((بسم الله الرحمن الرحیم))

فهرست مطالب: صفحه

علیرضا خرّمی

تماس:

۰۹۱۱۸۳۲۱۰۴۷

۰۹۰۳۷۲۴۱۰۷۶

بخش اول:

درسنامه

فصل اول:

تابع

نمودار شناسی:

❖ در ابتدای این فصل، لازم است با تمام نمودار هایی که در کنکور به آن نیاز داریم آشنا شویم :

۱) توابع خطی و ثابت:

۲) توابع رادیکالی:

۳) توابع درجه ۲:

۴) توابع جزء صحیح:

۵) توابع قدر مطلقی:

۶) توابع هموگرافیک:

۷) توابع نمایی و لگاریتمی:

توابع چند جمله‌ای:

در سال‌های گذشته با تابع خطی آشنا شدیم. هر تابع با ضابطهٔ $f(x)=ax+b$ را یک تابع خطی می‌نامیم. اگر $a=0$، تابع به‌صورت $f(x)=b$ در می‌آید که آن را تابع ثابت می‌نامیم. توابع ثابت و توابع خطی، مثال‌هایی از توابع چند جمله‌ای با درجه‌های ۰ و ۱ هستند.

هر تابع به‌صورت $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0$ را که در آن a_n، a_{n-1}، ...، a_2، a_1، a_0 اعداد حقیقی و n یک عدد صحیح نامنفی و $a_n\neq 0$ باشد، یک تابع چند جمله‌ای از درجهٔ n می‌نامیم. دامنهٔ توابع چند جمله‌ای مجموعهٔ اعداد حقیقی است.

تمرین: درجه توابع زیر را بیابید.

۱) $y=۲x-۳$

۲) $y=x^۲-۲x$

۳) $y=x^۳+۳x^۲+۳x$

۴) $y=۵$

۵) $y=\sqrt{۲}x^۳+۳$

۶) $y=x(۱-x)^۲$

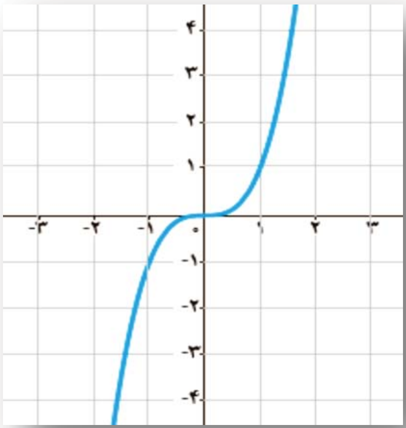
۷) $y=x^۲(۲-x)^۳$

۸) $y=(x^۳-۱)^۲(۲x+۱)^۲$

تمرین : اگر درجه توابع $g(x),f(x)$ به ترتیب ۲ و ۵ باشد، درجه تابع $f^۲\times g$ را بیابید.

تابع درجهٔ ۳:

تابع چند جمله‌ای با ضابطهٔ $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\,(a\neq 0)$ یک تابع درجهٔ ۳ است که در اینجا به‌طور خاص تابع $f(x)=x^3$ را بررسی می‌کنیم. دامنه و برد این تابع $\mathbb{R}$ است. ابتدا به کمک نقطه‌یابی نمودار این تابع را رسم می‌کنیم :



تمرین: نمودار توابع زیر را رسم کنید و سپس دامنه و برد آن ها را بیابید.

۱) $y=x^3+1$

۲) $y=x^3-2$

۳) $y=(x+1)^3$

۴) $y=(x-2)^3$

۵) $y=(x+2)^3-1$

۶) $y=(x-1)^3+2$

۷) $y=(x+۱)^۳-۱$

۸) $y=(x-۱)^۳+۱$

۹) $y=-x^۳$

۱۰) $y=-x^۳+۱$

۱۱) $y=-x^۳-۱$

۱۲) $y=-(x+۱)^۳$

تمرین: نمودار توابع زیر را رسم کنید و سپس دامنه و برد آن ها را بیابید.

۱) $y=x^۳+۳x^۲+۳x$

۲) $y=x^۳-۳x^۲+۳x$

تمرین: توابع $f(x)=x^3$ و $g(x)=x^2$ مفروضند.

الف) در بازه $[0,1]$ کدام تابع بالاتر قرار می گیرد؟

ب) در بازه $[1,2]$ چطور؟

تمرین : کدام درست و کدام نادرست است؟

الف) درجه تابع $f(x)=x^2(1-x)^3$ برابر ۳ است.

ب) تابع $f(x)=x^3$ در بازه $[0,1]$ از تابع $g(x)=x^2$ پایینتر است.

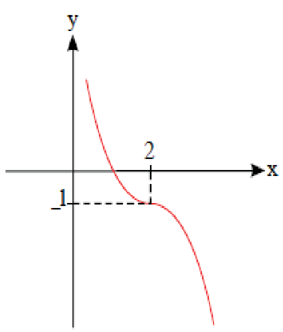
ج) تابع $f(x)=x^3$ در بازه $[1,2]$ از تابع $g(x)=x^2$ بالاتر است.

تست: در مورد تابع $f(x)=\left|x^3\right|$ کدام درست است؟

۱) صعودی　　۲) نزولی　　۳) وارون ناپذیر　　۴) یک به یک

تست: نمودار تابع $f(x)=-x^3+ax^2+bx+c$ به صورت مقابل است. حاصل $a-b+2c$ کدام است؟

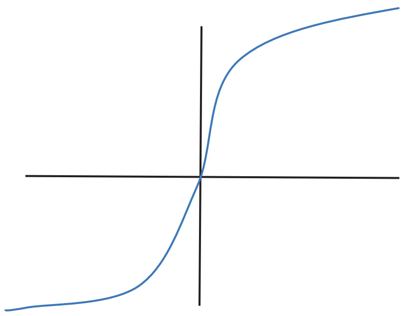
۱) -36　　۲) 32　　۳) 36　　۴) -32



نکته:

۱) با توجه به تابع $f(x)=x^{3}$ واضح است که این تابع یک به یک است، در نتیجه وارون پذیر است. وارون آن تابع $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}$ است. (چرا؟)

۲) نمودار تابع $f(x)=\sqrt[3]{x}$ به صورت زیر است:



تمرین: تابع $y=x^{3}+3x^{2}+3x$ مفروض است.

الف) وارون پذیری آن را بررسی و سپس وارون آن را بدست آورید.

ب) نمودار وارون آن را رسم کنید.

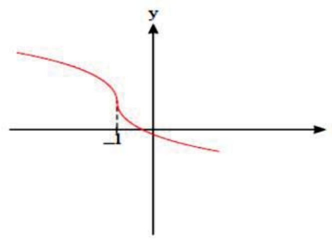
تمرین: تابع $y=x^{3}-3x^{2}+3x$ مفروض است.

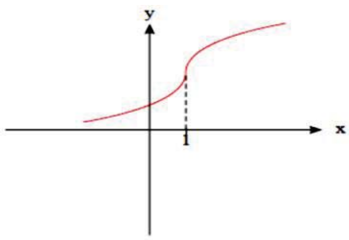
الف) وارون پذیری آن را بررسی و سپس وارون آن را بدست آورید.

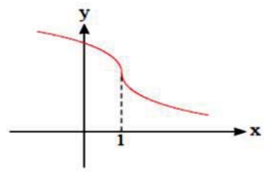
ب) نمودار وارون آن را رسم کنید.

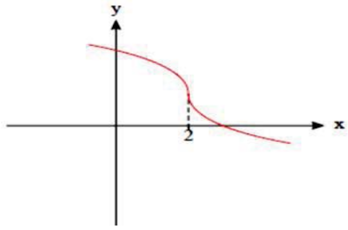
تمرین: نمودار تابع $y=\sqrt[3]{-x}$ را رسم کنید.

تست: نمودار تابع $f(x)=-\sqrt[3]{x-1}+2$ کدام است؟

① 

② 

③ 

④ 

****

نکات مهم تابع درجه ۳

تمرین: نمودار تابع $f(x)=۲x^۳-۳x^۲-۱۲x+۱$ را رسم کنید.

تست: کدام تابع وارون پذیر است؟

۱) $y=۲x^۳-۳x^۲-۱۲x+۱$
۲) $y=x^۳-۳x$
۳) $y=x^۳+۳x+۱$
۴) $y=-x^۳-۳x$

انتقال توابع:

۱) برای رسم نمودار $y=f(x)\pm k$، نمودار $y=f(x)$ را به اندازه واحد k به سمت بالا و یا پایین انتقال می دهیم. (بستگی به علامت k دارد.)

۲) برای رسم نمودار $y=f(x\pm k)$، نمودار $y=f(x)$ را به اندازه واحد k به سمت چپ و یا راست انتقال می دهیم.

۳) برای رسم نمودار $y=kf(x)$، عرض نقاط نمودار k برابر می شود، به عبارت دیگر:

الف) اگر $k\succ ۱$، نمودار f در امتداد محور عرض ها با ضریب k کشیده می شود.(انبساط عمودی)

ب) اگر $۰\prec k\prec ۱$، نمودار f در امتداد محور عرض ها با ضریب k جمع می شود.(انقباض عمودی)

۴) برای رسم نمودار $y=f(kx)$، طول نقاط نمودار $\frac{۱}{k}$ برابر می شود، به عبارت دیگر:

الف) اگر $k\succ ۱$، نمودار f در امتداد محور طول ها با ضریب $\frac{۱}{k}$ جمع می شود.(انقباض افقی)

ب) اگر $۰\prec k\prec ۱$، نمودار f در امتداد محور طول ها با ضریب $\frac{۱}{k}$ کشیده می شود.(انبساط افقی)

نکته قرینه:

۵) برای رسم نمودار $y=-f(x)$، قرینه نمودار $y=f(x)$ را نسبت به محور طول ها رسم می کنیم.

۶) برای رسم نمودار $y=f(-x)$، قرینه نمودار $y=f(x)$ را نسبت به محور عرض ها رسم می کنیم.

نکته تستی:

۱) دامنه / داخل / محور x ها / چپ و راست / افقی

۲) برد / بیرون / محور yها / بالا و پایین / عمودی

نکته تستی تابع چاق و لاغر :

تمرین: تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را ۲ واحد به راست و ۳ واحد به پایین منتقل می کنیم. ضابطه جدید را بیابید.

تمرین: تابع $f(x)=\sqrt{x-1}+2$ را ۳ واحد به چپ و یک واحد به بالا منتقل می کنیم. ضابطه جدید را بیابید.

تمرین: تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را ۳ واحد به چپ و سپس با ضریب ۲ در راستای افقی منبسط می کنیم. ضابطه جدید را بیابید.

تمرین: تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را با ضریب ۲ در راستای افقی منبسط و سپس ۳ واحد به چپ انتقال داده ایم. ضابطه جدید را بیابید.

تمرین: تابع $f(x)=|x|$ را دو واحد به چپ و سپس با ضریب $\frac{1}{2}$ در راستای محور xها منقبض کرده و در پایان با ضریب ۲ در راستای محور yها منبسط می کنیم. ضابطه جدید را بیابید.

تمرین: تابع $y=-|x+1|$ را دو واحد به راست انتقال داده و سپس قرینه آن را نسبت به محور xها رسم و در پایان سه واحد به بالا منتقل می کنیم. ضابطه جدید را بیابید.

تمرین: تابع $y=x^2-2x$ را دو واحد به راست و سه واحد به بالا منتقل می کنیم. ضابطه جدید را بیابید.

تمرین: تابع $y=4x-x^2$ را دو واحد به چپ و سپس با ضریب $\frac{1}{2}$ در راستای محور xها منقبض کرده و در پایان با ضریب ۲ در راستای محور yها منبسط می کنیم. ضابطه جدید را بیابید.

تمرین: تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را دو واحد به چپ و سپس با ضریب ۲ در راستای محور xها منبسط کرده و در پایان با ضریب $\frac{1}{3}$ در راستای محور yها منقبض می کنیم. ضابطه جدید را بیابید.

تست: نمودار تابع $y=f(x-2)+1$ را نسبت به محور xها و yها قرینه می کنیم و سه واحد به چپ منتقل می کنیم و در انتها با ضریب ۴ آن را در راستای عمودی منبسط می کنیم. ضابطه تابع کدام است؟

۱) $y=-4f(-x-5)-1$
۲) $y=-4f(-x-5)-4$
۳) $y=-4f(-x+1)+4$
۴) $y=-4f(-x+1)-16$

تست: نمودار تابع $y=-x^2+2x+5$ را سه واحد به طرف xهای مثبت و دو واحد به طرف yهای منفی منتقل می کنیم. نمودار جدید در کدام بازه، بالای نیمساز ربع اول است؟ ریاضی ۹۸

۱) $(3,4)$
۲) $(2,5)$
۳) $(3,5)$
۴) $(2,6)$

تست: قرینه نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ را نسبت به محور yها تعیین کرده سپس منحنی حاصل را ۴ واحد به راست منتقل می کنیم. منحنی اخیر و منحنی اصلی نسبت به کدام خط متقارن هستند؟ ریاضی ۹۹

۱) $x=1$
۲) $x=1/5$
۳) $x=2$
۴) $x=2/5$

تست: نمودار تابع $f(x)=4x-x^{2}$ را در امتداد محور xها، ۲ واحد در جهت منفی انتقال می دهیم. فاصله نقطه برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f، از مبدا مختصات کدام است؟ تجربی ۱۴۰۱

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) $2\sqrt{5}$　　۴) $\sqrt{10}$

تمرین: اگر دامنه تابع $f(x)$ بازه $[-1,2]$ باشد، دامنه تابع $2f(2x-1)$ را بیابید.

تمرین: اگر دامنه تابع $f(x)$ بازه $[-2,3)$ باشد، دامنه تابع $-f(1-\frac{x}{2})+2$ را بیابید.

تمرین: اگر برد تابع $f(x)$ بازه $(-1,4]$ باشد، برد تابع $\frac{1}{2}f(3x)+2$ را بیابید.

تست: اگردامنه تابع $f(x)$ بازه $[-1,5)$ باشد، دامنه تابع $\frac{1}{3}f(2x-1)+2$ کدام است؟

۱) $[0,2)$　　۲) $[-1,3)$　　۳) $[0,3)$　　۴) $[0,6)$

تمرین: اگر دامنه تابع $f(2x)+1$ بازه $[-2,3)$ باشد، دامنه تابع $f(x)$ را بیابید.

تمرین: اگر دامنه تابع $f(x-1)+2$ بازه $[1,5)$ باشد، دامنه تابع $f(x)$ را بیابید.

تمرین: اگر برد تابع $\frac{1}{2}f(x-1)+2$ بازه $(-1,3]$ باشد، برد تابع $f(x)$ را بیابید.

تمرین: اگر نقطه $(3,6)$ متعلق به تابع $f(x)$ باشد، نقطه متناظر آن در تابع $\frac{1}{3}f(2x-1)+2$ کدام است؟

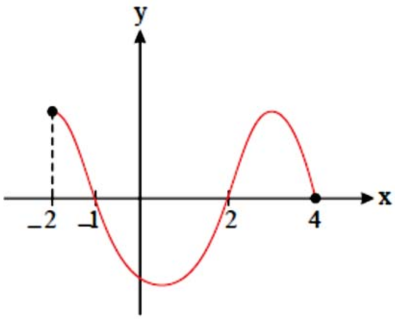
تمرین: اگر دامنه تابع $f(x-1)+2$ بازه $[1,5)$ باشد، دامنه تابع $f(2x)+2$ را بیابید.

تمرین: اگر دامنه تابع $f(\frac{1}{2}x+1)+2$ بازه $[-2,4]$ باشد، دامنه تابع $3f(1-x)$ را بیابید.

تمرین: اگر برد تابع $3f(\frac{1}{2}x)+2$ بازه $[-2,4]$ باشد، برد تابع $-f(1-x)+1$ را بیابید.

تست: شکل مقابل نمودار تابع $f(x-۲)$ است . دامنه تابع $\sqrt{xf(x)}$ کدام است؟

۱) $[-۳,۲]$ ۲) $[۲,۴]$ ۳) $[-۲,۳]$ ۴) $[۰,۱]\cup[۴,۶]$



تمرین: اگر دامنه تابع $f(x)$ بازه $[-۲,۱]$ باشد، دامنه تابع $f(۲x)+f(۱-x)$ را بیابید.

تمرین: کدام درست و کدام نادرست است؟

۱) دامنه تابع $f(x)$ همان دامنه تابع $kf(x)$ است.

۲) دامنه تابع $f(x)$ همان دامنه تابع $f(kx)$ است.

۳) دامنه تابع $f(\frac{x}{۲})$ همان دامنه تابع $f(x)$ است.

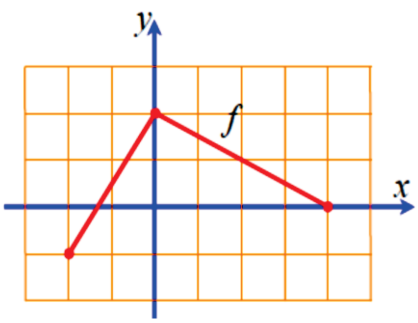
۴) برد تابع $f(x)$ همان برد تابع $kf(x)$ است.

۵) برد تابع $f(x)$ همان برد تابع $f(kx)$ است.

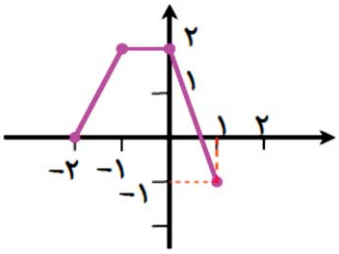
۶) برد تابع $kf(x)$ همان برد تابع $f(x)$ است.

۷) اگر $k \succ ۱$، نمودار $f(kx)$ از انبساط افقی نمودار $f(x)$ در راستای محور xها به دست می آید.

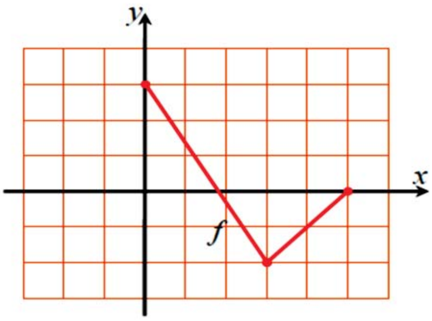
تمرین: شکل مقابل نمودار تابع $f(x)$ است . نمودار تابع $y=f(۲x-۱)+۱$ را رسم کنید و سپس دامنه و برد آن را بیابید.



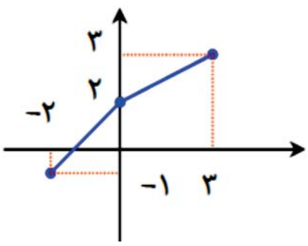
تمرین: شکل مقابل نمودار تابع $f(x)$ است . نمودار تابع $y=2f(x-1)$ را رسم کنید و سپس دامنه و برد آن را بیابید.



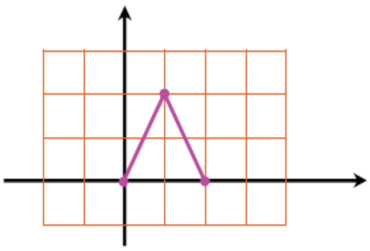
تمرین: شکل مقابل نمودار تابع $f(x)$ است . نمودار تابع $y=-f(3-x)$ را رسم کنید و سپس دامنه و برد آن را بیابید.



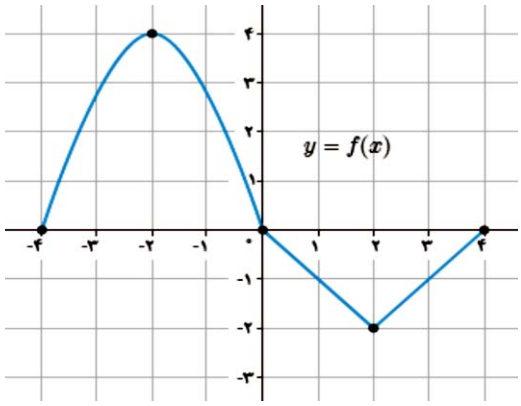
تمرین: شکل مقابل نمودار تابع $f(x)$ است . نمودار تابع $y=f(\frac{x}{2})-2$ را رسم کنید و سپس دامنه و برد آن را بیابید.



تمرین: شکل مقابل نمودار تابع $f(x)$ است . نمودار تابع $y=-2f(\frac{1}{3}x)$ را رسم کنید و سپس دامنه و برد آن را بیابید.



تمرین: شکل مقابل نمودار تابع $f(x)$ است. نمودار توابع $y=f(2x), y=-2f(-\frac{1}{2}x)$ را رسم کنید.



تمرین: جای خالی را پر کنید.

الف) نمودار $y=-f(x)$، قرینه نمودار $y=f(x)$ نسبت به محور .... است.

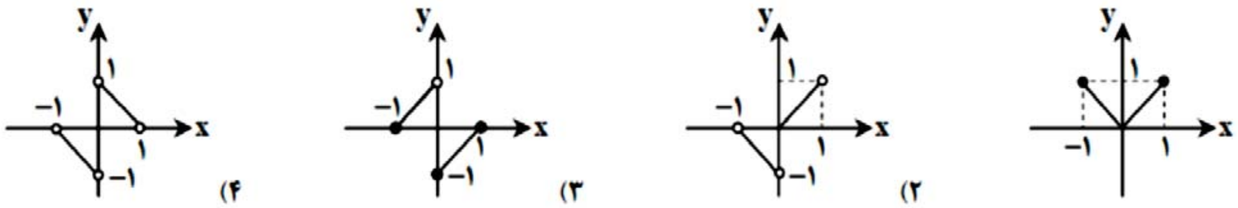
ب) نمودار $y=f(-x)$، قرینه نمودار $y=f(x)$ نسبت به محور .... است.

ج)درجه تابع $y=x^2(1-x)^5$ برابر .... است.

د) وارون تابع $y=x^3$ برابر .... است.

ر) اگر $f(x)=2x^3-1$، آنگاه $f^{-1}(15)$ برابر .... است.

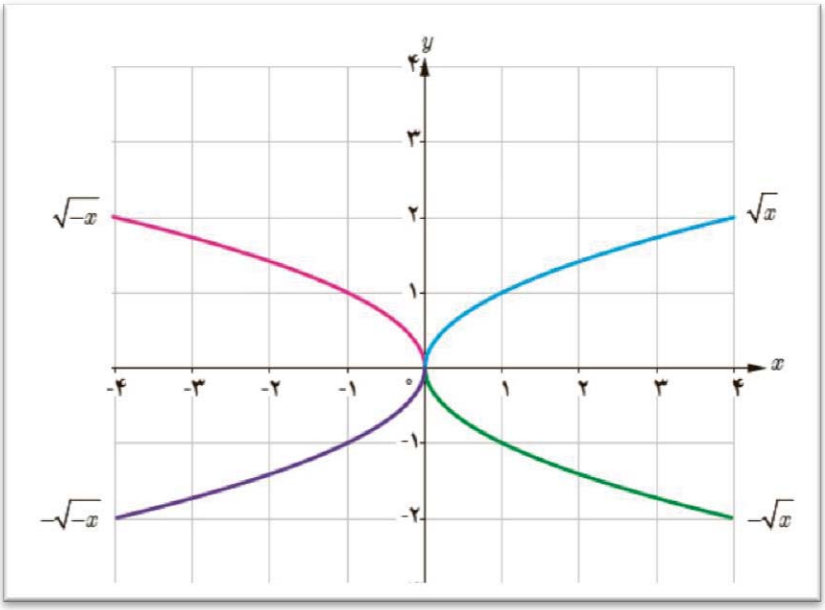
تست: نمودار کدام تابع در شرط $f(x)+f(-x)=0$ صدق می کند؟



۱)　۲)　۳)　۴)

تمرین : تابع $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\geq 1 \\ 2x+1 & x<1 \end{cases}$ را دو واحد به راست و سپس سه واحد به بالا انتقال داده ایم. ضابطه جدید کدام است؟

نکته:



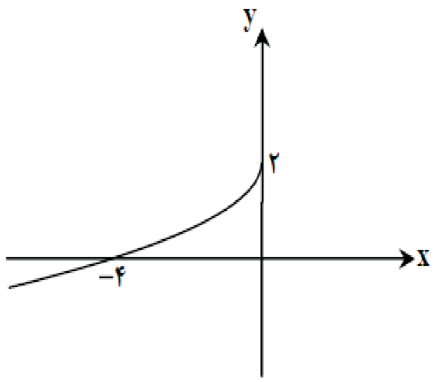
تست: نمودار مقابل از قرینه یابی و انتقال تابع $y=\sqrt{x}$ بدست آمده است. ضابطه آن کدام است؟

۱) $y=۴-\sqrt{-x+۴}$

۲) $y=۲-\sqrt{۲-x}$

۳) $y=۲-\sqrt{-x+۴}$

۴) $y=۲-\sqrt{-x}$



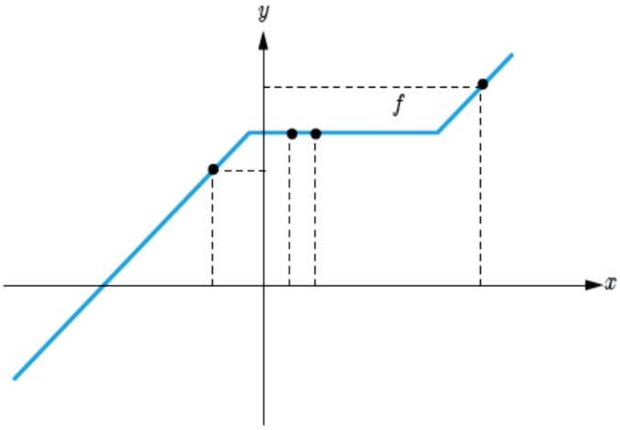
تمرین: نحوه رسم تابع $f(۱-\frac{x}{۲})$ را از روی تابع $f(x)$ بیان کنید.

تمرین: نحوه رسم تابع $y=۲\sqrt{x+۱}$ را از روی تابع $y=\sqrt{x}$ بیان کنید.

تمرین: الف) نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را در بازه $[۰,۴]$ رسم کنید.

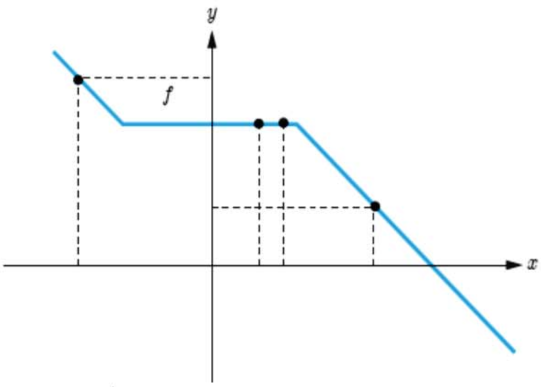
ب) به کمک نمودار $f(x)$ نمودار تابع $g(x)=۲f(x-۱)$ را رسم کرده و سپس دامنه و برد g را بیابید.

توابع صعودی و نزولی :



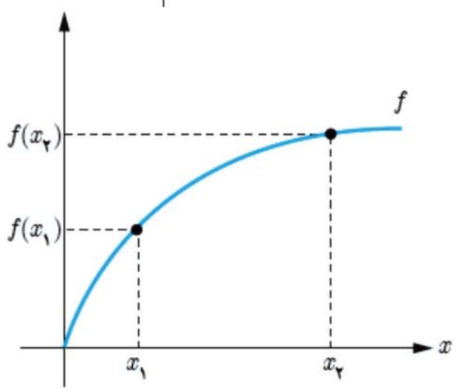
تابع صعودی

اگر برای هر دو نقطهٔ x_1 و x_2 از مجموعهٔ A $(A\subseteq D_f)$ که $x_1<x_2$،
داشته باشیم $f(x_1)\leq f(x_2)$، آنگاه f را تابعی صعودی می‌نامیم.



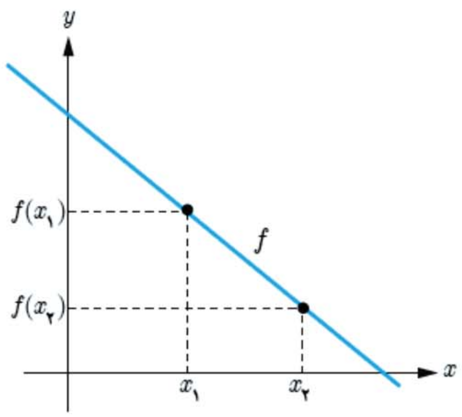
تابع نزولی

اگر برای هر دو نقطهٔ x_1 و x_2 از مجموعهٔ A $(A\subseteq D_f)$ که $x_1<x_2$،
داشته باشیم $f(x_1)\geq f(x_2)$، آنگاه f را تابعی نزولی می‌نامیم.



تابع اکیداً صعودی

اگر برای هر دو نقطهٔ x_1 و x_2 از مجموعهٔ A $(A\subseteq D_f)$ که $x_1<x_2$،
داشته باشیم $f(x_1)<f(x_2)$، آنگاه f را تابعی اکیداً صعودی می‌نامیم.



تابع اکیداً نزولی

اگر برای هر دو نقطهٔ x_1 و x_2 از مجموعهٔ A $(A\subseteq D_f)$ که $x_1<x_2$،
داشته باشیم $f(x_1)>f(x_2)$، آنگاه f را تابعی اکیداً نزولی می‌نامیم.

نکته:

۱) به توابع صعودی یا نزولی، توابع یکنوا گوییم.

۲) به توابع اکیدا صعودی یا اکیدا نزولی، توابع اکیدا یکنوا گوییم.

۳) اگر تابعی که در بازه ای نه صعودی و نه نزولی باشد، تابع غیر یکنوا گوییم.

۴) تابع ثابت هم صعودی است و هم نزولی.

۵) هر تابع اکیدا یکنوا، یکنوا است ولی عکس آن برقرار نیست.

۶) هر تابع اکیدا یکنوا، یک به یک است و در نتیجه وارون پذیر است.

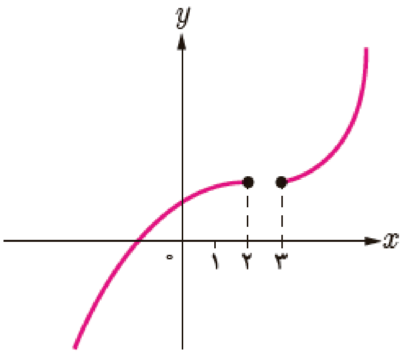
۷) اگر f در یک بازه صعودی (نزولی) باشد، آنگاه $-f$ نزولی (صعودی) است.

۸) هرگاه توابع f,g هر دو صعودی باشند، آنگاه $f+g$ صعودی است. (همین طور برای نزولی)

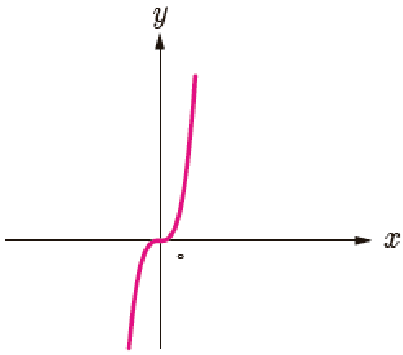
۹) اگر تابع $f(x)$ اکیدا صعودی باشد، آنگاه $f^{-1}(x)$ اکیدا صعودی است.

۱۰) اگر تابع $f(x)$ اکیدا نزولی باشد، آنگاه $f^{-1}(x)$ اکیدا نزولی است.

