$

$x=3$ طول max مطلق ← $(3,8)$

توجه: کار در کلاس صفحه ۱۱۰ کتاب درسی حل و بررسی شوند

قضیه: اگر تابع f در بازهٔ بستهٔ $[a,b]$ پیوسته باشد آنگاه f در این بازه هم ماکزیمم مطلق دارد و هم مینیمم مطلق.

روش پیدا کردن اکسترممهای مطلق تابع پیوسته f در بازهٔ بسته $[a,b]$: (بدون رسم نمودار)

۱ـ مشتق تابع را بدست آورده و نقاط بحرانی را محاسبه می‌کنیم.

۲ـ مقدار تابع را در هریک از نقاط بحرانی محاسبه می‌کنیم.

۳ـ بزرگترین عدد بدست آمده مقدار ماکزیمم مطلق و کوچکترین عدد بدست آمده مقدار مینیمم مطلق تابع در بازهٔ $[a,b]$ است.

مثال : اکسترممهای مطلق تابع $g(x)=2x^3+3x^2-5$ را در بازهٔ $[-2,1]$ درصورت وجود تعیین کنید.

پاسخ ←

$$g'(x)=6x^2+6x=0 \rightarrow 6x(x+1)=0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \in [-2,1] & \text{بحرانی} \\ x=-1 \in [-2,1] \end{cases}$$

بنابراین نقاط -2 و -1 و 0 و 1 بحرانی می‌باشند (اول بازه، آخر بازه)

$$\begin{cases} g(-2)=\boxed{-9} \rightarrow \text{مقدار مینیمم مطلق} \\ g(-1)=-4 \\ g(0)=-5 \\ g(1)=\boxed{0} \rightarrow \text{مقدار ماکزیمم مطلق} \end{cases}$$

مثال : (نهایی ۹۸ و تمرین کتاب) : جدول تغییرات تابع $f(x)=-2x^3+9x^2-13$ را رسم و نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی آنرا مشخص کنید. ب) اکسترممهای مطلق تابع f را در بازهٔ $[-1,2]$ تعیین کنید.

پاسخ ←

$$f'(x)=-6x^2+18x=0 \rightarrow 6x(-x+3)=0 \rightarrow \begin{cases} x=\boxed{0} \in [-1,2] & \text{بحرانی} \\ x=3 \notin [-1,2] \end{cases}$$

x	$-\infty$		0		3	
f'		$-$	0	$+$	0	$-$
f		$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$

ب)

$$f(-1)=-2(-1)^3+9(-1)^2-13=-2$$

$$f(0)=-2(0)^3+9(0)^2-13=\boxed{-13} \rightarrow \text{مقدار مینیمم مطلق}$$

$$f(2)=-2(2)^3+9(2)^2-13=\boxed{7} \rightarrow \text{مقدار ماکزیمم مطلق}$$

تمرین (خرداد ۹۹) تابع $f(x)=-2x^3+3x^2+12x-9$ را درنظر بگیرید:

الف) با رسم جدول تغییرات تابع نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی آنرا درصورت وجود مشخص کنید.

ب) مقادیر ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع f را در بازهٔ $[0,3]$ درصورت وجود بدست آورید.

تمرین (شهریور ۹۹) اکسترممهای مطلق تابع $f(x)=x^3-3x+7$ را در بازهٔ $[-1,3]$ درصورت وجود بدست آورید.

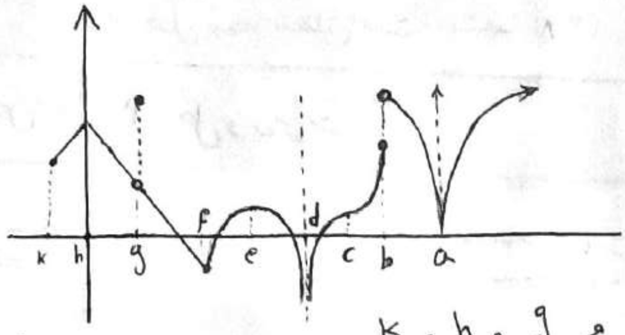
تست: تابع $y=f(x)$ چند نقطه بحرانی دارد؟

۵

۷

۸ ✓

۹



(نمودار f)

پاسخ:

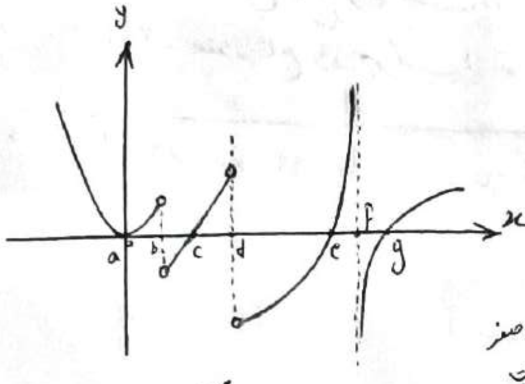
نقاط بحرانی ← a و b و c و e و f و g و h و k

- a ← مشتق بی‌نهایت (مماس قائم)
- b ← ناپیوسته
- c ← مشتق صفر (مماس افقی)
- e ← مشتق صفر (مماس افقی)
- f ← زاویه‌دار
- g ← ناپیوسته
- h ← زاویه‌دار
- k ← ابتدای دامنه

توجه: نقطه d بحرانی نمی‌باشد چون در دامنه تابع نیست

تست: اگر نمودار تابع f' به صورت مقابل باشد، تابع پیوسته f با دامنه $\mathbb{R}$ چند نقطه بحرانی دارد؟

۳   ۴   ۵   ۷



(نمودار f')

نقاط بحرانی: a و b و c و d و e و f و g

- a ← مشتق صفر
- b ← مشتق چپ و راست برابر نمی‌باشند (گوشه‌ای)
- c ← مشتق صفر
- d ← گوشه‌ای
- e ← مشتق صفر
- f ← مشتق بی‌نهایت
- g ← مشتق صفر

توجه: تمرینات صفحه ۱۱۲ کتاب درسی حل و بررسی شوند.

حل تمرینات صفحه ۱۱۲

پاسخ ۱: $f'(x)=3x^2-12 \xrightarrow{f'=0} 3x^2-12=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2$

جدول تغییرات:

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	20	$\searrow$	-12	$\nearrow$	

بزرگترین بازه نزولی اکید ← $(-2,2)$

پاسخ ۲: $g'(x)=\frac{0-2x(1)}{(x^2+1)^2}=\frac{-2x}{(x^2+1)^2} \xrightarrow{g'=0} -2x=0 \Rightarrow x=\boxed{0}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
g'		$+$	0	$-$	
g		$\nearrow$	1	$\searrow$	

در بازه $(-\infty,0)$ صعودی اکید

در بازه $(0,+\infty)$ نزولی اکید

پاسخ ۳: الف) در جزوه به عنوان مثال حل شد

ب) مشتق $g'(x)=3x^2+6x \xrightarrow{g'=0} x(3x+6)=0$ ⟨ $x=0$ ، $x=-2$ بحرانی

مختصات نقاط بحرانی: $(0,-4)$ و $(-2,0)$

پ) مشتق $h'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \Longrightarrow$ در $x=0$ مشتق‌پذیر نیست $\rightarrow$ مختصات بحرانی: $(0,0)$

پاسخ ۴: الف) $f(x)=x^3+3x^2-9x-10$

طول نقاط اکسترمم نسبی

$f'(x)=3x^2+6x-9 \xrightarrow{f'=0} 3x^2+6x-9=0 \longrightarrow x=\boxed{1}$ ، $x=\boxed{-3}$ طول بحرانی $\Rightarrow$ مختصات بحرانی: $(1,-15)$ ، $(-3,17)$

x	$-\infty$		-3		1		
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	17	$\searrow$	-15	$\nearrow$	
			max		min		

max نسبی $(-3,17)$

min نسبی $(1,-15)$

ب) $h(x)=-x^3-3x+2$

$h'(x)=-3x^2-3 \xrightarrow{h'=0} -3x^2-3=0 \Rightarrow x^2=-1$ جواب ندارد $\Rightarrow$ نقطه بحرانی ندارد ← اکسترمم نسبی ندارد

x	$-\infty$		$+\infty$
$y'=-3x^2-3$		$-$	

$\rightarrow$ همواره نزولی

پاسخ ۵: الف) در جزوه به عنوان مثال حل شد.

ب) $g(x)=x^3+2x-5$ ، $x\in[-2,1]$

$g'(x)=3x^2+2=0 \Rightarrow x^2=-\frac{2}{3}$ جواب ندارد ← فاقد نقطه بحرانی

	$-\infty$		$+\infty$
$g'=3x^2+2$		$+$	
g		$\nearrow$	

$\rightarrow$ اکیداً صعودی

لذا طول نقاط بحرانی اول و آخر بازه می‌باشد. (1 ، -2)

$g(-2)=-17$ min مطلق $\longrightarrow$ min مطلق $(-2,-17)$

$g(1)=-2$ max مطلق $\longrightarrow$ max مطلق $(1,-2)$

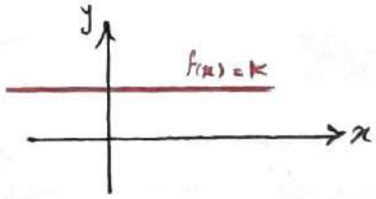
طول max ، عرض یا مقدار max

پاسخ ۶:

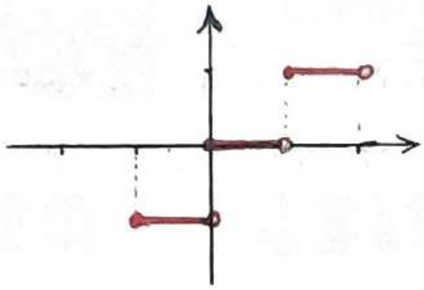
$$y = x^3 + bx^2 + d \xrightarrow[\text{مختصات اکسترمم در ضابطه تابع صدق می‌کند.}]{(2,1)} 1 = 8 + 4b + d \Rightarrow \boxed{4b+d=-7}$$

$$y' = 3x^2 + 2bx \xrightarrow[\text{برابر صفر است}]{\text{مشتق به ازای طول نقطه اکسترمم}} y'(2)=0 \Rightarrow 3(2)^2+2b(2)=0 \Rightarrow 12+4b=0 \Rightarrow \boxed{b=-3}$$

در رابطه بالا قرار می‌دهیم $\boxed{d=5}$



پاسخ ۷: در تابع ثابت $f(x)=k$ هر نقطه دلخواه از دامنه یک نقطه بحرانی است.



در تابع جزء صحیح $f(x)=[x]$ هر نقطه دلخواه از دامنه یک نقطه بحرانی است.

تست: مجموع ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x)=x^{\frac{4}{3}}-4x^{\frac{1}{3}}$ در بازه $[-1,8]$ کدام است؟

۵   ۲   ۳-   ۱۳

$$f'(x) = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} - \frac{4}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{4}{3}\left(\sqrt[3]{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right) = \frac{4}{3}\left(\frac{x-1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{نقاط بحرانی}} \begin{cases} f'(x)=0 \Rightarrow x=1 \\ f'(x) \text{ موجود نباشد} \Rightarrow x=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(-1)=5 \\ f(0)=0 \\ f(1)=\boxed{-3} \ \text{min مطلق} \\ f(8)=\boxed{8} \ \text{max مطلق} \end{cases} \xrightarrow{\text{مجموع}} 8+(-3)=\boxed{5}$$

تست کنکور ۹۵: مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع با ضابطه $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-15x$ در بازه $[-4,3]$ کدام است؟

۱) ۱۸- و ۲۴   ۲) ۴۵- و ۲۷ ✓   ۳) ۳۶- و ۲۷   ۴) ۲۷- و ۳۶

$$y' = x^2-2x-15=0 \Rightarrow (x-5)(x+3)=0 \begin{cases} x=5 \notin [-4,3] \\ x=-3 \in [-4,3] \ \checkmark \end{cases}$$

$f(-4) = \frac{68}{3}$

$f(-3) = 27$ max

$f(3) = -45$ min

کاربرد مشتق :

درس دوم : بهینه‌سازی

در تمام فعالیتهای روزمره زندگی هدف مهم آن است که بهترین تصمیم گرفته شود

به عبارت دیگر به دنبال ماکزیمم‌سازی یا مینیمم‌سازی هستیم.

درآمد - سود - حجم - مساحت

هزینه‌ها - زمان - فاصله

مثلاً : کشاورزی تصمیم می‌گیرد با صرف کمترین هزینه بیشترین مقدار محصول را از زمین برداشت کند.

روش حل مسائل بهینه‌سازی :

ابتدا دامنه را پیدا می‌کنیم

سپس با استفاده از صورت مسئله معادله‌ای را مشخص می‌کنیم (معادله اولیه)

معادله‌ای که می‌خواهیم ماکزیمم یا مینیمم شود را می‌نویسیم (معادله ثانویه)

یکی از متغیرها را از معادله اولیه برحسب دیگری بدست می‌آوریم و در معادله ثانویه قرار می‌دهیم.

در مرحله آخر از معادله ثانویه ساده‌شده مشتق می‌گیریم و با مشخص کردن نقاط بحرانی اکسترمم‌ها مطلق را بدست می‌آوریم.

مثال : (کار در کلاس صفحه ۱۱۹ — دی ۹۸) دو عدد حقیقی بیابید که تفاضل آنها ۱۰ باشد و حاصلضربشان کمترین مقدار ممکن گردد.

پاسخ ← دامنه $D_f=(-\infty,+\infty)$

۱۰ = تفاضل دو عدد حقیقی

معادله اولیه : $y-x=10$

معادله ثانویه : $P=xy \xrightarrow{y=x+10} P=x(x+10) \xrightarrow{\text{ساده شود}} \boxed{P(x)=x^2+10x}$

حاصلضرب کمترین مقدار شود

تابع برحسب یک متغیر

مشتق‌گیری از معادله ثانویه ساده شده $\longrightarrow P'(x)=2x+10=0 \rightsquigarrow \boxed{x=-5}$ طول نقطه بحرانی

$\rightarrow \boxed{y=5}$ جوابها

x		-5	
P'	$-$	0	$+$
P	$\searrow$	-25 (min)	$\nearrow$

تمرین : (شهریور ۹۹) دو عدد حقیقی بیابید که تفاضل آنها ۲۰ باشد و حاصلضربشان کمترین مقدار ممکن گردد.

مثال: (ش ۹۸) : دو عدد حقیقی a و b را طوری بیابید که داشته باشیم $2a+b=40$ و حاصلضرب آنها بیشترین مقدار ممکن گردد.

حل: $D_f=(-\infty,+\infty)$

معادله اولیه: $2a+b=40$

معادله ثانویه: $P=ab \xrightarrow{b=40-2a} P=a(40-2a) \xrightarrow{\text{ساده شود}} \boxed{P(a)=40a-2a^2}$

مشتق گیری از معادله ثانویه: $P'(a)=40-4a=0 \longrightarrow \boxed{a=15}$ طول بحرانی — جوابها

از معادله اولیه $\longrightarrow b=30$

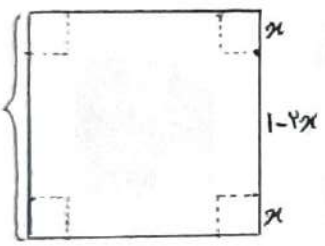
a		15	
$P'(a)$	$+$	0	$-$
$P(a)$	$\nearrow$	450	$\searrow$
		max مطلق	

حاصلضرب ماکزیمم $P(15)=450$

تمرین (نهایی ۹۸) : اگر بین دو عدد حقیقی x و y رابطه $10x-y=5$ باشد، مقادیر x و y را طوری بدست آورید که حاصلضرب این دو عدد مینیمم گردد.

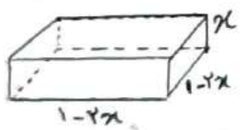
شبیه مثال ۲ صفحه ۱۱۵

مثال: (خرداد ۹۸) ورق فلزی مربعی شکل به طول یک متر را در نظر بگیرید



می‌خواهیم از چهارگوشه آن مربعهای کوچکی به ضلع x برش دهیم و آنها را کنار بگذاریم سپس لب جعبه را به اندازه x بر می‌گردانیم تا یک جعبه درباز ساخته شود. مقدار x چقدر باشد تا حجم جعبه حداکثر مقدار ممکن گردد.

پاسخ ⟵



دامنه $D=(0,\frac{1}{2})$ (یعنی مقدار x نمی‌تواند صفر و $\frac12$ باشد باید عددی بین ۰ و $\frac12$ باشد)

معادله اولیه: ضلع مربع قاعده جعبه $=1-2x$

معادله ثانویه: $\underset{\text{حجم}}{V} = \underbrace{(1-2x)(1-2x)}_{\text{مساحت قاعده}} \cdot \underbrace{x}_{\text{ارتفاع}} = \underbrace{(1-2x)^2}_{1-4x+4x^2} . x = x-4x^2+4x^3$

مشتق گیری $\longrightarrow V'(x)=1-8x+12x^2=0$ $\to x=\frac{1}{2} \notin (0,\frac{1}{2})$ ، $\to \boxed{x=\frac{1}{6}}$ جواب

x		$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{2}$	
V'	$+$	0	$-$	0	$+$
V	$\nearrow$	$\frac{2}{27}$	$\searrow$		$\nearrow$
		max			

حجم ماکزیمم: $V(\frac{1}{6})=\frac{2}{27}$

مشابه مثال صفحه ۱۱۴ کتاب

مثال (دی ۹۷): اگر محیط مستطیلی ۲۴ سانتی متر باشد، طول و عرض مستطیل را طوری حساب کنید که مساحت آن ماکزیمم شود.

پاسخ ← $D=(0,12)$

معادله اولیه: $\text{محیط}=24 \rightsquigarrow 2(x+y)=24 \rightsquigarrow \boxed{x+y=12}$

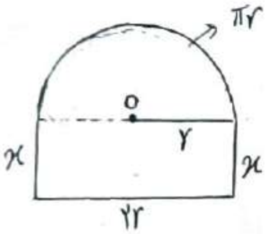
معادله ثانویه: مساحت $S=xy \xrightarrow{y=12-x} S=x(12-x) \xrightarrow{\text{ساده شود}} \boxed{S(x)=-x^2+12x}$

$\xrightarrow{\text{مشتق}} S'(x)=-2x+12=0 \rightsquigarrow \boxed{x=6}$

جوابها: $\rightarrow \boxed{y=6}$

x		6	
S'	$+$	0	$-$
S	$\nearrow$	36 max	$\searrow$

تمرین: (دی ۹۹_مثال صفحه ۱۱۴) نشان دهید در بین تمام مستطیل‌های با محیط ثابت ۱۴ سانتی متر، مستطیلی بیشترین مساحت را دارد که طول و عرض آن هم اندازه باشد.



تست (مشابه کار در کلاس ۴ صفحه ۱۱۹ کتاب درسی):

محیط شکل مقابل برابر ۱۲ متر می‌باشد، شعاع نیم دایره کدام باشد تا حاصل مساحت شکل بیشترین مقدار ممکن شود؟

۱) $\frac{12}{\pi+4}$ ✓ ۲) $\frac{6}{\pi+4}$ ۳) $\frac{12}{\pi+2}$ ۴) $\frac{6}{\pi+2}$

پاسخ ←

معادله اولیه: $\text{محیط شکل}=12 \rightsquigarrow \underbrace{x+2r+x}_{\text{محیط مستطیل}}+\underbrace{\pi r}_{\text{محیط نیم دایره}}=12 \rightsquigarrow \boxed{2x+(2+\pi)r=12}$ معادله اولیه

معادله ثانویه: $S=2r\cdot x+\frac{1}{2}\pi r^2 \xrightarrow{x=\frac{12-(2+\pi)r}{2}}$

$S=2r\left(\frac{12-(2+\pi)r}{2}\right)+\frac{1}{2}\pi r^2 \xrightarrow{\text{ساده شود}} S(r)=12r-(2+\pi)r^2+\frac{1}{2}\pi r^2$

$\xrightarrow{\text{ساده شود}} S(r)=12r-(2+\frac{\pi}{2})r^2$

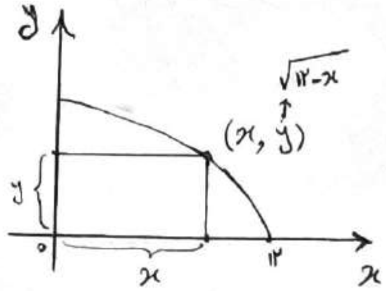
$\xrightarrow{\text{مشتق گیری}} S'(r)=12-2(2+\frac{\pi}{2})r=0 \rightsquigarrow 12-(4+\pi)r=0 \rightarrow \boxed{r=\frac{12}{4+\pi}}$

شعاع نیم دایره

r		$\frac{12}{4+\pi}$	
S'	$+$	0	$-$
S	$\nearrow$	max	$\searrow$

تست (کنکور ۹۸) : بیشترین مساحت مستطیلی که دو ضلع آن بر روی محورهای مختصات و رأس چهارم آن بر روی منحنی به معادله $y=\sqrt{12-x}$ در ناحیه اول واقع شود کدام است؟

$8\sqrt{2}$ $8\sqrt{3}$ 16 8



پاسخ:

معادله اولیه : $y=\sqrt{12-x}$

معادله ثانویه : $S=xy \longrightarrow \boxed{S=x\sqrt{12-x}}$

$$\xrightarrow{\text{مشتق گیری}} S'(x)=1\times\sqrt{12-x}+\frac{-1}{2\sqrt{12-x}}x=\frac{24-3x}{2\sqrt{12-x}}$$

مخرج مشترک و ساده کردن

$$S'(x)=0 \longrightarrow 24-3x=0 \longrightarrow \boxed{x=8}$$

طول بحرانی

x	0		8		12
S'		$+$	0	$-$	
S	0	$\nearrow$	16 (max)	$\searrow$	0

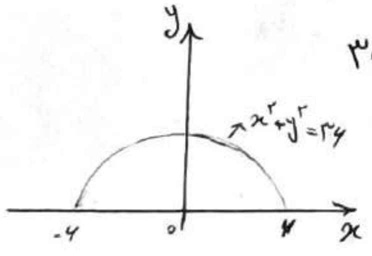
$S'(x)$ وجود ندارد به ازای ریشه مخرج $\longrightarrow 12-x=0 \longrightarrow x=12 \notin D_f=(0,12)$

تمرین : بیشترین مساحت مستطیلی که دو ضلع آن بر روی محورهای مختصات و رأس چهارم آن واقع بر منحنی $y=(x-2)^2$ روی بازه $[0,2]$ است کدام است؟

$\frac{11}{9}$ $\frac{32}{27}$ $\frac{15}{9}$ $\frac{28}{27}$

تست (کنکور ۹۸ خارج) : بیشترین مساحت مستطیلی که یک ضلع آن بر قطر نیم دایره به شعاع ۶ واحد و دو رأس دیگر آن روی این نیم دایره باشد کدام است؟

۱) ۱۸   ۲) ۲۴   ۳) ۲۷   ۴) ۳۶ ✓



پاسخ: معادله نیم دایره به مرکز مبدأ و شعاع ۶ به صورت $x^2+y^2=6^2$ می باشد.

معادله اولیه : $x^2+y^2=36$

معادله ثانویه (مساحت مستطیل) : $S=(\underset{\text{طول}}{2x})\underset{\text{عرض}}{y} \xrightarrow{y=\sqrt{36-x^2}} S=2x\sqrt{36-x^2}$

$$\xrightarrow{\text{مشتق گیری}} S'(x)=2\sqrt{36-x^2}+\frac{-2x}{2\sqrt{36-x^2}}2x=0 \longrightarrow 2\sqrt{36-x^2}=\frac{2x^2}{\sqrt{36-x^2}}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 36-x^2=x^2 \longrightarrow 2x^2=36 \longrightarrow x^2=18 \longrightarrow x=\sqrt{18}$$

$$\xrightarrow{\text{مساحت ماکزیمم}} S(\sqrt{18})=2\sqrt{18}\times\sqrt{18}=\boxed{36}$$

تست (کنکور ۹۹ داخل): از بین مثلث‌های قائم‌الزاویه با اندازه وتر ۱۰ واحد دو ضلع قائمه با کدام نسبت انتخاب شود تا حجم حاصل از دوران این مثلث حول ضلع قائم بیشترین باشد؟

$\frac{\sqrt{2}}{1}$ $\qquad$ $\frac{3}{2}$ $\qquad$ $\frac{\sqrt{3}}{1}$ $\qquad$ $\frac{2}{1}$

پاسخ ←

معادله اولیه (فرض رابطه فیثاغورس): $a^2+b^2=100 \rightsquigarrow \boxed{a^2=100-b^2}$

معادله ثانویه: $V=\frac{1}{3}\pi a^2 . b$ (حجم مخروط) $\longrightarrow V(b)=\frac{1}{3}\pi(100-b^2)b$

$\rightsquigarrow V(b)=\frac{\pi}{3}(100b-b^3)$

مشتق‌گیری $\longrightarrow V'(b)=\frac{\pi}{3}(100-3b^2)=0 \rightsquigarrow b^2=\frac{100}{3} \rightsquigarrow b=\boxed{\frac{10}{\sqrt{3}}}$ طول نقطه بحرانی

b		$\frac{10}{\sqrt{3}}$	
V'	+	0	−
V	↗	max	↘

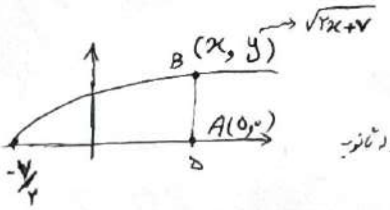
نسبت دو ضلع قائمه: $\frac{a}{b}=\frac{\frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}{\frac{10}{\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{2}}{1}$

$a^2=100-\frac{100}{3}=\frac{200}{3} \rightsquigarrow a=\frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

تست (کنکور ۹۹ خارج): کوتاه‌ترین فاصله نقطه $A(5,0)$ از نقاط منحنی به معادله $y=\sqrt{2x+7}$ کدام است؟

۱) ۴ ✓ $\qquad$ ۲) ۴٫۵ $\qquad$ ۳) ۵ $\qquad$ ۴) $3\sqrt{2}$

پاسخ ←



معادله اولیه: $y=\sqrt{2x+7}$

معادله ثانویه: $AB=\sqrt{(5-x)^2+(0-y)^2} \rightsquigarrow AB=\sqrt{(5-x)^2+(0-\sqrt{2x+7})^2}$

$\rightsquigarrow f(x)=\sqrt{25-10x+x^2+2x+7}$

$\longrightarrow f(x)=\sqrt{x^2-8x+32}$

مشتق‌گیری $\longrightarrow f'(x)=\frac{2x-8}{2\sqrt{x^2-8x+32}}=0 \rightarrow 2x-8=0 \rightsquigarrow \boxed{x=4}$

$y=\sqrt{15}$

x		4	
f'	−	0	+
f	↘	4 (min)	↗

توجه: کار در کلاس صفحه ۱۱۸ و تمرینات صفحه ۱۲۰ کتاب درسی حل و بررسی شوند.

(پاسخ کار در کلاس و تمرینات صفحه ۱۱۸ تا ۱۲۰ کتاب درسی)

کار در کلاس: ص ۱۱۸

می‌خواهیم یک قوطی فلزی استوانه‌ای شکل و در باز بسازیم که گنجایش آن دقیقاً یک لیتر باشد. ابعاد قوطی چقدر باشد تا مقدار فلز به کار رفته در تولید آن مینیمم شود.

حل: مقدار فلز مینیمم شود یعنی مساحت کل استوانه کمترین شود (معادله ثانویه)

حجم $= 1\ \text{lit} = 1000\ cm^3$

معادله اولیه: $\pi r^2 h = 1000$ ، $h = \frac{1000}{\pi r^2}$

معادله ثانویه: $S = \pi r^2 + 2\pi r h$ (مساحت کل استوانه در باز ، مساحت قاعده ، مساحت جانبی)

$$S = \pi r^2 + 2\pi r\left(\frac{1000}{\pi r^2}\right) \xRightarrow{\text{ساده شود}} \boxed{S(r) = \pi r^2 + \frac{2000}{r}}$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق گیری}} S'(r) = 2\pi r - \frac{2000}{r^2} = 0 \Longrightarrow \frac{2\pi r^3 - 2000}{r^2} = 0 \to r^3 = \frac{2000}{2\pi} = \frac{1000}{\pi} \Rightarrow \boxed{r = \frac{10}{\sqrt[3]{\pi}}}$$

جواب / شعاع ، $r = 0$ ×

کمترین مقدار فلز (min مطلق): $S\left(\frac{10}{\sqrt[3]{\pi}}\right) = 300\sqrt[3]{\pi}$

بنابراین اگر شعاع قاعده و همچنین ارتفاع استوانه هر دو برابر $r = h = \frac{10}{\sqrt[3]{\pi}} \simeq 6.83$ سانتی‌متر در نظر گرفته شوند کمترین مقدار فلز مصرف خواهد شد.

* حل تمرینات صفحه ۱۲۰ کتاب

مساحت $= 10000\ m^2$

۱- الف)

معادله اولیه: $xy = 10000$ ، $y = \frac{10000}{x}$

معادله ثانویه (هزینه دیوارکشی): $f = 2(2x + 8y) \xrightarrow{y = \frac{10000}{x}} f = 2(2x + 8\times\frac{10000}{x})$

$$\xrightarrow{\text{ساده شود}} \boxed{f(x) = 4x + \frac{160000}{x}}$$

ب)

$$\xrightarrow{\text{مشتق گیری}} f'(x) = 4 - \frac{160000}{x^2} = 0 \Longrightarrow \frac{4x^2 - 160000}{x^2} = 0 \to 4x^2 - 160000 = 0 \to x^2 = 40000$$

$$\xRightarrow{\text{جواب}} \boxed{x = 200}$$

معادله اولیه: $\boxed{y = 50}$

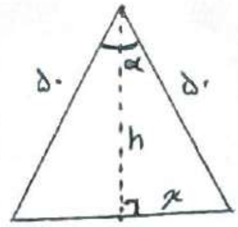
مینیمم هزینه ، min مطلق: $f(200) = 1600$

یعنی اگر طول دیوارهای شمالی و جنوبی ۲۰۰ متر و دیوارهای شرقی و غربی هر کدام ۵۰ متر باشند هزینه دیوارکشی، حداقل مقدار ممکن خواهد بود.

97,2

کاربرد مشتق (بهینه سازی)

پاسخ ۲:



معادله اولیه: $h^2+x^2=50^2$ $\rightarrow$ $h=\sqrt{2500-x^2}$

معادله ثانویه (مساحت مثلث): $S=\frac{1}{2}(2x)\times h \xrightarrow{h=\sqrt{2500-x^2}}$

$\xrightarrow{\text{ساده شود}} \boxed{S(x)=x\sqrt{2500-x^2}}$

$\xrightarrow{\text{مشتق گیری}} S'(x)=1\times\sqrt{2500-x^2}+\frac{-2x}{2\sqrt{2500-x^2}}\times x=\frac{2500-x^2-x^2}{\sqrt{2500-x^2}}=\frac{2500-2x^2}{\sqrt{2500-x^2}}$

$S'(x)=0 \Rightarrow 2500-2x^2=0 \Rightarrow x^2=1250 \Rightarrow x=\sqrt{1250}=\boxed{25\sqrt{2}}$

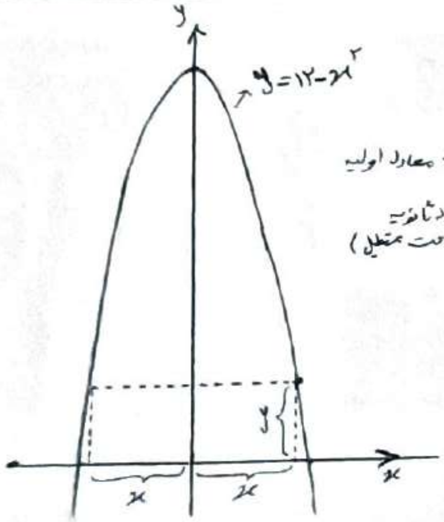
در معادله اولیه: $\boxed{h=25\sqrt{2}}$

مساحت ماکزیمم: $S(25\sqrt{2})=25\sqrt{2}\times\sqrt{2500-1250}=625\times 2=\boxed{1250}$

ب) روش دوم:

مساحت $S=\frac{1}{2}\times 50\times 50\times \sin\alpha \xrightarrow{\text{بیشترین مساحت وقتی است که } \sin\alpha=1} \frac{1}{2}\times 50\times 50\times 1=\boxed{1250}$

پاسخ ۳:



معادله اولیه: $y=12-x^2$

معادله ثانویه (مساحت مستطیل): $S=2x\cdot y \xrightarrow{\text{جایگذاری}} S=2x(12-x^2) \xrightarrow{\text{ساده شود}} \boxed{S(x)=24x-2x^3}$

$\xrightarrow{\text{مشتق می‌گیریم}} S'(x)=24-6x^2$

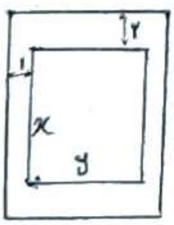
$S'(x)=0 \Rightarrow 24-6x^2=0 \Rightarrow x^2=4 \rightarrow \boxed{x=2}$ ✓ $\xrightarrow{\text{در معادله اولیه قرار دهیم}} \boxed{y=8}$

$x=-2$ ✗

ماکزیمم مساحت $S(2)=24(2)-2(2)^3=\boxed{32}$

بنابراین اگر ابعاد مستطیل ۴ ($2x$) و ۸ باشند بیشترین مساحت را دارد.