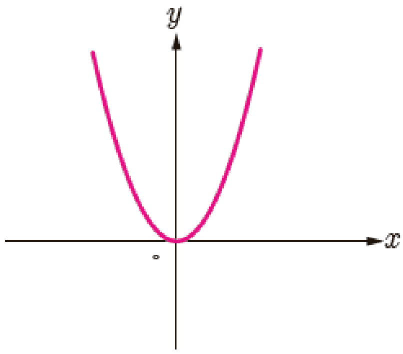
تمرین: توابع زیر در چه بازه هایی صعودی و یا نزولی هستند؟



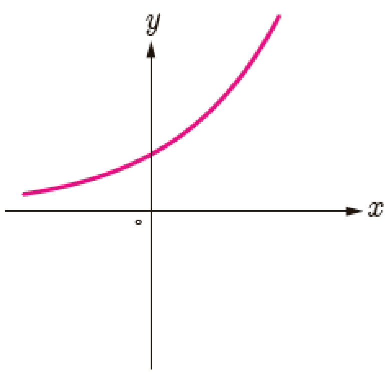
(الف)



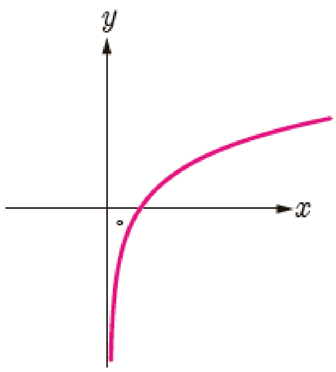
(ب)



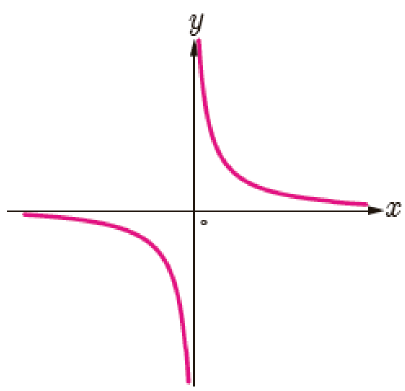
(پ)



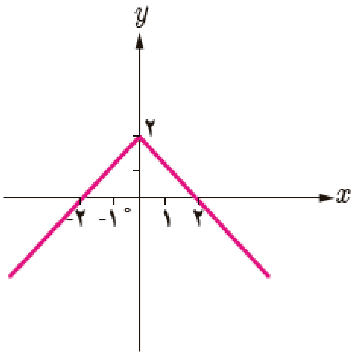
(ت)



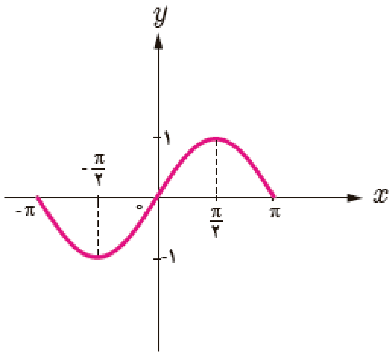
(ث)



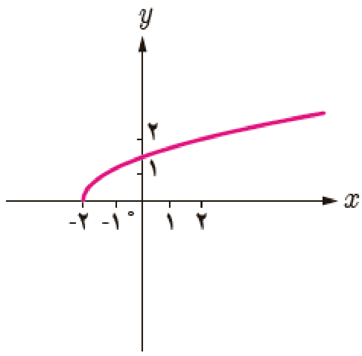
(ج)



(چ)



(ح)



(خ)

تمرین: نمودار توابع زیر را رسم کنید و سپس مشخص کنید که در چه بازه ای صعودی و یا نزولی هستند؟

۱) $f(x)=۲x-۳$

۲) $y=-x$

۳) $y=\sqrt{x-۱}+۲$

۴) $y=\sqrt{۲-x}$

۴) $f(x)=-\sqrt{x}+۱$

۵) $y=\sqrt{x+۲}-۳$

۶) $y=(x-۱)^۲$

۷) $y=(x+۲)^۲-۳$

۸) $f(x)=(x-۲)^۲$

۹) $y=-x^۲+۱$

۱۰) $y=x^۲+۲x$

۱۱) $y=-x^۲-۱$

۱۲) $f(x)=x^۲+۲x-۳$

۱۳) $y=x^۳+۱$

۱۴) $y=(x-۱)^۳+۲$

۱۵) $y=(x+۲)^۳-۳$

۱۶) $y=-x^۳-۱$

۱۷) $y=x^۳+۳x^۲+۳x$

۱۸) $f(x)=x^۳-۳x^۲+۳x$

۱۹) $y=۳$

۲۰) $f(x)=\frac{۱}{x}$

۲۱) $y=-\frac{۱}{x}$

۲۲) $y=\frac{x-۱}{x+۲}$

۲۳) $y=۲^{x}$

۲۴) $f(x)=۲^{-x+۱}$

۲۵) $y=(\frac{۱}{۳})^{x+۲}$

۲۶) $y=(\frac{۱}{۲})^{۱-x}$

۲۷) $y=\log x$

۲۸) $y=-\log(x+۱)$

۲۹) $y=\log_{\frac{۱}{۲}}(x-۱)$

۳۰) $f(x)=-\log_{\frac{۱}{۳}}(x-۱)$

۳۱) $y=-\log_{۲}x+۲$

۳۲) $f(x)=|x|$

۳۳) $f(x)=|x+۲|-۱$

۳۴) $f(x)=-|x+۱|$

۳۵) $y=|x-۲|+۱$

۳۶) $f(x)=|x^۲-۱|$

۳۷) $y=||x|-۲|$

۳۸) $y=|x-۱|+|x+۲|$

۳۹) $y=|x-۱|-|x+۲|$

۴۰) $y=|x|+|x-۱|$

۴۱) $y=|x^۳|$

۴۲) $f(x)=x+|x|$

۴۳) $y=x-|x|$

۴۴) $f(x)=x|x|$

۴۵) $f(x)=x^{۲}|x|$

۴۶) $f(x)=x|x-۱|$

۴۷) $y=x^{۲}|x-۱|$

۴۸) $f(x)=x|x^{۲}-۱|$

۴۹) $f(x)=-x^{۲}|x^{۲}-۱|$

۵۰) $y=-x|x-۱|$

۵۲) $f(x)=|x^{۲}-۴|$

تمرین: کدام درست و کدام نادرست است؟

۱) تابع $f(x)=|x|$ در دامنه خود اکیدا صعودی است.

۲) هرتابع که در یک بازه اکیدا صعودی باشد ، صعودی هم است.

۳) هر تابع که در یک بازه نزولی باشد، اکیدا نزولی هم است.

۴) تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ در دامنه خود یکنوا است.

۵) تابعی وجود ندارد که هم صعودی و هم نزولی باشد.

۶) تابع $f(x)=۲^{-x}$ در دامنه خود اکیدا نزولی است.

۷) تابع $f(x)=x^{۲}-۲x$ در بازه $[۱,+\infty)$ اکیدا صعودی است.

۸) تابع $f(x)=-x^{۳}+۲$ در دامنه خود اکیدا صعودی است.

۹) تابع $f(x)=\sqrt{x}$ در دامنه خود اکیدا صعودی است.

۱۰) بیشمار تابع وجود دارد که هم صعودی و هم نزولی است.

تمرین: جای خالی را پر کنید.

۱) به تابعی که در یک بازه صعودی یا نزولی باشد، تابع .... گوییم.

۲) به تابعی که در یک بازه هم صعودی و هم نزولی باشد، تابع .... گوییم.

۳) تابع $f(x)=x^{۲}|x|$ در بازه $(-\infty,a]$ نزولی است، حداکثر مقدار a برابر .... است.

۴) تابع $f(x)=ax+b$ هم صعودی و هم نزولی است. در این صورت مقدار a برابر .... است.

تست: کدام تابع یکنوا نمی باشد؟

۱) $y=x+|x|$ ۲) $y=x-|x|$ ۳) $y=x|x|$ ۴) $y=x^{۲}|x|$

تمرین: توابع $f(x)$ و $g(x)$ در دامنه خود به ترتیب صعودی و نزولی می باشند. در این صورت یکنوایی توابع زیر را مشخص کنید.

۱) $f(x)-g(x)$

۲) $f(-x)+g(x)$

۳) $f(x)-g(-x)$

۴) $f(x)+g(-x)$

۵) $f(g(x))$

۶) $g(f(-x))$

تمرین: نمودار تابع زیر را رسم کنید و سپس مشخص کنید که در چه بازه ای صعودی و یا نزولی است؟

$$y=\begin{cases} x^۲ & x\geq ۱ \\ ۲x-۱ & x\prec ۱ \end{cases}$$

تمرین: نمودار تابع $y=(x+۱)^۳$ را رسم کنید و سپس مشخص کنید که در چه بازه ای صعودی و یا نزولی است؟

تمرین: توابع f و g در دامنه خود به ترتیب اکیدا صعودی و اکیدا نزولی می باشند. در این صورت یکنوایی تابع $f^{-۱}(\frac{۱}{g})$ را مشخص کنید.

تمرین: نمودار تابع زیر را رسم کنید و سپس مشخص کنید که در چه بازه ای صعودی و یا نزولی است؟

$$y=\begin{cases} -۲x-۳ & x \prec -۴ \\ ۳ & -۴ \le x \prec ۲ \\ ۳x-۲ & x \ge ۲ \end{cases}$$

تست: اگر تابع $f=\{(۱,۴),(۲,۳m+۱),(۳,۱۳),(۴,۶m)\}$ اکیدا صعودی باشد، حدود m کدام است؟

۱) $\frac{۱۳}{۶} \prec m \prec ۴$
۲) $۱ \prec m \prec ۴$
۳) $\frac{۱۳}{۶} \prec m \prec ۶$
۴) $۲ \prec m \prec ۴$

تمرین: در مورد یکنوایی تابع $y=\sqrt{x-۲}+\sqrt{۲-x}$ چه می توان گفت؟

تمرین: اگر $\log(x+۱) \le \log(۲x-۳)$، حدود x را بیابید.

تمرین: اگر $(\frac{۱}{۲})^{۳x-۲} \le \frac{۱}{۶۴}$، حدود x را بیابید.

تست: اگر تابع f اکیدا نزولی باشد، دامنه تابع $g(x)=\sqrt{f(x-3)-f(5-3x)}$ کدام است؟

۱) $[2,+\infty)$ ۲) $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$ ۳) $(-\infty,2]$ ۴) $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$

تست: در بازه ای که تابع $f(x)=|x-1|+|x+2|$ اکیدا نزولی است، نمودار آن با نمودار تابع $g(x)=2x^2-x-10$ در چند نقطه مشترک هستند؟ سراسری ۹۷

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) فاقد نقطه مشترک

تمرین: در مورد یکنوایی تابع $y=x-[x]$ چه می توان گفت؟

تمرین: در مورد یکنوایی تابع $y=\sin^2 x+\cos^2 x$ چه می توان گفت؟

تمرین: اگر تابع $f(x)=۳^{-x}$ باشد، دامنه تابع $g(x)=\sqrt{f(x^۲)-f(۲x)}$ را بیابید.

تست: اگر تابع f اکیدا نزولی باشد و داشته باشیم $f(-۲)=۰$، دامنه تابع $\sqrt{xf(x)}$ کدام است؟

۱) $[-۲,+\infty)$ ۲) $(-\infty,-۲]$ ۳) $[-۲,۰)$ ۴) $[-۲,۰]$

تست: تابع $f(x)=mx+b-۳x$ هم صعودی و هم نزولی است، مقدار m کدام است؟

۱) صفر ۲) ۳ ۳) -۳ ۴) $\frac{۱}{۳}$

تست: تابع $f(x)=(-۹+k^۲)x^۳+۵$ اکیدا نزولی است، مجموع مقادیر صحیح k کدام است؟ تجربی ۱۴۰۱

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۶

تست: تابع $f(x)=x^{۲}\sqrt{x^{۲}}$ در کدام بازه اکیدا نزولی است؟

۱) $[۱,+\infty)$　　۲) $[۰,+\infty)$　　۳) $(-\infty,۰]$　　۴) $\mathbb{R}$

تمرین: به ازای کدام مقدار a، تابع $f(x)=\begin{cases} x^{۲}+۱ & x\geq ۱ \\ ۲x+a & x\prec ۱ \end{cases}$ اکیدا صعودی است؟

ترکیب توابع:

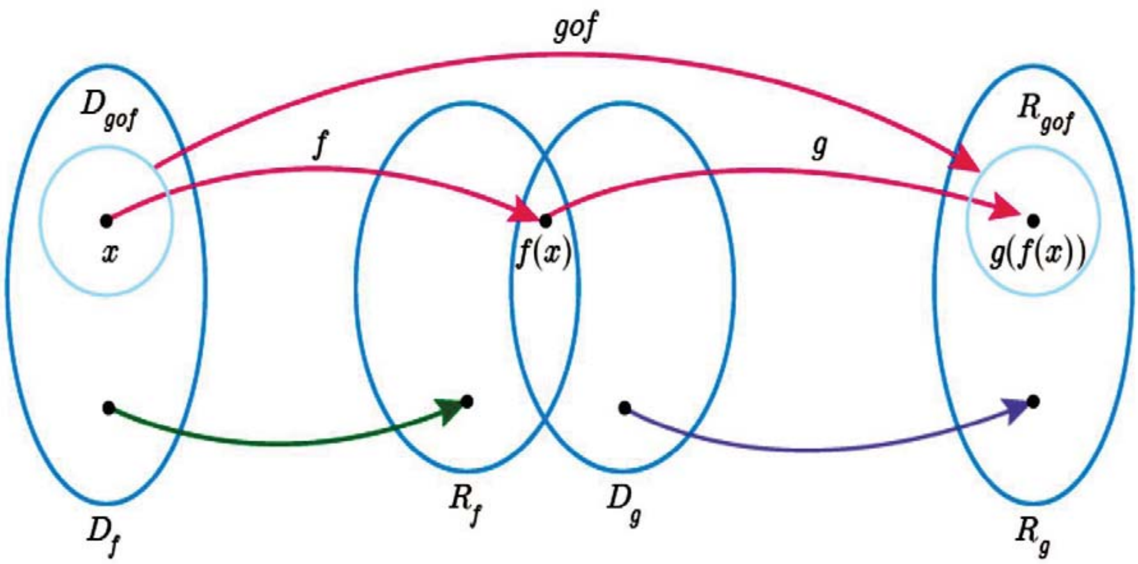
اگر f و g دو تابع باشند به‌طوری که برد تابع f و دامنهٔ تابع g اشتراک ناتهی داشته باشند، تابع $g(f(x))$ را با نماد $(gof)(x)$ نمایش می‌دهیم و تابع gof را تابع مرکب می‌نامیم، به عبارت دیگر : $(gof)\,(x) = g(f(x))$

دامنهٔ تابع مرکب :

دامنهٔ تابع مرکب gof مجموعه xهایی است که هم‌زمان در دو شرط زیر صدق کنند :

۱ــ x در دامنهٔ f قرار داشته باشد.

۲ــ $f(x)$ در دامنهٔ g قرار داشته باشد.



بنابراین دامنهٔ تابع gof را می‌توان به‌صورت زیر نوشت :

$$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

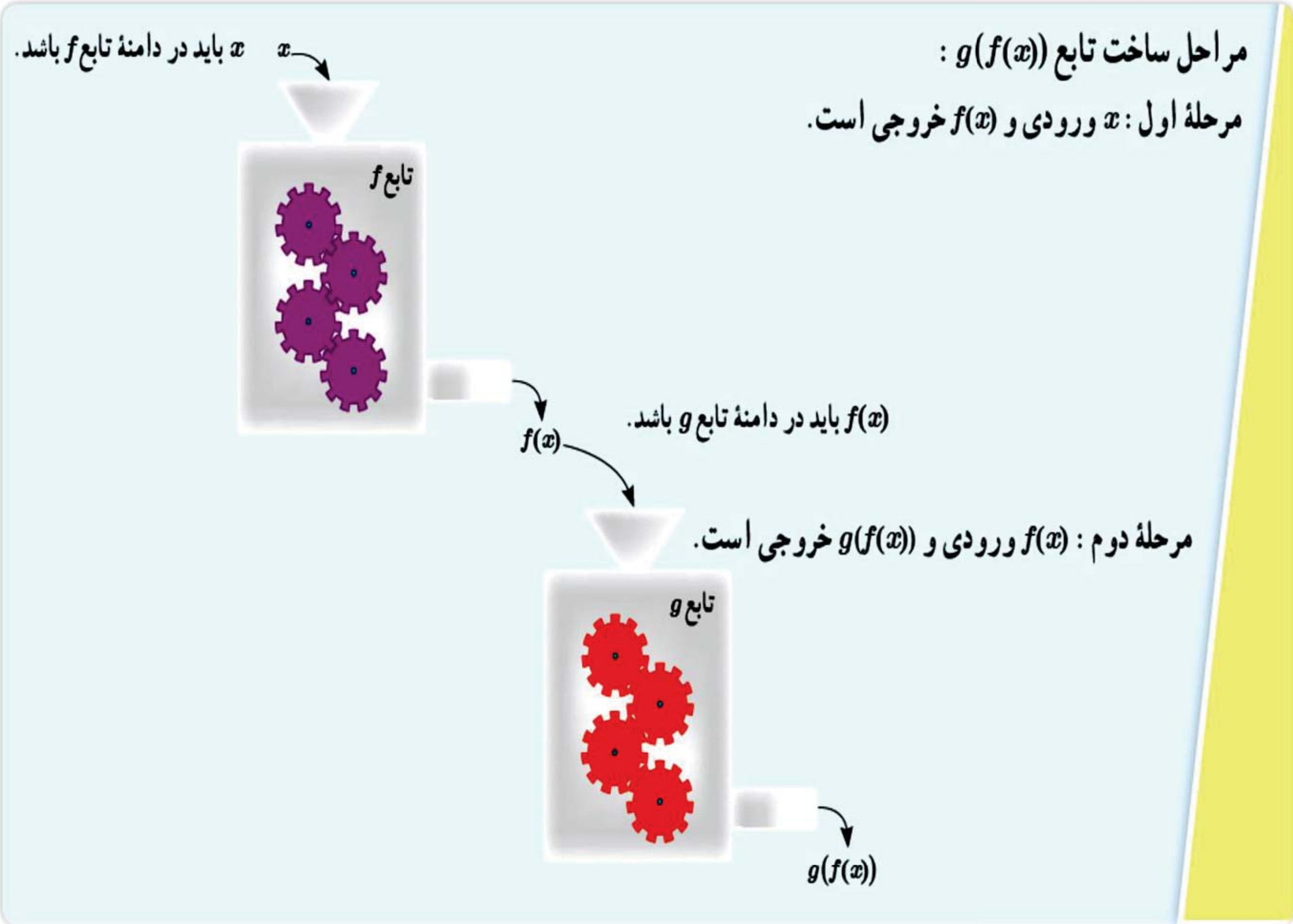
به‌صورت مشابه دامنهٔ تابع fog به صورت زیر است :

$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

و همچنین :

$$(fog)\,(x) = f(g(x))$$

توجه:



نکته:

۱) در حالت کلی: $fog \neq gof$

۲) ترکیب توابع دارای خاصیت شرکت پذیری است:

$$(fog)oh = fo(goh)$$

۳) برای تعیین دامنه fog، می توان ابتدا ضابطه fog را تشکیل داد و دامنه آن را بدست آورد. (توجه شود در این روش نباید تابع را ساده کرد)

تمرین: اگر $f=\{(۱,۲),(۳,-۱),(۲,۰),(۱,-۴),(۵,۷)\}$ و $g=\{(۰,-۱),(۵,۲),(۳,۵),(-۲,۴)\}$، آنگاه fog را در صورت امکان بیابید و سپس دامنه آن را بدست آورید.

تمرین: اگر $f=\{(۷,۸),(۵,۳),(۹,۸),(۱۱,۴)\}$ و $g=\{(۵,۷),(۳,۵),(۷,۹),(۹,۱۱)\}$، آنگاه gof را در صورت امکان بیابید و سپس دامنه آن را بدست آورید.

تمرین: اگر $f(x)=x-۲$ و $g(x)=x^۲-۱$، آنگاه دامنه و ضابطه gof را بیابید.

تمرین: اگر $f(x)=\sqrt{x-۱}$ و $g(x)=۲x^۲-۱$، آنگاه دامنه و ضابطه fog و gof را بیابید.

تمرین: اگر $f(x)=\frac{۲}{x-۱}$ و $g(x)=\frac{۳}{x}$، آنگاه

الف) دامنه fog را بیابید.

ب) ضابطه fog را بیابید.

ج) حاصل $fog(۳)$ را بیابید.

تمرین: اگر $g(x)=\sqrt{x+۶}$ و $f(x)=x^{۲}-۵$، آنگاه دامنه و ضابطه fog را بیابید.

تمرین: اگر $f(x)=\sqrt{۳-۲x}$ و $g(x)=\frac{۶}{۳x-۵}$، آنگاه دامنه و ضابطه fog را بیابید.

تمرین: اگر $f(x)=\sqrt{x+۲}$ و $g(x)=\sqrt{x^۲-۱۶}$، آنگاه دامنه و ضابطه gof را بیابید.

تمرین: اگر $f(x)=\sin x$ و $g(x)=\sqrt{x}$، آنگاه دامنه و ضابطه gof و fog را بیابید.

تمرین: توابع زیر را به صورت ترکیب دو تابع بنویسید. آیا جواب منحصر به فرد است؟

$f(x)=\sqrt[۳]{x^۲+۱}$ و $g(x)=\sqrt{x^۲+۵}$

تمرین: کدام درست و کدام نادرست است؟

۱) اگر تابع $f(x)=x^۲-۴$ و $g(x)=\sqrt{x^۲-۴}$ ، آنگاه $(fog)(۵)=-۲۵$ و $(fog)(x)=-x^۲$.

۲) برای دو تابع f و g که در $f\neq g$ تساوی $fog=gof$ هیچ وقت برقرار نیست.

۳) اگر $f(۷)=۵$ و $g(۴)=۷$ ، آنگاه $(fog)(۴)=۳۵$

۴) اگر $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=۲x-۱$ ، آنگاه $(fog)(۵)=g(۲)$

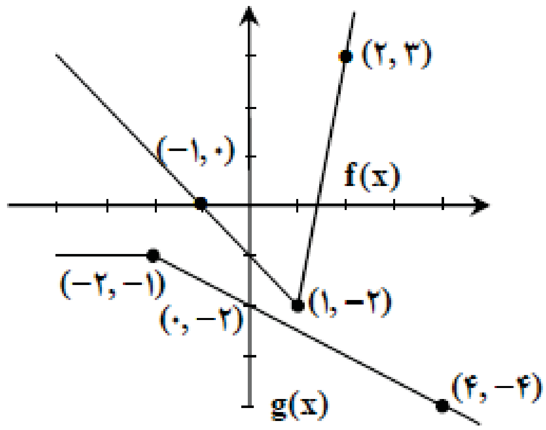
۵) برای دو تابع f و g، $fg=gf$.

تمرین: تابع $h(x)=(۳x^{۲}-۴x+۱)^{۵}$ ترکیب کدام دو تابع است؟

$۱)\ f(x)=\sqrt[۵]{x}\ ,\ g(x)=۳x^{۲}-۴x+۱$

$۲)\ f(x)=x^{۵}\ ,\ g(x)=۳x^{۲}-۴x+۱$

تمرین: با توجه به نمودار مقابل مقدار $fog(-\frac{۱}{۲})$ و $gof(-۵)$ کدام است؟



تمرین: با توجه به ضابطه های g , f، معادلات مورد نظر را تشکیل داده و سپس ان ها را حل کنید.

۱) $f(x)=۲x-۵\ ,\ g(x)=x^۲-۳x+۸ \qquad ;(fog)(x)=۷$

۲) $f(x)=۳x^۲+x-۱\ ,\ g(x)=۱-۲x \qquad ;(gof)(x)=-۵$

تمرین: اگر $f(x)=|x|$ و $g(x)=x^۲+۲x+۱$، آنگاه حاصل $gof(۱-\sqrt{۲})$ را بیابید.

تست: اگر $f(x)=۲x-[۲x]$ و $g(x)=-x^۲+۴x$، آنگاه برد تابع gof کدام است؟ تجربی ۹۹

۱) $[۰,۲)$ ۲) $[۰,۳)$ ۳) $[۰,۴)$ ۴) $[۱,۴)$

تمرین: اگر ورودی ماشین شکل زیر ۳ باشد، مقدار خروجی کدام است؟

$$\text{ورودی} \Rightarrow ۲x - ۲ \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{x}+۱} \Rightarrow \text{خروجی}$$

تمرین: اگر خروجی ماشین شکل زیر $\frac{۴}{۳}$ باشد، مقدار ورودی کدام است؟

$$\text{ورودی} \Rightarrow ۲x - ۲ \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{x}+۱} \Rightarrow \text{خروجی}$$

نکته :

$$۱)\, fog\ ,\ f \longrightarrow g = ?$$

$$۲)\, fog\ ,\ g \longrightarrow f = ?$$

❋❋❋❋❋❋❋❋

تمرین: اگر $fog(x) = ۳x^۲ - ۶x + ۱۴$ و $f(x) = ۳x - ۴$، ضابطه $g(x)$ را بیابید.

تمرین: اگر $fog(x)=\frac{۳x}{x-۱}$ و $g(x)=\frac{۲x-۱}{۳}$، ضابطه $f(x)$ را بیابید.

تست: اگر $fog(x)=\frac{x}{x-۳}$ و $g(x)=۲x-۱$، مقدار $f(۳)$ کدام است؟

۱) -۴ ۲) -۲ ۳) ۲ ۴) ۴

تمرین: اگر $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & x\geq ۱\\ x+۲ & x\prec ۱\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases}-x+۱ & x\succ ۰\\ x^۲ & x\leq ۰\end{cases}$، آنگاه مقدار $fog(-۳)$ را بیابید.

تست: اگر $gof(x)=۵x^۲+۱۱$ و $f(x)=۲x$ باشد، آنگاه کمترین مقدار $g(x-۷)$ کدام است؟ تجربی ۱۴۰۱

۱) ۳ ۲) ۷ ۳) ۹ ۴) ۱۱

وارون تابع :

هرگاه تابع f یک به یک باشد، تابع وارون f را با نماد f^{-1} نشان داده و داریم:

$$(a\,,b)\in f \Leftrightarrow (b\,,a)\in f^{-1}$$

اکنون:

۱) $f^{-1}\neq \frac{1}{f}$

۲) شرط وارون پذیری، یک به یک بودن است.

۳) اگر تابعی یک به یک نباشد، با محدود کردن دامنه آن می توان یک تابع را یک به یک ساخت.

۴) **اگر f تابعی وارون‌پذیر و f^{-1} وارون آن باشد، همواره داریم :**

$$f(f^{-1}(x))=x \quad ; \quad x\in D_{f^{-1}}$$

$$f^{-1}(f(x))=x \quad ; \quad x\in D_f$$

۵) اگر دو تابع g,f به گونه ای باشند که:

الف) $(fog)(x)=x \ ,\ x\in D_g$

ب) $(gof)(x)=x \ ,\ x\in D_f$

آنگاه توابع g,f وارون یکدیگرند.

۶) برای بدست آوردن وارون یک تابع یک به یک مانند f، ابتدا x را برحسب y محاسبه می کنیم، سپس با تبدیل y به x تابع f^{-1} را بدست می آوریم.

۷) $$\begin{cases} D_f=R_{f^{-1}} \\ R_f=D_{f^{-1}} \end{cases}$$

۸) نمودار دو تابع f و f^{-1} نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم $(y=x)$ متقارن هستند.

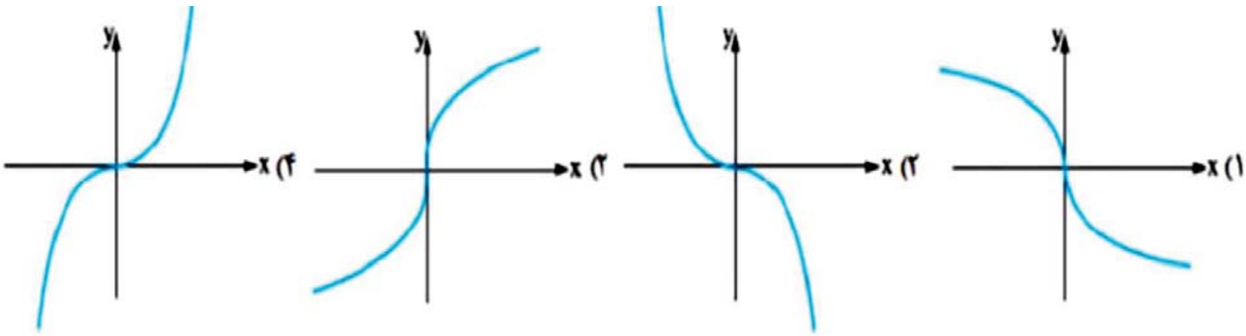
۹) اگر دو تابع f و f^{-1} یک به یک باشند، آنگاه:

$$(fog)^{-1}(x)=(g^{-1}of^{-1})(x)$$

۱۰) اگر $D_f=R_f$ باشد، آنگاه دو تابع $f^{-1}of$ و fof^{-1} با هم برابرند.

****

تست: اگر $f(x)=x|x|$ باشد، نمودار تابع $f^{-1}(x)$ کدام است؟



تست: کدام تابع وارون پذیر است؟

۱) $y=x+|x|$ ۲) $y=x-|x|$ ۳) $y=x+\sqrt{x}$ ۴) $y=x-\sqrt{x}$

تمرین: نشان دهید توابع زیر وارون یکدیگرند.

$$f(x)=۳x-۴\quad,\quad g(x)=\frac{x+۴}{۳}$$

تمرین: نشان دهید توابع زیر وارون یکدیگرند.

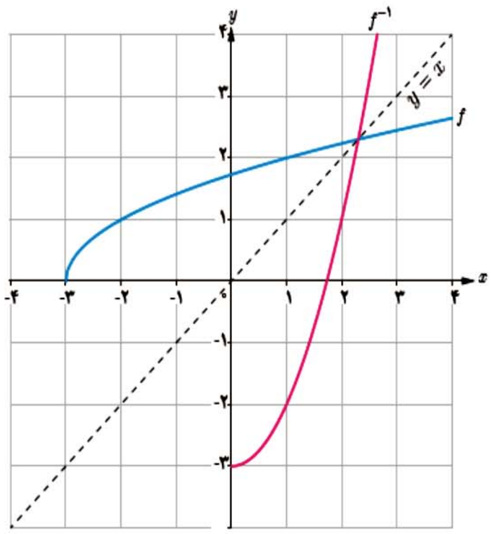
$$f(x)=-\sqrt{x-۸}\quad,\quad g(x)=۸+x^{۲}(x\le ۰)$$

مثال: اگر $f(x)=\sqrt{x+۳}$ ، دامنه و برد توابع f و $f^{-۱}$ را به‌دست آورده و نمودار آنها را رسم کنید، ضابطهٔ $f^{-۱}$ را نیز به‌دست آورید.

تابع f یک‌به‌یک است، بنابراین دارای وارون است.

$$\begin{cases}D_f=[-۳,+\infty)\\ R_f=[۰,+\infty)\end{cases}\qquad \begin{cases}D_{f^{-۱}}=[۰,+\infty)\\ R_{f^{-۱}}=[-۳,+\infty)\end{cases}$$

$$y=\sqrt{x+۳}$$
$$y^{۲}=x+۳$$
$$x=y^{۲}-۳$$
$$f^{-۱}(y)=y^{۲}-۳$$
$$f^{-۱}(x)=x^{۲}-۳$$



تمرین: اگر $f=\{(۱,۴),(۲,۳),(۳,۵)\}$، آنگاه حاصل عبارت های زیر را بیابید.

۱) $f^{-۱}=$

۲) $(fof^{-۱})(۴)=$

۳) $(fof^{-۱})(۳)=$

۴) $(fof^{-۱})(۵)=$

۵) $(f^{-۱}of)(۱)=$

۶) $(f^{-۱}of)(۲)=$

تمرین: اگر $f=\left\{(۱,۵),(-۳,\sqrt{۲}),(۲,\frac{۱}{۲}),(۰,-۱)\right\}$ و $g=\left\{(۴,۶),(\frac{۱}{۲},۰),(۵,۲),(-۱,-۳)\right\}$، آنگاه حاصل عبارت های زیر را بیابید.

۱) $f^{-۱}=$

۲) $g^{-۱}=$

۳) $(fog)^{-۱}=$

تمرین: ضابطه وارون توابع زیر را بدست آورید و سپس دامنه و برد آن ها را مشخص کنید.

۱) $f(x)=-\frac{۱}{۲}x+۳$

۲) $f(x)=۱+\sqrt{x-۲}$

۳) $f(x)=\frac{-۸x+۳}{۲}$

۴) $f(x)=-۵-\sqrt{۳x+۱}$

تمرین: نشان دهید تابع $f(x)=x^{۲}-۲x+۲$ در بازه $[۱,+\infty)$ یک به یک و وارون پذیر است، سپس وارون آن را بیابید.

تمرین: اگر $f(x)=x+۴$ و $g(x)=۲x-۵$، آنگاه ضابطه توابع زیر را بیابید.

۱) $g^{-۱}of^{-۱}$

۲) $f^{-۱}og^{-۱}$

۳) $(fog)^{-۱}$

۴) $(gof)^{-۱}$

تمرین: اگر $f(x)=\frac{۱}{۸}x-۳$ و $g(x)=x^{۳}$، آنگاه ضابطه توابع زیر را بیابید.

۱) $f^{-۱}og^{-۱}(۱)$

۲) $(f^{-۱}of^{-۱})(۶)$

۳) $(fog)^{-۱}(۵)$

۴) $(g^{-۱}of^{-۱})(۵)$

تمرین: با محدود کردن توابع زیر یک تابع یک به یک بسازید و سپس وارون آن را بیابید.

۱) $f(x)=|x|$

۲) $f(x)=-x^{۲}+۲$

۳) $f(x)=x^{۲}+۴x+۳$

تست: اگر $f(x)=x+\sqrt{x}$ مقدار $f^{-۱}(۶)+f^{-۱}(۱۲)$ کدام است؟

۱) ۱۳
۲) -۵
۳) -۲
۴) ۴

تمرین: اگر $f(x)=\sqrt{x-۲}$، آنگاه نمودار تابع $f^{-۱}of(x)$ را رسم کنید.

تمرین: اگر f یک به یک باشد، معکوس تابع $g(x)=۱-۳f(۲-x)$ را بیابید.

نکته : در تابع $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$، اگر $a+d=۰$ باشد، آنگاه $f^{-۱}(x)=f(x)$.

تمرین: اگر $f(x)=\dfrac{۲x+۱}{۳x-۲}$، آنگاه تابع $f^{-۱}(x)$ را بیابید.

تست: دو تابع $f=\{(۲,۵),(۶,۳),(۳,۷),(۴,۱),(۱,۹)\}$ و $g(x)=\dfrac{x}{x-۱}$ مفروض اند. اگر $f^{-۱}(g(۲a))=۶$ باشد، a کدام است؟

۱) $\dfrac{۱}{۲}$ ۲) $\dfrac{۳}{۴}$ ۳) $\dfrac{۳}{۲}$ ۴) $\dfrac{۵}{۲}$

تست: تابع $f(x)=x^{۲}\sqrt{x^{۲}}$ در یک بازه نزولی است. ضابطه وارون تابع در این بازه کدام است؟ ریاضی ۱۴۰۱

۱) $-\sqrt{x^{۳}}\ ,\ x\le ۰$ ۲) $-\sqrt[۳]{x}\ ,\ x\le ۰$ ۳) $-\sqrt{x^{۳}}\ ,\ x\ge ۰$ ۴) $-\sqrt[۳]{x}\ ,\ x\ge ۰$

تست: وارون تابع $f(x)=x^{۳}-x+۱$ از کدام نقطه عبور می کند؟ تجربی ۱۴۰۱

۱) $(-۱,-۲)$ ۲) $(\frac{۵}{۸},\frac{۱}{۲})$ ۳) $(۱,۲)$ ۴) $(-\frac{۱}{۲},-\frac{۱۱}{۸})$

فصل دوم:

مثلثات

تناوب :

تابع f را متناوب گوییم، هرگاه عددی مثبت مانند T وجود داشته باشد به طوری که برای هر x از دامنه f،

$$f(x \pm T) = f(x)$$

کوچکترین عدد مثبت T با این خاصیت را دوره تناوب تابع f می گوییم.

نکته: دوره تناوب توابع مثلثاتی:

$$۱)\ y = a\sin bx + c \longrightarrow T = \frac{۲\pi}{|b|}$$

$$۲)\ y = a\cos bx + c \longrightarrow T = \frac{۲\pi}{|b|}$$

$$۳)\ y = a\tan bx + c \longrightarrow T = \frac{\pi}{|b|}$$

$$۴)\ y = a\cot bx + c \longrightarrow T = \frac{\pi}{|b|}$$

$$۵)\ y = |\sin bx| \longrightarrow T = \frac{\pi}{|b|}$$

$$۶)\ y = |\cos bx| \longrightarrow T = \frac{\pi}{|b|}$$

نکته: در توابع $y = a\sin bx + c$ و $y = a\cos bx + c$ داریم:

۱) **مقدار ماکزیمم** $= |a| + c$

۲) **مقدار مینیمم** $= -|a| + c$

تمرین: دوره تناوب و مقدار ماکزیمم و مینیمم توابع زیر را بیابید.

ردیف	تابع	دوره تناوب	مقدار ماکزیمم	مقدار مینیمم
۱	$y=۳\sin ۲x-۲$			
۲	$y=-\frac{۱}{۴}\cos \pi x$			
۳	$y=\pi\sin(-x)+۱$			
۴	$y=۸\cos\frac{x}{۳}$			
۵	$y=۱+۲\sin ۷x$			
۶	$y=\sqrt{۳}-\cos\frac{\pi}{۲}x$			
۷	$y=-\frac{۳}{۴}\cos ۳x$			
۸	$y=-\pi\sin\frac{x}{۲}-۲$			
۹	$y=-\pi\sin\frac{۱}{۲}(x-۲)$			
۱۰	$y=۲\sin x$			

تمرین: دوره تناوب توابع زیر را بیابید.

$۱)\ y=۲\tan ۳x \longrightarrow T=$

$۲)\ y=-\tan \pi x+۱ \longrightarrow T=$

$۳)\ y=۵\cot(\frac{\pi}{۳}x) \longrightarrow T=$

$۴)\ y=|\sin ۲x| \longrightarrow T=$

$۵)\ y=|\cos ۳x| \longrightarrow T=$

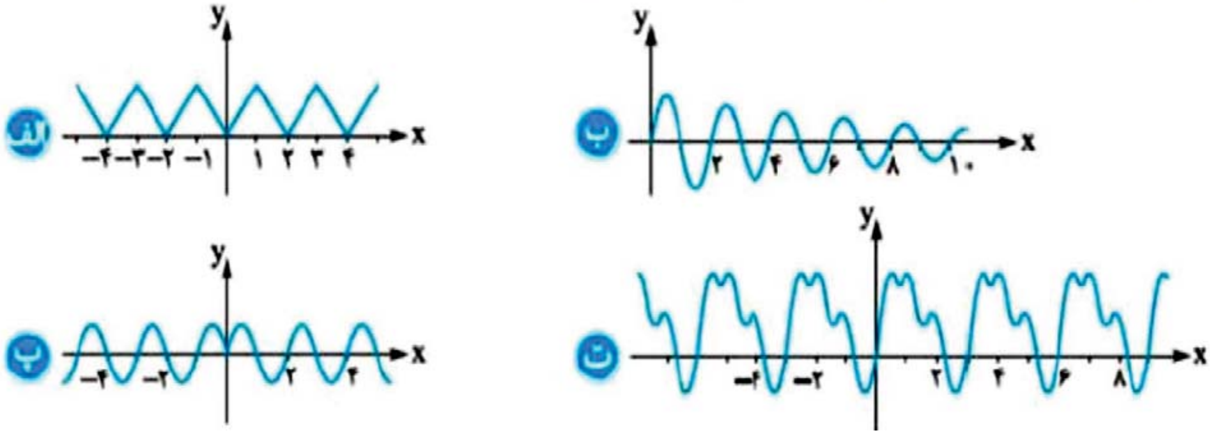
تمرین: ضابطه تابع $y = a\sin bx + c$ را طوری بیابید که دوره تناوب آن ۳ و مقدار ماکزیمم ۹ و مینیمم آن ۳ باشد.

تمرین: ضابطه تابع سینوسی را طوری بیابید که دوره تناوب آن $T = \pi$ و مقدار ماکزیمم ۳ و مینیمم آن ۳- باشد.

تمرین: ضابطه تابع $y = a\cos bx + c$ را طوری بیابید که دوره تناوب آن $T = 4\pi$ و مقدار ماکزیمم ۱- و مینیمم آن ۷- باشد.

تمرین: ضابطه تابع کسینوسی را طوری بیابید که دوره تناوب آن $T = \frac{\pi}{2}$ و مقدار ماکزیمم ۱ و مینیمم آن ۱- باشد.

تمرین: نشان دهید کدام تابع متناوب است و سپس دوره تناوب آن را بنویسید.



تست: دوره تناوب تابع $f(x)=\cos(\cos \pi x)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) تابع متناوب نیست.

تست: اگر f تابعی متناوب با دوره تناوب ۳ باشد، کدام گزینه با $f(۲)$ برابر است؟

۱) $f(۷)$ ۲) $f(۹)$ ۳) $f(۱۰)$ ۴) $f(۱۱)$

نکته:

۱) اگر دوره تناوب تابع $f(x)$ برابر T باشد، دوره تناوب تابع $y=af(bx+c)+d$ برابر $\frac{T}{|b|}$ است.

۲) اگر دوره تناوب تابع $af(bx+c)+d$ برابر T باشد، دوره تناوب تابع $f(x)$ برابر $|b|T$ است.

۳) دوره تناوب توابع $f(x)=ax-[ax]$ و $f(x)=[ax]+[-ax]$ برابر است با : $T=\frac{۱}{|a|}$.

۴) دوره تناوب تابع $f(x)=(-۱)^{[ax]}$ برابر است با : $T=\frac{۲}{|a|}$.

۵) اگر توان x در کمان، عددی غیر از یک باشد، تابع متناوب نیست.

تمرین: اگر دوره تناوب تابع $f(x)$ برابر ۲ باشد، دوره تناوب تابع $y=۲f(۳x-۱)+۱$ را بیابید.

تمرین: اگر دوره تناوب تابع $f(۳x+۲)-۱$ برابر ۵ باشد، دوره تناوب تابع $f(x)$ را بیابید.

تمرین: دوره تناوب تابع $f(x)=۲x-[۲x]$ را بیابید.

تمرین: دوره تناوب تابع $f(x)=(-۱)^{[x]}$ را بیابید.

تست: کدام تابع متناوب نیست؟

۱) $y=|\sin x|$ ۲) $y=\cos\sqrt{۲}x$ ۳) $y=\sin\frac{x}{۲}$ ۴) $y=\sin\sqrt{x}$

نکته:

$$1)\ \sin 2x = 2\sin x\cos x$$

$$2)\ \cos 2x = \begin{cases} \cos^2 x - \sin^2 x \\ 2\cos^2 x - 1 \\ 1 - 2\sin^2 x \end{cases}$$

تمرین: دوره تناوب توابع زیر را بیابید.

$1)\ y = 1 + \cos 2x$

$2)\ y = \sqrt{\dfrac{1+\cos 2x}{2}}$

$3)\ y = 2\cos^2 x - 1$

$4)\ y = \cos^2 x - \sin^2 x$

$5)\ y = \sin x\cos 2x + \cos x\sin 2x$

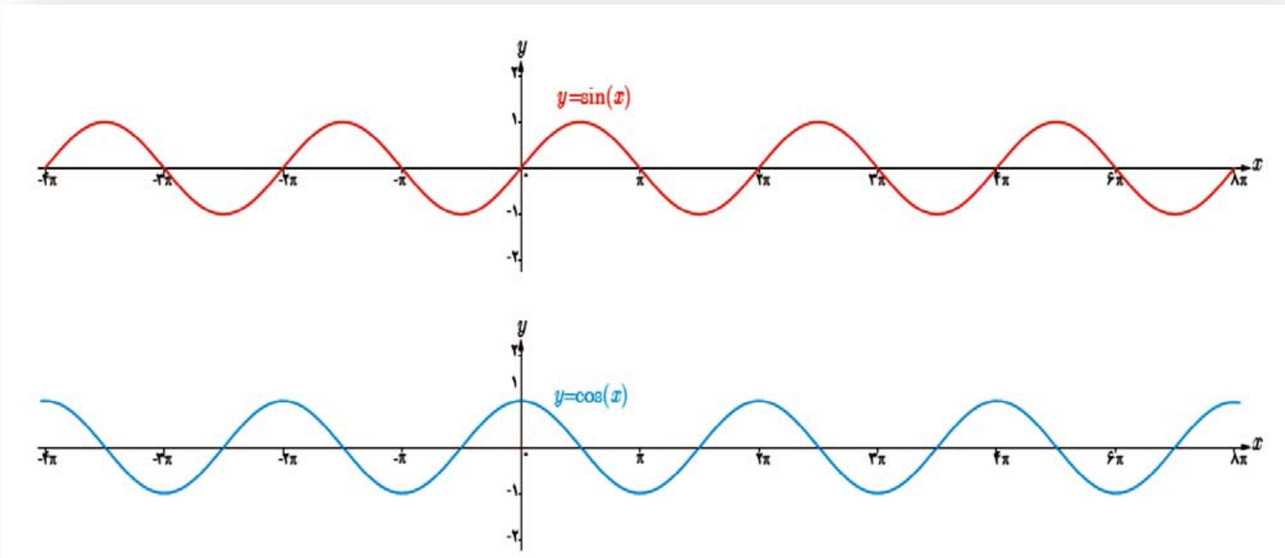
$6)\ y = \cos 2x\cos x + \sin 2x\sin x$

$7)\ y = 2\sin x\cos x$

تمرین: اگر $f(x)=۱+\sin ۲x$ باشد، دوره تناوب توابع $f(۳x), f(x-\frac{\pi}{۳})$ را بیابید.

تمرین: نمودار تابع $f(x)=\cos(\frac{\pi}{۲}+x)$ را در راستای افقی با ضریب ۲ منبسط کرده و سپس π واحد به راست و در نهایت یک واحد به بالا منتقل کرده ایم. ضابطه جدید کدام است؟

نکته: نمودار توابع $f(x)=\sin x$ و $f(x)=\cos x$ به صورت زیر است:



نکته:

$$
\begin{aligned}
&۱)\ \sin(-x)=-\sin x\\
&۲)\ \cos(-x)=\cos x\\
&۳)\ \tan(-x)=-\tan x\\
&۴)\ \cot(-x)=-\cot x
\end{aligned}
$$

تمرین: نمودار توابع زیر را رسم کنید و سپس دوره تناوب و مقدار ماکزیمم و مینیمم آن را بیابید.

۱) $y=\sin ۲x$

۲) $y=\sin(-۳x)$

۳) $y=\sin(-\frac{x}{۳})$

۴) $y=\frac{۱}{۲}\sin ۲x$

۵) $y=-\frac{۱}{۳}\sin x$

۶) $y=\cos(-۲x)$

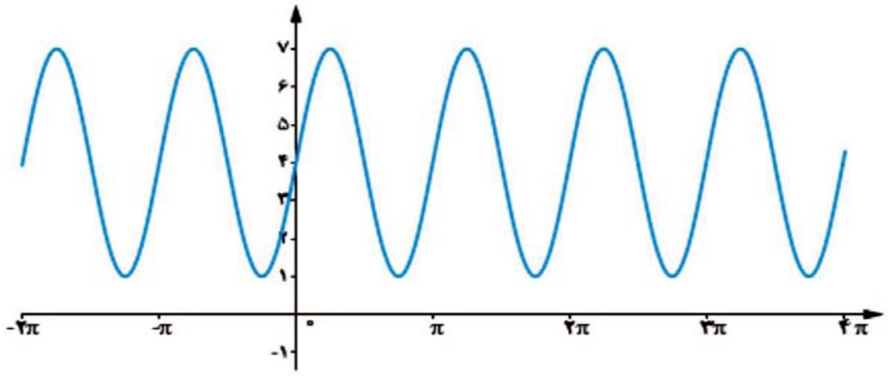
۷) $y=۲\sin \pi x$

۸) $y=۱-\cos ۲x$

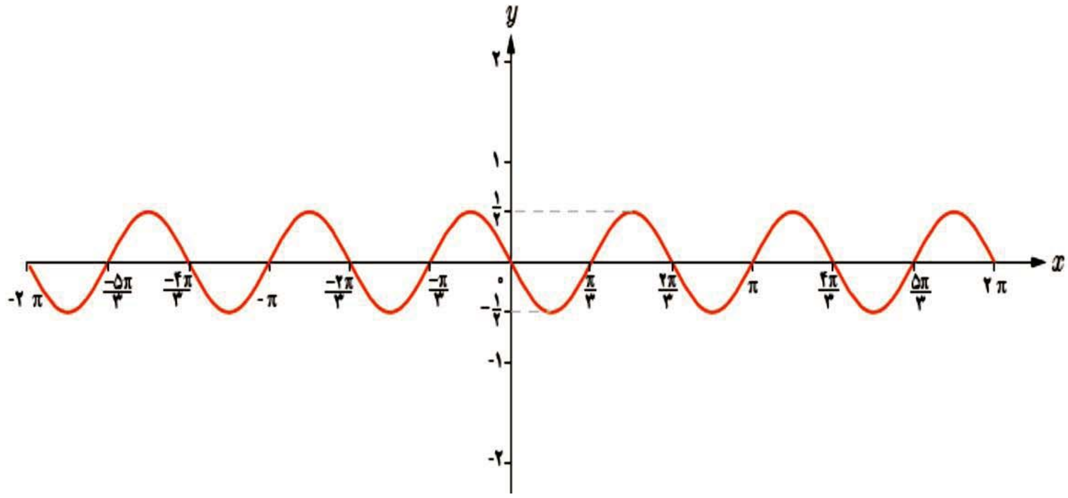
۹) $y=۲-\cos(-\frac{۱}{۲})$

تمرین: با توجه به نمودار توابع زیر، ضابطه آن ها را بیابید.

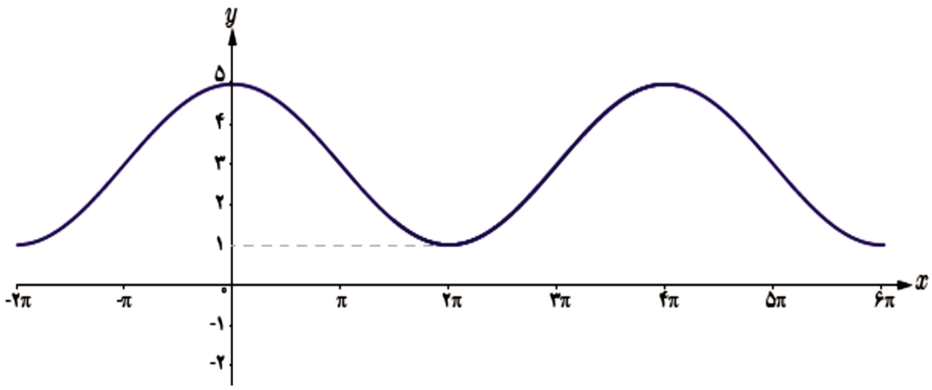
الف)



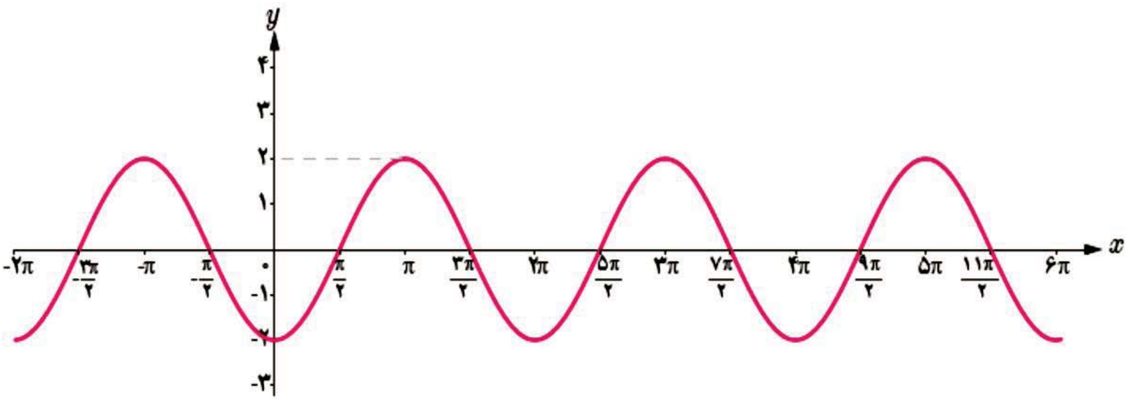
ب)



پ)

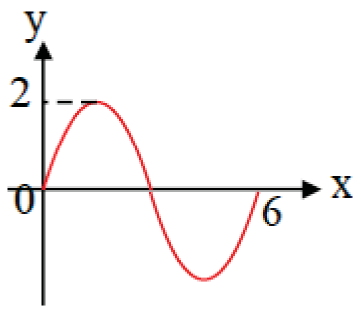


ت)



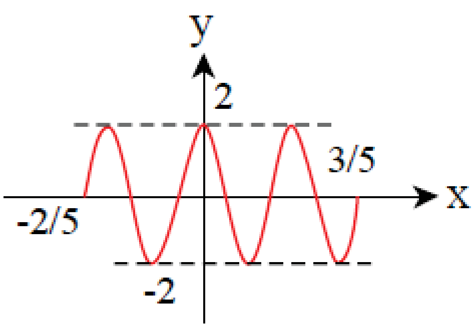
تست: شکل مقابل قسمتی از تابع $y = a\sin(b\pi x)$ است. $a+b$ کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۳}$ ۲) $\frac{۵}{۳}$ ۳) $\frac{۷}{۳}$ ۴) $\frac{۸}{۳}$



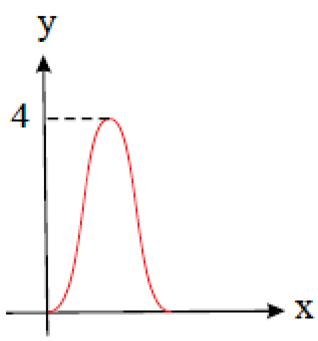
تست: شکل مقابل قسمتی از تابع $y = a\sin\pi(\frac{۱}{۲}+bx)$ است. $a.b$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۲/۵ ۳) ۳ ۴) ۳/۵



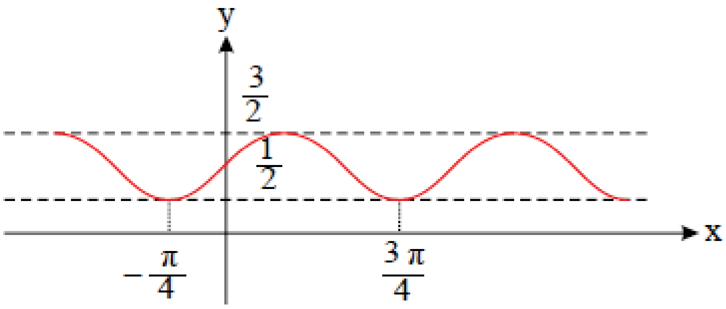
تست: شکل مقابل قسمتی از تابع $y = a + b\cos(\frac{\pi}{۲}x)$ در بازه $(۰,۴)$ است. مقدار b کدام است؟

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) ۲



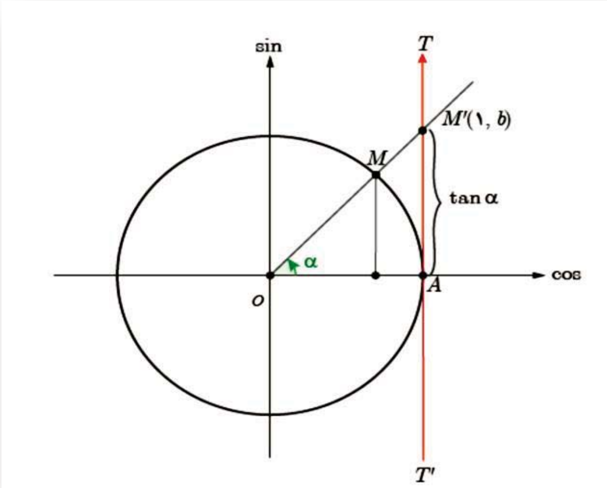
تست: شکل مقابل قسمتی از تابع $y = ۱ + a\sin bx\cos bx$ است. مقدار $a + b$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) ۲ ۴) ۳



تمرین: نمودار تابع $y = \sin x - |\sin x|$ را رسم کنید.

محور تانژانت :



تابع تانژانت :

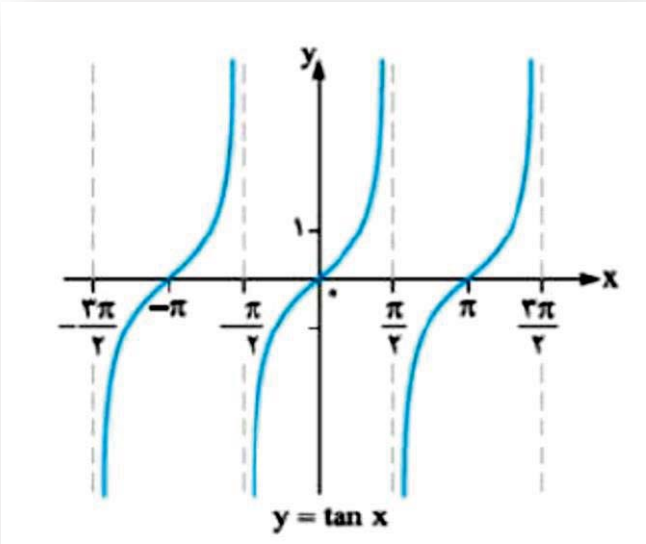
- ویژگی‌های تابع $y = \tan x$:

۱) تابع در نقاط $x = k\pi + \frac{\pi}{۲}$ تعریف نشده است.

۲) در هر بازه‌ای که شامل نقاط فوق نباشد، اکیداً صعودی است.

۳) در کل غیریکنوا و غیر یک‌به‌یک است.

۴) دامنهٔ تابع $D_f = \mathbb{R} - \{k\pi + \frac{\pi}{۲} | k \in \mathbb{Z}\}$ و برد آن $\mathbb{R}$ است.



تمرین: دامنه و برد تابع $y = \tan x$ را بیابید.

تمرین: دامنه و برد تابع $y = \tan ۲x$ را بیابید.

تمرین: آیا تابع $y = \tan x$ در بازه $[۰,۲\pi]$ یکنوا است؟

تمرین: آیا تابع $y = \tan x$ در بازه $[۰,۲\pi]-\left\{\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲}\right\}$ صعودی است؟

تمرین: تابع $y = -\frac{۱}{۲}\tan ۲x$ مفروض است:

الف) دوره تناوب آن را بیابید.

ب) نمودار آن را رسم کنید.

تمرین: کدام درست و کدام نادرست است؟

الف) تابع تانژانت در دامنه اش صعودی است.

ب) می توان بازه ای یافت که تابع تانژانت درآن نزولی باشد.

ج) تابع تانژانت در هر بازه که در آن تعریف شده باشد، صعودی است.

د) دامنه تابع تانژانت $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,x=k\pi+\frac{\pi}{۲},k\in\mathbb{Z}\right\}$ است.

ذ) برد تابع تانژانت $\mathbb{R}$ است.

ر) دوره تناوب تابع تانژانت ۲π است.

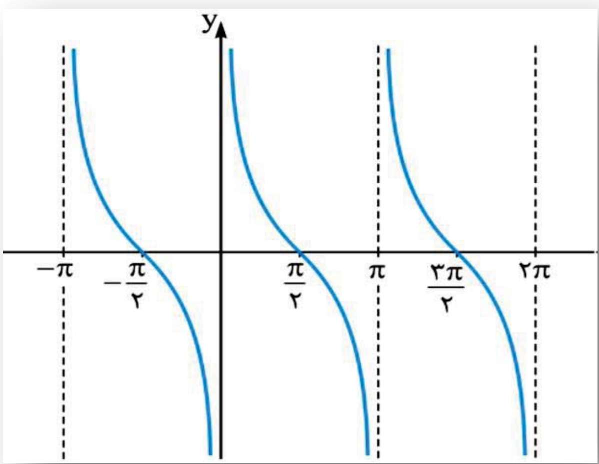
ز) مقدار ماکزیمم تابع $y=۱+۲\sin ۳x$ برابر ۲ است.

س) مقدار مینیمم تابع $y=-\frac{۱}{۴}\cos ۲x$ برابر $-\frac{۱}{۴}$ است.

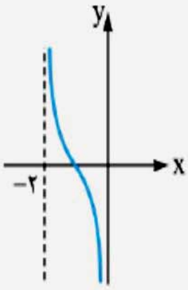
تمرین: با توجه به محورهای سینوس و تانژانت، در موارد زیر مقادیر $\sin\alpha,\tan\alpha$ را با هم مقایسه کنید.

$۱)\ ۰\prec\alpha\prec\frac{\pi}{۲}$　　　$۲)\ \frac{۳\pi}{۲}\prec\alpha\prec ۲\pi$

نکته: نمودار $y=\cot x$:



تست قسمتی از نمودار $y=\tan(a\pi x+b)$ به صورت شکل روبه‌رو است، a کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۲}$

۲) $-\frac{۱}{۲}$

۳) ۱

۴) -۱

پاسخ **گزینهٔ ۲** می‌دانیم که نمودار $y=\tan x$، نموداری اکیداً صعودی است، نزولی‌بودن این تابع بیانگر این است که a باید عددی منفی باشد تا نمودار اکیداً نزولی شود. از سوی دیگر دورهٔ تناوب تابع ۲ است:

$$T=\frac{\pi}{|a\pi|}=۲ \Rightarrow |a|=\frac{۱}{۲} \Rightarrow a=\pm\frac{۱}{۲} \Rightarrow a=-\frac{۱}{۲}$$

نکته:

$$۱)\ \tan x+\cot x=\frac{۲}{\sin ۲x}$$

$$۲)\ \tan x-\cot x=-۲\cot ۲x$$

تست: دوره تناوب تابع $y=\tan x-\cot x$ کدام است؟

۱) π ۲) ۲π ۳) $\frac{\pi}{۲}$ ۴) $\frac{\pi}{۴}$

روابط مثلثاتی:

$$۱)\ \sin^{۲} a + \cos^{۲} a = ۱$$

$$۲)\ \sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$$

$$۳)\ \cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$$

$$۴)\ \tan(a \pm b) = \frac{\tan a \pm \tan b}{۱ \mp \tan a \tan b}$$

$$۵)\ \sin ۲a = ۲\sin a \cos a = \frac{۲\tan a}{۱ + \tan^{۲} a}$$

$$۶)\ \cos ۲a = \begin{cases} \cos^{۲} a - \sin^{۲} a \\ ۲\cos^{۲} a - ۱ \\ ۱ - ۲\sin^{۲} a \end{cases} = \frac{۱ - \tan^{۲} a}{۱ + \tan^{۲} a}$$

$$۷)\ \begin{cases} \sin^{۲} a = \dfrac{\tan^{۲} a}{۱ + \tan^{۲} a} = \dfrac{۱}{۱ + \cot^{۲} a} \\ \\ \cos^{۲} a = \dfrac{۱}{۱ + \tan^{۲} a} = \dfrac{\cot^{۲} a}{۱ + \cot^{۲} a} \end{cases}$$

$$۸)\ \tan a + \cot a = \frac{۲}{\sin ۲a} \qquad , \qquad \tan a - \cot a = -۲\cot ۲a$$

$$۹)\ \sin a \pm \cos a = \sqrt{۲}\sin(a \pm \frac{\pi}{۴})$$

$$۱۰)\ (\sin a \pm \cos a)^{۲} = ۱ \pm \sin ۲a$$

$$۱۱)\ \frac{\sin a}{۱ + \cos a} = \tan \frac{a}{۲}$$

تمرین: حاصل عبارت های زیر را بیابید.

۱) $\sin ۱۵$

۲) $\cos ۱۵$

۳) $\tan ۱۵$

تمرین: نسبت های مثلثاتی سینوس وکسینوس برای زاویه ۲۲/۵ را بیابید. ($\frac{\pi}{۸}$)

تمرین: فرض کنید $\cos\alpha=\frac{۵}{۱۳}$ و αزاویه حاده باشد، در این صورت حاصل عبارات زیر را بیابید.

۱) $\cos ۲\alpha$ ۲) $\sin ۲\alpha$

تست: مقدار $\tan ۷۵$ کدام است؟

۱) $۲+\sqrt{۳}$ ۲) $۲-\sqrt{۳}$ ۳) $\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) $۳+\sqrt{۳}$

تمرین: حاصل $\cos^{۲}۱۵-\sin^{۲}۱۵$ برابر .... است.

تمرین: حاصل $\sin۱۵\cos۱۵$ برابر .... است.

تمرین: اگر A و B و C زوایای یک مثلث باشند، ثابت کنید:

$$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$$

تمرین: اگر α زاویه ای در ربع اول و β زاویه ای در ربع دوم باشد، به طوری که $\sin\alpha=\frac{۴}{۵}$ و $\cos\beta=-\frac{۵}{۱۳}$، آنگاه حاصل $\tan(\alpha-\beta)$ را بدست اورید.

تست: حاصل عبارت $\frac{\sin x}{۱+\cos x}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}\cot x$ ۲) $\cot\frac{x}{۲}$ ۳) $\tan\frac{x}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۲}\tan x$

تست: اگر $\tan x+\cot x=6$ باشد، حاصل $\sin 2x$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{6}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{1}{4}$

تست: اگر $2\sin^2 x+\cos^2 x=\frac{4}{3}$ باشد، حاصل $\tan^2 x$ کدام است؟ تجربی ۱۴۰۱

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{4}$

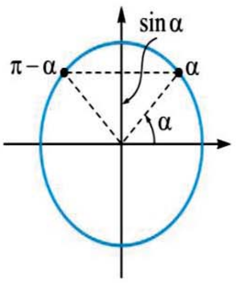
تست: اگر $\pi \prec x \prec \frac{3\pi}{2}$ باشد، حاصل $(2\sin^2\frac{\pi}{4}-\sin^2 x)\sqrt{1+\tan^2 x}$ کدام است؟ تجربی ۹۸

۱) $\sin x$ ۲) $\cos x$ ۳) $-\sin x$ ۴) $-\cos x$

معادلات مثلثاتی:

شیوه کلی حل معادلات مثلثاتی به این صورت است که پس از محاسبات جبری، معادله را به یکی از شکل های $\sin x=\sin\alpha$، $\cos x=\cos\alpha$، $\tan x=\tan\alpha$ و $\cot x=\cot\alpha$ در می آوریم و در ادامه به کمک روابط زیر، جواب ها را تعیین می کنیم:

۱) معادلهٔ $\sin x=\sin\alpha$:

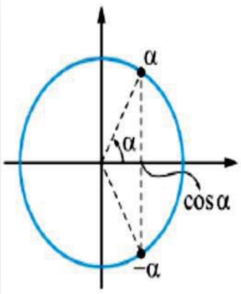


هدف از حل این معادله یافتن تمام xهایی است که به ازای آن‌ها $\sin x$ با $\sin\alpha$ برابر می‌شود. روی دایرهٔ مثلثاتی دو کمان هست که سینوس آن با سینوس α برابر است:

یکی خود α است و دیگری مکمل α، یعنی $\pi-\alpha$؛ بنابراین جواب کلی این معادله به شکل روبه‌رو می‌باشد:

$$\begin{cases} x=۲k\pi+\alpha \\ x=۲k\pi+\pi-\alpha \end{cases}$$

۲) معادلهٔ $\cos x=\cos\alpha$:

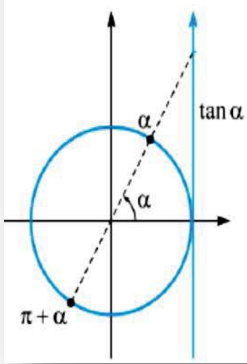


هدف از حل این معادله، پیداکردن تمام xهایی است که به ازای آن‌ها $\cos x$ با $\cos\alpha$ برابر می‌شود. روی دایرهٔ مثلثاتی دو کمان هست که کسینوس آن‌ها برابر کسینوس α است:

یکی خود α است و دیگری $(-\alpha)$؛ بنابراین جواب کلی این معادله به شکل زیر می‌باشد:

$$x=۲k\pi\pm\alpha$$

۳) معادلهٔ $\tan x=\tan\alpha$:



هدف از حل این معادله، پیداکردن تمام xهایی است که به ازای آن‌ها $\tan x$ با $\tan\alpha$ برابر است. روی دایرهٔ مثلثاتی دو کمان وجود دارد که تانژانت آن‌ها برابر تانژانت α است: یکی خود α و دیگری $\pi+\alpha$؛ بنابراین جواب کلی این معادله به شکل مقابل است:

$$\begin{cases} x=۲k\pi+\alpha \\ x=۲k\pi+\pi+\alpha=(۲k+۱)\pi+\alpha \end{cases}$$

از ادغام این دو دسته جواب به جواب کلی مقابل می‌رسیم: $x=k\pi+\alpha$.

به راحتی ثابت می‌شود که جواب کلی معادلهٔ $\cot x=\cot\alpha$ هم $x=k\pi+\alpha$ است.