پاسخ ۴: (خرداد ۹۹)



معادله اولیه (حجم متن): $xy=32$ $\rightarrow$ $y=\frac{32}{x}$

معادله ثانویه (مساحت صفحه): $S=(y+2)(x+4) \Longrightarrow S=(\frac{32}{x}+2)(x+4)=32+\frac{128}{x}+2x+8$

$\xrightarrow{\text{ساده شود}} \boxed{S(x)=\frac{128}{x}+2x+40}$

$\xrightarrow{\text{مشتق گیری}} S'(x)=-\frac{128}{x^2}+2=0 \Longrightarrow x^2=64 \Rightarrow \boxed{x=8} \xrightarrow{\text{در معادله اولیه}} \boxed{y=4}$

مطلق min: $S(8)=72$

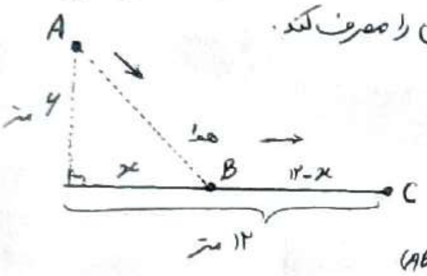
بنابراین اگر ابعاد صفحه $x+4=\boxed{12}$ و $y+2=\boxed{6}$ باشند، آنگاه مقدار کاغذ کمترین مقدار ممکن می‌شود.

تمرین: می‌خواهیم یک قوطی فلزی استوانه‌ای شکل با ضخامت معین و درباز بسازیم که گنجایش آن ۳۰۰۰ واحد مکعب باشد ارتفاع قوطی کدام باشد تا مقدار فلز به کار رفته برای تولید آن مینیمم شود؟ ($\pi \simeq 3$)

۱) ۱۰ ۲) ۴ ۳) ۱۵ ۴) ۸

جواب: $h=10$ و $r=10$ (شبیه به کار در کلاس ص ۱۱۸ حل شود)

مثال: مرغ دریایی در نقطه A قرار گرفته و قصد دارد به نقطه C برود برای اینکار قسمتی از مسیر را در هوا و بخشی را روی سطح آب مطابق شکل زیر طی می‌کند. اگر این پرنده روی آب ۱۰ کالری بر متر و در هوا $10\sqrt5$ کالری بر متر انرژی مصرف کند، فاصله نقطه B از C چند متر باشد تا مرغ دریایی کمترین انرژی ممکن را مصرف کند.



معادله اولیه: $AB^2=6^2+x^2 \Longrightarrow AB=\sqrt{36+x^2}$

معادله ثانویه (انرژی مصرف شده در مسیر ABC): $f(x)=(AB\times10\sqrt5)+(BC\times10)$

$$f(x)=\sqrt{36+x^2}\times10\sqrt5+(12-x)\times10$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق گیری}} f'(x)=\frac{2x}{2\sqrt{36+x^2}}\times10\sqrt5+(-10)=0 \Rightarrow \frac{10\sqrt5\,x}{\sqrt{36+x^2}}=10$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 10\sqrt5\,x=10\sqrt{36+x^2} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 5x^2=36+x^2 \Rightarrow 4x^2=36 \Rightarrow x=\pm3$$

قابل قبول $\boxed{x=3}$

جواب: $BC=12-x=12-3=\boxed{9}$

$f(2)=\sqrt{45}\times10\sqrt5+9\times10=\boxed{240}$ کمترین انرژی

مطلق min

توجه: مثال ۵ ص ۱۱۷ کتاب درسی شبیه به مثال بالا حل می‌شود به طور دقیق مطالعه شود، مهم است.

فصل ۶

درس اول : تفکر تجسمی و آشنایی با مقاطع مخروطی

تفکر تجسمی : تفکر تجسمی همان تصویرسازی ذهنی است. در تفکر تجسمی به جای استفاده از عبارات، کلمات و شیوه‌های زبانی - تصاویر در ذهن ما نقش می‌بندد و باعث می‌شود که به موضوع با موفقیت فکر کنیم.

◄ موقعیت‌هایی که تفکر تجسمی می‌تواند تقویت شود عبارتند از :

۱- تجسم ذهنی یک جسم پس از چرخاندن آن در فضا

۲- ترسیم سطح گسترده اجسام هندسی و ترسیم یک جسم سه بعدی

۳- ترسیم نماهای مختلف یک جسم

۴- دوران یک جسم حول یک نقطه یا حول یک محور در صفحه و فضا

۵- تجسم اجسام هندسی بعد از برش

• در این درس فقط دو مورد را بررسی می‌کنیم:
- دوران اجسام حول یک محور
- برش اجسام

دوران حول یک محور : از دوران شکلهای هندسی حول یک محور، جسم‌های متفاوتی ساخته می‌شود

چند مثال از دوران حول محور در فعالیت صفحه ۱۲۳ کتاب درسی

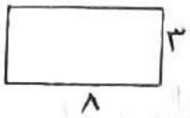
مثال : اگر مثلث قائم الزاویه شکل مقابل را حول خط d دوران دهیم حجم شکل حاصل را بدست آورید.

پاسخ : از دوران بیان شده یک استوانه (به شعاع ۳ و ارتفاع ۶) حاصل می‌شود که درون آن یک مخروط (به شعاع ۳ و ارتفاع ۶) توخالی قرار دارد.

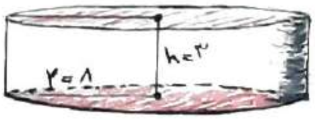
ارتفاع × مساحت قاعده

ارتفاع × مساحت قاعده × $\frac{1}{3}$

حجم حاصل شده = حجم استوانه − حجم مخروط = $\pi \times 3^2 \times 6 - \frac{1}{3}\pi \times 3^2 \times 6 = \boxed{36\pi}$



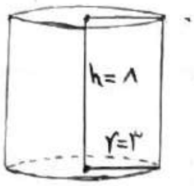
مثال: الف) اگر مستطیلی به طول ۸ و عرض ۳ را حول عرضش دوران دهیم، حجم جسم حاصل چقدر است؟



پاسخ ← جسم حاصل شده یک استوانه به شعاع قاعده ۸=r و ارتفاع ۳=h می‌باشد.

حجم استوانه: $V = \pi r^2 h = \pi \times 8^2 \times 3 = 192\pi$

ب) اگر مستطیل داده شده را حول طولش دوران دهیم، حجم جسم حاصل چقدر است؟

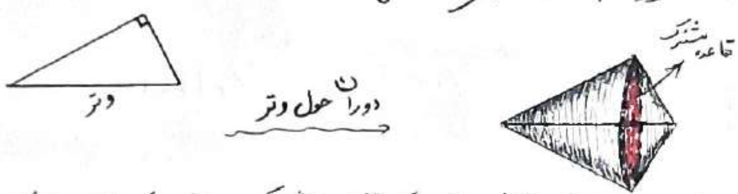


پاسخ ← جسم حاصل شده یک استوانه به شعاع قاعده ۳=r و ارتفاع ۸=h می‌باشد.

حجم استوانه: $V = \pi r^2 h = \pi \times 3^2 \times 8 = \boxed{72\pi}$

نکته ۱: اگر مثلث قائم‌الزاویه حول یکی از اضلاع قائم دوران کند، یک مخروط داریم:

اگر مثلث قائم‌الزاویه حول وتر دوران کند، دو تا مخروط با قاعده مشترک حاصل می‌شود

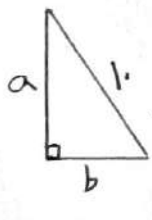


نکته ۲: اگر یک لوزی (یا مربع) را حول قطر آن دوران دهیم دو مخروط حاصل می‌شود که قاعده مشترک دارند و یکسان می‌باشند

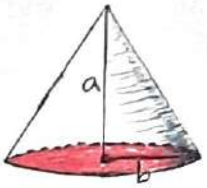
تست (کنکور ۹۹ داخل): از بین مثلث‌های قائم‌الزاویه با اندازهٔ وتر ۱۰ واحد دو ضلع قائم با کدام نسبت انتخاب شوند تا حجم حاصل از دوران این مثلث حول ضلع قائم، بیشترین باشد؟

۱) $\frac{2}{1}$ ۲) $\frac{\sqrt{3}}{1}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

پاسخ ← به روش مسائل بهینه سازی حل می‌کنیم.



$\longrightarrow a^2 + b^2 = 100 \longrightarrow b^2 = 100 - a^2$



حجم $V = \frac{1}{3}\pi \underbrace{b^2}_{\text{مساحت قاعده}} \times \underbrace{a}_{\text{ارتفاع}} \longrightarrow V = \frac{1}{3}\pi(100 - a^2)a \longrightarrow V(a) = \frac{100}{3}\pi a - \frac{1}{3}\pi a^3$

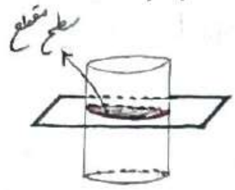
$V'(a) = \frac{100}{3}\pi - \pi a^2 = 0$

a		$\frac{10}{\sqrt{3}}$	
V'	+	0	−
V	↗	max	↘

نسبت دو ضلع قائم $\longrightarrow a^2 = \frac{100}{3} \longrightarrow a = \frac{10}{\sqrt{3}}$, $b = \frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ نسبت دو ضلع قائم $\longrightarrow \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{2}}{1}$ و $\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

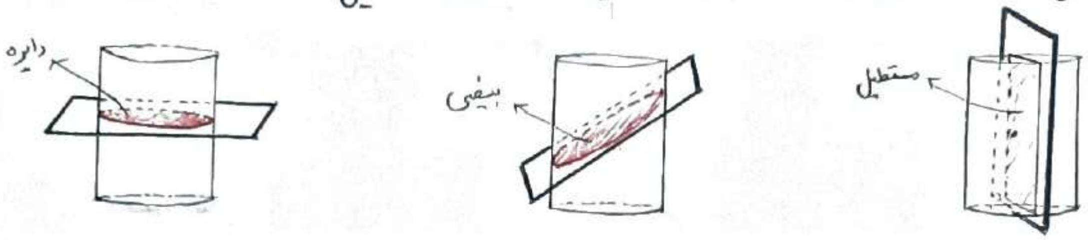
بُرش اجسام

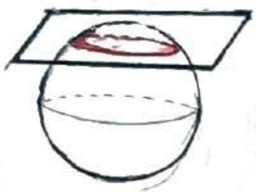
بُرش اجسام : در این قسمت می خواهیم اجسام سه بعدی را برش بزنیم و تغییرات آنها بعد از برش تجسم کنیم.



سطح مقطع : شکلی که از برخورد یک صفحه با یک جسم هندسی حاصل می شود، سطح مقطع آن نامیده می شود.

مثال: سطح مقطع حاصل از برخورد صفحه (موازی، مایل یا عمود) با استوانه می تواند دایره ، بیضی یا مستطیل باشد.

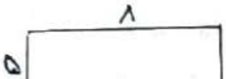




مثال: سطح مقطع حاصل از برخورد یک صفحه با یک کره به چه شکلی است؟ دایره

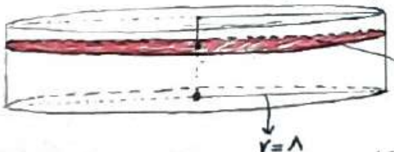
در چه حالتی این سطح مقطع بیشترین مساحت ممکن را دارد؟

اگر صفحه از مرکز کره بگذرد سطح مقطع بیشترین مساحت را دارد (به عبارت دیگر سطح مقطعی که شامل مرکز کره باشد بیشترین مساحت را دارد)



مثال: یک مستطیل با ابعاد ۸ و ۵ را حول عرض آن دوران می دهیم تا یک استوانه ایجاد شود

الف) اگر صفحه ای موازی قاعده استوانه آنرا قطع کند مساحت سطح مقطع ایجاد شده چقدر است؟



پاسخ ← چون صفحه موازی قاعده است پس سطح مقطع ایجاد شده دایره می باشد

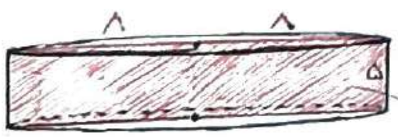
مساحت سطح مقطع $= \pi r^2 = \pi \times 8^2 = \boxed{64\pi}$

ب) حجم استوانه ایجاد شده چقدر است؟

پاسخ ← حجم استوانه $V = \pi r^2 \times h = \pi \times 8^2 \times 5 = \boxed{320\pi}$

پ) اگر صفحه ای عمود بر قاعده، استوانه را قطع کند، بیشترین مساحت ممکن برای سطح مقطع حاصل چقدر است؟

پاسخ ← بیشترین مساحت وقتی است که صفحه عمود بر قاعده استوانه شامل محور دوران باشد.



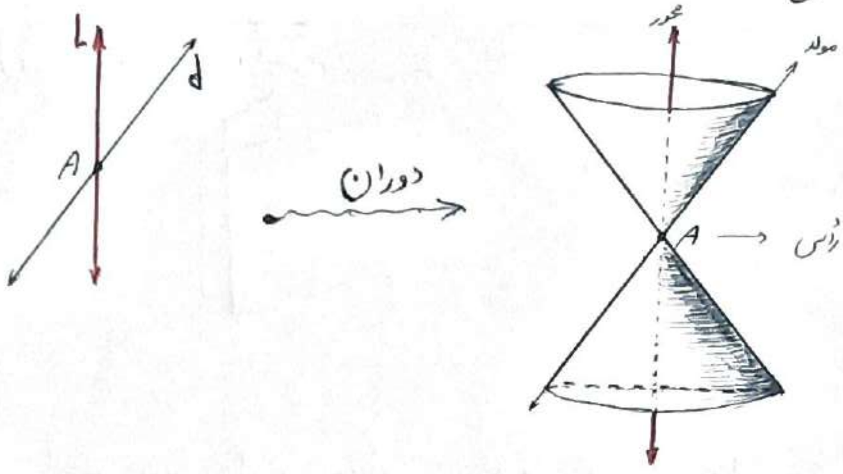
مساحت سطح مقطع = طول × عرض $= 16 \times 5 = \boxed{80}$

(مساحت مستطیل ایجاد شده با طول ۱۶ عرض ۵)

کار در کلاس صفحه ۱۲۵ کتاب درسی حل و بررسی شود

آشنایی با مقاطع مخروطی :

سطح مخروطی: دو خط d و L در نقطه A متقاطع اند. اگر خط d را حول خط L دوران کامل دهیم، شکل حاصل یک سطح مخروطی است.



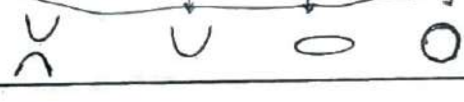
سطح مخروطی

مقاطع مخروطی : وقتی یک سطح مخروطی را توسط یک صفحه برش دهیم، منحنی هایی ایجاد می شود که به آنها مقاطع مخروطی می گوییم.

شکل انواع مقاطع مخروطی صفحه ۱۲۶ و ۱۲۷ کتاب درسی (مهم)

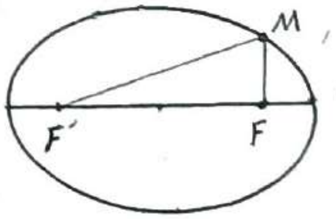
در سؤالات امتحانات نهایی از این قسمت آمده

دایره - بیضی - سهمی - هذلولی



$2a$ — F و F' کانون‌ها بیضی — نانند M

بیضی: مجموعه نقاطی از صفحه که مجموع فاصله‌های آنها از دو نقطه ثابت برابر مقداری ثابت باشد.



$$\boxed{MF+MF'=2a}$$

مقدار ثابت

نکته: اگر نقطه‌ای مانند N بیرون بیضی باشد مجموع فواصل آن تا دو کانون بیشتر از مقدار ثابت $2a$ است.