در حالت کلی با شرط $k \in \mathbb{Z}$:

$$۱)\ \sin x = \sin\alpha \Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + \alpha \\ x = ۲k\pi + \pi - \alpha \end{cases}$$

$$۲)\ \cos x = \cos\alpha \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \alpha$$

$$۳)\ \tan x = \tan\alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha$$

$$۴)\ \cot x = \cot\alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha$$

****

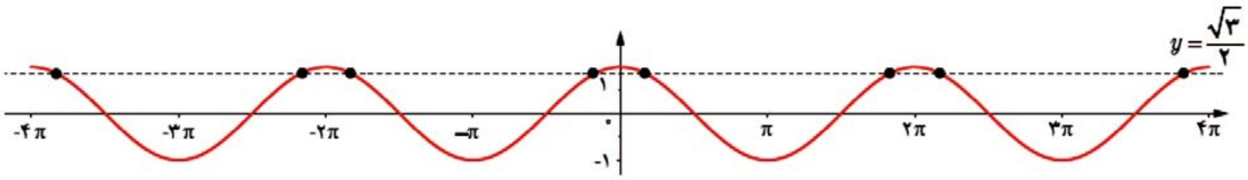
نکته: در معادلاتی که به شکل $\sin\alpha = \cos\beta$ یا $\tan\alpha = \cot\beta$ هستند، به کمک فرمول های تبدیل $(\frac{\pi}{۲} - \alpha)$ ابتدا دو سمت تساوی را به دو نسبت مثلثاتی هم نام تبدیل کرده و سپس معادله را حل می کنیم.

✓ حالات خاص معادلات مثلثاتی:

۱ $\sin x = ۰ \Rightarrow x = k\pi$	۲ $\sin x = ۱ \Rightarrow x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲}$	۳ $\sin x = -۱ \Rightarrow x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲}$
۴ $\cos x = ۰ \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۲}$	۵ $\cos x = ۱ \Rightarrow x = ۲k\pi$	۶ $\cos x = -۱ \Rightarrow x = ۲k\pi + \pi$

تمرین: خط $y=\frac{۱}{۲}$ و نمودار $y=\sin x$ را رسم کرده و نقاط تلاقی آن ها را بیابید.

تمرین: خط $y=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ و نمودار $y=\cos x$ را رسم کرده و نقاط تلاقی آن ها را بیابید.



تمرین: معادلات زیر را حل کنید.

۱) $\sin x=-\frac{۱}{۲}$

۲) $۲\sin x-\sqrt{۳}=۰$

۳) $۴\sin x+\sqrt{۸}=۰$

۴) $۲\sin ۳x-\sqrt{۲}=۰$

۵) $\sin x\cos x=\frac{\sqrt{۳}}{۴}$

۶) $\cos x=\cos ۲x$

۷) $\sin\frac{\pi}{۲}=\sin ۳x$

۸) $\sin ۲x=\sin ۳x$

۹) $\tan x=\tan ۵x$

۱۰) $\tan ۳x=\tan \pi x$

۱۱) $\tan(۲x-۱)=۰$

۱۲) $\cos x(۲\cos x-۹)=۵$

۱۳) $\cos^{۲} x-\sin x=\frac{۱}{۴}$

۱۴) $\cos ۲x-\cos x+۱=۰$

۱۵) $\cos ۲x-\sin x+۱=۱$

۱۶) $۲\sin^{۲} x + \sin x - ۱ = ۰$

۱۷) $\sin x - \cos ۲x = ۰$

تمرین: معادله $\sin x + \cos \alpha = ۱$ را در بازه $۰ \le x \le \pi$ حل کنید.

تمرین: جواب های معادله $\cos \alpha = \frac{۱}{۲}$ را بدست آورید. کدام جواب ها در بازه $[-۳\pi, \pi]$ می باشند؟

تمرین: مثلثی با مساحت ۳ سانتی متر مربع مفروض است. اگر اندازه دو ضلع ان به ترتیب ۲ و ۶ سانتی متر باشند، آنگاه چند مثلث با این خاصیت می توان ساخت؟

نکته: اگر جواب معادله به صورت $x=\frac{۲k\pi}{n}+\alpha$ باشد، در بازه $(۰,۲\pi)$ دارای n جواب است.

تست: مجموع جواب های معادله $\sin ۲x+\cos\left(\frac{\pi}{۲}-x\right)=۰$ را در بازه $[۰,۲\pi]$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۴\pi}{۳}$ ۲) ۴π ۳) $\frac{۹}{۲}$ ۴) ۵π

تست: مجموع جواب های معادله $۴\sin x\sin(\frac{۳\pi}{۲}-x)=۱$ را در بازه $[۰,۲\pi]$ کدام است؟ **تجربی ۹۸**

۱) $\frac{۵\pi}{۲}$ ۲) ۳π ۳) ۴π ۴) ۵π

تست: تعداد جواب های معادله $8\cos x-\tan^2 x=1$ را در بازه $[0,2\pi]$ کدام است؟ **تجربی ۱۴۰۱**

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۲

فصل سوم:

حدهای نامتناهی – حد در بینهایت

بخش پذیری و تقسیم:

قضیه : در تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر دوجمله‌ای درجهٔ اول $(x-a)$، باقی ماندهٔ تقسیم برابر $f(a)$ است.

نتیجه : اگر $f(a)$ برابر صفر باشد آنگاه $f(x)$ بر $(x-a)$ بخش‌پذیر است.

تمرین: باقیمانده تقسیم چندجمله ای $P(x)=x^{۳}+x-۲$ بر $x-۲$ را بیابید.

تمرین: باقیمانده تقسیم چندجمله ای $P(x)=۲x^{۲}-۵x+۱$ بر $x-۳$ را بیابید.

تمرین: باقیمانده تقسیم چندجمله ای $۸x^{۳}-۲x+۱$ بر $x-\frac{۱}{۲}$ را بیابید.

تمرین: آیا چندجمله ای $f(x)=۲x^{۳}-۵x^{۲}-۳x-۱۰$ بر دو جمله ای $x+۲$ بخشپذیر است؟

تمرین: اگر باقیمانده تقسیم چندجمله ای $x^۳ + kx^۲ + ۲$ بر $x - ۲$ برابر ۶ باشد، مقدار k را بیابید.

تمرین: اگر چندجمله ای $x^۳ - mx^۲ - x - ۴$ بر $x + ۲$ بخشپذیر باشد، مقدار m را بیابید.

تمرین: مقادیر a,b را طوری بیابید که چندجمله ای $x^۳ + ax^۲ + bx + ۱$ بر $x - ۲$ و $x + ۱$ بخشپذیر باشد.

تمرین: مقادیر a,b را طوری بیابید که باقیمانده تقسیم $y = x^۳ + ax^۲ + x + b$ بر $x - ۱$ برابر ۴ و بر $x + ۲$ بخشپذیر باشد.

تست: چندجمله ای $x^۳ + ax^۲ + bx + ۱$ بر $x^۲ - ۴$ بخشپذیر باشد، حاصل $a + b$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱۵}{۸}$ ۲) $\frac{-۱۷}{۴}$ ۳) $\frac{۱۷}{۱۶}$ ۴) $\frac{۱۵}{۸}$

تست: اگر باقیمانده تقسیم $f(x)$ بر $(x+۱),(x-۲)$ به ترتیب ۲ و ۳ باشد، باقیمانده تقسیم $f(x)$ بر $x^۲-x-۲$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}x-\frac{۷}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۳}x+\frac{۷}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۲}x-\frac{۵}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۲}x+\frac{۵}{۲}$

تست: دو عبارت $x^۵+۴x^۲+۹$ و $ax^۳-x-۱$ در تقسیم بر $x+۲$ هم باقیمانده هستند، a کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) -۲ ۴) ۲

تست: اگر باقیمانده تقسیم $f(x)$ بر ۲ برابر ۳ باشد، باقیمانده تقسیم $f(۷-x)$ بر ۵ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

تمرین: باقیمانده تقسیم چندجمله ای $x^۶+x^۳-۲x+۳$ بر $x^۲+۱$ را بیابید.

همسایگی : هر بازهٔ باز شامل عدد حقیقی x_0 را یک همسایگی x_0 می‌نامیم.
به‌عبارت دیگر اگر $x_0 \in (a\,,\,b)$ آنگاه بازهٔ $(a\,,b)$ یک همسایگی x_0 می‌باشد.

همسایگی محذوف : اگر بازهٔ $(a\,,b)$ یک همسایگی عدد حقیقی x_0 باشد، آنگاه مجموعهٔ $(a\,,\,b) - \{x_0\}$ یک همسایگی محذوف x_0 نامیده می‌شود.

همسایگی چپ و راست : اگر r عددی مثبت باشد آنگاه $(x_0\,,x_0+r)$ یک همسایگی راست x_0 نامیده می‌شود. همچنین، (x_0-r,x_0) را یک همسایگی چپ x_0 می‌نامیم.

تمرین: پاسخ دهید:

الف) یک همسایگی برای ۳ بنویسید.

ب) یک همسایگی محذوف برای ۳ بنویسید.

ج) یک همسایگی راست برای ۳ بنویسید.

د) یک همسایگی چپ برای ۳ بنویسید.

تمرین: کدام درست و کدام نادرست است؟

۱) بازه $(۲,۳)$ یک همسایگی عدد ۳ است.

۲) بازه $(۰,۵)$ یک همسایگی عدد ۳ است.

۳) بازه $(۳,۴)$ یک همسایگی راست عدد ۳ است.

۴) بازه $(\frac{۳}{۲},۳)$ یک همسایگی چپ عدد ۳ است.

۵) بازه $(\frac{۵}{۲},۴)-\{۳\}$ یک همسایگی محذوف عدد ۳ است.

تست: به ازای کدام مجموعه مقادیر x، بازه $(x+۱,۲x-۱)$ یک همسایگی عدد ۳ می باشد؟ **ریاضی ۹۹**

۱) ϕ ۲) $\{۲\}$ ۳) $۲ \prec x \prec ۲/۵$ ۴) $۱/۵ \prec x \prec ۲$

حد توابع کسری

با قضیه زیر از پایهٔ قبل آشنا هستیم :

قضیه : اگر دو تابع f و g در نقطه‌ای به طول a حد داشته باشند و حد آنها در این نقطه به ترتیب l و m باشد به‌طوری که $m \neq ۰$، آنگاه تابع $\frac{f}{g}$ نیز در a حد دارد و این حد برابر $\frac{l}{m}$ است.

مفهوم صفر حدی و صفر مطلق:

نکته :

۱) $\frac{\text{۰ح}}{\text{۰ح}} =$

۲) $\frac{\text{۰ح}}{\text{۰م}} =$

۳) $\frac{\text{۰م}}{\text{۰ح}} =$

۱) $\frac{\text{۰م}}{\text{۰م}} =$

نکته: در حدگیری اگر جواب مبهم شود باید رفع ابهام شود، یعنی با حذف عامل صفر کننده از صورت و مخرج به جواب اصلی می رسیم.

روش های رفع ابهام $(\frac{\text{ح}^{\cdot}}{\text{ح}^{\cdot}})$:

۱)به کمک اتحاد ها و تجزیه ها

۲) به کمک هوپیتال (HOP)

۳) به کمک روابط هم ارزی

تمرین: حاصل حد های زیر را بیابید.

$$1)\ \lim_{x\to 5}\frac{x^2-3x+2}{x+1}=$$

$$2)\ \lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2+x-2}=$$

$$3)\ \lim_{x\to -2}\frac{2x^3+3x^2+4}{x^3+8}=$$

$$4)\ \lim_{x\to \frac{1}{2}}\frac{2x^2+x-1}{4x^2-4x+1}=$$

$$5)\ \lim_{x\to -3}\frac{x^2-9}{x^2+3x}=$$

$$۶)\ \lim_{x\to ۱}\frac{x^{۳}-۱}{x-۱}=$$

$$۷)\ \lim_{x\to \frac{۱}{۲}}\frac{۴x^{۲}-۴x+۱}{۲x^{۲}+x-۱}=$$

$$۸)\ \lim_{x\to ۵}\frac{x^{۳}-۴x^{۲}-۴x-۵}{x^{۲}-۲۵}=$$

$$۹)\ \lim_{x\to ۱}\frac{x-\sqrt{x}}{x^{۲}+x-۲}=$$

$$۱۰)\ \lim_{x\to ۵}\frac{۲-\sqrt{x-۱}}{x-۵}=$$

$$۱۱)\ \lim_{x\to ۳}\frac{x^{۲}-۹}{۲-\sqrt{x+۱}}=$$

۱۲) $\lim\limits_{x\to -۱}\dfrac{x^{۲}-۱}{x+\sqrt{۲x+۳}}=$

۱۳) $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{x-\sqrt{۲x-۱}}{x^{۲}-x}=$

۱۴) $\lim\limits_{x\to ۸}\dfrac{x^{۲}-۸x}{\sqrt[۳]{x}-۲}=$

۱۵) $\lim\limits_{x\to -۸}\dfrac{۲x+۱۶}{\sqrt[۳]{x}+۲}=$

۱۶) $\lim\limits_{x\to -۱}\dfrac{\sqrt[۳]{x}+۱}{x^{۲}+۳x+۲}=$

نکات تستی (هم ارزی و هوپیتال):

تست: حاصل حد $\lim\limits_{x\to -۸} \dfrac{x^۲+۱۰x+۱۶}{۱۲+۶\sqrt[۳]{x}}$ کدام است؟ سراسری ۹۸

۱) -۲۴　۲) -۱۸　۳) -۱۲　۴) -۶

تست: حاصل حد $\lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{x}{۱-\sqrt{۱-x}}$ کدام است؟

۱) -۲　۲) ۲　۳) ۴　۴) $\dfrac{۱}{۲}$

تست: اگر $\lim\limits_{x\to ۲} \dfrac{x-\sqrt{۳x-۲}}{ax+b}=\dfrac{۱}{۲}$ باشد، آنگاه b کدام است؟ **خارج ۹۵**

۱) -۲　۲) -۱　۳) ۱　۴) ۲

تست: حاصل حد $\lim\limits_{x\to ۱} \dfrac{۲x-۷\sqrt{x}+۵}{۲x-\sqrt{۳x+۱}}$ کدام است؟ **ریاضی ۹۹**

۱) $-۱/۵$　۲) $-۱/۲$　۳) $-۰/۸$　۴) $-۰/۶$

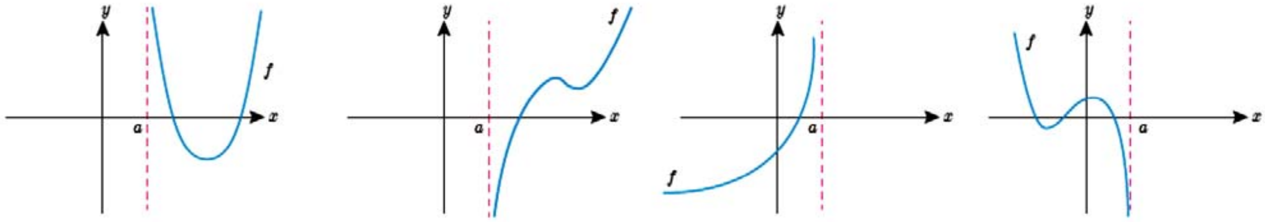
حد بینهایت:

تعریف ۱ : فرض کنیم تابع f در یک همسایگی محذوف a تعریف شده باشد. رابطهٔ $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ به این معناست که می‌توان مقدارهای $f(x)$ را از هر عدد مثبت دلخواه بزرگ‌تر کرد، مشروط بر آنکه x به قدر کافی به a نزدیک اختیار شود.

تعریف ۲ : فرض کنیم f در یک .... a تعریف شده باشد. رابطهٔ $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$ به این معناست که می‌توان مقادیر $f(x)$ را از هر عدد منفی دلخواهی .... کرد، مشروط بر آنکه x به قدر .... به a نزدیک اختیار شود.

تعریف ۳ : فرض کنیم f در یک همسایگی راست از a تعریف شده باشد. رابطهٔ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$ به این معناست که می‌توان مقادیر $f(x)$ را از هر عدد مثبت دلخواه بزرگ‌تر کرد، مشروط بر آنکه x با مقادیر بزرگ‌تر از a به قدر کافی به a نزدیک اختیار شود.

به نمودار مربوط به $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$ و همچنین سایر حالت‌های حدود نامتناهی یک‌طرفه، در شکل‌های زیر دقت کنید.



$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty$　　$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty$　　$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$　　$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$

قضیه : فرض کنیم $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L\neq 0$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ در این صورت :

الف) اگر $L>0$ و تابع $g(x)$ در همسایگی محذوفی از a مثبت باشد، آنگاه $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=+\infty$

ب) اگر $L>0$ و تابع $g(x)$ در همسایگی محذوفی از a منفی باشد، آنگاه $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=-\infty$

پ) اگر $L<0$ و تابع $g(x)$ در همسایگی محذوفی از a مثبت باشد، آنگاه $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=-\infty$

ت) اگر $L<0$ و تابع $g(x)$ در همسایگی محذوفی از a منفی باشد، آنگاه $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=+\infty$

تذکر : قضیهٔ قبل، برای حالتی که $x\to a^+$ و یا $x\to a^-$ نیز برقرار است.

نکات تکمیلی:

تمرین: حاصل حد های زیر را بیابید.

۱) $\lim\limits_{x\to ۱^-} \frac{۱}{x-۱} =$

۲) $\lim\limits_{x\to ۱^+} \frac{۱}{x-۱} =$

۳) $\lim\limits_{x\to ۳} \frac{-۱}{(x-۳)^۴} =$

۴) $\lim\limits_{x\to -۶} \frac{۹}{(x+۶)^۲} =$

۵) $\lim\limits_{x\to ۳} \frac{۲}{|x-۳|} =$

۶) $\lim\limits_{x\to ۵^+} \frac{۲x}{x-۵} =$

۷) $\lim\limits_{x\to ۵^-} \frac{۲x}{x-۵} =$

۸) $\lim\limits_{x\to ۰^+} \frac{۱}{x} =$

۹) $\lim\limits_{x\to ۳^{+}} \frac{۱-۵x}{x^{۲}-۹}=$

۱۰) $\lim\limits_{x\to -\frac{۱}{۲}} \frac{۴x+۱}{(۲x+۱)^{۲}}=$

۱۱) $\lim\limits_{x\to -\frac{۱}{۳}} \frac{[x]}{|۳x+۱|}=$

۱۲) $\lim\limits_{x\to \frac{۱}{۲}} \frac{[x]-۳}{|۲x-۱|}=$

۱۳) $\lim\limits_{x\to ۳^{-}} \frac{[x]-۳}{x-۳}=$

۱۴) $\lim\limits_{x\to ۰} \frac{۱}{|x|}=$

۱۵) $\lim\limits_{x\to ۲} \frac{۱}{(x-۲)^{۴}}=$

۱۶) $\lim\limits_{x\to ۰^{+}} \frac{x-۱}{[x]}=$

۱۷) $\lim\limits_{x\to ۳^-} \dfrac{x}{x^۲-۹}=$

۱۸) $\lim\limits_{x\to ۲^-} \dfrac{x+۱}{۴-x^۲}=$

۱۹) $\lim\limits_{x\to ۲^-} \dfrac{[x]-۲}{x-۲}=$

۲۰) $\lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{\sqrt{۳+x^۲}}{x^۲}=$

۲۱) $\lim\limits_{x\to ۳^-} \dfrac{x^۲+۲x-۱}{x^۲+x-۱۲}=$

۲۲) $\lim\limits_{x\to ۲} \dfrac{۲^x}{x^۲-۴x+۴}=$

۲۳) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}^-} \dfrac{۱}{\cos x}=$

۲۴) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}^+} \dfrac{۱}{\cos x}=$

۲۵) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{۲}^+} \frac{۱-x}{\cos x} =$

۲۶) $\lim\limits_{x \to ۰} \frac{x+۱}{\sin^۲ x} =$

۲۷) $\lim\limits_{x \to ۰^+} \frac{x-۱}{\sin x} =$

تمرین: حاصل حد های زیر را بیابید.

۱) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{۲}^+} \tan x =$

۲) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{۲}^-} \tan x =$

۳) $\lim\limits_{x \to \frac{۳\pi}{۲}^+} \tan x =$

تمرین: آیا مقدار $\lim\limits_{x \to ۱^+} \frac{۱}{[x]-۱}$ وجود دارد؟ چرا؟

تمرین: نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{x-۲}$ را رسم کنید و سپس حاصل حد های زیر را به کمک آن بیابید.

۱) $\lim\limits_{x\to ۲^+} \frac{۱}{x-۲}=$

۲) $\lim\limits_{x\to ۲^-} \frac{۱}{x-۲}=$

تمرین: با توجه نمودار تابع $f(x)=\log_۲^x$، حاصل حد $\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x)$ را بیابید.

تمرین: اگر $\lim\limits_{x\to ۲^+} \frac{ax-۳}{(۲-x)^۳}=+\infty$ باشد، آنگاه حدود a را بیابید.

تست: اگر $\lim\limits_{x\to ۳} \frac{۱}{x^۲+ax+b}=+\infty$ باشد، آنگاه $a+b$ کدام است؟

۱) ۳　　۲) -۳　　۳) ۶　　۴) -۶

تمرین: اگر $\lim\limits_{x\to ۳} \frac{x-۴}{۲x^۲+ax+b}=-\infty$ باشد، آنگاه $a+b$ را بیابید.

تست: حاصل حد $\lim\limits_{x\to -۲^-} \frac{[x]+۳}{x+۲}$ کدام است؟ **تجربی ۹۹**

۱) $-\infty$ ۲) -۱ ۳) صفر ۴) ۱

تست: حاصل حد $\lim\limits_{x\to ۲^+} \frac{x^۲-۴}{x^۳-[x^۳]}$ کدام است؟ **تجربی ۱۴۰۱**

۱) صفر ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۱ ۴) $+\infty$

تست: حاصل $\lim\limits_{x\to ۲^-} \frac{[x]-۲}{x^۲+x-۶}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) $-\infty$ ۴) $+\infty$

نکته: اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\pm\infty$، آن گاه: $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}=۰$

تمرین: حاصل حد های زیر را بیابید.

۱) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}} (\frac{x+۱}{\tan x})=$

۲) $\lim\limits_{x\to ۰} (\frac{۲x+۳}{\cot x})=$

۳) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}^+} \frac{۲}{\tan x}=$

نکته: اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=L$، آنگاه :

۱) $\lim\limits_{x\to a} f(x)+g(x)=+\infty$

۲) $\lim\limits_{x\to a} f(x)\times g(x)=+\infty \qquad L\succ ۰$

۳) $\lim\limits_{x\to a} f(x)\times g(x)=-\infty \qquad L\prec ۰$

تمرین: اگر $f(x)=\frac{۱}{x}$ و $g(x)=x+۱$، آنگاه حاصل حد های زیر را بیابید.

۱) $\lim\limits_{x\to ۰} (f+g)(x)=$

۲) $\lim\limits_{x\to ۰} (f\times g)(x)=$

تمرین: حاصل $\lim\limits_{x\to ۰} \frac{x+\sin^{۲} x}{x^{۲}}$ را بیابید.

تمرین: هزینه پاکسازی x درصد از آلودگی های شهری و صنعتی از رودخانه ای به وسیله تابعی با ضابطه محاسبه می شود که در آن x درصد آلودگی و هزینه پاکسازی بر حسب میلیون تومان است:

الف) هزینه پاکسازی ۲۰ درصد از آلودگی های این رودخانه چقدر است؟

ب) اگر بخواهیم ۹۵ درصد از آلودگی های این رودخانه پاکسازی شود چقدر باید هزینه کنیم؟

ج) چراا هیچ گاه صد درصد از آلودگی های این رودخانه پاکسازی نمی شود؟

تمرین: حاصل حد های زیر را بیابید.

۱) $\lim\limits_{x\to(-۱)^-} \dfrac{x^۲+x}{x^۲+۲x+۱}=$

۲) $\lim\limits_{x\to ۰^+} \dfrac{x^۲+x}{x^۲}=$

۳) $\lim\limits_{x\to(-۲)^+} \dfrac{x+۲}{x^۲+۴x+۴}=$

۴) $\lim\limits_{x\to ۰^-} \dfrac{۲-\cos x}{x}=$

حد در بینهایت :

تعریف :

- اگر تابع $f(x)$ در بازه‌ای مانند $(a\,,+\infty)$ تعریف شده باشد گوییم حد $f(x)$ وقتی x به سمت مثبت بی‌نهایت میل می‌کند برابر l است و می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$ هرگاه بتوان با اختیار xهای به قدر کافی بزرگ، فاصله $f(x)$ از l را به هر اندازه کوچک کرد.
- اگر تابع f در بازه $(-\infty\,,a)$ تعریف شده باشد. می‌گوییم حد $f(x)$ وقتی x به سمت منفی بی‌نهایت میل می‌کند برابر l است و می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=l$ هرگاه بتوان با اختیار xهای به قدر کافی کوچک فاصله $f(x)$ را از l به هر اندازه کوچک کرد.

حد نامتناهی در بینهایت :

تعریف : فرض کنیم تابع f در بازه‌ای مثل $(a \,,\, +\infty)$ تعریف شده باشد. رابطهٔ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ به این معناست که مقدارهای $f(x)$ را می‌توان از هر عدد مثبت دلخواهی بزرگ‌تر کرد، مشروط بر آنکه x به قدر کافی بزرگ اختیار شود.

تعریف : فرض کنیم تابع f در بازه‌ای مثل $(-\infty \,,\, b)$ تعریف شده باشد. رابطهٔ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ به این معناست که مقدارهای $f(x)$ را می‌توان از هر عدد منفی دلخواهی کوچک‌تر کرد، مشروط بر آنکه x به قدر کافی کوچک و منفی اختیار شود.

نکته :

به‌طور کلی حد هرچند جمله‌ای به‌صورت $f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0$ در $\pm\infty$ برابر حد جمله‌ای از آن است که دارای بزرگ‌ترین درجه است یعنی :

$$\lim_{x\to\pm\infty}(a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0)=\lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n$$

تمرین: حاصل حد های زیر را بیابید.

۱) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{۱}{x} =$

۲) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{-۳x^{۳}+x-۱}{۶x^{۳}-۲x+۱} =$

۳) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{۲x^{۲}+۷x+۱}{۳x^{۲}-۵x-۲} =$

۴) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{۳x+۵}{x-۲} =$

۵) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{۲x+۱}{x+۱} =$

۶) $\lim\limits_{t\to-\infty} \frac{t^{۲}+۱}{t^{۳}-۲t^{۲}+۱} =$

۷) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{۷x^{۲}-۴x+۱}{۳x^{۲}+۵x-۶} =$

۸) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{۱}{۲x-۳} =$

۹) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{۵x+۴}{x^۳+x-۸}=$

۱۰) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{-۶x^۳+۷x-۹}{۲x^۳-۴x^۲+x}=$

۱۱) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{۳+\dfrac{۱}{x}}{\dfrac{۴}{x}-۵}=$

۱۲) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{۲+\dfrac{۳}{x}}{\dfrac{۵}{x}+\dfrac{۴}{۳}}=$

۱۳) $\lim\limits_{x\to +\infty} (۳+\dfrac{۵}{x^۳})=$

۱۴) $\lim\limits_{t\to -\infty} \dfrac{۱-۵t^۲}{t^۲+۳t}=$

۱۵) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{۷x^۲-۴x+۱}{۳x^۲+۵x-۶}=$

۱۶) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^۲+x}{۳-x}=$

۱۷) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{-۴x^{۷}+۵x^{۲}}{۲x^{۳}+۹}=$

۱۸) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{۲x^{۵}-۶x^{۳}-x}{x^{۲}-۵x+۱}=$

۱۹) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{-x^{۲}+۲x}{۴x+۱}=$

۲۰) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{-۱۲x^{۵}+۷x^{۳}-۲x-۹}{۳x^{۲}-۸x+۱}=$

۲۱) $\lim\limits_{x\to -\infty} (-۲x^{۳}+۴x^{۲}-۵x-۹)=$

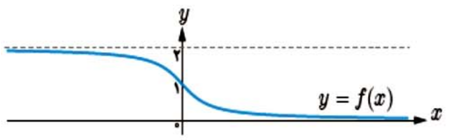
۲۲) $\lim\limits_{t\to +\infty} (۲x-۳+۵x^{۲})=$

۲۳) $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{۳x^{۷}+x-۶}{۲x^{۵}-x+۳}=$

۲۴) $\lim\limits_{x\to +\infty} (-\dfrac{۱}{۲}x^{۳}+۷x^{۲}-۶)=$

تمرین: با توجه به نمودار های زیر، حاصل حد های خواسته شده را بیابید.

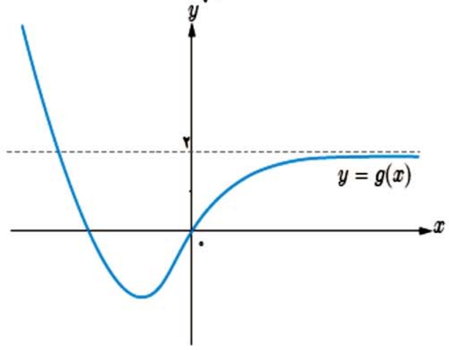
(الف)



$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \cdots$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \cdots$

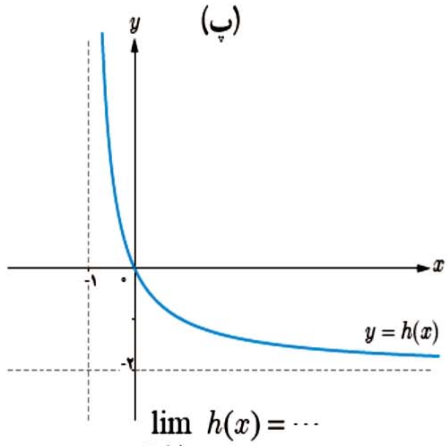
(ب)



$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \cdots$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \cdots$

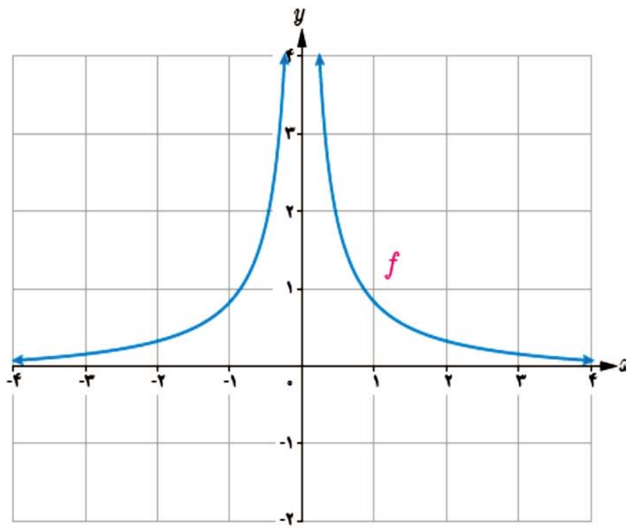
(پ)



$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \cdots$

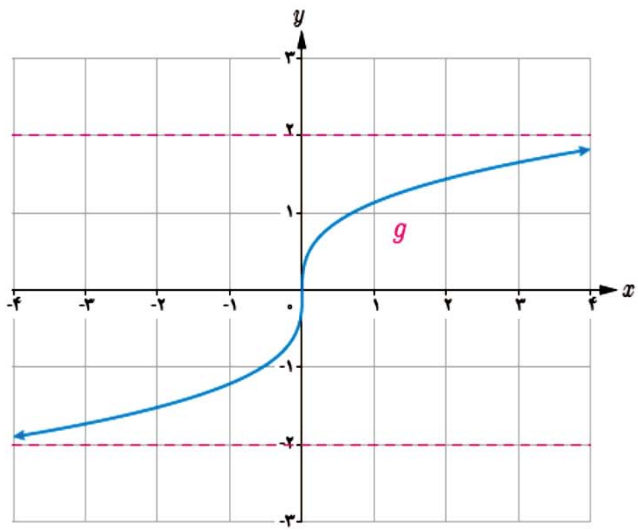
$\lim\limits_{x\to(-1)^+} h(x) = \cdots$

تمرین: با توجه به نمودار های زیر، حاصل حد های خواسته شده را بیابید.



$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

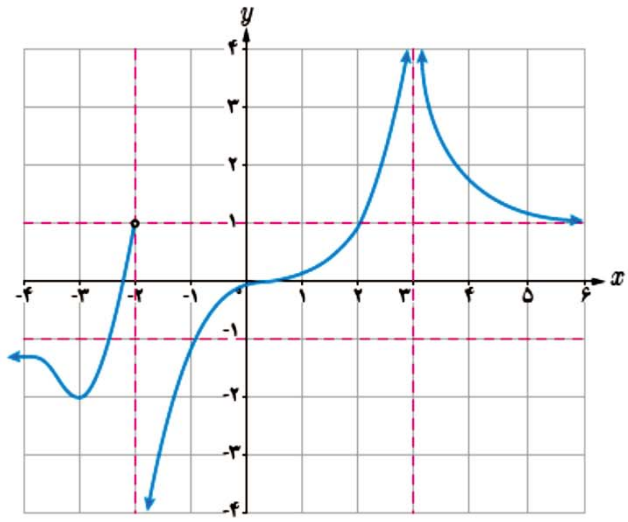
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$



$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$

تمرین: با توجه به نمودار زیر، حاصل حد های خواسته شده را بیابید.