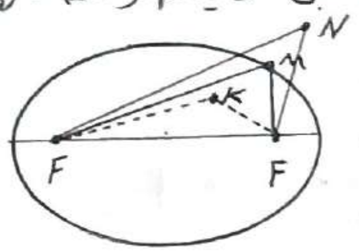
$NF+NF'>2a \longrightarrow$ N بیرون بیضی

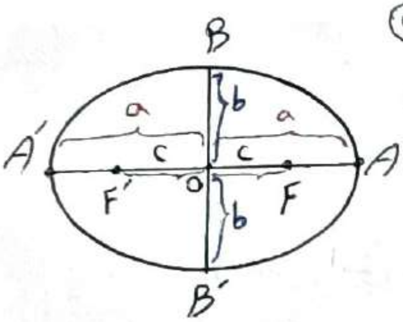
نکته: اگر نقطه‌ای مانند K درون بیضی باشد مجموع فواصل آن تا دو کانون کمتر از مقدار ثابت است.

$KF+KF'<2a \longrightarrow$ K درون بیضی

نکته: طبق تعریف اگر نقطه M روی بیضی باشد مجموع فواصل آن تا دو کانون برابر مقدار ثابت است.

$MF+MF'=2a \longrightarrow$ M روی بیضی





قطر بزرگ بیضی: $\boxed{AA'=2a}$ را قطر بزرگ بیضی گویند $\leftarrow$ $OA'=OA=a$

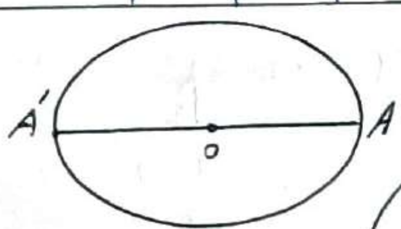
قطر کوچک بیضی: $\boxed{BB'=2b}$ را قطر کوچک بیضی گویند $\leftarrow$ $OB'=OB=b$

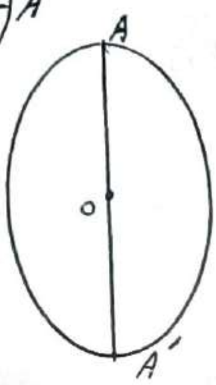
فاصله کانونی: $\boxed{FF'=2c}$ را فاصله کانونی بیضی گویند $\leftarrow$ $OF'=OF=c$

توجه: نقطه O مرکز بیضی است و قطر بزرگ را قطر کانونی نیز می‌گویند.

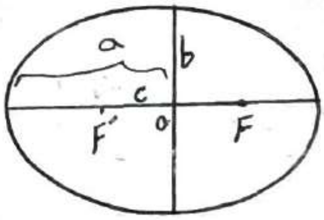
O مرکز بیضی $=\frac{A+A'}{2}=\frac{B+B'}{2}=\frac{c+c'}{2}$

نکته: اگر قطر بزرگ بیضی افقی باشد آنرا بیضی افقی می‌نامند.





نکته: اگر قطر بزرگ بیضی عمودی باشد آنرا بیضی قائم گویند.



نکته مهم: در یک بیضی رابطه مقابل بین a و b و c برقرار است:

$$\boxed{a^2=b^2+c^2}$$

مثال: اگر در یک بیضی $AA'=8$ و $FF'=6$ باشد اندازه قطر کوچک بیضی را بدست آورید.

پاسخ:

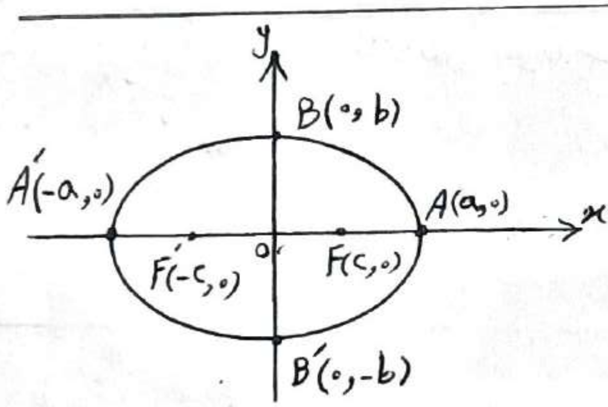
$AA' \Leftarrow 2a=8 \longrightarrow \boxed{a=4}$

$FF' \Leftarrow 2c=6 \Longrightarrow \boxed{c=3}$

می دانیم: $a^2=b^2+c^2 \Longrightarrow 4^2=b^2+3^2 \Longrightarrow b^2=16-9=7 \Rightarrow \boxed{b=\sqrt{7}}$

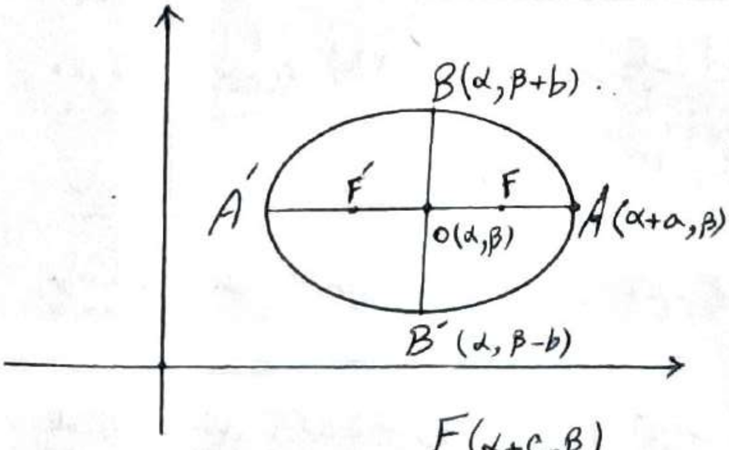
قطر کوچک: $BB'=2b=2\sqrt{7}$

مختصات رأسها و کانونهای بیضی:



الف) اگر بیضی افقی و مرکز آن $(0,0)$ مبدأ مختصات باشد داریم:

ب) اگر بیضی افقی و مرکز آن $O(\alpha,\beta)$ باشد:



$$\begin{cases} A(\alpha+a,\beta) \\ A'(\alpha-a,\beta) \end{cases} \qquad \begin{cases} B(\alpha,\beta+b) \\ B'(\alpha,\beta-b) \end{cases} \qquad \begin{matrix} F(\alpha+c,\beta) \\ F'(\alpha-c,\beta) \end{matrix}$$

مثال: در یک بیضی افقی طول قطر بزرگ ۶ و طول قطر کوچک ۴ واحد است. اگر مرکز بیضی نقطه‌ای با مختصات $O(4,5)$ باشد:

الف) فاصله کانونی بیضی را پیدا کنید. ب) مختصات نقاط رأس‌ها و کانون‌ها بیضی را بدست آورید.

پاسخ: الف)

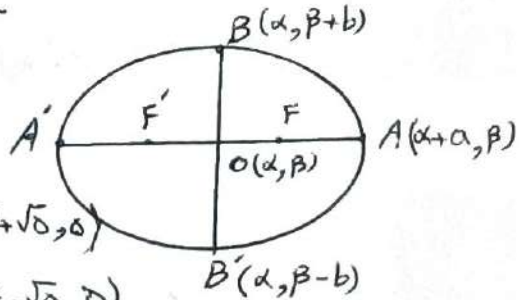
قطر بزرگ $2a=6 \longrightarrow \boxed{a=3}$

قطر کوچک $2b=4 \longrightarrow \boxed{b=2}$

می‌دانیم: $a^2=b^2+c^2 \Rightarrow 9=4+c^2 \Rightarrow c^2=5 \Rightarrow c=\sqrt{5}$

فاصله کانونی: $FF'=2c=\boxed{2\sqrt{5}}$

ب) در این بیضی افقی داریم $O(\underset{\alpha}{4},\underset{\beta}{5})$



$$\begin{cases} A'(\alpha-a,\beta) \Rightarrow A'(1,5) \\ A(\alpha+a,\beta) \Rightarrow A(7,5) \end{cases}$$

$$\begin{cases} B(\alpha,\beta+b) \Rightarrow B(4,7) \\ B'(\alpha,\beta-b) \Rightarrow B'(4,3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} F(\alpha+c,\beta)=(4+\sqrt{5},5) \\ F'(\alpha-c,\beta)=(4-\sqrt{5},5) \end{cases}$$

توجه: کار در کلاس صفحه ۱۲۶ حل و بررسی شوند.

خروج از مرکز بیضی:

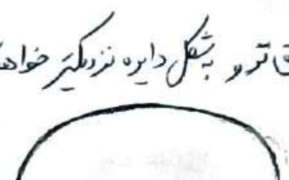
در بیضی نسبت $\boxed{e=\frac{c}{a}}$ را خروج از مرکز بیضی گویند

نکته: همواره خروج از مرکز بیضی عددی بین ۰ و ۱ است همواره $\boxed{0<e<1}$

نکته: خروج از مرکز لاغری و چاقی بیضی را نشان می‌دهد

← هرچه قدر خروج از مرکز بزرگتر و به ۱ نزدیکتر شود بیضی لاغرتر (کشیده‌تر) است

← هرچه قدر خروج از مرکز کوچکتر و به صفر نزدیکتر باشد بیضی چاق‌تر و به شکل دایره نزدیکتر خواهد شد



مثال: (دی ۹۷) : در یک بیضی قطر بزرگ ۸ و قطر کوچک آن ۶ واحد است خروج از مرکز این بیضی چقدر است؟

قطر بزرگ: $2a=8 \longrightarrow a=4$

قطر کوچک $2b=6 \longrightarrow b=3$

$$a^2=b^2+c^2 \longrightarrow 16=9+c^2 \longrightarrow c^2=7 \Longrightarrow \boxed{c=\sqrt{7}}$$

خروج از مرکز: $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

تست (کنکور ۹۸ داخل) در یک بیضی به کانون‌های $F(2,7)$ و $F'(2,-1)$ ، اندازه قطر کوچک ۶ واحد است خروج از مرکز بیضی کدام است؟

۰/۶ ۰/۶۴ ۰/۷۵ ۰/۸

پاسخ:

$$\underbrace{FF'}_{\text{فاصله دونقطه}}=\sqrt{(x_F-x_{F'})^2+(y_F-y_{F'})^2}=\sqrt{(2-2)^2+(7+1)^2}=\sqrt{0+64}=8$$

$$FF'=2c=8 \longrightarrow \boxed{c=4}$$

$$2b=6 \longrightarrow \boxed{b=3}$$

$$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow a^2=9+16=25 \Rightarrow a=5$$

خروج از مرکز: $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{4}{5}=0/8$

مثال: اگر $F(-1,1)$ و $F'(-3,1)$ دو کانون بیضی با خروج از مرکز $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ باشند، طول قطرهای کوچک و بزرگ بیضی را بدست آورید.

پاسخ:

$$\overset{2c}{FF'}=\sqrt{(-1-(-3))^2+(1-1)^2}=\sqrt{(-1+3)^2+0^2}=\sqrt{2^2}=\sqrt{4}=2$$

$$2c=2 \Rightarrow \boxed{c=1}$$

$$e=\frac{c}{a} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{1}{a} \Longrightarrow \boxed{a=\sqrt{3}} \longrightarrow \text{قطر بزرگ } AA'=2a=2\sqrt{3}$$

$$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow (\sqrt{3})^2=b^2+1^2 \Rightarrow b^2=3-1=2 \Rightarrow \boxed{b=\sqrt{2}}$$

قطر کوچک $BB'=2b=2\sqrt{2}$

تمرین : فاصله کانونی ، طول قطر کوچک و خروج از مرکز بیضی افقی را بیابید که طول قطر بزرگش ۱۰ واحد و مختصات کانونهای آن $F(1,3)$ و $F'(1,-5)$ باشد.

تمرین : خروج از مرکز یک بیضی افقی $\frac{4}{5}$ ، مرکز آن $(-4,-1)$ و طول قطر کوچک آن ۶ می باشد

(کتاب دی ۹۹ و تمرین)

الف) طول قطر کانونی و فاصله کانونی را حساب کنید.

ب) مختصات نقاط دو سر قطر کوچک و قطر بزرگ و کانونهای بیضی را پیدا کنید؟

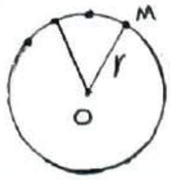
تمرین: (شهریور ۹۹) : کانونهای یک بیضی نقاط $(2,5)$ $(2,-3)$ و $a=5$ است مختصات مرکز و اندازه قطر کوچک بیضی را پیدا کنید.

توجه : تمرینات صفحه ۱۳۲ کتاب درسی حل و بررسی شوند.

فصل ۶ ← درس دوم دایره

شعاع دایره
مرکز دایره

تعریف دایره: مجموعه نقاطی از صفحه که فاصله آنها از یک نقطه ثابت برابر یک مقدار ثابت باشد.



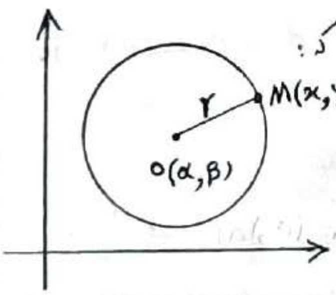
توجه: دایره C به مرکز O و شعاع r را با نماد $C(O,r)$ نشان می‌دهیم.

دایره دو معادله دارد:
۱- معادله استاندارد
۲- معادله گسترده (فرم کلی معادله دایره)

معادله استاندارد دایره: معادله دایره‌ای به مرکز $O(\alpha,\beta)$ و شعاع r به صورت مقابل است.

$$\boxed{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2}$$

اثبات معادله استاندارد دایره: شرط آنکه نقطه $M(x,y)$ روی دایره $C(O,r)$ باشد آن است که:



$$OM=r$$

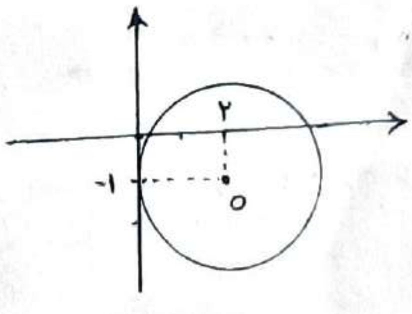
$$\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}=r \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$$

مثال: معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $O(-3,2)$ و شعاع آن $r=\sqrt{3}$ باشد.

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2 \Longrightarrow (x-(-3))^2+(y-2)^2=(\sqrt{3})^2 \Longrightarrow (x+3)^2+(y-2)^2=3$$

مثال: معادله دایره‌ای به صورت $(x-2)^2+(y+1)^2=4$ می‌باشد مختصات مرکز و اندازه شعاع دایره را بنویسید و نمودار آن را رسم کنید.

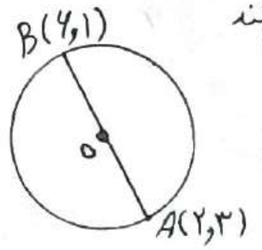
قرینه: $\alpha=2$ ، قرینه: $\beta=-1$ ، جذر: $r=2$



پاسخ: $O(2,-1)$ مرکز دایره

$r=\sqrt{4}=2$ شعاع دایره

مثال: معادله دایره‌ای را بنویسید که نقاط $A(2,3)$ و $B(6,1)$ دو سر یک قطر آن باشند



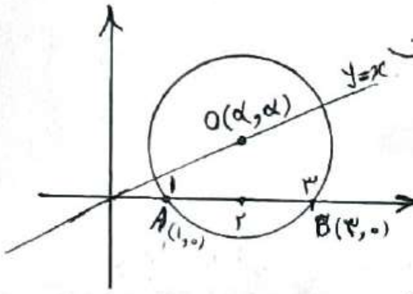
پاسخ: وسط قطر مرکز دایره است ←

مرکز دایره $O\left(\frac{6+2}{2}\,,\,\frac{1+3}{2}\right) \longrightarrow O(\overset{\alpha}{4}\,,\,\overset{\beta}{2})$

شعاع دایره $r = OA = \sqrt{(4-2)^2+(2-3)^2} = \sqrt{2^2+(-1)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$

معادله دایره: $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2 \longrightarrow \boxed{(x-4)^2+(y-2)^2=5}$

تست ۹۵ خارج: دایره‌ای محور xها را در دو نقطه به طول‌های ۱ و ۳ قطع کرده است و مرکز آن روی نیمساز ربع اول است. شعاع دایره کدام است.



۱) $\sqrt{3}$
۲) ۲
۳) $\sqrt{5}$
۴) ۳

پاسخ: نقطه‌ای که روی نیمساز ربع اول باشد طول و عرض آن برابر است لذا مرکز دایره $O(\alpha,\overset{\beta}{\alpha})$

$OA = OB =$ شعاع دایره

$$\sqrt{(\alpha-1)^2+(\alpha-0)^2} = \sqrt{(\alpha-3)^2+(\alpha-0)^2} \xRightarrow{\text{به توان ۲}} \alpha^2-2\alpha+1+\alpha^2 = \alpha^2-6\alpha+9+\alpha^2$$

$$\Longrightarrow 4\alpha = 8 \Longrightarrow \alpha=2 \longrightarrow \underset{\text{شعاع}}{OA} = \boxed{\sqrt{5}}$$

مثال: اگر مرکز دایره‌ای نقطه $(-2,1)$ و شعاع آن ۳ باشد

الف) معادله استاندارد دایره را بنویسید

ب) نمودار آنرا رسم کنید.

تمرین: اگر معادله دایره‌ای $(x-3)^2+(y+1)^2=4$ باشد مختصات مرکز آن و اندازه شعاع آنرا مشخص کرده

ب) نمودار دایره را رسم کنید

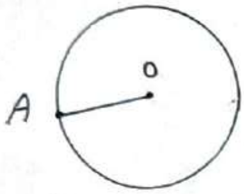
نکته: معادله استاندارد دایره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع r به صورت خلاصه شده $\boxed{x^2+y^2=r^2}$ می‌باشد.

زیرا: $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2 \xrightarrow{O(0,0)} (x-0)^2+(y-0)^2=r^2 \Rightarrow \boxed{x^2+y^2=r^2}$

کار در کلاس صفحه ۱۳۶: در حالتهای زیر، معادله دایره را بنویسید:

الف) دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع ۲ $\xleftarrow{\text{پاسخ}}$ $x^2+y^2=4$

ب) دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع r $\xleftarrow{\text{پاسخ}}$ $x^2+y^2=r^2$

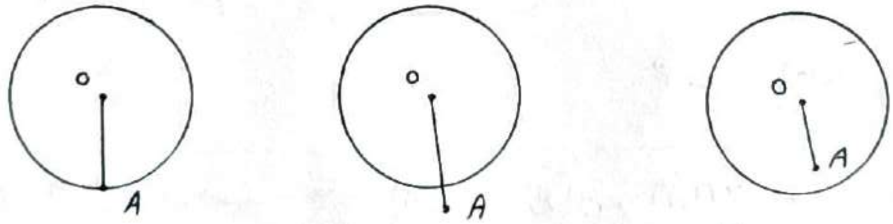


پ) دایره‌ای که از نقطه $\underset{A}{(1,-3)}$ بگذرد و مرکز آن $\underset{O}{(2,-1)}$ باشد.

شعاع دایره $r=OA=\sqrt{(2-1)^2+(-1+3)^2}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$

معادله دایره: $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2 \longrightarrow \boxed{(x-2)^2+(y+1)^2=5}$

وضعیت نقطه نسبت به دایره:



A روی دایره $\Rightarrow OA=r$

A درون دایره $\Rightarrow OA<r$

A بیرون دایره $\Rightarrow OA>r$

نکته: برای تعیین وضعیت نقطه نسبت به دایره اگر مرکز و شعاع را داشته باشیم فاصله آن نقطه تا مرکز را بدست آورده

و با توجه به مطلب بالا:
- اگر این فاصله برابر شعاع ← نقطه روی دایره
- اگر این فاصله کمتر از شعاع ← نقطه درون دایره
- اگر این فاصله بیشتر از شعاع ← نقطه بیرون دایره است.

یا می‌توان نقطه مورد نظر را در معادله دایره قرار داد اگر معادله دایره را $f(x,y)$ و آن نقطه $A(a,b)$ باشد

اگر $f(a,b)=0 \Rightarrow$ A روی دایره　　$f(a,b)<0 \Rightarrow$ A داخل دایره　　$f(a,b)>0 \Rightarrow$ A خارج دایره

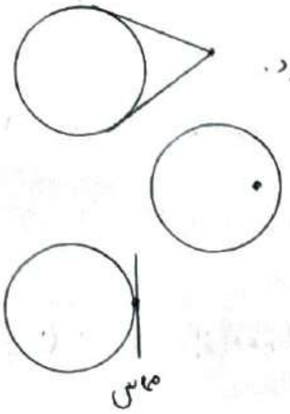
مثال: از نقطه $(1,-2)$ چند مماس بر دایره $x^2+y^2-2x-y-1=0$ می‌توان رسم کرد.

پاسخ: ابتدا وضعیت نقطه را نسبت به دایره پیدا می‌کنیم طبق نکته قبل مختصات نقطه را در معادله دایره جایگذاری می‌کنیم.

$$\xrightarrow{\overset{x\ \ y}{(1,-2)}} f(1,-2)=1^2+(-2)^2-2(1)-(-2)-1=1+4-2+2-1=4>0 \xrightarrow{} \text{نقطه خارج دایره}$$

لذا ۲ مماس بر دایره رسم می‌شود

توجه: کار در کلاس ۲ صفحه ۱۳۶ کتاب شبیه نکته و مثال بالا حل شود.



نکته:
- اگر نقطه خارج دایره باشد دو مماس به طول مساوی می‌توان بر دایره رسم کرد.
- اگر نقطه داخل دایره باشد نمی‌توان بر دایره مماس رسم کرد.
- اگر نقطه روی دایره باشد یک مماس بر دایره می‌توان رسم کرد.

تست: نقطه $(a,2a)$ مرکز دایره‌ای گذرنده بر دو نقطه $(2,1)$ و $(-1,4)$ است شعاع این دایره کدام است؟

۱) ۳   ۲) ۴   ۳) $2\sqrt{2}$ ۴) $3\sqrt{2}$

پاسخ دو نقطه $A(2,1)$ و $B(-1,4)$ روی دایره اند پس $OB=OA=r$

$$OA=OB \Longrightarrow \sqrt{(2-a)^2+(1-2a)^2}=\sqrt{(-1-a)^2+(4-2a)^2} \xrightarrow[\text{و ساده کردن}]{\text{طرفین به توان ۲}} a=2$$

$$r=OA=\sqrt{(2-2)^2+(1-4)^2}=3$$

تمرین: ۱- معادله دایره‌ای را بنویسید که نقطه $O(-2,-1)$ مرکز آن و $M(1,1)$ نقطه‌ای روی محیط آن باشد.

۲- معادله دایره‌ای را بنویسید که از مبدأ مختصات بگذرد و مرکز آن $O(2,-1)$ باشد.

۳- الف) معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $(2,3)$ و نقطه $(-3,-9)$ روی آن باشد.

ب) نقاط $(0,3)$ و $(-4,-1)$ دو سر قطر آن باشد.

«کار در کلاس صفحه ۱۳۶ حل و بررسی شود»

معادله گسترده دایره: فرم کلی $\boxed{x^2+y^2+ax+by+c=0}$ را معادله گسترده یا معادله ضمنی دایره می‌نامیم.

مرکز دایره و شعاع دایره از رابطه‌های زیر بدست می‌آید:

مرکز $O\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$

شعاع $r=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}$

نکته: ضرایب x^2 و y^2 همواره برابر عدد یک باید باشد.

توجه: معادله استاندارد و معادله گسترده آن قابل تبدیل به یکدیگر می‌باشند.

مثال الف)

$$\underbrace{\boxed{(x-2)^2+(y+3)^2=1}}_{\text{استاندارد}} \xrightarrow[\text{از اتحاد مربع دوجمله‌ای}]{\text{تبدیل به معادله گسترده}} x^2-4x+4+y^2+6y+9=1 \Rightarrow \underbrace{\boxed{x^2+y^2-4x+6y+12=0}}_{\text{گسترده}}$$

ب)

$$\underbrace{\boxed{x^2+y^2-6x+2y+6=0}}_{\text{گسترده}} \xrightarrow[\text{از مربع کامل کردن استفاده می‌شود}]{\text{تبدیل به معادله استاندارد}} (x^2-6x)+(y^2+2y)+6=0$$

$$(x-3)^2-9+(y+1)^2-1+6=0 \Rightarrow \underbrace{\boxed{(x-3)^2+(y+1)^2=4}}_{\text{استاندارد}}$$

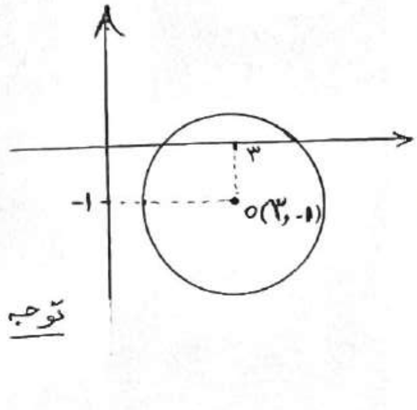
مثال (دی ۹۷): معادله گسترده دایره‌ای به صورت $x^2+y^2-6x+2y+6=0$ می‌باشد مرکز و شعاع دایره را بنویسید.

مرکز $O\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)=\left(-\frac{-6}{2}, -\frac{2}{2}\right)=(3,-1)$

شعاع $r=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}=\frac{1}{2}\sqrt{(-6)^2+2^2-4(6)}=\frac{1}{2}\sqrt{36+4-24}=\frac{1}{2}\sqrt{16}=\frac{1}{2}\times 4=\boxed{2}$

تمرین: معادله داده شده مثال قبل را به شکل استاندارد بنویسید و نمودار آنرا در صفحه مختصات رسم کنید.

$$x^2+y^2-6x+2y+6=0 \Rightarrow (x^2-6x)+(y^2+2y)+6=0$$
$$\Rightarrow x^2-6x+9-9+y^2+2y+1-1+6=0$$
$$\Rightarrow (x-3)^2-9+(y+1)^2-1+6=0$$
$$\Rightarrow (x-3)^2+(y+1)^2=4$$



توجه: اگر مختصات نقاط تقاطع دایره با محورهای مختصات را خواسته باشند ... قرار دهیم $x=0$ و مقدار y را بدست می‌آوریم محل تقاطع با محور yها حاصل شده و برعکس محل تقاطع با محور xها بدست می‌آید.

مثال: (کار در کلاس صفحه ۱۳۷):

معادله گستردهٔ دایره‌ای به شکل $x^2+y^2-2x-6y+6=0$ است

الف) مختصات مرکز و شعاع دایره آن را پیدا کنید

مرکز $O\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right) = \left(-\frac{-2}{2}, -\frac{-6}{2}\right) = (1,3)$

شعاع $r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c} = \frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2+(-6)^2-4(6)} = \frac{1}{2}\sqrt{4+36-24} = \frac{1}{2}\sqrt{16} = \frac{1}{2}\times 4 = \boxed{2}$

ب) معادله دایره را به شکل استاندارد بنویسید.

در این جا چون مرکز $O(\alpha, \beta)$ و $r=2$ شعاع را داریم می‌توان به جای مربع کامل کردن از رابطه زیر معادله استاندارد را نوشت:

$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$

معادله استاندارد: $(x-1)^2+(y-3)^2=4$

نکته: معادله $x^2+y^2+ax+by+c=0$ معادله یک دایره است اگر و تنها اگر $a^2+b^2>4c$ باشد.

(زیرا در دایره شعاع $r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}$ و با توجه به مثبت بودن r زیر رادیکال فقط باید بزرگتر از صفر باشد)

مثال: کدام یک از رابطه‌های زیر مربوط به معادله دایره است؟

الف) $x^2+y^2+2x+4y+7=0$

$a^2+b^2 = 2^2+4^2 = 4+16=20 \longrightarrow 20 \not> 28 \Rightarrow a^2+b^2 \not> 4c \longrightarrow$ معادله داده شده مربوط به دایره نمی‌باشد

$4c = 4(7)=28$

ب) $x^2+y^2+2x+2y-1=0$

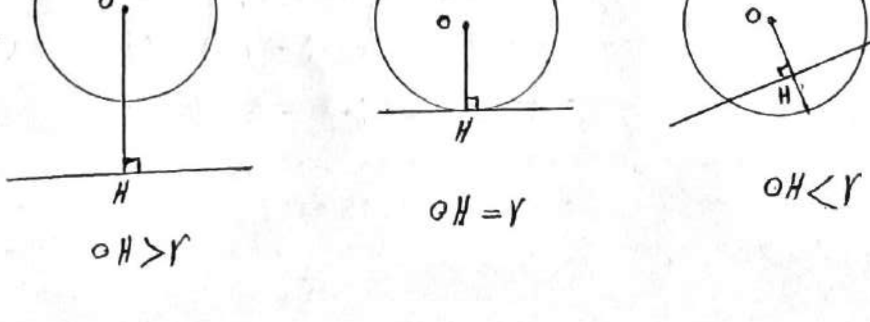
$2^2+2^2 > 4(-1)$ یا $8>-4 \longrightarrow$ معادله داده شده مربوط به دایره است

وضعیت خط نسبت به دایره: خط و دایره می‌توانند یک نقطه مشترک، یا دو نقطه مشترک یا هیچ نقطه اشتراکی نداشته باشند.

یک نقطه مشترک ← مماس

دو نقطه مشترک ← متقاطع

هیچ نقطه اشتراکی ← نامتقاطع

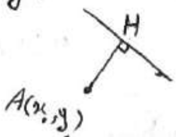


توجه : می‌دانیم شعاع دایره در نقطه تماس، بر خط مماس عمود است.

و می‌دانیم فاصله نقطه $A(x_0,y_0)$ از خط به معادله $ax+by+c=0$ از رابطه

$$\underset{AH}{d} = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

حاصل می‌شود.



بنابراین برای مشخص کردن وضعیت خط و دایره فاصله مرکز دایره از خط را از رابطه بالا بدست می‌آوریم اگر این فاصله برابر شعاع دایره بود خط بر دایره مماس است - اگر این فاصله کمتر از شعاع دایره باشد خط دایره را قطع می‌کند - اگر این فاصله بیشتر از شعاع دایره باشد خط و دایره نامتقاطع می‌باشند.

مثال (شهریور ۹۸) : وضعیت خط $x+y=3$ را نسبت به دایره $x^2+y^2-2x-3=0$ مشخص کنید.

حل: کافیست فاصله مرکز دایره را از خط داده شده بدست آورده و اندازه آنرا با اندازه شعاع دایره مقایسه کنیم.

مرکز دایره $O(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}) \longrightarrow O(1,0)$

شعاع $r=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c} \longrightarrow r=\frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2+0^2-4(-3)}=\frac{1}{2}\sqrt{4+12}=\frac{1}{2}\sqrt{16}=\frac{1}{2}\times 4=\boxed{2}$

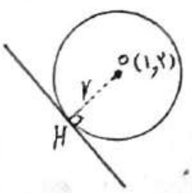
حال فاصله مرکز دایره یعنی $O(1,0)$ را از خط داده شده یعنی $x+y-3=0$ بدست می‌آوریم:

$$d=\frac{|1(1)+1(0)-3|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|-2|}{\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}\overset{\text{گویا}}{=}\sqrt{2} \longrightarrow$$ فاصله بدست آمده کمتر از شعاع است

خط داده شده با دایره متقاطع است

مثال: (صفحه ۱۳۹ کار در کلاس ۲) خرداد ۹۹ خارج، شهریور ۹۹

معادله دایره‌ای را بنویسید که بر خط $3x+4y-1=0$ مماس بوده و مرکز آن $O(1,2)$ باشد.



پاسخ: چون خط بر دایره مماس است پس اگر فاصله مرکز دایره از خط را بدست می‌آوریم شعاع دایره حاصل می‌شود

$$\text{شعاع}\ r=OH=\frac{|3(1)+4(2)-1|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{10}{5}=2$$

معادله دایره : $(x-1)^2+(y-2)^2=4$

تست: دایره به مرکز $(2,-1)$ و مماس بر خط $x-y=1$ محور x ها را با کدام طول قطع می‌کند.

۱) ۳ و ۱
۲) ۳ و ۲
۳) ۴ و ۱
۴) ۴ و ۱٫۵

مثال: (دی ۹۸ _ کار در کلاس ص ۱۳۹)

وضعیت دایرهٔ $(x-2)^2+(y+3)^2=4$ و خط $y=-1$ را مشخص کنید.

قرینه قرینه

پاسخ ← فاصله مرکز دایره $O(2,-3)$ را از خط $y+1=0$ بدست می‌آوریم.