الف) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) =$

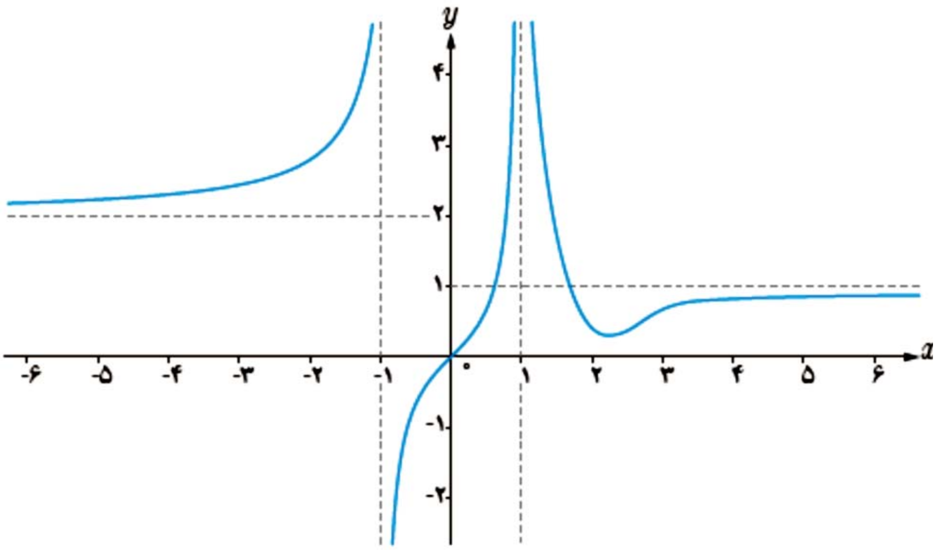
ب) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) =$

پ) $\lim\limits_{x\to ۳^+} f(x) =$

ت) $\lim\limits_{x\to ۳^-} f(x) =$

ث) $\lim\limits_{x\to -۲^+} f(x) =$

تمرین: با توجه به نمودار زیر، حاصل حد های خواسته شده را بیابید.



ب) $\lim\limits_{x\to(-۱)^-} f(x)$

الف) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

ت) $\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)$

پ) $\lim\limits_{x\to(-۱)^+} f(x)$

ج) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

ث) $\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)$

تمرین: حاصل حد تابع زیر، وقتی $x \to -\infty$ برابر .... است.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{۱}{x} & x \succ ۰\\[2mm] \dfrac{۵x^{۲}-۳x}{-x^{۲}+۱} & x \le ۰\end{cases}$$

تست: حاصل حد $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{(x+۱)(۳x+۱)(x+۲)}{۳x^{۳}-۱}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) $\dfrac{۱}{۳}$

تست: حاصل حد $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{(۲x+۱)(۱-x)(x+۳)}{x^{۳}-x}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۲ ۳) ۲ ۴) -۱

تست: اگر حد کسر $\dfrac{x^{m+۳}+nx+m}{mx^{n-۲}-mx+n-۱}$ با شرط $n \succ ۳$ وقتی $x \to \infty$ برابر ۲- باشد، $m+n$ کدام است؟

۱) ۳/۵ ۲) ۴ ۳) ۴/۵ ۴) ۵

نکته :

۱) $\lim\limits_{x\to+\infty} [x] \sim x$

۲) توابع متناوب غیر ثابت در حد ندارند. به عنوان مثال:

1) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \sin x =$ حد ندارد

2) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \cos x =$ حد ندارد

3) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x-[x] =$ حد ندارد

۳) هم ارزی رادیکالی:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[n]{ax^n \pm bx^{n-1} + \dots} \sim \begin{cases} \sqrt[n]{a}\left|x \pm \dfrac{b}{na}\right| & \text{زوج } n \\ \sqrt[n]{a}\left(x \pm \dfrac{b}{na}\right) & \text{فرد } n \end{cases}$$

۴) $$\lim_{x\to\pm\infty} x\sqrt[k]{\frac{x+a}{x+b}} \sim x + \frac{a-b}{k}$$

۵) $$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} a^x + b^x \sim a^x & (a \succ b) \\ \lim\limits_{x\to-\infty} a^x + b^x \sim b^x & (a \succ b) \end{cases}$$

نکته: هرگاه در استفاده از هم ارزی ها، تمام جملات حاصل از هم ارزی به قرینه حذف شوند، استفاده از هم ارزی اشتباه است. در این صورت بهتر است از روش های دیگر و یا هم ارزی پیشرفته تر استفاده کرد.

تست: حاصل حد $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{۴x^۲+۳x+۱}-۲x$ کدام است؟

۱) $+\infty$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) صفر ۴) $\frac{۳}{۴}$

تمرین: حاصل حد $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt[۳]{۸x^۳+۴x+۲}+۲\sqrt{x^۲+۶x}$ را بیابید.

تمرین: حاصل حد $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^۲+۴x}-\sqrt{x^۲+۲x}}{\sqrt[۳]{x^۳+۳x}-\sqrt[۳]{x^۳+۶x^۲}}$ را بیابید.

تست: حاصل حد $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sqrt{\dfrac{x+۵}{x-۱}}-x$ کدام است؟

۱) $+\infty$ ۲) ۲ ۳) صفر ۴) ۳

تمرین: حاصل حد $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{[x]+|۳-۲x|}{\sqrt{x^{۲}+۳}+۱}$ را بیابید.

تست: حاصل حد $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{۲\sqrt{x+۳}+\sqrt{۹x+۱}}{\sqrt{x+۲}-\sqrt{۴x-۱}}$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۵ ۴) -۵

تست: حاصل حد $\lim\limits_{x\to ۰} |x|\left[\dfrac{۱}{x}\right]$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) ۱ ۳) صفر ۴) حد ندارد.

تست: اگر $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(ax+۲-\sqrt{x^{۲}+bx+۵}\right)$ برابر ۳ باشد، آنگاه ab کدام است؟

۱) ۲ ۲) -۲ ۳) ۴ ۴) -۴

تست: حاصل $\lim\limits_{x\to +\infty} x-[x]$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) ۱ ۳) صفر ۴) حد ندارد.

تست: حاصل حد $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x+\sqrt[3]{x+1}}{2x+\sqrt{x^2+3}}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) $\frac{1}{2}$

تست: در تابع $f(x)=\dfrac{2x+\sqrt{x^2-3x}}{ax^n-6}$ اگر $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=-\frac{1}{2}$، آنگاه $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{6}$ ۲) $-\frac{1}{8}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{3}$

تست: فرض کنید $n\in \mathbb{N}$ حاصل $\lim\limits_{n\to +\infty} \dfrac{2^{2n+1}-2^{1-2n}}{2^{2n+1}+3\times 2^{1-2n}}$ کدام است؟ **ریاضی ۹۹**

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $-\frac{1}{3}$ ۴) -1

تست: حاصل $\lim\limits_{x\to +\infty} \left[\dfrac{x}{[x]}\right]$ کدام است؟

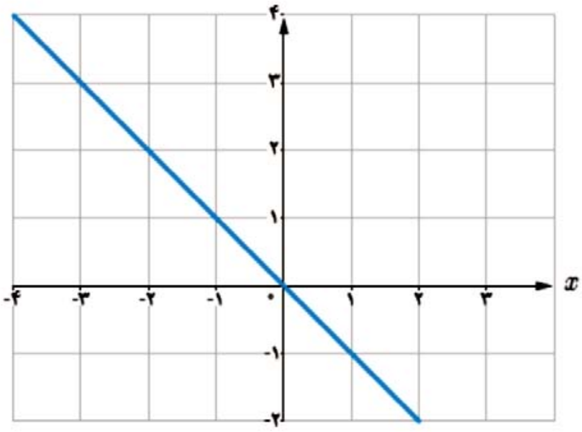
۱) ۱ ۲) صفر ۳) -1 ۴) حد وجود ندارد.

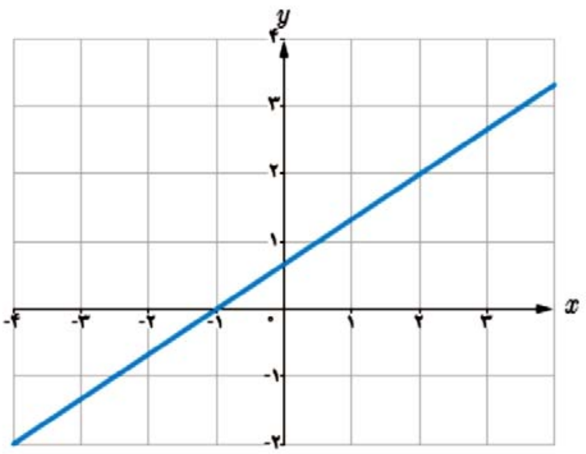
فصل چهارم:

مشتق

مشتق یکی از مفاهیم اساسی ریاضی است که دارای کاربرد های وسیع در ریاضیات و علوم دیگر است. ایده اولیه در مورد مفهوم مشتق به شیب یک خط مربوط می شود.

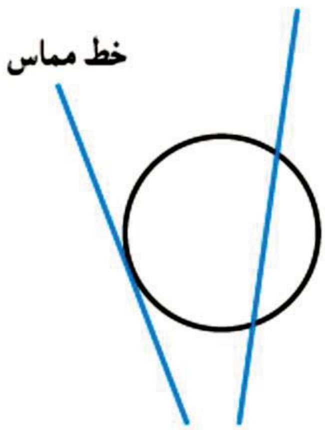
تمرین: شیب هریک از خطوط زیر را به دست آورید و سپس مثبت یا منفی بودن آن ها را مشخص کنید.



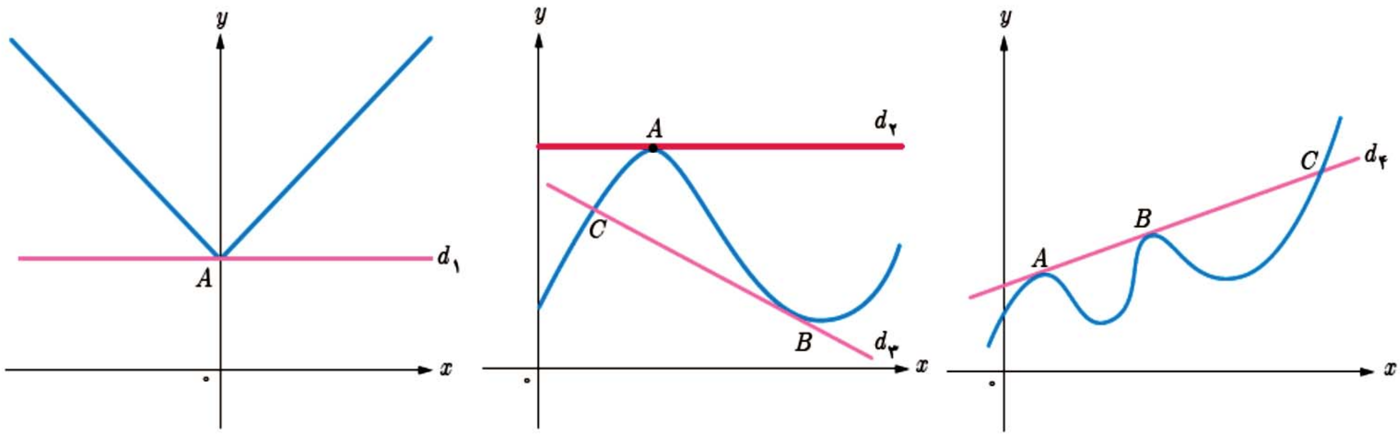


خط مماس بر دایره:

خط مماس بر دایره خطی است که بر دایره یک و فقط یک نقطه مشترک داشته باشد. این تعریف در حالت کلی برای همه منحنی ها صادق نیست.



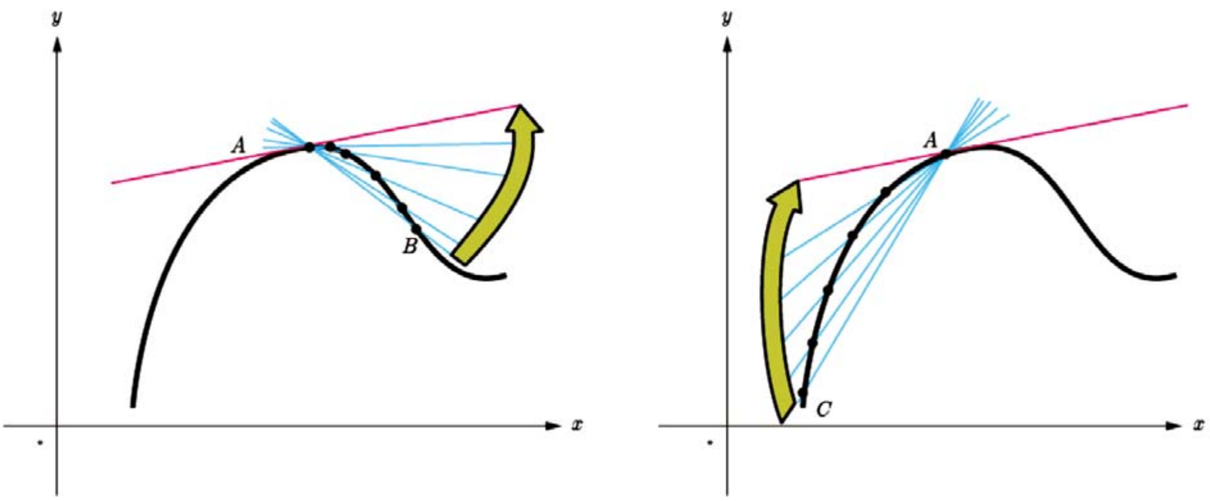
خط‌های d_1 تا d_4 را در نظر بگیرید. خط d_2 در نقطه A، خط d_3 در نقطه B و خط d_4 در نقاط A و B بر منحنی مماس هستند. خط d_1 در نقطه A بر منحنی مماس نیست. همچنین خطوط d_3 و d_4 در نقطه c بر منحنی مماس نیستند. در ادامه این درس با دلایل این امر به صورت دقیق‌تری آشنا خواهید شد.



اکنون سعی می‌کنیم که به کمک نمودار منحنی، خط مماس بر منحنی در یک نقطه را بررسی کنیم. نقطه ثابت A را روی منحنی زیر در نظر می‌گیریم. خطی که از A و B می‌گذرد یک خط قاطع نامیده می‌شود. روی منحنی نقطه‌های دیگری را نزدیک‌تر به نقطه A اختیار می‌کنیم و خط‌های گذرنده از A و آن نقطه‌ها را رسم می‌کنیم. حدس بزنید که وقتی نقاط به قدر کافی به A نزدیک می‌شوند، برای خط‌های قاطع چه اتفاقی می‌افتد؟ به‌عبارت دیگر خط‌های قاطع به چه خطی نزدیک می‌شوند؟

اکنون نقطه C را سمت چپ نقطه A اختیار می‌کنیم و خط قاطع AC را رسم می‌کنیم. مانند قبل نقاط دیگری را نزدیک‌تر به نقطه A اختیار می‌کنیم. حدس می‌زنید برای خط‌های قاطع چه اتفاقی می‌افتد؟ به‌طور شهودی می‌توان گفت:

شیب خط مماس بر منحنی در نقطه A حد شیب خط‌های قاطع گذرنده از A است به شرطی که نقطه‌ها به قدر کافی به A نزدیک شوند.



تعریف مشتق:

شیب خط مماس بر منحنی f در نقطه $A(a, f(a))$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$\text{شیب خط مماس بر منحنی در نقطه } A = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

به شرط آنکه این حد موجود و متناهی باشد.

حد بالا را (در صورت وجود) مشتق تابع f در نقطه a می‌نامند و با $f'(a)$ نمایش می‌دهند، یعنی :

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

✓ حد مذکور را شیب منحنی a می نامیم.

* **توجه:** با توجه به تعریف مشتق بالا و با تغییر متغیر $a+h=x$ داریم:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \xrightarrow[x \to a]{a+h=x} f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

تمرین: اگر $f(x)=x^2$، آنگاه $f'(3)$ را به دو روش محاسبه کنید.

تمرین: اگر $f(x)=x^{۲}+۳$، آنگاه به کمک تعریف مشتق $f'(۲)$ را به دست آورید.

تمرین: اگر $f(x)=x^{۳}-۲$، آنگاه به کمک تعریف مشتق $f'(-۱)$ را به دست آورید.

تمرین: شیب خط مماس بر تابع $f(x)=x^{۳}+۲x+۱$ را در نقطه ای به طول $x=۱$ به دست آورید.

تمرین: شیب خط مماس بر تابع $f(x)=x^{۳}+۳x$ را در نقطه ای به طول $x=-۱$ به دست آورید.

تمرین: اگر $f(x)=3x^2-2x+1$، آنگاه $f'(2)$ را به دست آورید و معادله خط مماس بر منحنی f را در نقطه ای به طول ۲ واقع بر آن بنویسید.

تمرین: اگر $f(x)=-x^2+10x$ باشد، آنگاه به کمک تعریف مشتق، شیب خط مماس را در نقطه $x=2$ بیابید.

تمرین: معادله خط مماس بر منحنی $f(x)=-x^2+10x$ را در نقطه $A(2,f(2))$ واقع بر آن بنویسید.

تمرین: معادله خط مماس بر منحنی $f(x)=x^{۳}+۲$ را در نقطه $A(۲,f(۲))$ واقع بر آن بنویسید.

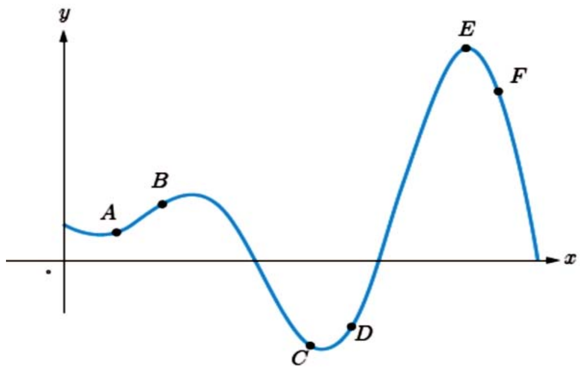
تست: اگر $\lim\limits_{x\to -۱}\dfrac{f(x)-f(-۱)}{x+۱}=۳$، آنگاه $f'(-۱)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳- ۴) ۲-

تست: اگر $\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{f(x)-f(۲)}{x^{۲}-۴}=\dfrac{۱}{۶}$، آنگاه $f'(۲)$ کدام است؟

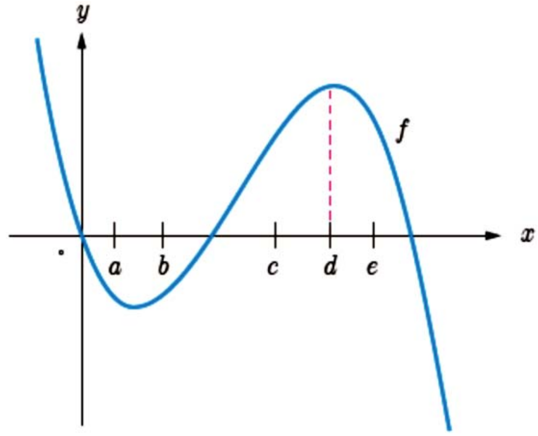
۱) $\dfrac{۱}{۲}$ ۲) $\dfrac{۲}{۳}$ ۳) $\dfrac{۳}{۲}$ ۴) $\dfrac{۱}{۲۴}$

تمرین: نقاط داده شده روی منحنی زیر را با شیب های ارائه شده در جدول نظیر کنید.



نقطه	شیب
	۳-
	۱-
	۰
	$\dfrac{۱}{۲}$
	۱
	۲

تمرین: با در نظر گرفتن نمودار f در شکل، نقاط a، b، c، d و e را با مشتق های داده شده در جدول نظیر کنید.



x	$f'(x)$
	۰
	۰/۵
	۲
	-۰/۵
	-۲

تمرین: با در نظر گرفتن نمودار f، کدام درست و کدام نادرست است؟

۱) شیب منحنی در همه این نقاط مثبت است.

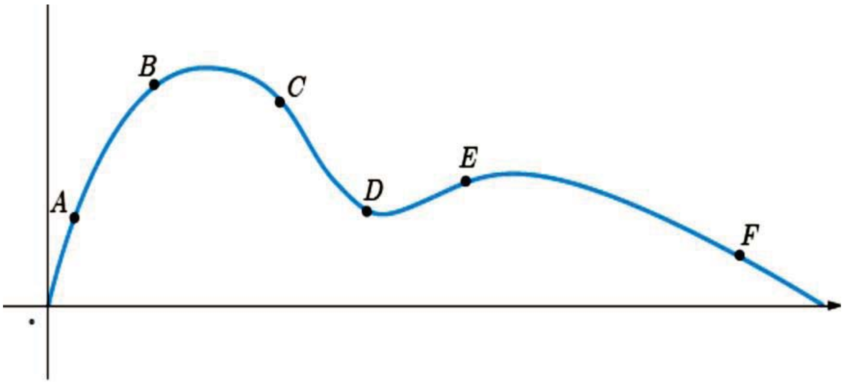
۲) $m_A \prec m_B$

۳) $m_E \prec m_B \prec m_A$

۴) شیب منحنی در نقاط $C, D، F$ منفی است.

۵) $m_F \prec m_D \prec m_C$

۶) $m_c \prec m_D \prec m_F \prec m_E \prec m_B \prec m_A$



تمرین: نقاطی مانند $A، B، C، D، E، F, G$ را روی نمودار $y = f(x)$ مشخص کنید. به طوری که:

۱) A نقطه ای روی نمودار است که شیب خط مماس بر نمودار در آن منفی است.

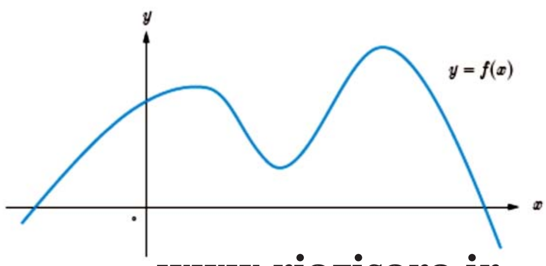
۲) B نقطه ای روی نمودار است که مقدار تابع و مقدار مشتق در آن منفی است.

۳) C نقطه ای روی نمودار است که مقدار تابع در آنجا صفر است ولی مقدار مشتق در آن مثبت است.

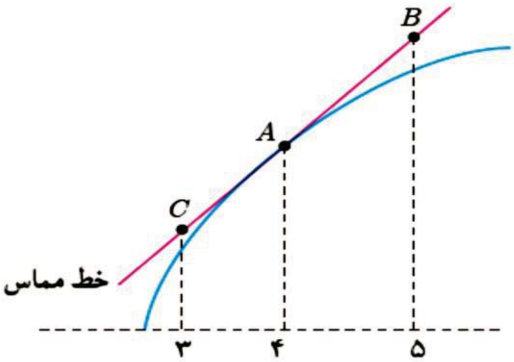
۴) D نقطه ای روی نمودار است که مشتق در آنجا صفر است.

۵) نقاط F, E نقاط متفاوتی روی منحنی هستند که مشتق یکسان دارند.

۶) G نقطه ای روی منحنی است که مقدار تابع در آنجا مثبت ولی مقدار مشتق در آن منفی است.

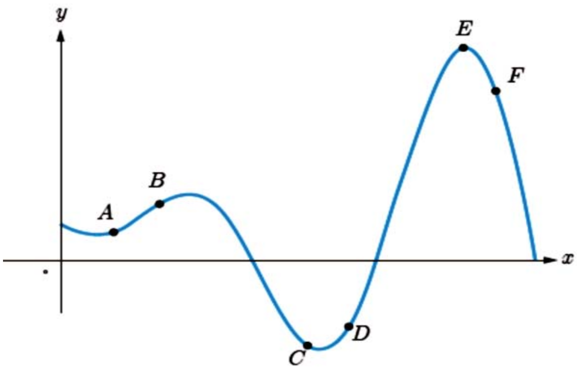


تمرین: برای تابع f در شکل روبه رو داریم: $f(۴)=۲۵$, $f'(۴)=۱/۵$. با توجه به شکل مقابل، مختصات نقاط A،B,C را بیابید.



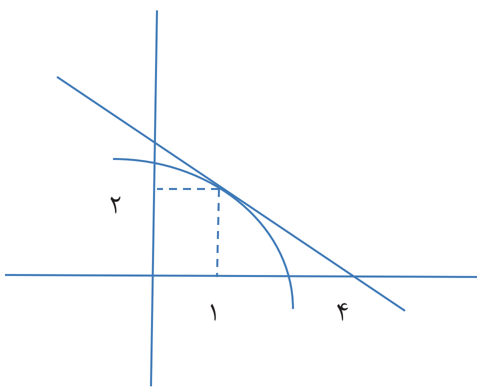
تست: با توجه به شکل زیر، شیب در کدام نقطه منفی است؟

۱) A   ۲) B   ۳) C   ۴) D



تست: در شکل مقابل، خط مماس بر منحنی f در $x=۱$ رسم شده است. حاصل $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(۱+h)-f(۱)}{h}$ کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $-\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $-\frac{۳}{۲}$



* نکته:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+mh)-f(a+nh)}{kh}=\frac{m-n}{k}f'(a)$$

تست: اگر $f(x)=x^3+2x+1$، آنگاه حاصل $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ کدام است؟

۱) ۱　　۲) ۵　　۳) ۳　　۴) ۲

تست: اگر $f(x)=x^2+1$، آنگاه حاصل $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+2h)-f(x-3h)}{h}$ کدام است؟

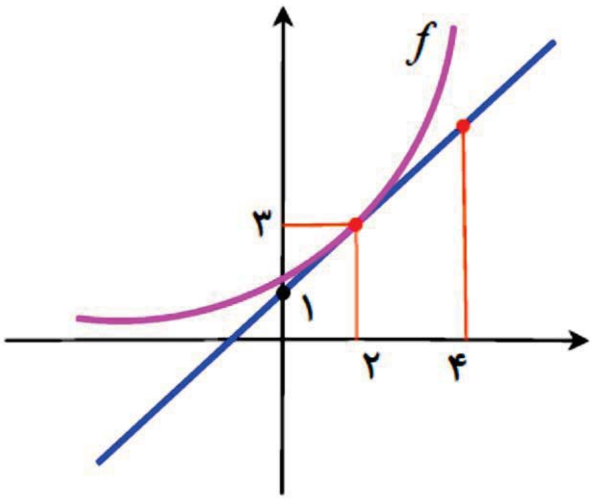
۱) $6x$　　۲) $4x$　　۳) $10x$　　۴) $15x$

تمرین: در شکل مقابل نمودار تابع f و خط مماس بر منحنی آن در نقطه $x=۲$ داده شده است.

الف) مشتق تابع $f(x)$، در نقطه $x=۲$ را بیابید.

(حاصل $\lim\limits_{h\to ۲}\dfrac{f(x)-f(۲)}{x-۲}$ را بیابید.)

ب) معادله خط مماس بر نمودار تابع در نقطه A را بنویسید.



تست: کدام گزینه برابر $f'(x)$ است؟

۱) $\lim\limits_{h\to ۰}\dfrac{f(۱+۲h)-f(۱+۳h)}{h}$

۲) $\lim\limits_{h\to ۰}\dfrac{f(۱+۳h)-f(۱-۲h)}{۵h}$

۳) $\lim\limits_{h\to ۰}\dfrac{f(۱-۲h)-f(۱-۳h)}{۵h}$

۴) $\lim\limits_{h\to ۰}\dfrac{f(۱+۲h)-f(۱-h)}{h}$

مشتق پذیری و پیوستگی:

مشتق یک طرفه:

تعریف : مشتق راست و مشتق چپ تابع f در $x=a$ را با $f'_+(a)$ و $f'_-(a)$ نمایش می‌دهیم و آن را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم :

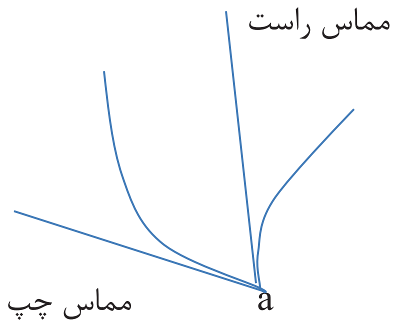
$$f'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\ ,\ f'_-(a)=\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

یا به‌طور معادل :

$$f'_+(a)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\ ,\ f'_-(a)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

نکته:

۱) اگر تابع f در $x=a$ مشتق پذیر باشد، آنگاه f در $x=a$ پیوسته است.
۲) اگر f در $x=a$ پیوسته نباشد، آنگاه f در $x=a$ مشتق پذیر نیست.
۳) اگر f در $x=a$ مشتق پذیر باشد، آنگاه $f'_+(a)=f'_-(a)$ و برابر یک عدد معین است.
۴) به مشتق راست و چپ یک تابع در نقطه $x=a$ شیب نیم مماس راست و شیب نیم مماس چپ گویند.
۵) شرط لازم برای مشتق پذیری، پیوستگی است.
۶) پیوستگی راست شرط لازم برای مشتق راست است.
۷) پیوستگی چپ شرط لازم برای مشتق چپ است.



نکته: تعبیر هندسی مشتق چپ و راست به صورت زیر است:
۱) مماس راست، خطی است که به شاخه راست f در $x=a$ مماس شده است.
۲) مماس چپ، خطی است که به شاخه چپ f در $x=a$ مماس شده است.

قضیه : اگر تابع f در $x=a$ مشتق‌پذیر باشد آن‌گاه f در a پیوسته است.

اثبات : کافی است نشان دهیم : $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$

$$\lim_{x\to a}(f(x)-f(a))=\lim_{x\to a}((x-a)(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}))=$$

$$\lim_{x\to a}(x-a).\lim_{x\to a}(\frac{f(x)-f(a)}{x-a})=\circ.f'(a)=\circ$$

بنابراین $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-f(a))=\circ$ و از آنجا $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$ (چرا؟)

تمرین: نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} x^{۲} & x\neq ۲ \\ ۱ & x=۲ \end{cases}$ را رسم کرده و سپس به کمک آن مشتق پذیری آن را در نقطه $x=۲$ بررسی کنید.

تمرین: به کمک تعریف مشتق، مشتق پذیری تابع $f(x)=\begin{cases} x^{۲} & x\neq ۲ \\ ۱ & x=۲ \end{cases}$ را در نقطه $x=۲$ بررسی کنید.

تمرین: اگر f در $x=a$ پیوسته ....، آنگاه f در $x=a$ مشتق پذیر نیست.

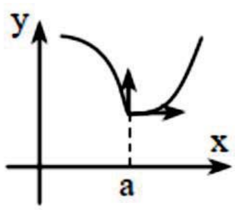
انواع نقاط مشتق ناپذیر: تابع f در $x=a$ مشتق پذیر نیست، هرگاه حداقل در یکی از شرایط زیر صدق کند:

الف) f در $x=a$ پیوسته نباشد.

ب) f در $x=a$ پیوسته باشد ولی مشتق های چپ و راست در $x=a$:

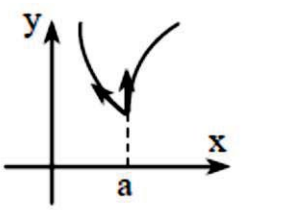
۱) هر دو موجود و متناهی ولی نابرابر باشند (یا یکی از آن ها عدد حقیقی و دیگری بینهایت شود)، به چنین نقطه ای، **نقطه گوشه (زاویه دار)** گوییم.

در این نقطه می توانیم دو نیم مماس از چپ و راست بر نمودار تابع رسم کنیم که با هم یک زاویه تشکیل می دهند.



$f'_-(a)=-\infty$

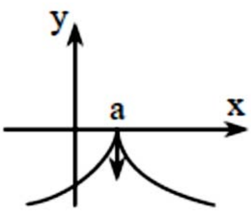
$f'_+(a)=0$



$f'_-(a)=$ عدد حقیقی

$f'_+(a)=+\infty$

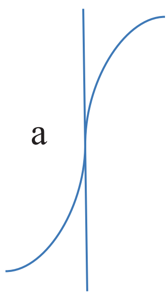
۲) هر دو نامتناهی غیر هم علامت باشند، به چنین نقطه ای، **نقطه بازگشتی** گوییم.

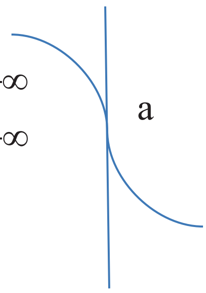


$$\begin{cases} f'_+(a)=-\infty \\ f'_-(a)=+\infty \end{cases}$$

۳) هر دو نامتناهی هم علامت باشند، به چنین نقطه ای، **نقطه عطف** قائم گوییم.

$$\begin{cases} f'_-(a)=+\infty \\ f'_+(a)=+\infty \end{cases}$$





$$\begin{cases} f'_-(a)=-\infty \\ f'_+(a)=-\infty \end{cases}$$

نکته:

اگـر تـابع f در $x=a$ پیوسته باشد و $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=+\infty$ یا $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=-\infty$ در این‌صورت خط $x=a$ را «مماس قائم» بر منحنی f در نقطه $(a,f(a))$ می‌نامیم. بدیهی است $f'(a)$ در این حالت وجود ندارد.

توجه:

به طور خلاصه می توان گفت:

تابع f در $x=a$ مشتق‌پذیر نیست هرگاه حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد

۱ f در a پیوسته نباشد.

۲ f در a پیوسته باشد و مشتق راست و مشتق چپ در $x=a$:

الف) هر دو موجود (متناهی) ولی نابرابر باشند (نقطه گوشه‌ای).

ب) یکی متناهی و دیگری نامتناهی باشد (نقطه گوشه‌ای).

پ) هر دو نامتناهی باشند.

نکته: برای به دست آوردن زاویه بین دو نیم مماس در نقطه گوشه، از دستور زیر استفاده می کنیم:

$$\tan\alpha=\left|\frac{m-m'}{۱+mm'}\right|$$

نکته:

در تابع دو ضابطه‌ای $f(x)=\begin{cases}g(x) & x\ge a\\ h(x) & x<a\end{cases}$ به شرط پیوستگی f در $x=a$، می‌توانیم برای محاسبه‌ی $f'_+(a)$ و $f'_-(a)$ از حد مشتق ضابطه‌ها وقتی $x\to a$ استفاده کنیم.

تمرین: مشتق پذیری تابع $f(x)=\begin{cases} x^{2} & x\le 1 \\ x+1 & x\succ 1 \end{cases}$ را در نقطه $x=1$ بررسی کنید.

تمرین: مشتق پذیری تابع $f(x)=\begin{cases} x^{2}+3 & x\ge 1 \\ 2x & x\prec 1 \end{cases}$ را در نقطه $x=1$ بررسی کنید.

تمرین: تابع $f(x)=\left|x^{2}-1\right|$ مفروض است:

الف) به کمک تعریف مشتق، مشتق پذیری تابع f را در $x=1$ بررسی کنید.

ب) نوع نقطه $x=1$ را مشخص کنید.

ج) معادله نیم مماس راست و چپ تابع f را در $x=1$ بدست آورید.

تمرین: نشان دهید تابع $f(x)=|x^2-1|$ در نقطه $x=-1$ مشتق پذیر نیست و سپس معادله نیم مماس راست و چپ تابع را در $x=-1$ بدست آورید.

تمرین: به کمک تعریف مشتق، مشتق پذیری تابع $f(x)=|x^2-4|$ را در نقاط $x=2$ و $x=-2$ بررسی کنید.

تمرین: نشان دهید $x=2$ یک نقطه گوشه برای تابع $f(x)=|x^2-4|$ است، سپس اندازه تانژانت زاویه ایجاد شده را بیابید.

تمرین: به کمک تعریف مشتق، مشتق پذیری تابع $f(x)=x|x-1|$ را در نقطه $x=1$ بررسی کنید.

تمرین: اگر $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\le 0 \\ x & x\succ 0 \end{cases}$، نشان دهید $f'_+(0)$ و $f'_-(0)$ موجودند ولی $f'(0)$ موجود نیست.

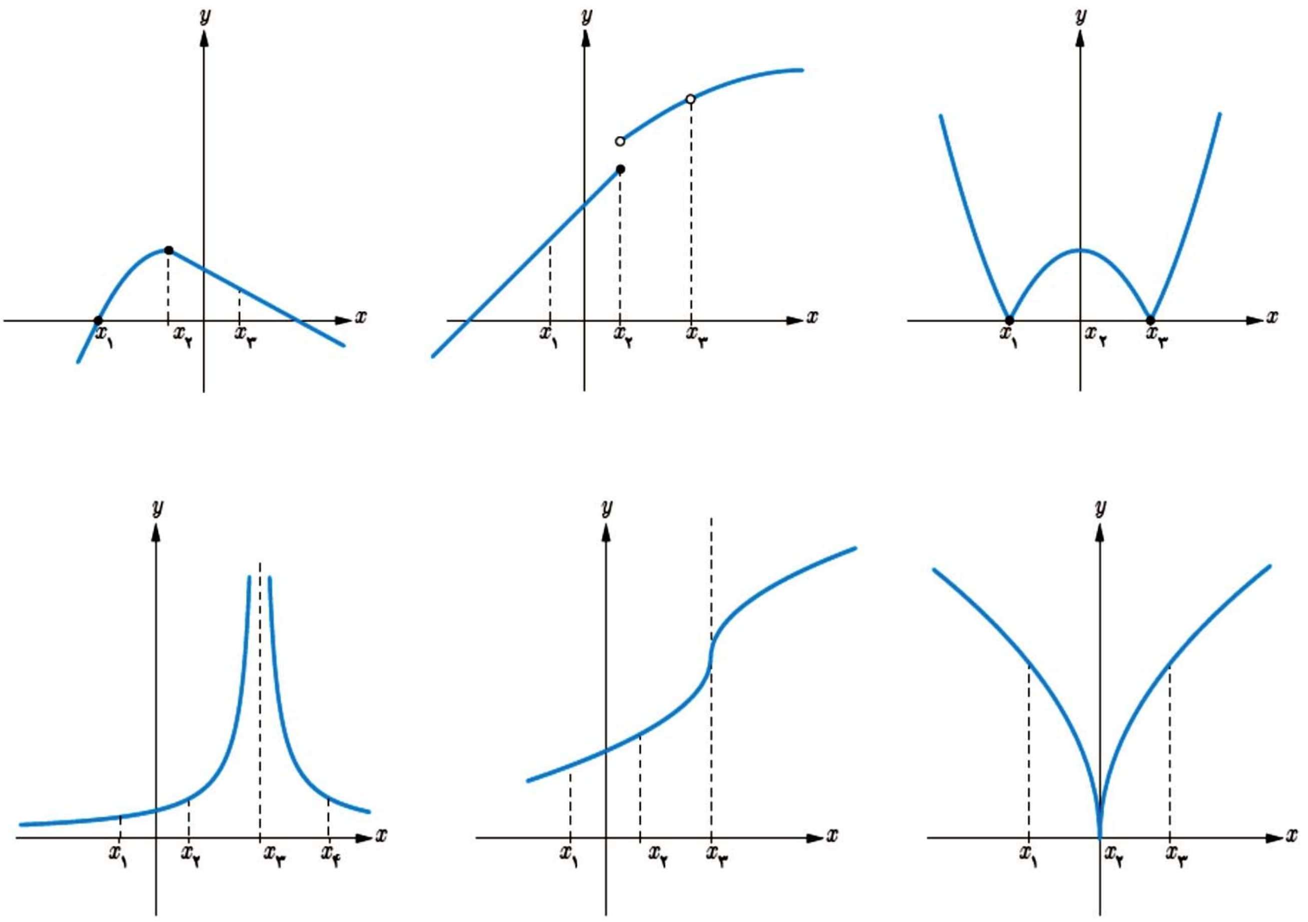
تمرین: توابع $f(x)=[x]$ و $g(x)=\sqrt{x}$ مفروضند. چرا $f'(0)$ و $g'(0)$ موجود نیستند؟

تمرین: مشتق پذیری تابع $f(x)=\sqrt[3]{x}$ را در نقطه $x=0$ بررسی کنید.

تمرین: خط $x=0$ را برای تابع $f(x)=\sqrt[3]{x}$، خط.............................. گوییم.

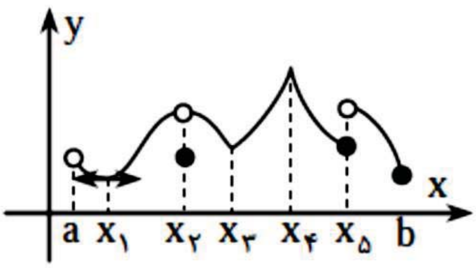
تمرین: خط $x=1$ را برای تابع $f(x)=\sqrt[3]{x-1}$، خط.............................. گوییم.

تمرین: در هر یک از شکل های زیر مشخص کنید تابع در کدام نقطه یا نقاط مشتق ناپذیر است.

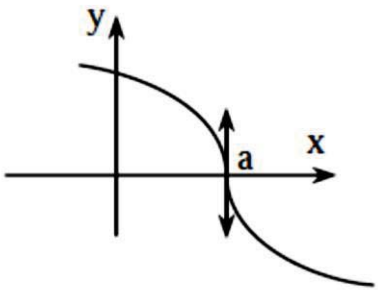


تست: نمودار تابع مقابل در بازه (a,b) در چند نقطه از نقاط x_i مشتق ناپذیر است؟

۱) ۲   ۲) ۳   ۳) ۴   ۴) ۵



تست: با توجه به نمودار مقابل کدام درست است؟



۱) $\begin{cases} f'_+(a)=+\infty \\ f'_-(a)=+\infty \end{cases}$

۲) $\begin{cases} f'_+(a)=-\infty \\ f'_-(a)=-\infty \end{cases}$

۳) $\begin{cases} f'_+(a)=+\infty \\ f'_-(a)=-\infty \end{cases}$

۴) $\begin{cases} f'_+(a)=-\infty \\ f'_-(a)=+\infty \end{cases}$

تمرین: درستی یا نادرستی عبارت های زیر را مشخص کنید.

۱) تابع $f(x)=\sqrt[3]{x}$ در نقطه $x=0$ مشتق پذیر نیست.

۲) اگر تابع f در $x=a$ پیوسته باشد، آنگاه f در $x=a$ مشتق پذیر است.

۳) تابع $f(x)=\sqrt[3]{x}$ در نقطه $x=0$ مماس قائم دارد.

۴) اگر تابع f در $x=a$ مشتق پذیر نباشد، آنگاه f در $x=a$ پیوسته نیست.

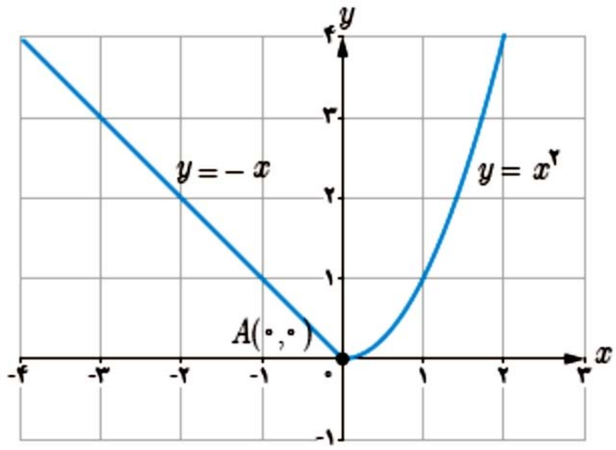
۵) خط $x=1$ مماس قائم برای تابع $f(x)=\sqrt[3]{x}$ است.

تمرین: مشتق تابع $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ را به دست آورید و سپس به سوالات زیر پاسخ دهید:

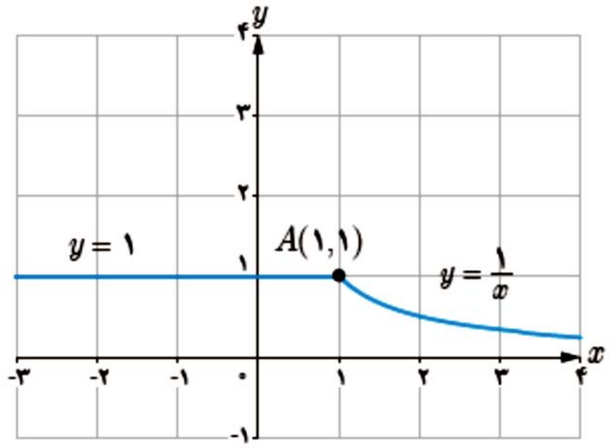
الف) مماس درچه نقاطی افقی است؟

ب) مماس در چه نقاطی قائم است؟

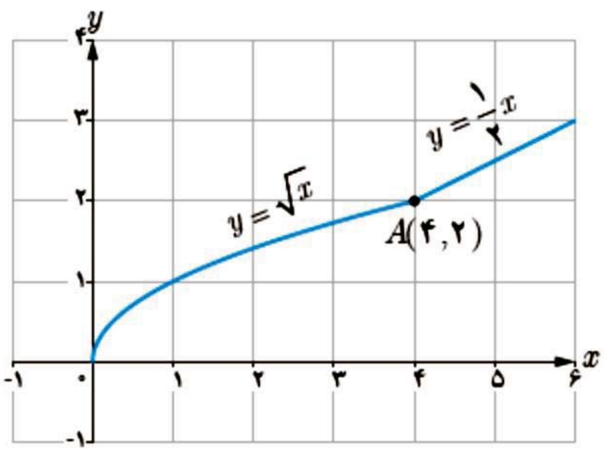
تمرین: با محاسبه مشتق راست و چپ توابع داده شده در نقطه A، نشان دهید که این توابع در نقطه A مشتق پذیر نیستند.



(الف)



(ب)



(پ)

تمرین: مقادیر a و b را طوری بیابید که تابع $f(x)=\begin{cases} ax^{۲}+bx+۲ & x\prec ۱ \\ |x^{۳}| & x\geq ۱ \end{cases}$، در $x=۱$ مشتق پذیر باشد.

تست: تابع $f(x)=\begin{cases} ax+b & x\succ ۱ \\ x^{۳}-۲x & x\leq ۱ \end{cases}$، در $x=۱$ مشتق پذیر است. $a-b$ کدام است؟

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) ۴

تست: اگر $f(x)=\begin{cases} x^{۲}+۱ & x\prec ۱ \\ ۳x-۱ & x\geq ۱ \end{cases}$، حاصل $\lim\limits_{h\to ۰^{+}}\frac{f(۱-h)-f(۱)}{h}$ کدام است؟

۱) -۶　　۲) -۴　　۳) ۶　　۴) ۴

نکته تستی:

۱) در توابع به فرم $y=g(x)|f(x)|$، در ریشه های ساده داخل قدرمطلق به شرطی که $g(a)\neq ۰$ باشد، مشتق ناپذیر و زاویه دار هستند.

۲) در توابع به فرم (**n فرد و m زوج**)، با شرط :

الف) توان عبارت زیر رادیکال کمتر از فرجه باشد.

ب) $g(a)\neq ۰$.

در این صورت $x=a$ یک نقطه بازگشتی تابع f است.

۳) در توابع به فرم (**n فرد و m فرد**)، با شرط :

الف) توان عبارت زیر رادیکال کمتر از فرجه باشد.

ب) $g(a)\neq ۰$.

در این صورت $x=a$ نقطه عطف قائم تابع f است.

۴) در توابع به فرم $f(x)=\sqrt[n]{|x-a|}$ ($n\geq ۲\,,\,n\in\mathbb{N}$)، $x=a$ نقطه بازگشتی تابع f است.

****

تست: تابع $f(x)=|x^۲-۲x|$ در چند نقطه مشتق ناپذیر است؟

۱) هیچ نقطه   ۲) ۱   ۳) ۲   ۴) ۳

تست: تابع $f(x)=(x^۲-۱)|x^۲-۳x+۲|$ در چند نقطه مشتق ناپذیر است؟

۱) هیچ نقطه   ۲) ۱   ۳) ۲   ۴) ۳

تمرین: نقطه $x=1$ در تابع $f(x)=\sqrt[3]{(x-1)^2}$ چگونه نقطه ای است؟

تمرین: نقطه $x=0$ در تابع $f(x)=\sqrt{|x|}$ چگونه نقطه ای است؟

تست: تابع $f(x)=\frac{1}{|x|-1}$ در چند نقطه مشتق ناپذیر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

تمرین: تابع $f(x)=\left||x^2-2|-2\right|$ در چند نقطه مشتق ناپذیر است؟

تمرین: آیا $x=1$ در تابع $f(x)=|x^2-1|$ گوشه است؟

تمرین: آیا نقطه $(1,1)$ در تابع $f(x)=|2-x^2|$ یک نقطه گوشه ای است؟

تابع مشتق :

$$f'(x)=y'=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

فرمول های مشتق گیری:

تمرین: مشتق توابع زیر را بدست آورید. (ساده کردن الزامی نیست.)

۱) $y=۲$

۲) $y=\frac{۲}{۳}+\sqrt{۳}+۷$

****

۳) $y=x$

۴) $y=-۳x+۲$

۵) $y=x^{۲}+۳x+۵$

۶) $y=x^{۳}-۳x+۴$

۷) $y=x-۴x^{۲}+۱$

۸) $y=\frac{۱}{۳}x^{۳}+\frac{۱}{۲}x^{۲}+x-۱$

****

۹) $y=(x^{۲}+۳x+۱)^{۷}$

۱۰) $y=(x^{۳}-۳x)^{۲}$

۱۱) $y=(۳-۲x^{۲})^{۴}$

۱۲) $y=\sqrt{x}$

۱۳) $y=\sqrt{x+۲}$

۱۴) $y=\sqrt{x^{۲}+۳x+۲}$

۱۵) $y=\sqrt{x^{۲}-۱}$

۱۶) $y=\sqrt{x^{۳}+۳x}+۴x-۱$

****

۱۷) $y=\sqrt[۳]{x}$

۱۸) $y=\sqrt[۳]{x^{۲}}$

۱۹) $y=\sqrt[۳]{x^{۲}+۱}$

۲۰) $y=\sqrt[۳]{(x^{۲}+۱)^{۲}}$

۲۱) $y=\sqrt[۳]{x+۱}$

۲۲) $y=\frac{۱}{x}$

۲۳) $y=\frac{۱}{x-۴}$

۲۴) $y=\frac{x}{۲x^{۲}+x-۱}$

۲۵) $y=\frac{x+۱}{۲x+۳}$

۲۶) $y=\frac{x^{۲}-۳x+۱}{-۳x+۲}$

۲۷) $y=(\frac{x+۱}{۲x^{۲}+۳x})^{۲}$

۲۸) $y=(\frac{-۳x-۱}{x^{۲}+۵})^{۸}$

۲۹) $y=(\frac{x^{۲}}{۳x-۱})^{۵}$

۳۰) $y = \dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$

۳۱) $y = \dfrac{9x-2}{\sqrt{x}}$

****

۳۲) $y = (x+1)(x^2-3x)$

۳۳) $y = (x^2+1)^3(5x-1)$

۳۴) $y = (\sqrt{3x+2})(x^3+1)$

۳۵) $y = (3x^2-4)(2x-5)^3$

۳۶) $y = \sqrt{x}(3x^2+5)$

۳۷) $y = (3x^2-1)^2(2x-3)^3$

۳۸) $y = \sqrt[3]{x}\left(\dfrac{x^2-3}{x}\right)$

مشتق تابع مرکب/ قاعده زنجیری:

اگر f و g دو تابع مشتق‌پذیر باشند، در این صورت تابع مرکب fog مشتق‌پذیر است و داریم :

$$(fog)'(x) = g'(x)f'(g(x))$$

اگر f تابعی برحسب u و u تابعی از x باشد :

$$y = f(u) \Rightarrow y' = u'f'(u)$$

تمرین: اگر $f(x) = x^7$ و $g(x) = x^2 + 3x + 1$ باشند، آن گاه مشتق تابع $(fog)(x)$ را بیابید.

تمرین: اگر $f(x) = \sqrt{5x+1}$ و $g(x) = x^4 + 2$ باشند، آن گاه مشتق تابع $(fog)(x)$ را بیابید.

تمرین: اگر f و g دو تابع مشتق پذیر باشند و $g'(1) = 4$ و $f(0) = 1$ و $f'(0) = 2$، آن گاه مشتق تابع gof را در $x = 0$ بیابید.

تمرین: اگر f و g دو تابع مشتق پذیر باشند و $g'(1) = 3$ و $g(1) = 2$ و $f'(2) = 5$، آن گاه مشتق تابع fog را در $x = 1$ بیابید.

تمرین: اگر $\lim\limits_{x \to ۲} \frac{f(x)-f(۲)}{x-۲} = ۴$، آن گاه مشتق تابع $f(۷x-۵)$ را در $x=۱$ بیابید.

تمرین: اگر $f'(۱)=۳$ و $g'(۱)=۵$، آن گاه حاصل عبارت های زیر را بیابید.

۱) $(f+g)'(۱)=$

۲) $(۳f+۲g)'(۱)=$

۳) $(f-۲g)'(۱)=$

تمرین: اگر f و g دو تابع مشتق پذیر باشند و $f(۲)=۳$ و $f'(۲)=۵$ و $g(۲)=۸$ و $g'(۲)=-۶$، آن گاه حاصل عبارت های زیر را بیابید.

۱) $(f \times g)'(۲)=$

۲) $(\frac{f}{g})'(۲)=$

تمرین: معادله خط قائم بر تابع $f(x)=\frac{۱}{\sqrt{x}}+x$ را در نقطه $x=۱$ واقع بر آن را بیابید.

تمرین: با فرض این که تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ در $\mathbb{R}$ مشتق پذیر باشد و به ازای هر عدد حقیقی x، $g(x)=f(۲-x^۲)$ و $f'(۱)=۳$، مقدار $g'(۱)$ را بیابید.

تمرین: اگر $f(x)=\sqrt{x}g(x)$ و $g(۴)=۸$ و $g'(۴)=۷$ آن گاه مقدار $f'(۴)$ را بیابید.

تمرین: مشتق تابع $f(x)=\frac{x+۱}{x^۲-۲}$ را به دست آورید و سپس به سوالات زیر پاسخ دهید:

الف) مماس درچه نقاطی افقی است؟

ب) مماس در چه نقاطی قائم است؟

نکته:

۱) در مشتق گیری، ابتدا می توان تابع را ساده کرد و سپس مشتق گیری کرد.

۲) در مشتق گیری توابع قدرمطلقی، ابتدا داخل قدر مطلق را تعیین علامت کرده و عبارت داخل قدرمطلق را به بیرون منتقل کرده و سپس مشتق می گیریم.

۳) در مشتق گیری توابع جز صحیح، ابتدا به کمک نکات جزصحیح، به جای جزصحیح عدد مناسب قرار داده و سپس مشتق می گیریم.

تمرین: مشتق چپ تابع $f(x)=|x-۱|+|x|$ را در نقطه $x=۱$ بیابید.

تمرین: مشتق پذیری تابع $f(x)=\frac{|x|}{x}$ را در نقطه $x=۰$ بررسی کنید.

تمرین: مشتق راست تابع $f(x)=|x|+|x-۲|$ را در نقطه $x=۰$ بیابید.

تست: اگر $f(x)=(x-۲)[۳x-۲]$، حاصل $f'_{-}(۲)-f'_{+}(۲)$ کدام است؟

۱) صفر　　۲) ۲　　۳) ۱　　۴) -۱

تست: اگر $f(x)=(x^{۲}-\sqrt{x})([x]+[-x])$، حاصل $f'(۱)$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$　　۲) $-\frac{۳}{۲}$　　۳) صفر　　۴) مشتق وجود ندارد.

تست: اگر $f(x)=\sqrt{x^{۲}-[x]+|x|}$، حاصل $\lim\limits_{h\to ۰^{+}}\dfrac{f(۱+h)-f(۱)}{h}$ کدام است؟ **ریاضی ۹۷**

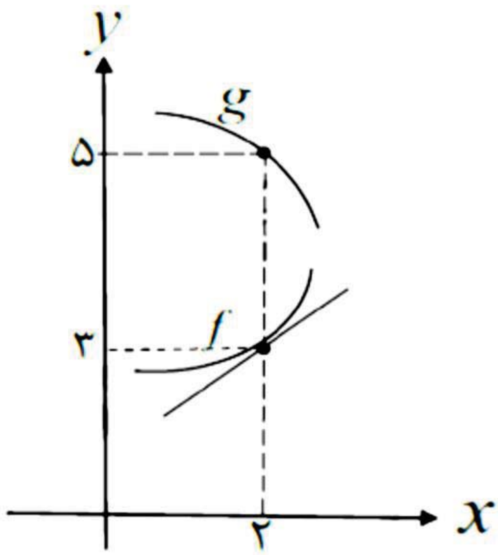
۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۵}{۴}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۵}{۲}$

تمرین: مشتق تابع $f(x)=\dfrac{\sqrt[۳]{x^{۲}}+۱}{x+\sqrt[۳]{x}}$ را در نقطه $x=۱$ بیابید.

تست: اگر $f(x)=(\sqrt{۱+x^{۲}}-x)^{۵}$ و $g(x)=\dfrac{۱}{(\sqrt{۱+x^{۲}}+x)^{۵}}$، آن گاه مقدار $\dfrac{f'g-gf'}{g^{۲}}$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

تمرین: با توجه به نمودار مقابل حاصل $\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{f(x)g(x)-۳g(x)}{x-۲}$ چند برابر $f'(۲)$ است؟



٭تست: اگر $f(x)=\left|x^{۲}-۴\right|$، آن گاه مقدار $\lim\limits_{h\to ۰^{-}}\dfrac{f(۲+h)-f(h-۲)}{h}$ کدام است؟

۱) -۴　　۲) صفر　　۳) -۸　　۴) ۴

تمرین: اگر $f(x)=\begin{cases} x^{۲}+۳x & x\geq ۱ \\ x^{۲}-۳x+۶ & x\prec ۱\end{cases}$، حاصل $\lim\limits_{h\to ۰}\dfrac{f(۱+h^{۲})-f(۱-۲h^{۲})}{۳h^{۲}}$ را بدست آورید.

تمرین: حاصل ضرب شیب نیم مماس راست و شیب نیم مماس چپ تابع $f(x)=x\left|x^{۲}-۱\right|$ در نقطه $x=۱$ را بدست آورید.

تمرین: معادله خط مماس بر تابع $f(x)=\sqrt[۳]{x-۲}$ را در نقطه $x=۲$ واقع بر آن را بیابید.

تست: معادله خط مماس بر نمودار $y=\dfrac{x^{۲}+mx+۱}{x+۳}$ در نقطه ای به طول واحد بر روی نمودار، به صورت $۴y-۳x=n$ است. مقدار $m+n$ چقدر است؟ **تجربی ۱۴۰۱**

۱) -۳ ۲) -۲ ۳) ۲ ۴) ۳

تست: مشتق تابع با ضابطه $f(x)=\left(\frac{\sqrt[3]{x^{2}+2x}}{x^{2}-x}\right)^{3}$ در نقطه $x=2$ کدام است؟ **تجربی ۹۹**

۱) $\frac{-3}{4}$　　۲) $-\frac{5}{4}$　　۳) $-\frac{5}{2}$　　۴) $-\frac{15}{4}$

مشتق عامل صفر کننده:

در عبارت هایی که به صورت ضرب چند عامل در یکدیگر می باشند، اگر مشتق تابع را در نقطه ای بخواهیم که یکی از عوامل به ازای طول آن صفر شود، باید از عامل صفرکننده مشتق بگیریم و در بقیع عبارت ضرب کنیم، سپس طول آن نقطه را جایگزین نماییم. (در این حالت باید در نقطه مورد نظر عامل صفر کننده مشتق پذیر و بقیه عوامل پیوسته باشند.)

توجه: اگر تابع f در $x=a$، دو یا چند عامل صفرکننده داشت، $f'(a)=0$ است.

تمرین: اگر $f(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)...(x-10)$ باشد، حاصل $f'(1)$ را بدست آورید.

تمرین: اگر $f(x)=(x^{2}-3x+2)\sqrt{x^{2}+5}$ باشد، حاصل $f'(2)$ را بدست آورید.

تمرین: اگر $f(x)=(x^{2}-1)(x-1)\sqrt{4x^{2}+5x}$ باشد، حاصل $f'(1)$ را بدست آورید.

نکته: اگر تابع $f(x)=g(x)[x]$ در نقطه $x=a\in\mathbb{Z}$ مشتق پذیر باشد، آن گاه دو شرط زیر برقرار است:

۱) $g(a)=۰$　　　۲) $g'(a)=۰$

تست: تابع $f(x)=(x^۳+ax^۲-۳x+b)[x]$ در نقطه $x=۱$ مشتق پذیر است، $a-b$ کدام است؟

۱) $\frac{-۳}{۴}$　　۲) -۲　　۳) ۲　　۴) $\frac{۳}{۴}$

نکته:

۱) اگر f از درجه n باشد، آن گاه f' از درجه $n-۱$ است.

۲) اگر f از درجه n و g از درجه m باشد، آن گاه fg از درجه $n+m$ و fog از درجه nm است.

تمرین: اگر f از درجه n و fof' از درجه ۱۲ باشد، $f.f'$ از چه درجه ای است؟

دامنه مشتق:

مجموعه تمام نقاطی از دامنه f که برای آن ها f' موجود باشد را دامنه f' می نامیم و با نماد $D_{f'}$ نشان می دهیم.

نکته:

$$D_{f'}\subseteq D_f$$

تمرین: دامنه مشتق توابع زیر را بیابید.

۱) $y=x^{۳}$

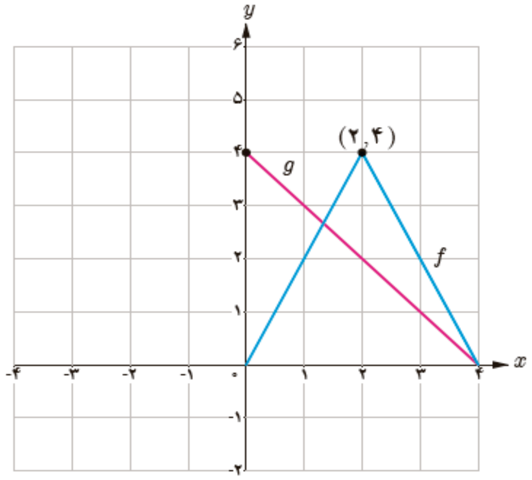
۲) $y=\frac{۱}{x}$

۳) $y=\sqrt{x}$

۴) $y=\sqrt{x+۲}$

تمرین: اگر $f(x)=\begin{cases}۵x & x\neq ۱\\ ۲ & x=۱\end{cases}$، دامنه f و f' را بیابید و ضابطه f' را بدست آورید.

تمرین: نمودار f و f' را در شکل مقابل در نظر بگیرید:



الف) اگر $h(x)=f(x).g(x)$، مطلوب است: $h'(۱), h'(۲), h'(۳)$.

ب) اگر $k(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$، مطلوب است: $k'(۱), k'(۲), k'(۳)$.

مشتق پذیری روی یک بازه:

تابع f روی بازه $(a\ ,\ b)$ مشتق‌پذیر است هرگاه، در هر نقطه این بازه مشتق‌پذیر باشد.

تابع f روی بازه $[a\ ,\ b]$ مشتق‌پذیر است، هرگاه f در بازه $(a\ ,\ b)$ مشتق‌پذیر باشد و در نقطه a مشتق راست و در b مشتق چپ داشته باشد.

مشتق‌پذیری روی بازه‌های $[a\ ,\ b)$ و $(a\ ,\ b]$ را به‌طور مشابه تعریف کنید.

تابع f روی بازه $[a\ ,\ b)$ مشتق‌پذیر است هرگاه ...

تابع f روی بازه $(a\ ,\ b]$ مشتق‌پذیر است هرگاه ...

توجه: اگر $D_f=\mathbb{R}$، f در هر عدد حقیقی مشتق پذیر باشد، گوییم f روی بازه $(-\infty,+\infty)$ مشتق پذیر است.

تمرین: نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} x^{۲} & -۲\le x\le ۱ \\ x+۱ & x\succ ۱ \end{cases}$ را رسم کرده و مشتق پذیری آن را در بازه های $[-۲,-۱]$ و $(۱,+\infty)$ و $[۱,۲]$ بررسی کنید.

تمرین: اگر
$$f(x)=\begin{cases}۲x+۴ & x \prec -۱\\ x^{۲}-۱ & -۱\le x\le ۲\\ -x+۵ & ۲\prec x\prec ۵\end{cases}$$
:

الف) نمودار f را رسم کنید.

ب) مشتق پذیری آن را در بازه های $[-۱,۱]$ و $(۲,۵)$ و $[-۲,۰]$ بررسی کنید.

تمرین: اگر $f(x)=\begin{cases} 5x-4 & x\prec 0 \\ x^2 & 0\le x\le 3 \\ x+6 & x\succ 3 \end{cases}$:

الف) نمودار f را رسم کنید.

ب) نشان دهید که $f'(0)$ و $f'(3)$ وجود ندارند.

ج) ضابطه تابع مشتق را بنویسید.

د) نمودار f' را رسم کنید.

تست: تابع مقابل در چند نقطه نا پیوسته و در چند نقطه مشتق ناپذیر است؟

$$f(x)=\begin{cases}1 & x<0\\ x+1 & 0\le x<1\\ 2x+2 & 1\le x\le 2\\ x^2+2 & x\ge 2\end{cases}$$

۱) دریک نقطه ناپیوسته- در دو نقطه مشتق ناپذیر

۲) دریک نقطه ناپیوسته- درسه نقطه مشتق ناپذیر

۳) دردو نقطه ناپیوسته- در سه نقطه مشتق ناپذیر

۴) درسه نقطه ناپیوسته- در سه نقطه مشتق ناپذیر

نکته: تابع جزصحیح در نقاطی که داخل آن را صحیح کند ناپیوسته است (بجز مینیمم نسبی)، در نتیجه در این نقاط مشتق ناپذیر نیز می باشد.

تست: تابع $f(x)=(x-3)\left[\frac{x}{3}+1\right]$ در بازه $(0,9)$ در چند نقطه مشتق ناپذیر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

تست: تابع $f(x)=\left[x^{۲}\right]$ در بازه $(-۲,۲)$ در چند نقطه مشتق ناپذیر است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

مشتق مرتبه دوم:

مشتق تابع $y=f(x)$ با نماد $y'=f'(x)$ نمایش می دهیم. به همین ترتیب اگر تابع مشتق، مشتق پذیر باشد، مشتق مرتبه دوم $y=f(x)$ را با $y''=f''(x)$ نمایش می دهیم و برای محاسبه آن از تابع $y'=f'(x)$ نسبت به x مشتق می گیریم.

تمرین: اگر $f(x)=۳x^{۴}+۲x^{۲}-۱$ آن گاه $f''(x)$ را بیابید.

تمرین: اگر $f(x)=\frac{۱}{x}$ آن گاه $f''(x)$ را بیابید.

تمرین: ضابطه تابع درجه دوم f را چنان بیابید که $f(-۱)=-۶$, $f'(-۱)=۴$, $f''(-۱)=-۲$ باشد.