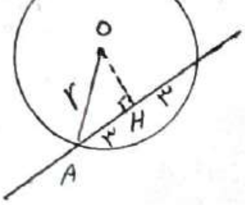
$0x+1y+1=0$

شعاع دایره ← $r^2=4 \Rightarrow r=2$

$$OH=\frac{|0(2)+1(-3)+1|}{\sqrt{0^2+1^2}}=\frac{|-2|}{\sqrt{1}}=\frac{2}{1}=2 \longrightarrow \text{برابر شعاع دایره} \longrightarrow$$

خط داده شده بر دایره داده شده مماس است.

مثال: کار در کلاس ۳ ص ۱۳۹



مرکز دایره‌ای، نقطهٔ $O(2,-3)$ است. این دایره روی خط $3x-4y+2=0$ وتری به طول ۶ جدا می‌کند. معادله این دایره را بنویسید.

پاسخ ←
$$OH=\frac{|3(2)-4(-3)+2|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{20}{\sqrt{25}}=\frac{20}{5}=4$$

رابطه فیثاغورس: $OA^2=OH^2+AH^2 \longrightarrow r^2=4^2+3^2=25 \Rightarrow \boxed{r=5}$ شعاع دایره

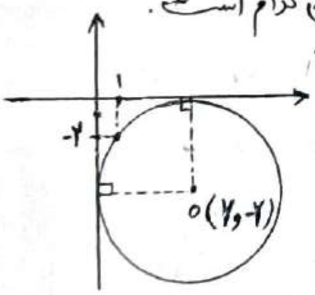
معادله دایره: $(x-2)^2+(y+3)^2=25$

تست کنکور ۹۸ خارج: نقطه $A(-1,4)$ مرکز یک دایره است که بر روی خط $2x-3y+1=0$ وتری به طول $2\sqrt{7}$ جدا می‌کند. این دایره خط $y=2$ را با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) ۵- و ۳ ✓ ۲) ۴- و ۲ ۳) $-1\pm\sqrt{2}$ ۴) $-1\pm\sqrt{3}$

تست کنکور ۹۷ خارج: دایره گذرا بر نقطه $(1,-2)$ بر هر دو محور مختصات مماس است. شعاع آن کدام است.

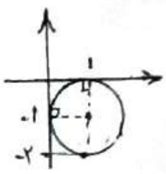
۱) ۱ و ۴ ۲) ۲ و ۴ ۳) ۱ و ۵ ۴) ۲ و ۵



پاسخ ← چون از نقطهٔ $(1,-2)$ گذشته و بر محورها مختصات مماس است پس دایره در ربع چهارم قرار دارد و مرکز دایره $O(r,-r)$ می‌شود.

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2 \xrightarrow{O(r,-r)} (x-r)^2+(y+r)^2=r^2$$

چون $(1,-2)$ روی دایره قرار دارد پس در معادله دایره صدق می‌کند.



$$(x-r)^2+(y+r)^2=r^2 \xrightarrow{(1,-2)} (1-r)^2+(-2+r)^2=r^2 \xrightarrow{\text{ساده شود}} r^2-6r+5=0$$

$$\Rightarrow (r-1)(r-5)=0 \quad r=1 \quad r=5$$

تست: شعاع دایره گذرا بر سه نقطه $(0,0)$ و $(2,1)$ و $(1,-2)$ برابر کدام است؟

$\frac{1}{2}\sqrt{10}$ ✓ $\sqrt{3}$ $\sqrt{5}$ $\frac{1}{2}\sqrt{13}$

پاسخ تست: سه نقطه داده شده چون روی دایره قرار دارند پس در معادله دایره صدق می‌کنند (در معادله گسترده قرار می‌دهیم)

$$x^2+y^2+ax+by+c=0 \begin{cases} \xrightarrow{(0,0)} \boxed{c=0} \\ \xrightarrow{(2,1)} 2a+b=-5 \\ \xrightarrow{(1,-2)} a-2b=-5 \end{cases} \xrightarrow{\text{دستگاه}} \boxed{a=-3},\ \boxed{b=1}$$

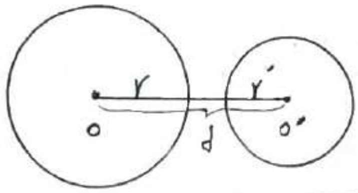
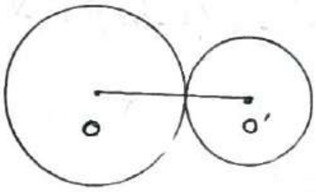
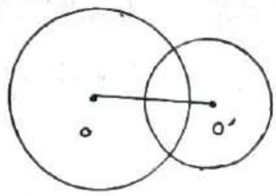
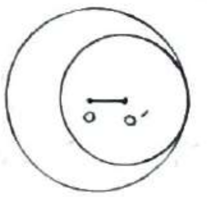
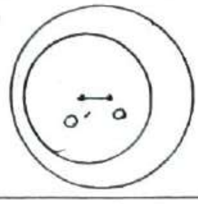
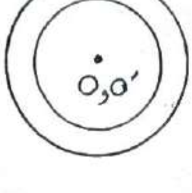
$$\xRightarrow{\text{معادله دایره}} x^2+y^2-3x+1y=0$$

شعاع دایره $r=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+4c}=\frac{1}{2}\sqrt{(-3)^2+1^2-4(0)}=\boxed{\frac{1}{2}\sqrt{10}}$

اوضاع نسبی دو دایره

دو دایره دلخواه $C(O,r)$ و $C'(O',r')$ را با فرض $r>r'$ در نظر می‌گیریم:

پاره خطی که مرکزهای دو دایره را به هم وصل می‌کند، خط المرکزین نامیده می‌شود $d=OO'$: خط المرکزین

$d>r+r'$	متخارج (بیرون هم)	
$d=r+r'$	مماس بیرون	
$r-r'<d<r+r'$	متقاطع	
$d=r-r'$	مماس درون	
$d<r-r'$	متداخل (درون هم)	
$d=0$	هم مرکز	

مثال: وضعیت دو دایره $x^2+y^2+6x+8y=0$ و $x^2+y^2-4x+6y+12=0$ را نسبت به هم مشخص کنید.

پاسخ ←

$O\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2}\right)=(-3,-4)$ $\qquad$ $O'\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2}\right)=(2,-3)$

$r=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}=\frac{1}{2}\sqrt{100}=5$ $\qquad$ $r'=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}=\frac{1}{2}\sqrt{4}=1$

خط المرکزین $OO'=\sqrt{(-3-2)^2+(-4+3)^2}=\sqrt{(-5)^2+(-1)^2}=\sqrt{25+1}=\sqrt{26}\simeq 5{,}1$

چون: $5-1<\sqrt{26}<5+1 \Longrightarrow \boxed{r-r'<d<r+r'}$

لذا دو دایره متقاطعند

مثال: (خرداد ۹۸) کار در کلاس صفحه ۱۴۱ : وضعیت دو دایره $(x+1)^2+(y-2)^2=1$ و $x^2+y^2-2x+4y+1=0$ را نسبت به هم مشخص کنید

پاسخ ←

مرکز $O'(-1,2)$ $\qquad$ شعاع $r'=1$

مرکز $O\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2}\right)=(1,-2)$

شعاع $r=\frac{1}{2}\sqrt{4+16-4}=2$

خط المرکزین $d=OO'=\sqrt{(1-(-1))^2+(-2-2)^2}=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}\simeq 4{,}4$

چون $\sqrt{20}>2+1 \longrightarrow \boxed{d>r+r'}$ دو دایره متخارج

تمرین: به ازای کدام مقدار b دو دایره به معادلات $x^2+y^2+2x-2y=0$ و $x^2+y^2-4y+b=0$ مماس داخل اند؟ (جواب $b=-4$)

تست کنکور تجربی: به ازای کدام مقدار a دو دایره به معادلات $x^2+y^2+4x=0$ و $x^2+y^2-2x+8y+a=0$ مماس خارج اند.

6
5
7
8 ✓

پاسخ:

$O\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2}\right)=(1,-4)$ $\qquad$ $O'\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2}\right)=(-2,0)$

$r=\frac{1}{2}\sqrt{4+64-4a}$ $\qquad$ $r'=\frac{1}{2}\sqrt{16+0-4(0)}=2$

$d=OO'=\sqrt{(1+2)^2+(-4-0)^2}=\sqrt{25}=\boxed{5}$

مماس خارجند $\Longrightarrow d=OO'=r+r'$

$\Longrightarrow 5=\frac{1}{2}\sqrt{68-4a}+2 \Longrightarrow 6=\sqrt{68-4a} \Longrightarrow 36=68-4a$

$4a=32 \longrightarrow \boxed{a=8}$

توجه: کار در کلاس صفحه ۱۴۱ و تمرینات صفحه ۱۴۲ حل و بررسی شوند

116, !

پاسخ تمرینات صفحه ۱۴۲

۱) الف

$x^2+y^2-6x+2y+1=0 \xrightarrow{x=0} y^2+2y+1=0 \Rightarrow (y+1)(y+1)=0 \rightarrow y=-1 \Rightarrow (0,-1)$ تقاطع با محور y

$x^2+y^2-6x+2y+1=0 \xrightarrow{y=0} x^2-6x+1=0 \Rightarrow x=3\pm2\sqrt{2}$ ← تقاطع با محور x ها $(3\pm2\sqrt{2}, 0)$

مرکز $O(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})=(3,-1)$

شعاع $r=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}=\frac{1}{2}\sqrt{36+4-4}=\boxed{3}$

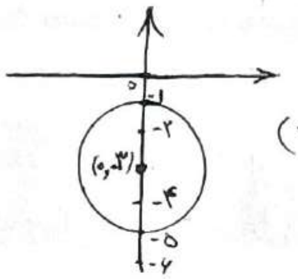
ب)

$x^2+(y+3)^2-4=0 \xrightarrow{x=0} (y+3)^2=4 \Rightarrow y+3=\pm2$ ← تقاطع با محور y: $y=-1 \rightarrow (0,-1)$ ، $y=-5 \rightarrow (0,-5)$

$\xrightarrow{y=0} x^2+9-4=0 \Rightarrow x^2=-5$ جواب ندارد ← دایره محور x را قطع نمی‌کند

مرکز $O(0,-3)$

شعاع $r=\sqrt{4}=2$

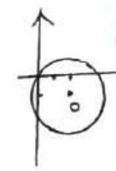


(نمودار دایره قسمت ب)

پاسخ ۲ ← الف)

مرکز $(2,-1)$

شعاع $r=OC=\sqrt{(0-2)^2+(0+1)^2}=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$



معادله دایره $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2 \Longrightarrow \boxed{(x-2)^2+(y+1)^2=5}$

ب)

مرکز $O(2,3)$ ، $A(-3,-9)$ روی دایره

شعاع: $r=OA=\sqrt{(2+3)^2+(3+9)^2}=\sqrt{25+144}=\sqrt{169}=\boxed{13}$

معادله دایره: $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2 \Longrightarrow \boxed{(x-2)^2+(y-3)^2=169}$

پ) مرکز دایره نقطه وسط قطر می‌باشد:

مرکز $O\left(\frac{-4+0}{2}, \frac{-1+3}{2}\right)=(-2,1)$

$A(0,3)$ ، $B(-4,-1) \longrightarrow$ قطر $AB=\sqrt{(0+4)^2+(3+1)^2}=\sqrt{16+16}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$

شعاع $r=\frac{AB}{2}=2\sqrt{2}$

$(2\sqrt{2})^2=4\times2=8$

معادله دایره $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2 \Longrightarrow \boxed{(x+2)^2+(y-1)^2=8}$

پاسخ ۳ ← معادله دایره را به صورت تابع دو متغیره $f(x,y)=x^2+y^2-2x+4y+1$ در نظر می‌گیریم

$(1,0) \xrightarrow{\text{در معادله قرار می‌دهیم}} f(1,0)=1+0-2+0+1=\boxed{0} \longrightarrow$ $(1,0)$ روی دایره قرار دارد

$(0,-1) \xrightarrow{\text{" " "}} f(0,-1)=0+1-0-4+1=-2<0 \longrightarrow$ $(0,-1)$ درون دایره قرار دارد

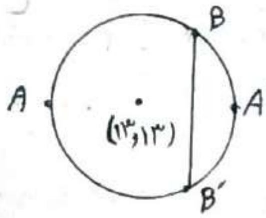
$(-1,-2) \xrightarrow{\text{" " "}} f(-1,-2)=1+4+2-8+1=\boxed{0} \longrightarrow$ $(-1,-2)$ روی دایره قرار دارد

$(0,0) \xrightarrow{\text{" " "}} f(0,0)=0+0-0+0+1=1>0 \longrightarrow$ $(0,0)$ بیرون دایره قرار دارد

روش دوم: فاصله هر کدام از نقاط را تا مرکز بدست آورده و با شعاع مقایسه می‌کنیم.

پاسخ ۴ ← الف) مرکز $O(13, 13)$ و $r = 1300$ متر $= 13$ واحد

معادله دایره: $(x-13)^2+(y-13)^2=169$



ب) اگر مختصات نقاط برخورد مسیرها را با دایره A و A' و B و B' بنامیم مطابق شکل داریم: $A(0,13)$ و $A'(26,13)$.

معادله خط گذرنده از نقاط B و B' برابر است با $x=18$ که با جایگزین کردن در معادله دایره داریم

$$(18-13)^2+(y-13)^2=169 \Rightarrow (y-13)^2=169-25=144 \Rightarrow y-13=\pm 12 \Rightarrow \boxed{y=25},\ \boxed{y=1}$$

پس مختصات $B(18,25)$ و $B'(18,1)$ می‌باشند.

پ) در $(18,13)$

ت) شعاع دایره برابر ۱۳ و فاصله مرکز دایره از محل تقاطع دو مسیر ۵ واحد است از رابطه فیثاغورس فاصله نقطه B از محل تقاطع ۱۲ واحد است و طول مسیر عمودی $BB'=\boxed{2400}$

پاسخ ۵ ← مرکز $O(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}) = (-\frac{2}{2}, -\frac{2}{2}) = (-1,-1)$

شعاع $r=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}=\frac{1}{2}\sqrt{4+4-4(-8)}=\frac{1}{2}\sqrt{40}=\sqrt{10}$

فرم استاندارد دایره $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2 \Rightarrow \boxed{(x+1)^2+(y+1)^2=10}$

پاسخ ۶ ← کافیست مختصات مرکز دایره را مشخص کرده و سپس فاصله مرکز دایره را از خط داده شده محاسبه کنیم و اندازه آن را با اندازهٔ شعاع دایره مقایسه کنیم:

الف) مرکز $O(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}) = (2,2)$

فاصله مرکز از خط $6x+4y=0$: $OH=\frac{|6(2)+4(2)+0|}{\sqrt{6^2+4^2}}=\frac{20}{\sqrt{52}}=\frac{10}{\sqrt{13}}$

شعاع دایره $r=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}=\frac{1}{2}\sqrt{(-4)^2+(-4)^2-4(7)}=\frac{1}{2}\sqrt{4}=1$

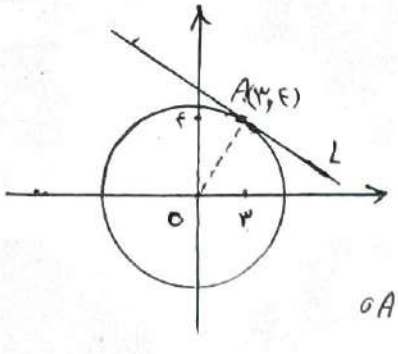
$OH > r \Rightarrow$ خط بیرون دایره است، خط با دایره تقاطع ندارد

ب) معادله خط: $x+y+2=0$ با تبدیل به صورت $ax+by+c=0$

شعاع $r=\sqrt{2}$ ، مرکز $O(0,0)$

فاصله مرکز دایره از خط $OH=\frac{|1(0)+1(0)+2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}\overset{\text{گویا}}{=}\sqrt{2}$

چون $OH=r$ پس خط بر دایره مماس است.

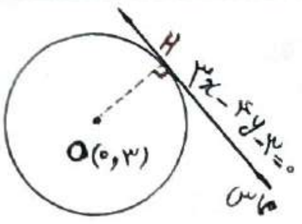


پاسخ تمرین ۷ ← برای نوشتن معادله خط مماس مختصات یک نقطه از آن و شیب آن لازم است. چون شعاع بر خط مماس در نقطه تماس عمود است پس شیب خط مماس و شیب شعاع عکس قرینه یکدیگر می‌باشند

شیب خط OA : $m_{OA} = \frac{4-0}{3-0} = \frac{4}{3} \xrightarrow{OA \perp L} m_L = -\frac{3}{4}$

معادله خط مماس (خط L) : $y - y_1 = m_L(x - x_1) \Rightarrow y - 4 = -\frac{3}{4}(x-3)$

$\Rightarrow 4y + 3x = 25$



پاسخ تمرین ۸ ← می‌دانیم فاصله مرکز دایره از خط مماس برابر شعاع دایره می‌باشد

شعاع دایره $r = OH = \frac{|3(0)-4(3)-3|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = \frac{|-15|}{\sqrt{25}} = \frac{15}{5} = \boxed{3}$

معادله دایره : $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2 \Rightarrow (x-0)^2 + (y-3)^2 = 3^2$

$\Rightarrow \boxed{x^2 + (y-3)^2 = 9}$

پاسخ تمرین ۹ ←

الف) $x^2+y^2-2x+4y-4=0$ و $x^2+y^2+2x-4y-9=0$

مرکز $O(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}) = (1,-2)$ مرکز $O'(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}) = (-1,2)$

شعاع $r = \frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2+4^2-4(-4)} = \frac{1}{2}\sqrt{36} = 3$ $r' = \frac{1}{2}\sqrt{2^2+(-4)^2-4(-9)} = \frac{1}{2}\sqrt{56} = \sqrt{14}$

خط المرکزین $OO' = \sqrt{(1-(-1))^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$

چون $r - r' < OO' < r + r'$ بنابراین دو دایره متقاطع می‌باشند.

ب) $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 7$ و $x^2 + (y-5)^2 = 5$

قرینه جذر

مرکز $O = (2,-3)$ و شعاع $r = \sqrt{7}$ مرکز $O' = (0,5)$ و شعاع $r' = \sqrt{5}$

خط المرکزین $OO' = \sqrt{(2-0)^2 + (-3-5)^2} = \sqrt{4+64} = \sqrt{68}$

چون $OO' > r + r'$ بنابراین دو دایره بیرون هم (متخارج) می‌باشند.

پاسخ تمرین ۱۰ ← شعاع دایره $r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c} = \frac{1}{2}\sqrt{(-4)^2+(-6)^2-4(-3)} = \boxed{4}$

مرکز دایره $O(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}) = (2,3)$

خط المرکزین $OO' = \sqrt{(2+1)^2 + (3+1)^2} = 5$

شرط مماس درون $\Rightarrow OO' = |r - r'| \Rightarrow 5 = |4 - r'|$ ⟨ $r' = -1$ ✗ ، $r' = 9$ ✓ $O'(-1,-1)$

معادله دایره مورد نظر : $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 81$

به نام خدا

فصل ۷ قانون احتمال کل

مفاهیم اولیه :

۱- پدیده تصادفی : پدیده یا آزمایشی که نتیجه آن را نتوان قبل از انجام به طور قطع پیش بینی کرد. مثلاً در پرتاب تاس مشخص نیست کدام عدد پس از پرتاب نمایان می‌شود

۲- فضای نمونه : مجموعه تمام نتایج ممکن یک پدیده تصادفی را فضای نمونه آن پدیده می‌نامیم و معمولاً با نماد S نمایش می‌دهیم

مثلاً :

فضای نمونه‌ای پرتاب یک تاس ← $S=\{1,2,3,4,5,6\}$

فضای نمونه‌ای پرتاب یک سکه ← S = { ر , پ }

" " " دو سکه ← S = {(ر پ)(پ پ)(پ ر)(ر ر)}

" " " یک سکه و یک تاس ← S = {(۱,ر)(۱,پ)(۲,ر)(۲,پ)(۳,ر)(۳,پ)(۴,ر)(۴,پ)(۵,ر)(۵,پ)(۶,ر)(۶,پ)}

۳- پیشامد تصادفی : هر زیر مجموعه از فضای نمونه S را یک پیشامد تصادفی گویند. و با حروف بزرگ لاتین ...,A,B نشان می‌دهند

مثلاً : پیشامد زوج بودن در پرتاب یک تاس ← $A=\{2,4,6\}$

۴- اعمال روی پیشامدها : اگر A و B پیشامدهای فضای نمونه S باشند آنگاه:

اجتماع: $A\cup B$ وقتی رخ می‌دهد که حداقل یکی از دو پیشامد رخ دهد. A یا B

اشتراک: $A\cap B$ وقتی رخ می‌دهد که هر دو پیشامد A و B رخ دهند

تفاضل: $A-B$ وقتی رخ می‌دهد که A رخ دهد ولی B رخ ندهد

متمم: A' وقتی رخ می‌دهد که A رخ ندهد.

۵- فرمول احتمال پیشامد A :

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$$

$n(A)$ ← تعداد حالت‌های مطلوب

$n(S)$ ← تعداد کل حالات

۶- احتمال اجتماع دو پیشامد A و B :

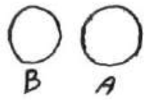
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

مثلاً : در کارخانه‌ای احتمال اینکه دستگاه‌های A و B کار کنند به ترتیب $\underbrace{\frac{1}{2}}_{P(A)}$ و $\underbrace{\frac{1}{3}}_{P(B)}$ و احتمال اینکه باهم کار کنند $\underbrace{\frac{1}{4}}_{P(A\cap B)}$ است احتمال اینکه حداقل یکی از دو دستگاه کار کند.

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{7}{12}$$

۷- احتمال پیشامد A' : $P(A')+P(A)=1 \Longrightarrow P(A')=1-P(A)$

۸- پیشامدهای ناسازگار : دو پیشامد A و B را ناسازگار گوییم هرگاه A و B باهم رخ ندهند ؛ به بیان دیگر



$A\cap B=\varnothing$

A,B ناسازگار $\Longrightarrow A\cap B=\varnothing \Longrightarrow P(A\cap B)=0$

نکته : برای دو پیشامد ناسازگار A و B احتمال $A\cup B$ به صورت زیر است:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

مثال: اگر A و B دو مجموعه جدا از هم باشند (ناسازگار) و داشته باشیم $P(A')+P(B')=1.4$ در اینصورت $P(A\cup B)$ را بدست آورید.

پاسخ: $P(A')+P(B')=1.4 \Longrightarrow (1-P(A))+(1-P(B))=1.4 \Longrightarrow P(A)+P(B)=\frac{6}{10}$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-\underbrace{P(A\cap B)}_{0}=\frac{6}{10}-0=\frac{6}{10}$$

نکته : اگر A_1 و A_2 و ... و A_n پیشامدهای دو به دو ناسازگار باشند $A_i\cap A_j=\varnothing$ آنگاه:

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$$

۹- پیشامدهای مستقل: دو پیشامد A و B از هم مستقل اند هرگاه وقوع هر یک بر احتمال وقوع دیگری تأثیر نداشته باشد

A,B مستقل باشند $\Longrightarrow P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$

تست: اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه S باشند و $P(A)P(B)+P(A'\cup B')=1$ آنگاه دو پیشامد A و B نسبت به هم چگونه اند؟

۱) سازگار ۲) مستقل ۳) وابسته ۴) ناسازگار

حل: $P(A)P(B)+P(A'\cup B')=1 \xrightarrow{\text{دمرگان}} P(A)P(B)+P(A\cap B)'=1$

$\Longrightarrow P(A)P(B)+\cancel{1}-P(A\cap B)=\cancel{1}$

$\Longrightarrow P(A\cap B)=P(A)P(B) \Longrightarrow$ A و B مستقل اند.

۱۰- احتمال شرطی : احتمال وقوع پیشامد A به شرط آنکه بدانیم پیشامد B رخ داده است را با نماد $P(A|B)$ نشان می‌دهیم (می‌خوانیم احتمال A به شرط B)

$$\boxed{P(A\overset{\text{به شرط}}{|}B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}}$$

نکته : اگر دو پیشامد مستقل باشند ← $P(A\cap B) = P(A)\times P(B)$: احتمال اشتراک

با توجه به احتمال شرطی ← $P(A\cap B) = P(B)\times P(A|B)$: احتمال اشتراک

مثال: اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، $P(A)=0/3$ و $P(A\cup B)=0/8$ آنگاه $P(A|B)$ کدام است؟

پاسخ :

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \overset{A,B\text{ مستقل}}{=} \frac{P(A)\times \cancel{P(B)}}{\cancel{P(B)}} = P(A) = 0/3$$

مثال: تاسی را پرتاب می‌کنیم اگر بدانیم عدد آمده بزرگتر از ۳ است، احتمال آنکه عدد آمده اول باشد کدام است.

پاسخ : $S=\{1,2,3,4,5,6\}$ فضای نمونه و $\underset{\text{بزرگتر از ۳}}{B}=\{4,5,6\}$ و $\underset{\text{پیشامد اول بودن}}{A}=\{2,3,5\}$

$A\cap B=\{5\}$

$$\underset{\text{اول بودن به شرط بزرگتر از ۳}}{P(A|B)} = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

تمرین: اگر $P(A\cup B)=0/6$ ، $P(A)=0/2$ و $P(B|A)=0/1$ باشد، آنگاه $P(B)$ را بیابید.

مثال: درون جعبه‌ای ۴ لامپ سالم و ۱ لامپ معیوب وجود دارد، ۲ لامپ به تصادف و بدون جایگذاری خارج می‌کنیم احتمال آنکه $\underbrace{\text{لامپ اول سالم}}_{A}$ و $\underbrace{\text{لامپ دوم معیوب}}_{B}$ باشد را بدست آورید.

پاسخ :

احتمال $P(\underset{\text{دومی معیوب}}{B}\overset{\text{به شرط}}{|}\underset{\text{اولی سالم}}{A}) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} \Longrightarrow \frac{1}{4} = \frac{P(A\cap B)}{\frac{4}{5}} \Longrightarrow P(A\cap B) = \frac{1}{4}\times\frac{4}{5} = \boxed{\frac{1}{5}}$

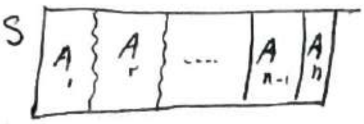
$P(A)=\frac{4}{5}$

$P(B|A)=\frac{1}{4}$

دوم معیوب به شرط اولی سالم

اول یکی از سالمها انتخاب شده پس از تعداد کل یکی کم شده ← ۴ تا باقی مانده

افراز: فرض کنیم A_1 و A_2 و ... و A_n زیرمجموعه‌هایی ناتهی از مجموعهٔ S باشند، به گونه‌ای که اجتماع همهٔ آنها برابر S و اشتراک هر دوتای آنها برابر $\emptyset$ باشد در اینصورت می‌گوئیم این مجموعه‌ها یک افراز روی S درست کرده‌اند.



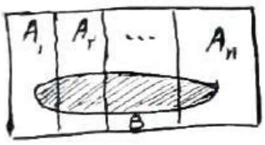
به عبارت دیگر A_1 و A_2 و ... و A_n یک افراز S می‌باشند هرگاه:

$$1)\ A_i \neq \emptyset \qquad 2)\ A_i \cap A_j = \emptyset \qquad 3)\ \bigcup_{i=1}^{n} A_i = S$$

مثال: مجموعه‌های $O=\{1,3,5,\dots\}$ اعداد طبیعی فرد و $E=\{2,4,6,\dots\}$ اعداد طبیعی زوج یک افراز روی مجموعه اعداد طبیعی $\mathbb{N}$ می‌باشند.

زیرا 1) $O \neq \emptyset$, $E \neq \emptyset$ 2) $O \cap E = \emptyset$ 3) $O \cup E = \mathbb{N}$

مثال: مجموعه اعداد گویا و مجموعه اعداد اصم یک افراز روی مجموعه اعداد حقیقی هستند (چرا؟)



قانون احتمال کل: اگر فرض کنیم A_1 و A_2 و ... و A_n پیشامدها باشند که بر روی فضای نمونه‌ای S یک افراز تشکیل داده باشند و B یک پیشامد دلخواه باشد رابطهٔ زیر حاصل می‌شود که به آن قانون احتمال کل گویند:

$$P(B) = P(B\cap A_1) + P(B \cap A_2) + \dots + P(B \cap A_n)$$

در هرکدام از طرفین و وسطین کردن احتمال شرطی داریم

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + \dots + P(A_n)P(B|A_n)$$

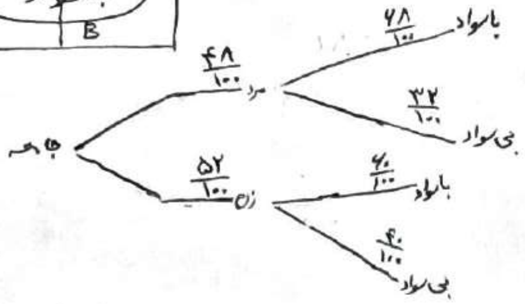
یا

$$\boxed{P(B) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n}}_{\text{مجموع}} P(A_i)P(B|A_i)}$$

توجه: اگر فضای نمونه‌ای چند قسمتی باشد مثلاً: زنان و مردان — شهری و روستایی — باسواد و بی‌سواد — و احتمال یک پیشامد مثل B درآن فضا را بخواهد از فرمول قانون احتمال کل استفاده می‌کنیم.

توجه: برای حل اینگونه مسائل می‌توانیم از نمودار درختی استفاده کنیم به طوریکه اعداد موجود در هر شاخه از درخت را درهم ضرب نموده و اگر از شاخه‌ای به شاخه دیگر برویم اعداد آنها را باهم جمع می‌کنیم.

مثال: ۵۲٪ جمعیت کشور را زنان و ۴۸٪ دیگر آن را مردان تشکیل می دهند اگر ۶۰٪ زنان باسواد و ۶۸٪ مردان باسواد باشند چند درصد از افراد جامعه باسوادند؟



روش اول: (نمودار درختی)

$$P(\text{باسواد بودن}) = \left(\frac{48}{100}\times\frac{68}{100}\right)+\left(\frac{52}{100}\times\frac{60}{100}\right) = \frac{3264}{10000}+\frac{3120}{10000} = \boxed{\frac{6384}{10000}}$$

روش دوم: (فرمول قانون احتمال کل)

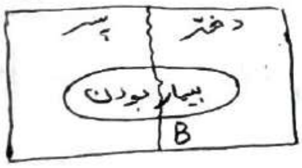
$$P(\overset{\text{باسواد بودن}}{B}) = P(\overbrace{B\cap A_1}^{\text{باسواد باشد و مرد باشد}}) \overset{\text{یا}}{+} P(\overbrace{B\cap A_2}^{\text{باسواد باشد و زن باشد}})$$

از فرمول شرطی استفاده می کنیم

$$= P(\overset{\text{مرد}}{A_1})\times P(\overbrace{B|A_1}^{\text{باسواد به شرط مرد}}) + P(\overset{\text{زن}}{A_2})\times P(\overbrace{B|A_2}^{\text{باسواد به شرط زن}}) = \left(\frac{48}{100}\times\frac{68}{100}\right)+\left(\frac{52}{100}\times\frac{60}{100}\right) = \boxed{\frac{6384}{10000}}$$

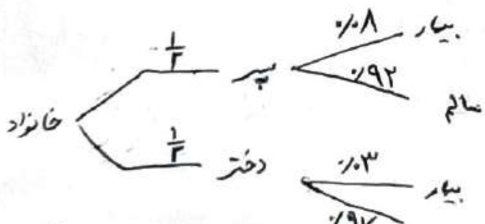
(کتاب ص ۱۴۶ و خرداد ۹۹)

مثال: اگر احتمال نوعی بیماری خاص به نوزاد پسر ۸٪ و نوزاد دختر ۰۳٪ باشد و خانواده ای قصد بچه دار شدن داشته باشد به چه احتمالی نوزاد آنها به بیماری مذکور مبتلا خواهد شد؟



پاسخ:

روش اول (نمودار درختی)



$$P(\text{بیمار بودن نوزاد}) = \left(\tfrac{1}{2}\times 8\%\right)+\left(\tfrac{1}{2}\times 3\%\right) = \frac{8}{200}+\frac{3}{200} = \boxed{\frac{11}{200}}$$