تمرین: اگر $f(x)=x^{۶}-۲x^{۴}-x+۱$ باشد، حاصل $\lim\limits_{h\to ۰}\dfrac{f'(۱+h)-f'(۱)}{h}$ کدام است؟

تمرین: به ازای چه مقادیری از a و b و c، تابع $f(x)=\begin{cases} x^{۳} & x<۱ \\ ax^{۲}+bx+c & x\geq ۱ \end{cases}$ در نقطه $x=۱$ مشتق مرتبه دوم دارد؟

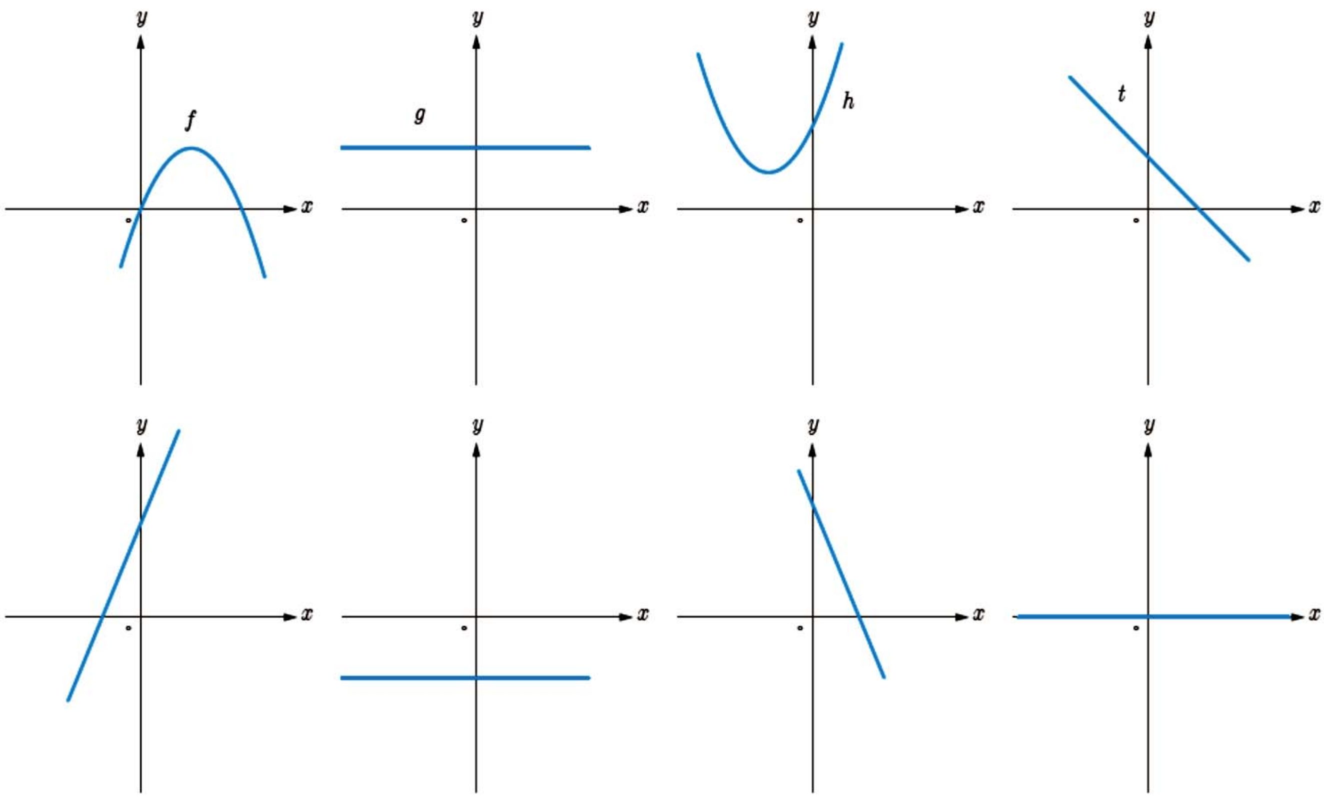
رسم نمودار f' از روی f:

۱) اگر منحنی f در یک بازه صعودی اکید (نزولی اکید) باشد، آن گاه منحنی f' در این بازه بالا(پایین) محور xها است.

۲) نقاطی که دارای مماس افقی می باشند در نمودار f' برابر طول نقاط برخورد با محور xها هستند.

۳) اگر تقعر f در یک بازه به طرف بالا (پایین) باشد، آن گاه منحنی f' در این بازه صعودی اکید(نزولی اکید) است.

تمرین: نمودار توابع t,h,g,f را به نمودار مشتق آن ها، نظیر کنید.



تمرین: نمودار مشتق تابع $f(x)=\sqrt[3]{(x-1)^2}$ را در همسایگی $x=1$ رسم کنید.

آهنگ تغییرات:

به‌طور کلی آهنگ متوسط تغییر یک تابع را در بازه‌ای مانند $[a, a+h]$ به شکل زیر تعریف می‌کنیم :

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \text{آهنگ متوسط تغییر تابع } f \text{ در بازه } [a, a+h]$$

همچنین آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \text{آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع } f \text{ در نقطه } x=a$$

آهنگ متوسط تغییر با شیب خط قاطع و آهنگ لحظه‌ای تغییر با مقدار مشتق و شیب خط مماس در آن نقطه متناظراند.

توجه: آهنگ متوسط تغییر یک تابع f در بازه $[a,b]$ به صورت زیر است:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

تمرین: خودرویی در امتداد یک خط راست طبق معادله $d(t)=-5t^2+20t$ حرکت می کند. $(0\le t\le 5)$:

الف)سرعت متوسط خودرو را در بازه $[1,2]$ بیابید.

ب) سرعت لحظه ای را در $t=2$ بیابید.

ج) سرعت خودرو در کدام لحظه به صفر می رسد و ساکن می شود؟

تمرین: تابع $f(x)=۷\sqrt{x}+۵۰$ قد متوسط کودکان را برحسب سانتی متر تا حدود ۶۰ ماهگی نشان می دهد که در آن x تعداد ماه های پس از تولد است:

الف) آهنگ رشد متوسط را در بازه $[۰,۲۵]$ بیابید.

ب) آهنگ تغییر لحظه ای قد کودک را در ۲۵ ماهگی و ۴۹ ماهگی با هم مقایسه کنید، کدام بیشتر است؟

تمرین: معادله حرکت متحرکی به صورت $f(t)=t^۲-t+۱۰$ برحسب متر در بازه زمانی $[۰,۵]$ داده شده است. در کدام لحظه سرعت لحظه ای با سرعت متوسط در بازه زمانی $[۰,۵]$ با هم برابرند؟

تمرین: یک توده باکتری پس از t ساعت دارای جرم $m(t)=\sqrt{t}+۲t^۳$ گرم است.

الف) جرم این توده باکتری در بازه زمانی $۳\le t\le ۴$ چند گرم افزایش می یابد؟

ب) آهنگ رشد جرم توده باکتری در لحظه $t=۳$ چقدر است؟

تمرین: گنجایش ظرفی ۴۰ لیتر مایع است. در لحظه $t=0$ سوراخی در ظرف ایجاد می شود. اگر حجم مایع باقیمانده در ظرف پس از ثانیه از رابطه $V=40(1-\frac{t}{100})^2$ بدست آید:

الف) آهنگ تغییر متوسط حجم مایع در بازه زمانی $[0,1]$ چقدر است؟

ب) در چه زمانی، آهنگ تغییر لحظه ای حجم برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازه $[0,100]$ است؟

تمرین: کدام درست و کدام نادرست است؟

الف) آهنگ تغییر متوسط تابعی مانند f در بازه $[0,1]$ همیشه کمتر از شیب آن منحنی در نقطه است.

ب) اگر تابعی صعودی باشد، آهنگ تغییر متوسط آن هم همواره صعودی است.

ج) نمی توان تابعی را یافت که برای آن هم $f(a)=0$ و $f'(a)=0$.

تست: اگر $f(x)=\sin x$ آهنگ متوسط تابع در بازه $\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$ کدام است؟

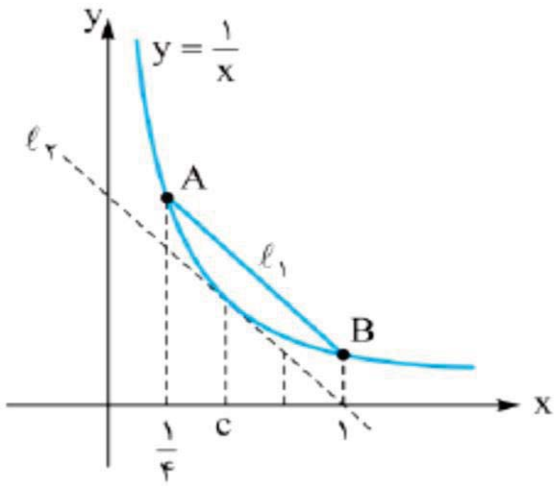
۱) $\frac{3}{\pi}$ ۲) $-\frac{3}{\pi}$ ۳) $\frac{3}{2\pi}$ ۴) $-\frac{3}{2\pi}$

تست: در تابع با ضابطه $f(t)=\frac{۲۴۰}{t}$ آهنگ آنی تغییر f در لحظه $t=۴$، چقدر از آهنگ متوسط تغییر f از لحظه $t=۳$ تا $t=۵$ بیشتر است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{۳}{۲}$

تست: در شکل مقابل اگر دو خط $\ell_۱$, $\ell_۲$ موازی باشند، c کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۵}{۸}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$



فصل پنجم:

کاربرد مشتق

نقاط بحرانی:

نقطه $c\in D_f$ را نقطه بحرانی گوییم، هرگاه $f'(c)=0$ و یا $f'(c)$ موجود نباشد.

نکته: مهم ترین حالت هایی که برای نقاط بحرانی می توان در نظر گرفت عبارت است از ریشه های مشتق، نقاط ناپیوسته، گوشه، عطف قائم و نقاط بازگشتی .

به طور کلی برای تشخیص نقاط بحرانی از روی شکل به موارد زیر دقت شود:

۱) نقاط ناپیوستگی تابع، به شرط این که تابع در آن نقاط تعریف شده باشد.

۲) نقاط گوشه

۳) نقاطی که مماس بر تابع در آن ها قائم است.

۴) نقاطی که مماس بر تابع در آن ها افقی است

نقطهٔ بحرانی ثابت (۱) — نقطه بحرانی ناپیوستگی (۲) — اکسترمم نسبی ساده (۳) — عطف افقی (۴) — اکسترمم نسبی بازگشت (۵) — عطف قائم (۶) — گوشه (۷)

نکته:

۱) نقاط ابتدا و انتهای بازه جز نقاط بحرانی هستند.

۲) ریشه های مخرج توابع کسری جز نقاط بحرانی نیستند، زیرا در دامنه تابع قرار ندارند.

۳) طول نقاط بحرانی تابع $y=|f(x)|$ (f تابعی پیوسته) از حل معادلات $f(x)=0$ و $f'(x)=0$ به دست می آید.

۴) نقاط بحرانی تابع $y=g(x)|f(x)|$ (f تابعی پیوسته) از روش زیر به دست می آید:

الف) جواب های معادله $f'(x)=0$

ب) با حذف قدر مطلق، از تابع $y=g(x)f(x)$ مشتق گرفته و نقاطی (عضو دامنه) که مشتق برابر صفر یا موجود نیست بحرانی اند.

۵) طول نقاط بحرانی تابع $y=\sqrt[2n+1]{f(x)}$، از حل معادلات $f(x)=0$ و $f'(x)=0$ به دست می آید.

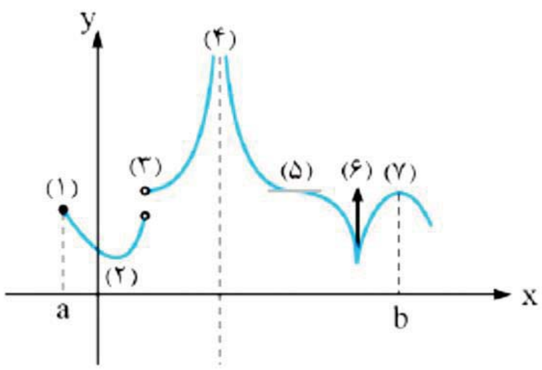
۶) اگر تابعی در بازه ای ثابت باشد، در آن بازه بیشمار نقطه بحرانی دارد.

۷) در توابع دو ضابطه ای برای یافتن نقاط بحرانی باید نقاط بحرانی هر ضابطه را با توجه به دامنه آن ضابطه بیابیم و همچنین مشتق پذیری را در نقطه مرزی ضابطه ها بررسی کنیم. اگر تابع در این نقطه مشتق ناپذیر باشد، این نقطه بحرانی است البته به شرطی که عضو دامنه باشد.

تمرین: آیا نقطه $x=a$ در نمودار های زیر بحرانی است؟

تست: با توجه به نمودار مقابل، تابع در $[a,b]$ چند نقطه بحرانی دارد؟

۱) ۷　　۲) ۶　　۳) ۵　　۴) ۳



تست: تابع $f(x)=۳$ در $[-۱,۵]$ چند نقطه بحرانی دارد؟

۱) بیشمار　　۲) ۶　　۳) ۷　　۴) ۳

تمرین: هر نقطه دلخواه از دامنه تابع ثابت، یک نقطه .... است.

تمرین: نقاط بحرانی توابع زیر را در بازه های داده شده بیابید.

۱) $y=5$

۲) $y=3x^2-2x+5 \qquad [-2,1]$

۳) $f(x)=x^3-3x \qquad [-1,2]$

۴) $f(x)=x^3-2x^2-4x+6 \qquad [-3,4]$

۵) $f(x)=\sqrt{1-4x^2}$

۶) $y=\sqrt[3]{x}$

۷) $y=\frac{1}{x}$

۸) $y=\dfrac{x^{۲}-۲}{x+۱}$

۹) $y=\left|x^{۲}-۱\right|$ $\qquad [-۲,۲]$

۱۰) $f(x)=x\left|x-۱\right|$ $\qquad [-۱,۲]$

۱۱) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & ۰\le x\prec ۲\\ ۴-x & x\ge ۲\end{cases}$

۱۲) $f(x)=\begin{cases}x^{۲}-۲x & x\succ ۰\\ ۲x^{۲}+x+۱ & x\le ۰\end{cases}$

۱۳) $f(x)=x\left|x-۲\right|$

تست: نقاط بحرانی تابع $f(x)=x^{۲}(x-۲)^{۲}$ سه راس یک مثلث اند. نوع مثلث کدام است؟

۱) متساوی الاضلاع ۲) متساوی الساقین ۳) قائم الزاویه ۴) قائم الزاویه متساوی الساقین

تمرین: مجموعه طول نقاط بحرانی توابع زیر را بیابید.

۱) $y=[x]$

۲) $y=[x]+[-x]$

۳) $y=x-[x]$

اکسترمم مطلق:

تعریف: با فرض $c \in D_f$، نقطهٔ $(c\,,f(c))$، یک نقطهٔ ماکزیمم مطلق برای تابع f نامیده می‌شود، هرگاه به ازای هر x از D_f داشته باشیم $f(c) \geq f(x)$. در این حالت عدد $f(c)$ را مقدار ماکزیمم مطلق f روی D_f می‌نامیم.

تعریف: با فرض $c \in D_f$، نقطهٔ $(c\,,f(c))$، یک نقطهٔ مینیمم مطلق برای تابع f نامیده می‌شود، هرگاه به ازای هر x از D_f داشته باشیم $f(c) \leq f(x)$. در این حالت عدد $f(c)$ را مقدار مینیمم مطلق f روی D_f می‌نامیم.

توجه: نقاط ماکزیمم مطلق و یا مینیمم مطلق را نقاط **اکسترمم مطلق** گوییم.

نکته:

۱) اگر تابع f در بازه بسته $[a,b]$ پیوسته باشد، در این صورت در این بازه هم ماکزیمم مطلق دارد و هم مینیمم مطلق.

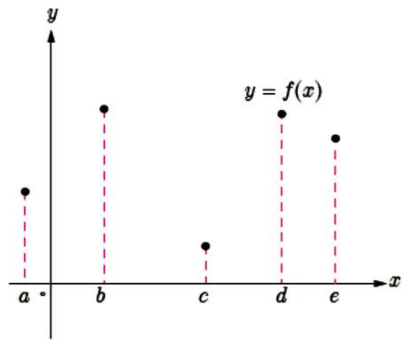
۲) هر نقطه اکسترمم مطلق، بحرانی است ولی عکس آن صحیح نیست یعنی یک نقطه بحرانی ممکن است نقطه اکسترمم مطلق نباشد.

*** روش به دست آوردن اکسترمم مطلق تابع f در بازه $[a,b]$:**

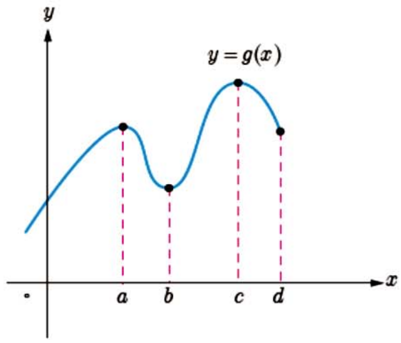
۱) نقاط بحرانی تابع f در بازه $[a,b]$ را به دست می آوریم.

۲) نقاط بحرانی را در تابع f قرار می دهیم، بیشترین مقدار ماکزیمم مطلق و کمترین مقدار مینیمم مطلق تابع در بازه $[a,b]$ است.

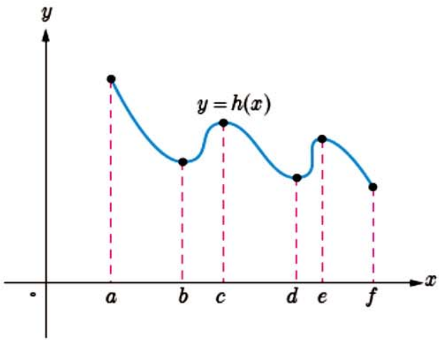
تمرین: با توجه به نمودار های زیر، نقاط اکسترمم مطلق توابع را در صورت وجود بیابید.



(الف)

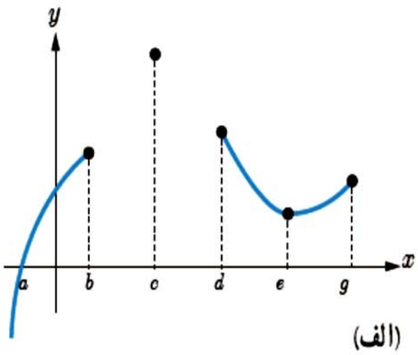


(ب)

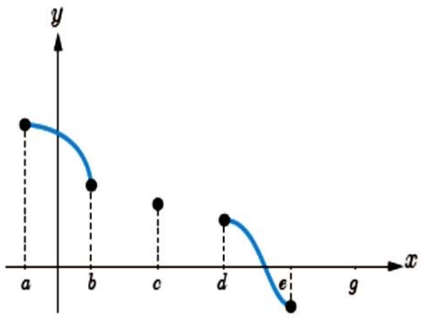


(پ)

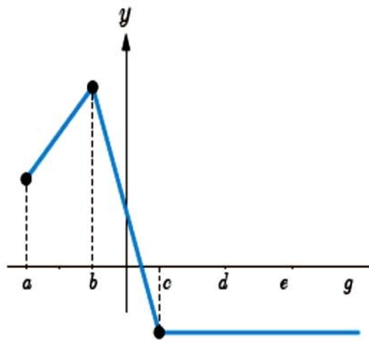
تمرین: با توجه به نمودار های زیر، نقاط اکسترمم مطلق توابع را در صورت وجود بیابید.



(الف)

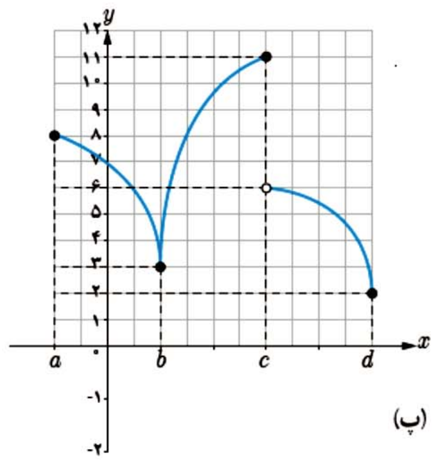


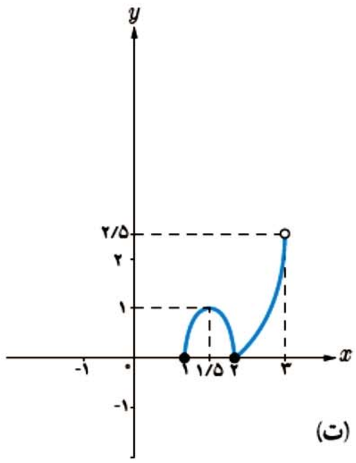
(ب)

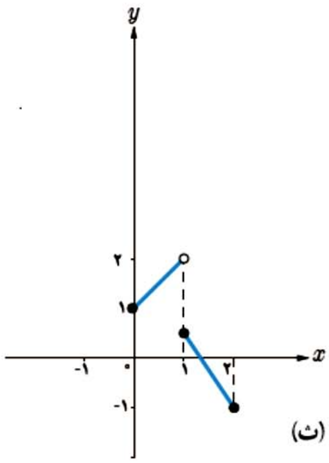


(پ)

تمرین: با توجه به نمودار های زیر، مقادیر اکسترمم مطلق توابع را در صورت وجود بیابید.







تمرین: نقاط اکسترمم مطلق تابع $f(x)=x^3-3x$ را در بازه $[-1,2]$ در صورت وجود بیابید.

تمرین: نقاط اکسترمم مطلق تابع $f(x)=2x^3+3x^2-12x$ را در بازه $[-1,3]$ در صورت وجود بیابید.

نکته:

۱) اگر f در بازه $[a,b]$ پیوسته باشد، آنگاه f در این بازه هم مقدار ماکزیمم مطلق و هم مقدار مینیمم مطلق دارد.

۲) اگر تابع f در بازه $[a,b]$ پیوسته باشد و M , m به ترتیب ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع باشند، برد تابع برابر است با: $R_f = [m,M]$

تمرین: نقاط ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x) = -۲x^۳ + ۹x^۲ - ۱۳$ را در بازه $[-۱,۲]$ در صورت وجود بیابید.

تمرین: نقاط ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x) = x^۳ + ۲x - ۵$ را در بازه $[-۲,۱]$ در صورت وجود بیابید.

تمرین: نقاط اکسترمم مطلق تابع $f(x) = x^۳ - ۲x^۲ - ۴x + ۶$ را در بازه $[-۳,۴]$ در صورت وجود بیابید.

تمرین: نقاط ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x)=|x^{۲}-۱|$ را در بازه $[-۲,۲]$ در صورت وجود بیابید.

تمرین: نقاط اکسترمم مطلق تابع $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & ۰\le x<۲\\ ۴-x & x\ge ۲\end{cases}$ را در صورت وجود بیابید.

سوال: اگر تابع f دارای ماکزیمم مطلق باشد، آیا تابع $|f|$ دارای ماکزیمم مطلق است؟

تست: مینیمم مطلق تابع $f(x)=\frac{x^{۴}}{۴}+\frac{x^{۳}}{۳}-x^{۲}$ بر روی $[-۱,۳]$ کدام است؟

۱) $\frac{-۱۱}{۳}$ ۲) $\frac{-۱۰}{۳}$ ۳) $\frac{-۸}{۳}$ ۴) $\frac{-۷}{۳}$

نکته: در بعضی از مسایل می توان به کمک نامساوی ها، اکسترمم مطلق را به دست آورد.

تمرین: مینیمم مطلق تابع $y = x - \sqrt[3]{x^3 - 3x^2}$ را در صورت وجود بیابید.

تست: ماکزیمم مطلق تابع $f(x) = \dfrac{1}{x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 5}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{6}$ ۲) $\frac{1}{5}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{2}$

تمرین: برد تابع $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$ را در بازه $[-1,3]$ بیابید.

بهینه سازی:

به عملیاتی که با ماکسیمم یا مینیمم نمودن مقدار تابع روی یک مجموعه خاص، ابزار لازم برای حل مسئله را فراهم می سازد، بهینه سازی می گوییم.

* روش حل مسایل بهینه سازی به این صورت است که ابتدا تابع مورد نظر را به صورت یک تابع یک متغیره می نویسیم سپس نقاط بحرانی را بدست آورده و مقادیر اکسترمم مطلق را می یابیم.

نکته:

۱) اگرجمع دو عدد مثبت، مقدارثابتی باشد حاصل ضرب آن ها زمانی ماکزیمم است که اعداد برابر باشند.

۲) بین مستطیل ها با محیط ثابت، مساحت مربع از همه بیشتر است.

تمرین: اگر x و y دو عدد مثبت و $x+y=۸$ باشد، ماکزیمم xy را بیابید.

تست: اگر x و y دو عدد مثبت و $۳x+۲y=۲$ باشد، ماکزیمم xy را کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

تست: از میان مثلث هایی که مجموع طول قاعده و ارتفاع وارد بر آن ۱۶ سانتی متر است. مثلثی را اختیار کرده ایم که مساحت آن ماکزیمم است. مساحت این مثلث چند سانتی متر مربع است؟

۱) ۳۰ ۲) ۳۲ ۳) ۳۴ ۴) ۳۶

نکته: اگر $a+b$، مقدارثابتی باشد حاصل $a^m b^n$ زمانی ماکزیمم می شود که : $\frac{a}{m}=\frac{b}{n}$

تست: اگر $x+y=۴$ باشد، ماکزیمم $x^۳y$ کدام است؟

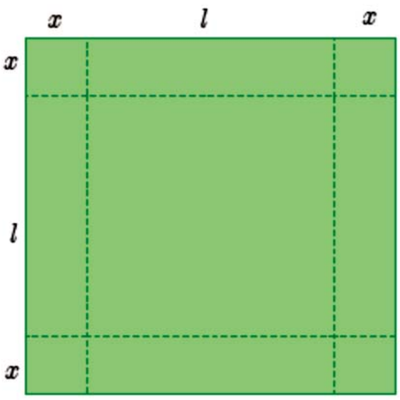
۱) ۱۶ ۲) ۲۷ ۳) ۳۲ ۴) ۳۶

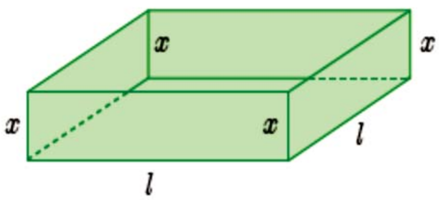
تمرین: نشان دهید در بین تمام مستطیل های با محیط ثابت ۱۴ سانتی متر، مستطیلی بیشترین مساحت را دارد که طول و عرض آن هم اندازه باشند.

تمرین: دو عدد حقیقی بیابید که تفاضل آن ها ۱۰ باشد و حاصل ضربشان کمترین مقدار ممکن گردد.

تمرین: غلظت یک داروی شیمیایی در خون، t ساعت پس از تزریق در ماهیچه از رابطه $C(t)=\frac{۳t}{t^۳+۲۷}$ به دست می آید. چند ساعت پس از تزریق این دارو، غلظت آن در خون، بیشترین مقدار ممکن خواهد بود؟

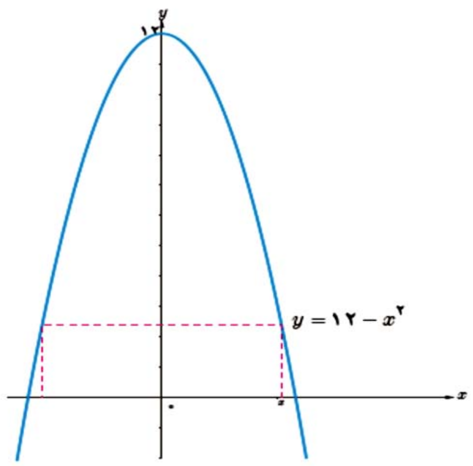
تمرین: ورق فلزی مربع شکلی به طول ضلع ۳۰ سانتی متر را در نظر بگیرید. مطابق شکل می خواهیم از ۴ گوشه آن مربع های کوچکی به ضلع x برش بزنیم و آن ها را کنار بگذاریم سپس با تا کردن ورق در امتداد خط چین های مشخص شده در شکل یک جعبه در باز بسازیم مقدار x چقدر باشد تا حجم قوطی، حداکثر مقدار ممکن گردد؟





تمرین: می خواهیم یک قوطی فلزی استوانه ای شکل و در باز بسازیم که گنجایش آن دقیقا یک لیتر باشد. ابعاد قوطی چقدر باشد تا مقدار فلز به کار رفته در تولید آن مینیمم شود.

تمرین: ابعاد مستطیلی با بیشترین مساحت را تعیین کنید که دو راس آن روی محور xها و دو راس دیگرش بالای محور xها و روی سهمی $y=۱۲-x^۲$ باشند.



تمرین: در برخی بناهای تاریخی کشورمان پنجره هایی وجود دارد که به شکل یک مستطیل و نیم دایره ای بر روی آن می باشد به طوری که قطر نیم دایره برابر با پهنای مستطیل است. اگر محیط یک چنین پنجره ای ۴/۵ متر باشد، ابعاد آن را طوری بیابید که بیشترین نوردهی را داشته باشد.

تمرین: می خواهیم کنار رودخانه یک محوطه به شکل مثلث متساوی الساقین را نرده کشی کنیم به طوری که قاعده مثلث منطبق بر رودخانه باشد. اگر تنها هزینه ۱۰۰ متر نرده را در اختیار داشته باشیم، در این صورت بیشترین مساحت ممکن برای این مثلث چقدر خواهد بود؟

نکته: عبارت $\sqrt{A}$ زمانی ماکزیمم یا مینیمم است که زیر رادیکال (A)، ماکزیمم یا مینیمم باشد.

تست: کم ترین فاصله نقطه $A(۶,۰)$ از نقاط منحنی به معادله $y=\sqrt{۴x-۱}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۱۸}$ ۲) $\sqrt{۱۹}$ ۳) $\sqrt{۲۰}$ ۴) $\sqrt{۲۱}$

یکنوایی تابع:

در فصل اول با یکنوایی تابع آشنا شده ایم. اکنون می خواهیم به کمک مشتق به بررسی یکنوایی بپردازیم:

فرض کنیم تابع f بر بازه $[a\,,b]$ پیوسته و بر بازه $(a\,,b)$ مشتق‌پذیر باشد. در این صورت:

الف) اگر به ازای هر x در $(a\,,b)$، $f'(x)>0$، آن‌گاه تابع f بر $[a\,,b]$ صعودی اکید است.

ب) اگر به ازای هر x در بازه $(a\,,b)$، $f'(x)<0$، آن‌گاه تابع f بر $[a\,,b]$ نزولی اکید است.

پ) اگر به ازای هر x در بازه $(a\,,b)$، $f'(x)=0$، آن‌گاه تابع f بر $[a\,,b]$ یک تابع ثابت است.

شرط پیوستگی و مشتق پذیری تابع در نکته بالا بسیار مهم است، به عنوان مثال تابع $y=\frac{1}{x}$ را در نظر بگیرید، مشتق این تابع همواره در دامنه آن منفی است، اما این تابع در بازه $(-\infty,+\infty)$ پیوسته و مشتق پذیر نیست.

نکته:

۱) اگر $f'(x)\geq 0$ و ریشه های مشتق شمارش پذیر باشند (یعنی ریشه های مشتق تمام نقاط روی بازه نباشند یا به عبارت دیگر ریشه های مشتق تشکیل یک پاره خط را ندهند) آنگاه باز هم تابع صعودی اکید است.(به همین ترتیب برای تابع نزولی اکید)

۲) اگر در یک بازه مماس ها افقی باشد، تابع ثابت است.

۳) توابع ثابت، هم صعودی و هم نزولی است.

۴)اگر تابع f درون بازه ای مانند (a,b) مجانب قائم داشته باشد، قطعا غیر یکنوا است.

نکته: برای یکنوایی توابع پیوسته از دستور زیر استفاده می کنیم:

۱) محاسبه مشتق

۲) تعیین علامت مشتق

بازه		a
علامت f'	+	−
یکنوایی تابع	اکیدا صعودی	اکیدا نزولی

توجه: در محاسبه یکنوایی به کمک مشتق، در نقاطی که تابع تعریف نمی شود یا مشتق پذیر نیست از علامت مشتق نمی توان استفاده کرد، بهتر است از نمودار تابع استفاده کنیم.

تمرین: یکنوایی تابع $y = x^{3} + 1$ را مشخص کنید.

تمرین: تابع $f(x) = x^{3} - 2x^{2} - 4x + 6$ در چه بازه هایی صعودی و در چه بازه هایی نزولی است؟

تمرین: تابع $f(x) = x^{3} - 3x$ در چه بازه هایی صعودی و در چه بازه هایی نزولی است؟

تمرین: تابع $f(x) = 2x^{3} - 3x^{2} - 12x + 7$ در چه بازه هایی صعودی و یا نزولی است؟

تمرین: جدول تغییرات تابع $f(x)=-x^{2}-2x$ را رسم و سپس مشخص کنید تابع در چه بازه هایی صعودی و یا نزولی است؟

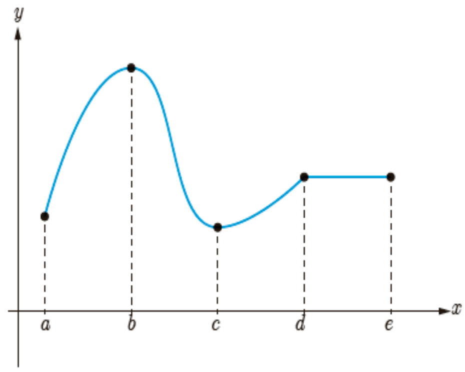
تمرین: بزرگترین بازه ای از $\mathbb{R}$ که تابع $f(x)=x^{3}-12x+4$ در آن نزولی اکید باشد را بیابید.

تمرین: تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ را در نظر بگیرید:

الف) نشان دهید که تابع در بازه های $(-\infty,0)$ و $(0,+\infty)$ نزولی اکید است.

ب) آیا می توان گفت این تابع در دامنه خود اکیدا نزولی است.

تمرین: با توجه به نمودار مقابل به سوالات زیر پاسخ دهید:



الف) با رسم مماس هایی در نقاط مختلف نمودار f تعیین کنید در چه بازه هایی شیب مماس ها مثبت و در چه بازه هایی شیب مماس ها منفی و درچه زیر مجموعه ای از دامنه شیب مماس ها برابر صفر است.