روش دوم (قانون احتمال کل)

$$P(\overset{\text{بیمار بودن}}{B}) = P(\overbrace{B\cap A_1}^{\text{پسر و بیمار بودن}}) \overset{\text{یا}}{+} P(\overbrace{B\cap A_2}^{\text{دختر و بیمار بودن}}) \underset{\text{شرطی}}{=} P(\overset{\text{پسر}}{A_1})\times P(\overbrace{B|A_1}^{\text{بیمار به شرط پسر}}) + P(\overset{\text{دختر}}{A_2})\times P(\overbrace{B|A_2}^{\text{بیمار به شرط دختر}})$$

$$=\left(\tfrac{1}{2}\times\frac{8}{100}\right)+\left(\tfrac{1}{2}\times\frac{3}{100}\right) = \boxed{\frac{11}{200}}$$

تمرین (شهریور ۹۹): اگر احتمال انتقال نوعی بیماری عفونی به نوزاد پسر ۷٪ و نوزاد دختر ۴٪ باشد و خانواده ای منتظر به دنیا آمدن فرزندی باشند، با چه احتمالی نوزاد آنها به بیماری مذکور مبتلا خواهد شد؟ (جواب: $\frac{11}{200}$)

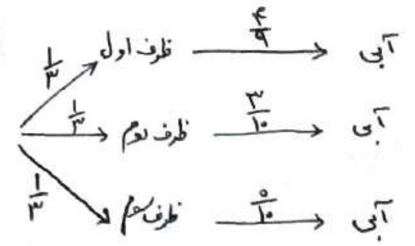
مثال: (خرداد ۹۸): سه ظرف یکسان داریم: ظرف اول شامل ۵ مهره سبز و ۴ مهره آبی است

ظرف دوم شامل ۷ مهره سبز و ۳ مهره آبی است

ظرف سوم شامل ۶ مهره سبز و ۴ مهره قرمز است

با چشم بسته یکی از ظرفها را انتخاب و یک مهره از آن بیرون می آوریم. با چه احتمالی این مهره آبی است؟

پاسخ (روش اول نمودار درختی)



$$P(\text{آبی بودن مهره}) = \left(\frac{1}{3}\times\frac{4}{9}\right)+\left(\frac{1}{3}\times\frac{3}{10}\right)+\left(\frac{1}{3}\times\frac{0}{10}\right) = \boxed{\frac{67}{270}}$$

روش دوم: (قانون احتمال کل)

$$\overset{\text{آبی بودن}}{P(B)} = P(\overbrace{B\cap A_1}^{\text{آبی و ظرف اول}}) + P(\overbrace{B\cap A_2}^{\text{آبی و ظرف دوم}}) + P(\overbrace{B\cap A_3}^{\text{آبی و ظرف سوم}})$$

$$= P(\overset{\text{ظرف اول}}{A_1})P(\overbrace{B|A_1}^{\text{آبی به شرط ظرف اول}}) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3)$$

$$= \left(\frac{1}{3}\times\frac{4}{9}\right)+\left(\frac{1}{3}\times\frac{3}{10}\right)+\left(\frac{1}{3}\times\frac{0}{10}\right) = \boxed{\frac{67}{270}}$$

تمرین: (مثال صفحه ۱۴۷ کتاب)

۴ ظرف یکسان داریم:
- در ظرف اول ۱۴ مهره قرار دارد که ۴ تای آنها قرمز است.
- در ظرف دوم همه مهره ها قرمزند.
- در ظرف سوم ۸ مهره قرار دارد که ۶ تای آنها قرمزند.
- در ظرف چهارم هیچ مهره قرمزی وجود ندارد

با چشم بسته یکی از ظرفها را انتخاب کرده و از آن یک مهره بیرون می آوریم. احتمال اینکه مهره انتخابی قرمز باشد چقدر است؟

تمرین (دی ۹۹): سه ظرف یکسان داریم:
- ظرف اول شامل ۵ مهره قرمز و ۳ مهره آبی
- ظرف دوم شامل ۴ مهره آبی
- ظرف سوم شامل ۶ مهره قرمز است.

با چشم بسته یکی از ظرف‌ها را انتخاب کرده و یک مهره از آن بیرون می‌آوریم. احتمال آن که مهره‌ی انتخابی آبی باشد، چقدر است؟

(جواب: $\frac{11}{24}$)

مثال (شهریور ۹۸):

دو ظرف یکسان داریم. ظرف اول شامل ۷ مهره آبی و ۵ مهرهٔ قرمز است.
ظرف دوم شامل ۶ مهرهٔ آبی و ۸ مهرهٔ قرمز است.

از ظرف اول یک مهره انتخاب کرده و در ظرف دوم قرار می‌دهیم، سپس یک مهره از ظرف دوم انتخاب می‌کنیم، حساب کنید که با چه احتمالی این مهره آبی است؟

پاسخ: در این مسئله مانند مسائل قبل، انتخاب ظرف در محاسبه احتمال دخالت ندارد. بنابراین

مهره خروجی ظرف اول
- آبی $\frac{7}{12}$ ← $\frac{7}{15}$ مهره خروجی از ظرف دوم آبی باشد ← توضیح: اگر مهره خارج شده از ظرف اول که در ظرف دوم قرار می‌دهیم آبی باشد، در ظرف دوم ۷ آبی و ۸ قرمز خواهیم داشت لذا احتمال آبی بودن مهره خروجی ظرف دوم $\frac{7}{15}$ می‌شود.
- قرمز $\frac{5}{12}$ ← $\frac{6}{15}$ مهره خروجی از ظرف دوم آبی باشد ← توضیح: اگر مهره خارج شده از ظرف اول که در ظرف دوم قرار می‌دهیم قرمز باشد، در ظرف دوم ۶ آبی و ۹ قرمز خواهیم داشت لذا احتمال آبی بودن مهره خروجی ظرف دوم $\frac{6}{15}$

$$\Longrightarrow P(\underset{\text{مهره خروجی از ظرف دوم}}{\text{آبی بودن}}) \overset{\text{حاصلجمع شاخه‌ها}}{=} \left(\frac{7}{12}\times\frac{7}{15}\right)+\left(\frac{5}{12}\times\frac{6}{15}\right)=\boxed{\frac{79}{180}}$$

روش دوم (قانون احتمال کل)

$$\overset{\text{مهرهٔ خروجی از ظرف دوم آبی باشد}}{P(B)} = P(\overbrace{B\cap A_1}^{\text{مهره خروجی ظرف اول آبی و مهره خروجی ظرف دوم آبی}}) + P(\overbrace{B\cap A_2}^{\text{مهره خروجی ظرف اول قرمز و مهره خروجی ظرف دوم آبی}})$$

$$\overset{\text{شرطی}}{=} \overset{\text{مهره ظرف اول آبی}}{P(A_1)}\times P(B|A_1) + P(A_2)\times P(B|A_2)$$

$$= \left(\frac{7}{12}\times\frac{7}{15}\right)+\left(\frac{5}{12}\times\frac{6}{15}\right)=\boxed{\frac{79}{180}}$$

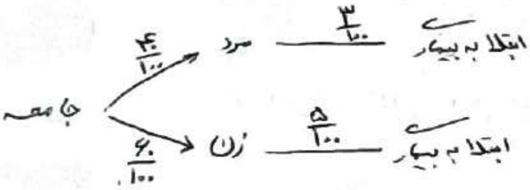
تمرین: دو ظرف یکسان داریم. ظرف اول شامل ۶ مهرهٔ سبز و ۴ مهرهٔ آبی است
ظرف دوم شامل ۵ مهرهٔ سبز و ۷ مهرهٔ آبی

از ظرف اول به تصادف یک مهره انتخاب کرده، در ظرف دوم قرار می‌دهیم، سپس یک مهره از ظرف دوم انتخاب می‌کنیم، به چه احتمالی این مهره سبز است؟

(جواب ← $\frac{56}{130}$ مثال صفحه ۱۴۸ کتاب درسی)

مثال: (دی ۹۸) فرض کنید جمعیت یک کشور متشکل از ۴۰ درصد مرد و ۶۰ درصد زن باشند و احتمال شیوع یک بیماری خاص در این گروه ۳ درصد و ۵ درصد باشد. اگر فردی به تصادف از این جامعه انتخاب شود با چه احتمالی به بیماری مورد نظر مبتلا است؟

حل:

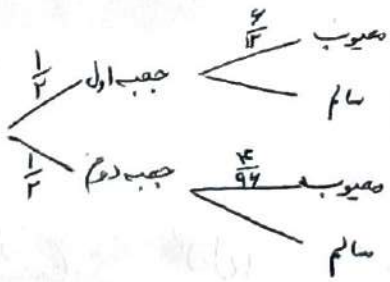


$$P(\text{ابتلا به بیماری}) = \left(\frac{40}{100} \times \frac{3}{100}\right) + \left(\frac{60}{100} \times \frac{5}{100}\right) = \frac{12}{1000} + \frac{35}{1000} = \boxed{\frac{42}{1000}}$$

پاسخ تمرینات صفحه ۱۴۸ کتاب درسی

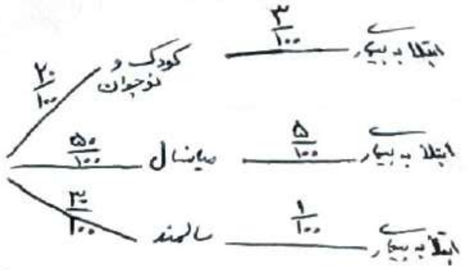
(خرداد ۹۹ خارج)

پاسخ ۱ ←



$$P(\text{معیوب بودن}) = \left(\frac{1}{2} \times \frac{6}{12}\right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{4}{96}\right) = \frac{48}{192} + \frac{4}{192} = \frac{52}{192} = \boxed{\frac{13}{48}}$$

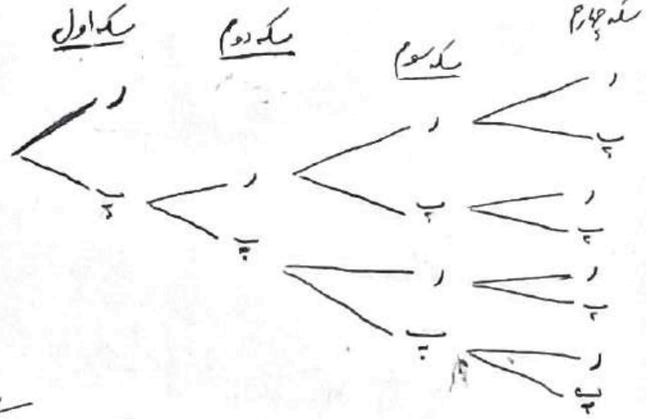
پاسخ ۲ ←



$$P(\text{ابتلا به بیماری}) = \left(\frac{20}{100} \times \frac{3}{100}\right) + \left(\frac{50}{100} \times \frac{5}{100}\right) + \left(\frac{30}{100} \times \frac{1}{100}\right) = \frac{6+25+3}{1000} = \boxed{\frac{34}{1000}}$$

12 ب

پاسخ ۳ ←



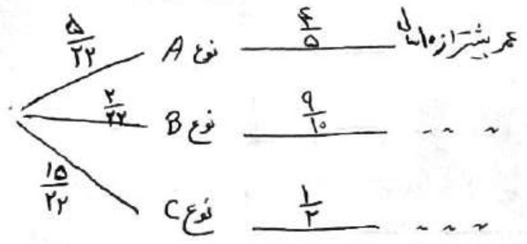
فضای نمونه‌ای $S = \{$ ر ، (پ ر ر ر) (پ ر ر پ) (پ ر پ ر) (پ ر پ پ) (پ پ ر ر) (پ پ ر پ) (پ پ پ ر) (پ پ پ پ) $\}$

اینکه دقیقاً یک رو بیاید: $A = \{$ ر ، (پ ر پ پ) (پ پ ر پ) (پ پ پ ر) $\}$

$$P(A) = \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)} + \left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)$$

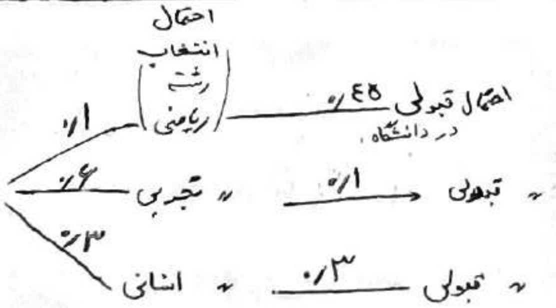
سکه اول رو بیاید دیگر پرتاب نداریم — یا — سکه اول پشت و دومی رو و سومی پ و چهارمی پشت — یا — یا

پاسخ ۴ ←



احتمال $P(\text{عمر بیشتر از ۱۰ سال}) = \left(\frac{5}{22}\times\frac{4}{5}\right) + \left(\frac{2}{22}\times\frac{9}{10}\right) + \left(\frac{15}{22}\times\frac{1}{2}\right) = \frac{40+18+75}{220} = \boxed{\frac{133}{220}}$

پاسخ ۵ ←



احتمال $P(\text{قبولی در دانشگاه}) = \underbrace{(0/45\times 0/1)}_{\text{رشته ریاضی و قبولی در دانشگاه}} + \underbrace{(0/1\times 0/6)} + \underbrace{(0/3\times 0/3)} = \frac{45+60+90}{1000} = \boxed{\frac{195}{1000}}$

یا — یا

پاسخ ۶ ←

الف)

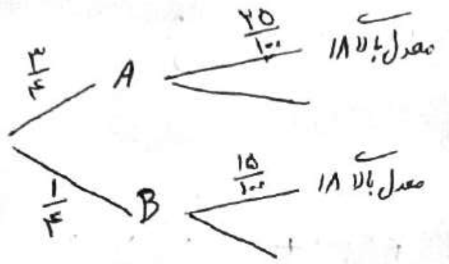
فرض کنیم تعداد دانش آموزان $B = x$

تعداد دانش آموزان $A = 3x$

$\xrightarrow{\text{تعداد کل دانش آموزان}}$ تعداد کل $= x + 3x = 4x$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{x}{4x} = \boxed{\frac{1}{4}} \quad , \quad P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3x}{4x} = \boxed{\frac{3}{4}}$$

ب)

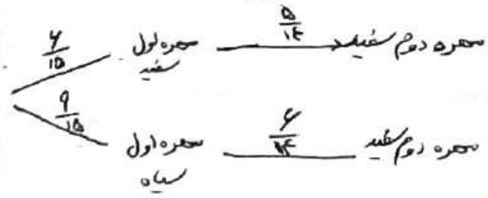


$$P(\text{معدل بالای ۱۸}) = \underbrace{\left(\frac{3}{4} \times \frac{25}{100}\right)}_{\text{معدل بالای ۱۸ و از کلاس A}} \underbrace{+}_{\text{یا}} \underbrace{\left(\frac{1}{4} \times \frac{15}{100}\right)}_{\text{معدل بالای ۱۸ و از کلاس B}} = \boxed{\frac{90}{400}}$$

نکته پایانی: هرگاه در انتخاب‌های متوالی یکی از انتخاب‌ها مورد پرسش قرار نگیرد یعنی از نتیجه یک آزمایش چیزی نگویند ما باید خودمون حالتهای ممکن را برای اون درنظر بگیریم **یا** اینکه فکر کنیم اصلاً اون آزمایش رخ نداده و احتمال موارد گفته شده را حساب کنیم.

تست کنکور: در جعبه‌ای ۶ مهره سفید و ۹ مهره سیاه موجود است. دو مهره متوالیاً و بدون جایگذاری از آن بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال بدون توجه به اولین مهره دومین مهره خارج شده سفید است؟

پاسخ: **روش اول:** تمام حالتهای مهره اول را درنظر بگیریم



$$\text{احتمال } P(\text{مهره دوم سفید}) = \left(\frac{6}{15} \times \frac{5}{14}\right) \overset{\text{یا}}{+} \left(\frac{9}{15} \times \frac{6}{14}\right) = \frac{84}{210} = \boxed{\frac{2}{5}}$$

روش دوم: چون در مورد رنگ مهره اول حرفی نزده پس فرض کنیم مهره‌ای خارج نشده بنابراین فقط احتمال سفید بودن بودن مهره را حساب می‌کنیم

$$P(\text{مهره سفید}) = \frac{6}{15} = \boxed{\frac{2}{5}}$$

تست کنکور ۹۸: در جعبه‌ای ۵ مهره سفید و ۶ مهره سیاه است ابتدا یک مهره را بدون رؤیت خارج می‌کنیم سپس از بین بقیه مهره‌ها، ۲ مهره بیرون می‌کشیم با کدام احتمال هردو مهره اخیر سفید است؟

$\frac{5}{22}$ $\frac{2}{11}$ ✓ $\frac{4}{11}$ $\frac{1}{11}$

مشابه: تست بالا طبق نکته حل کنید