ب) تعیین کنید در چه بازه هایی مشتق f مثبت و درچه بازه هایی مشتق f منفی و در چه بازه هایی مشتق f برابر صفر است.

ج) تعیین کنید در چه بازه هایی تابع f صعودی اکید و درچه بازه هایی نزولی اکید و درچه بازه هایی مقدار تابع f ثابت است.

تمرین: جای خالی را پر کنید.

۱) اگر تابع $y=f(x)$ در بازه $[a,b]$ صعودی باشد، علامت مشتق تابع .... است.

۲) اگر تابع $y=f(x)$ در بازه (a,b) نزولی باشد، علامت مشتق تابع .... است.

۳) بزرگترین بازه ای از $\mathbb{R}$ که تابع $f(x)=x^۳-۱۲x+۴$ در آن نزولی اکید باشد، برابر............................ است.

۴) تابع $f(x)=x^۳-۳x$ در بازه .... نزولی اکید است.

تمرین: با تشکیل جدول تغییرات تابع $f(x)=\frac{۱}{x^۲+۱}$، مشخص کنید تابع در چه بازه هایی صعودی و یا نزولی است؟

تمرین: با تشکیل جدول تغییرات تابع $f(x)=\frac{۱}{x-۲}$، مشخص کنید تابع در چه بازه هایی صعودی و یا نزولی است؟

تست: تابع $f(x)=\frac{x}{۱-x^۲}$ درکدام بازه صعودی است؟

۱) $(-۲,۰)$ ۲) $(-\infty,-۲)$ ۳) $(۰,۲)$ ۴) $(-۲,۲)$

نکته: شرط آن که تابع $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ در بازه I صعودی اکید (نزولی اکید) باشد، آن است که :

الف) $ad-bc\succ ۰$ $(ad-bc\prec ۰)$

ب) مجانب قائم در بازه نباشد.

تست: عدد a را در کدام فاصله در نظر بگیریم که تابع $x \succ ۱$; $f(x)=\dfrac{ax-۲}{x+a-۳}$، اکیدا صعودی باشد؟

۱) $(-\infty,۱]$ ۲) $(-\infty,۰]$ ۳) $[۲,+\infty)$ ۴) $(۲,+\infty)$

نکته: معادله درجه دوم $ax^۲+bx+c$ مفروض است. در این صورت:

۱) شرط مثبت بودن آن $\Delta \prec ۰$ و $a \succ ۰$.

۲) شرط منفی بودن آن $\Delta \prec ۰$ و $a \prec ۰$.

۳) شرط نامنفی بودن آن $\Delta \le ۰$ و $a \succ ۰$.

۴) شرط نامثبت بودن آن $\Delta \le ۰$ و $a \prec ۰$.

تست: تابع f با ضابطه $f(x)=x^۳+ax^۲+x$ همواره صعودی است. حدود تغییرات a کدام است؟

۱) $۰ \le a \le ۲$ ۲) $-\sqrt{۳} \le a \le ۲$ ۳) $|a| \le \sqrt{۳}$ ۴) $|a| \le ۲$

نکته: برای تابع دو ضابطه ای f، اگر تابع بخواهد صعودی (نزولی) باشد، باید:

۱) باید هریک از ضابطه ها در دامنه خود صعودی (نزولی) باشند.

۲) در نقطه مرزی ضابطه ها شرایط صعودی (نزولی) بودن تابع حفظ شود.

تست: اگر تابع $f(x)=\begin{cases} x^{۴}+ax & x\leq ۱ \\ ۳-x & x\succ ۱ \end{cases}$ نزولی اکید باشد، حدود a کدام است؟

۱) $[۱,+\infty)$ ۲) $(-\infty,-۴]$ ۳) $\mathbb{R}$ ۴) ϕ

حل: ضابطه پایین تابع یک تابع خطی با شیب منفی است پس حتما نزولی اکید است. ضابطه بالا باید:

$$x\leq ۱;\ \ f(x)=x^{۴}+ax\Rightarrow f'(x)=۴x^{۳}+a$$

$$x\leq ۱\Rightarrow x^{۳}\leq ۱\Rightarrow ۴x^{۳}\leq ۴\xrightarrow{+a}۴x^{۳}+a\leq ۴+a$$

بنابراین $f'(x)\leq ۴+a$، لذا برای این که مشتق نامثبت باشد، باید:

$$۴+a\leq ۰\Rightarrow \boxed{a\leq -۴}\ *$$

از طرفی در نقطه مرزی :

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x)\geq \lim_{x\to ۱^+} f(x)\Rightarrow ۱^{۴}+a\geq ۳-۱\Rightarrow \boxed{a\geq ۱}\ **$$

$$\xrightarrow{*\cap **}\phi$$

تمرین: اگر تابع f نزولی و تابع g صعودی باشد، یکنوایی توابع زیر را بیابید.

۱) $f(-x)+g(x)$

۲) $fog(x)$

۳) $fof(x)$

۴) $f(x^۳)$

۵) $gof(-x)$

تست: تابع $f(x)=-\frac{۱}{x}$ درکدام بازه صعودی است؟

۱) $(-۱,۱)$ ۲) $(-۲,۰)$ ۳) $[۰,۴)$ ۴) همه موارد

اکسترمم نسبی:

تعریف :

اگر f یک تابع و $I \subseteq D_f$ یک همسایگی از نقطهٔ c (بازهٔ باز شامل نقطهٔ c) باشد که

الف) به ازای هر x متعلق به I داشته باشیم $f(x) \le f(c)$، در این صورت $f(c)$ را یک ماکزیمم نسبی تابع f می‌نامیم.

ب) به ازای هر x متعلق به I داشته باشیم $f(x) \ge f(c)$، در این صورت $f(c)$ را یک مینیمم نسبی تابع f می‌نامیم.

تذکر : گوییم تابع f در نقطهٔ $x = c$ **اکسترمم نسبی** دارد هرگاه در این نقطه ماکزیمم نسبی یا مینیمم نسبی داشته باشد و اگر در نقطهٔ $x = c$ ماکزیمم مطلق یا مینیمم مطلق داشته باشد می‌گوییم در آن نقطه **اکسترمم مطلق** دارد.

نکته:

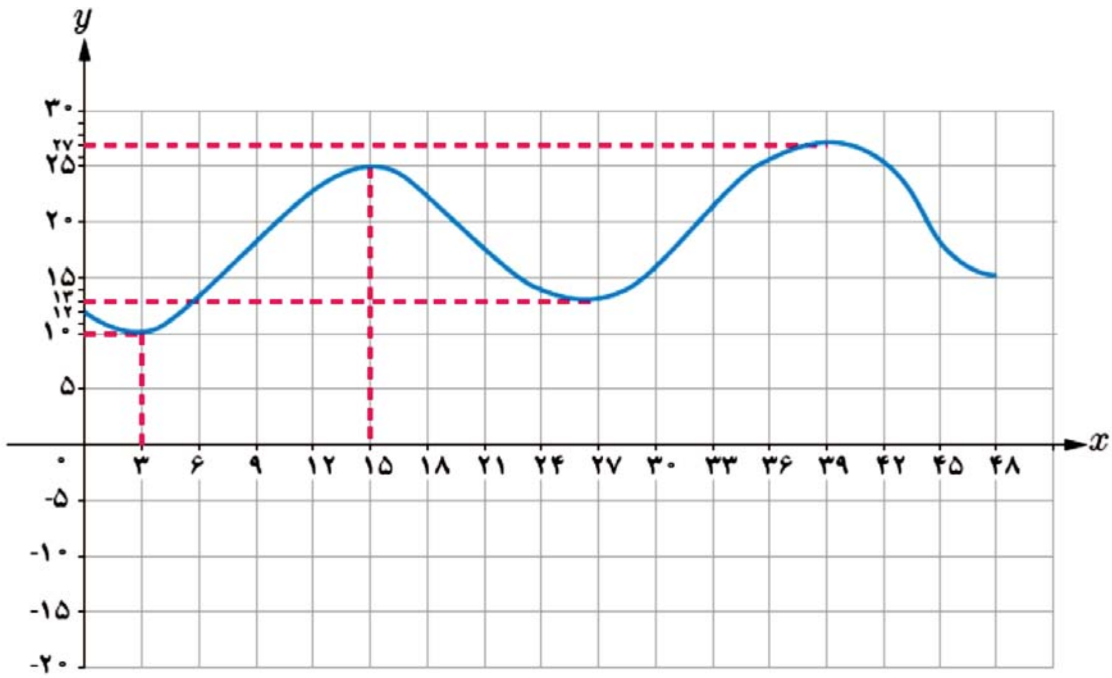
۱) دقت شود نقاط اکسترمم نسبی به گونه ای هستند که تابع در همسایگی اطراف آن تعریف شده باشد اما نقاط اکسترمم مطلق لازم نیست حتما در چنین شرطی صدق کنند.

۲) هرنقطه روی تابع ثابت $f(x) = k$، ماکزیمم نسبی، ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق محسوب می شود.

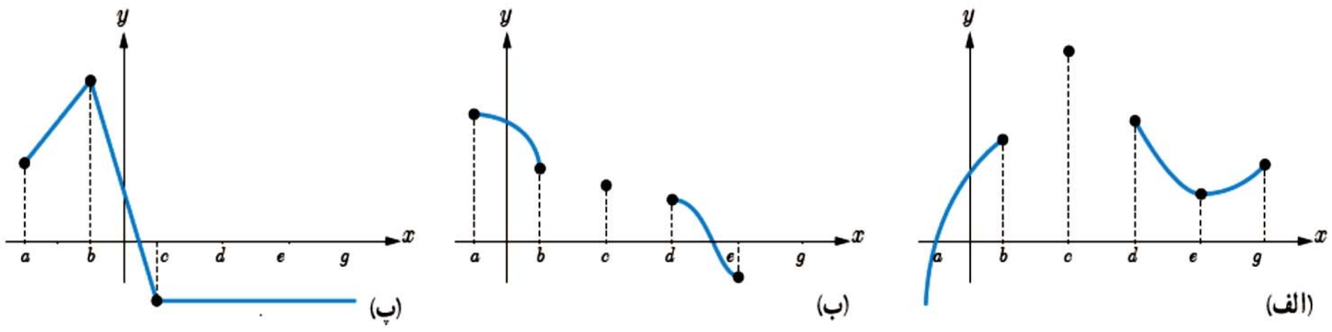
۳) لزومی ندارد که f در نقطه اکسترمم نسبی، پیوسته یا مشتق پذیر باشد.

نکات تکمیلی اکسترمم نسبی:

تمرین: با توجه به نمودار زیر نقاط اکسترمم نسبی را مشخص کنید.

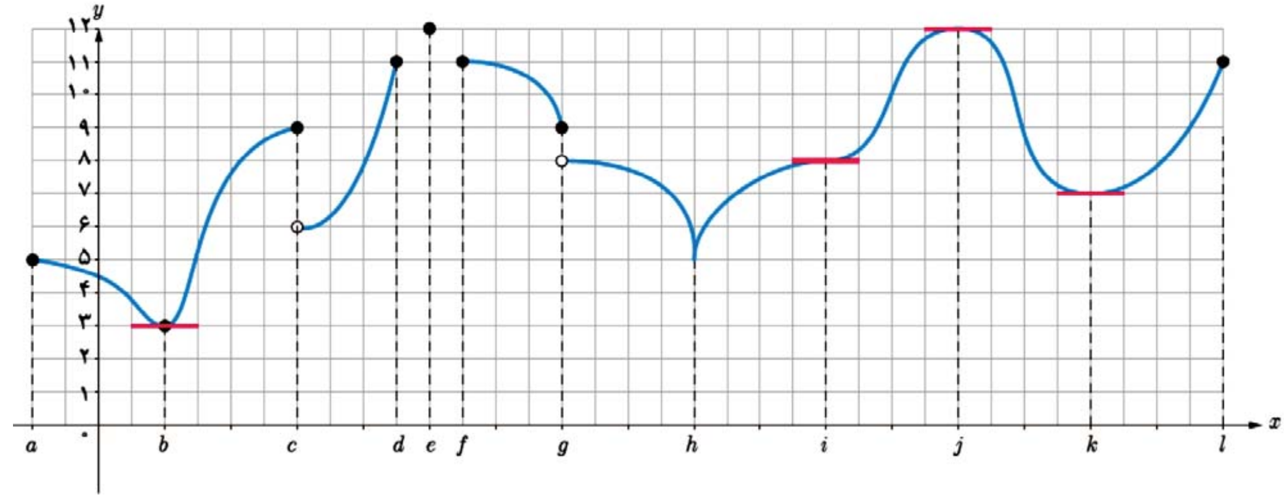


تمرین: با توجه به نمودار زیر نقاط اکسترمم نسبی را مشخص کنید.



تمرین: نمودار یک تابع را رسم کنید که در نقطه $(2,4)$ ماکزیمم نسبی و در نقطه $(5,1)$ مینیمم نسبی داشته باشد.

تمرین: با توجه به نمودار زیر به سوالات زیر پاسخ دهید:



الف) تمام نقاط اکسترمم نسبی را مشخص نمایید.

ب) تمام نقاطی که مشتق در آنها وجود ندارد را مشخص نمایید.

پ) تمام نقاطی که مشتق برابر صفر است را بنویسید.

ت) آیا در همهٔ نقاط اکسترمم نسبی مشتق وجود دارد؟

ث) در اکسترمم‌های نسبی که مشتق در آنها وجود دارد، مقدار این مشتق چقدر است؟

ج) آیا امکان دارد در نقطه‌ای مشتق برابر صفر باشد ولی آن نقطه اکسترمم نسبی نباشد؟

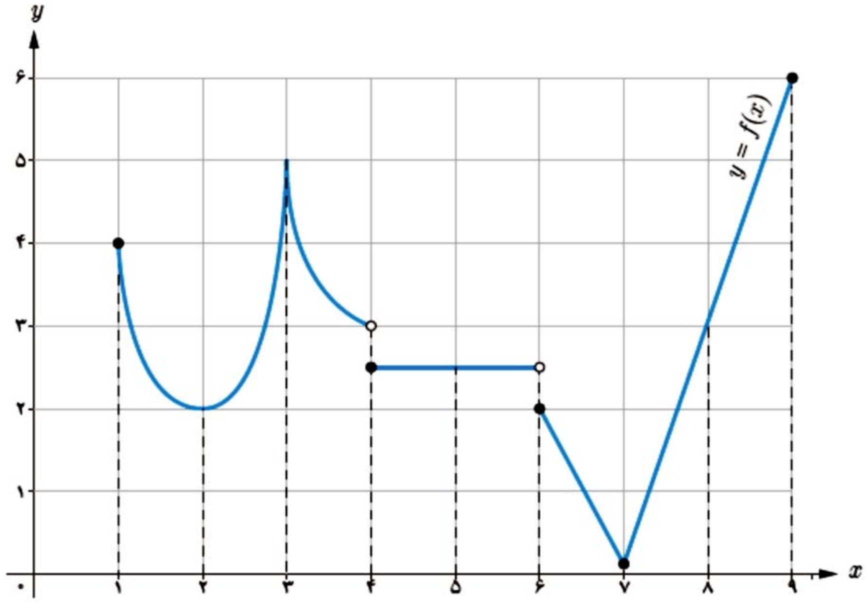
چ) آیا امکان دارد در نقطه‌ای مشتق وجود نداشته باشد ولی آن نقطه اکسترمم مطلق باشد؟

تمرین: نمودار تابع $y=-x^{2}-1$ را در بازه $[-1,2]$ رسم کرده و نقاط اکسترمم نسبی آن را بیابید.

تمرین: نمودار تابع $y=\left|\left|x\right|-2\right|$ را در بازه $[-5,3]$ رسم کرده و سپس جدول زیر را کامل کنید.

نقطه	نوع اکسترمم نسبی	مقدار اکسترمم نسبی	مقدار مشتق

تمرین: با توجه به نمودار زیر، جدول داده شده را تکمیل کنید.



طول نقطه	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
max مطلق	×	×			×	×			✓
min مطلق	×	×			×	×			×
max نسبی	×	×			✓	×			×
min نسبی	×	✓			✓	×			×
نقطهٔ بحرانی	×	✓			✓	✓			×

تمرین: تابع $y=\left|x-۲\right|$ مفروض است:

الف) نمودار f را رسم کنید.

ب) نقاط اکسترمم نسبی آن را بیابید.

ج) آیا $f'(۲)$ موجود است؟ چرا؟

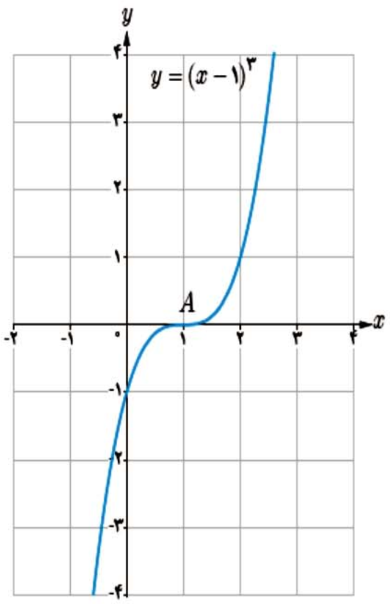
د) آیا $x=۲$ طول نقطه بحرانی است؟ چرا؟

قضیه فرما:

اگر تابع f در نقطه به طول c ماکزیمم یا مینیمم نسبی داشته باشد و $f'(c)$ موجود باشد، آنگاه $f'(c)=0$.

به عبارت دیگر:

«هر نقطه اکسترمم نسبی تابع f، یک نقطه بحرانی است.»



مثال: به نمودار تابع $f(x)=(x-1)^3$ دقت کنید. تابع مشتقِ این تابع به‌صورت $f'(x)=3(x-1)^2$ است. با وجود آنکه مقدار $f'(x)$ در $x=1$ برابر صفر است، امّا با توجه به نمودار f، دیده می‌شود که نقطهٔ به طول ۱ برای این تابع نه ماکزیمم نسبی است و نه مینیمم نسبی. دلیل این مطلب، آن است که f'، قبل و بعد از $x=1$ همواره مثبت است؛ به عبارت دیگر، f در $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی است و لذا نمی‌تواند اکسترمم نسبی داشته باشد.

تذکر: مثال بالا نشان می‌دهد که عکس قضیهٔ فرما در حالت کلی درست نیست. در واقع نقطهٔ A به طول $x=1$ برای تابع $f(x)=(x-1)^3$ یک نقطهٔ بحرانی است، اما اکسترمم نسبی آن نیست. شما یک مثال نقض دیگر برای عکس این قضیه ارائه کنید که نشان دهد یک نقطهٔ بحرانی لزوماً اکسترمم نسبی نیست.

نکته: اگر تابع f در c دارای اکسترمم مطلق باشد و در همسایگی c نیز تعریف شده باشد، آن گاه تابع f در c دارای اکسترمم نسبی نیز می باشد.

تمرین: کدام درست و کدام نادرست است؟

الف) هر نقطه اکسترمم نسبی تابع f، یک نقطه بحرانی است.

ب) هر نقطه بحرانی، یک نقطه اکسترمم نسبی است.

ج) اگر $x=c$ طول نقطه اکسترمم نسبی تابع f باشد، آنگاه $f'(c)=0$ است.

د) اگر تابع f در نقطه به طول c ماکزیمم یا مینیمم نسبی داشته باشد و $f'(c)$ موجود باشد، آنگاه $f'(c)=0$

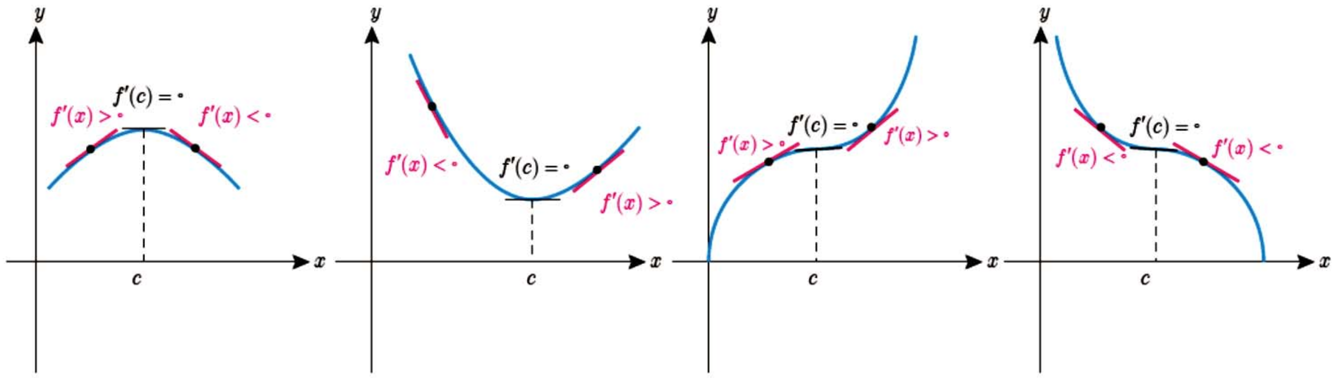
آزمون مشتق اول:

فرض کنیم تابع f بر بازه‌ای باز مانند I $(I\subseteq D_f)$ پیوسته باشد و $c\in I$ یک نقطهٔ بحرانی تابع f باشد. هرگاه f بر این بازه به جز احتمالاً در نقطهٔ c، مشتق‌پذیر باشد، در این صورت :

الف) اگر به ازای تمام مقادیر x در بازه‌ای مانند (a,c)، $f'(x)>0$ و به ازای تمام مقادیر x در بازه‌ای مانند (c,b)، $f'(x)<0$، در این صورت $f(c)$ یک مقدار ماکزیمم نسبی f است.

ب) اگر به ازای تمام مقادیر x در بازه‌ای مانند (a,c)، $f'(x)<0$، و به ازای تمام مقادیر x در بازه‌ای مانند (c,b)، $f'(x)>0$، آن‌گاه $f(c)$ یک مقدار مینیمم نسبی f است.

پ) اگر f' در نقطهٔ c تغییر علامت ندهد، به طوری که f' در هر دو طرف c مثبت یا هر دو طرف آن منفی باشد، آن‌گاه $f(c)$ نه مینیمم نسبی و نه ماکزیمم نسبی است.



$x=c$: نه طول ماکزیمم نسبی است و نه مینیمم نسبی

$x=c$: نه طول ماکزیمم نسبی است و نه مینیمم نسبی

$x=c$: طول مینیمم نسبی

$x=c$: طول ماکزیمم نسبی

تمرین: به کمک آزمون مشتق اول، نقاط اکسترمم نسبی تابع $f(x)=-x^{۲}-۲x$ را بیابید.

تمرین: با رسم جدول تغییرات تابع، نقاط اکسترمم نسبی تابع $f(x)=x^{۳}-۳x$ را بیابید.

تمرین: با رسم جدول تغییرات تابع، نقاط اکسترمم نسبی تابع $f(x)=x^{۳}+۳x^{۲}-۹x-۱۰$ را بیابید.

تمرین: نقاط اکسترمم نسبی تابع $f(x)=۳x^{۲}-۲x+۵$ را در بازه $[-۲,۱]$ بیابید.

خواص نقاط اکسترمم نسبی در توابع مشتق پذیر:

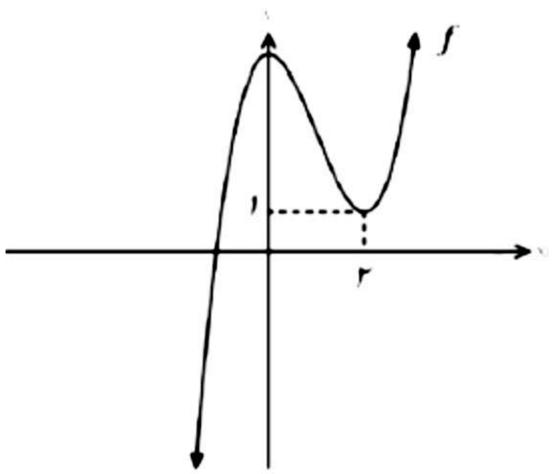
۱) در این توابع، مشتق تابع به ازای طول نقطه اکسترمم صفر است.

۲) مختصات نقطه اکسترمم در تابع صدق می کند.

تمرین: ضرایب a و b را در تابع $f(x)=x^۳+ax+b$ طوری پیدا کنید که تابع در نقطه $(۱,۲)$، ماکزیمم نسبی داشته باشد.

تمرین: اگر نقطه $(۲,۱)$، نقطه اکسترمم نسبی تابع $f(x)=x^۳+bx+d$ باشد، مقادیر b و d را بیابید.

تمرین: نمودار تابع با ضابطه $f(x)=x^۳+bx+d$ به صورت شکل زیر رسم شده است. مقادیر b و d را بیابید.



تمرین: ضرایب a و b و c را چنان تعیین کنید که تابع $f(x)=ax^{۲}+bx+c$ طوری پیدا کنید که تابع در $x=۱$، دارای ماکزیمم نسبی ۷ باشد و نمودار تابع $f(x)$ از نقطه $(۲,-۲)$ بگذرد.

نکته: اگر نقطه $A(a,b)$ اکسترمم نسبی تابع کسری $f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$ باشد و f در نقطه A مشتق پذیر بوده و $h'(a)\neq ۰$، آن گاه مختصات نقطه A هم در خود تابع و هم در هوپیتال تابع صدق می کند.

تست: اگر نقطه $(۲,۵)$ نقطه اکسترمم نسبی تابع $f(x)=\frac{x^{۲}+ax+b}{x-۱}$ باشد، حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) ۲   ۲) ۱   ۳) صفر   ۴) ۱-

نکته تستی:

تمرین: طول نقاط اکسترمم نسبی توابع زیر را بیابید.

۱) $f(x)=(x-۱)^{۳}(x-۲)^{۴}$

۲) $f(x)=(x+۱)(x-۳)$

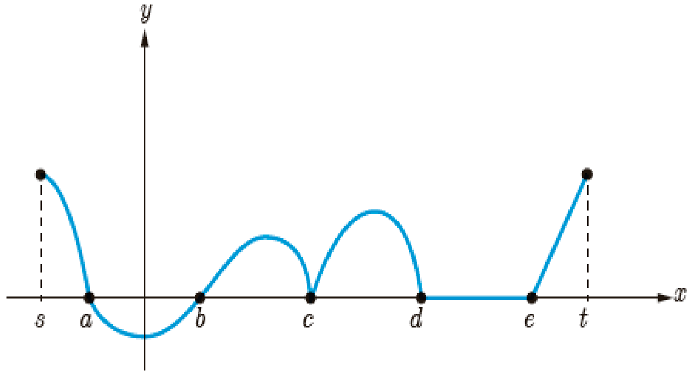
۳) $y=\dfrac{(x+۱)}{\sqrt[۳]{x-۲}}$

تمرین: نمودار تابع f' در شکل زیر داده شده است:

الف) صعودی و نزولی بودن تابع f را در بازه $[s,t]$ بررسی کنید.

ب) نقاط e,d,c,b,a کدام بحرانی، کدام ماکزیمم نسبی و کدام مینیمم نسبی اند؟

ج) آیا نقاط بازه (d,e) اکسترمم نسبی هستند؟



فصل ششم:

هندسه

تفکر تجسمی:

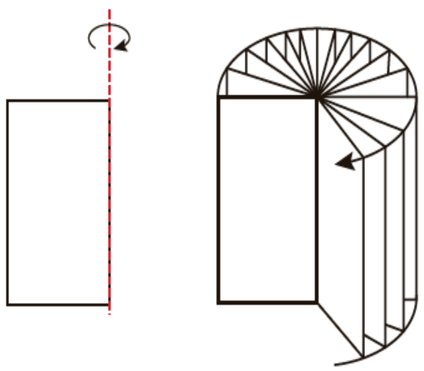
فرایند تفکر تجسمی، مستلزم تشکیل و دست‌ورزی تصاویر با قلم و کاغذ، فناوری و یا به صورت ذهنی است که به بررسی، کشف و درک مفاهیم منجر می‌شود. این نوع از تفکر، نقش مهمی در حل مسئله‌های ریاضی و همین‌طور حل مسائل در زندگی روزمره دارد. موقعیت‌هایی که می‌تواند به تقویت تفکر تجسمی کمک کنند عبارت‌اند از : تجسم ذهنی یک جسم پس از چرخاندن آن در فضا، ترسیم سطح گستردهٔ اجسام هندسی و ترسیم یک جسم سه بعدی روی سطح، ترسیم نماهای مختلف اجسام، دوران شکل حول یک نقطه یا حول یک محور در صفحه و فضا و تجسم اجسام هندسی بعد از برش. از آنجا که هدف کلی این درس آشنایی با مقاطع مخروطی است، از بین این موقعیت‌ها، **دوران** اشکال هندسی حول یک محور و **برش** اجسام را بررسی می کنیم.

دوران حول محور:

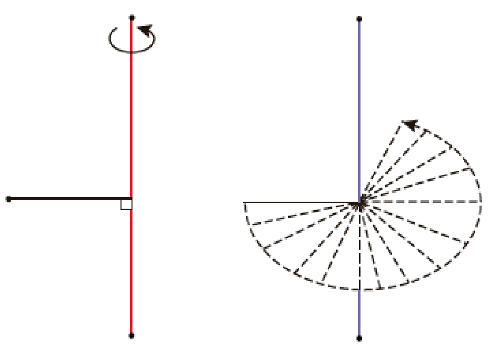
وقتی شکل های هندسی متفاوت حول یک محور دوران داده شود، جسم های مختلف هندسی ساخته می شود. به عنوان مثال، شکل حاصل از دوران یک مثلث قائم الزاویه حول یکی از اضلاع خود، مخروط تو خالی تشکیل می شود.

تمرین: جای خالی را پر کنید.

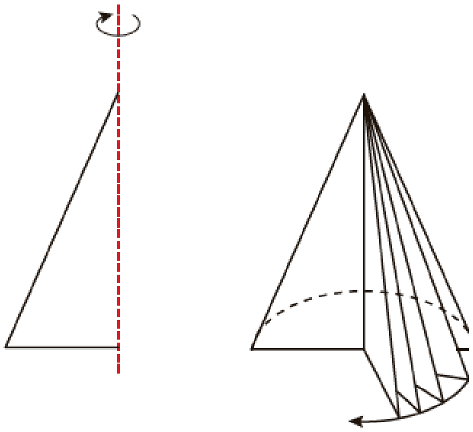
الف) شکل حاصل از دوران یک مستطیل حول طول یا عرض خود، ....



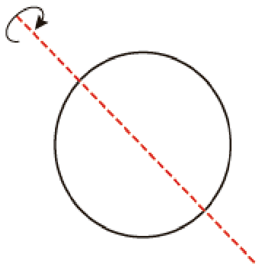
ب) شکل حاصل از دوران یک پاره خط، حول پاره خط دیگری که بر آن عمود است، ....



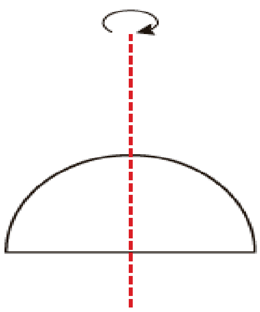
پ) شکل حاصل از دوران یک مثلث قائم الزاویه، حول یکی از اضلاع قائمه، ....



ت) شکل حاصل از دوران یک دایره، حول یکی از قطر های آن، ....



ث) شکل حاصل از دوران یک نیم دایره، حول شعاع عمود بر قطر آن، ....

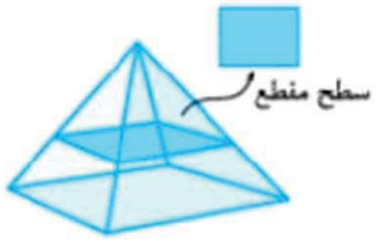


برش :

با دوران شکل حول محور آشنا شده ایم که شکل حاصل یک جسم دو بعدی یا سه بعدی بود. اکنون می خواهیم اجسام سه بعدی را برش بزنیم و تغییرات آن را بعد از برش تجسم کنیم. این اجسام می توانند توپر یا تو خالی باشند.

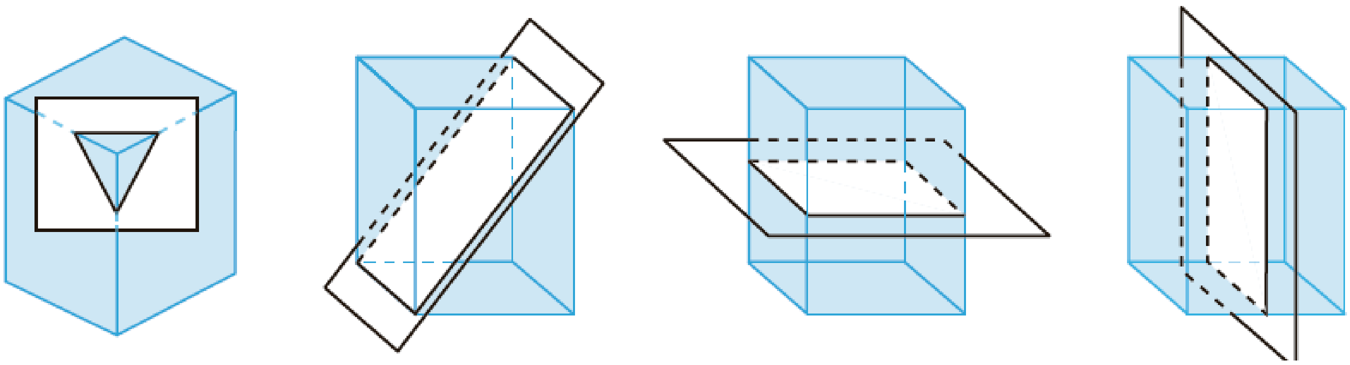
سطح مقطع:

شکلی که از برخورد یک صفحه با یک جسم هندسی حاصل می شود، **سطح مقطع** آن نامیده می شود.

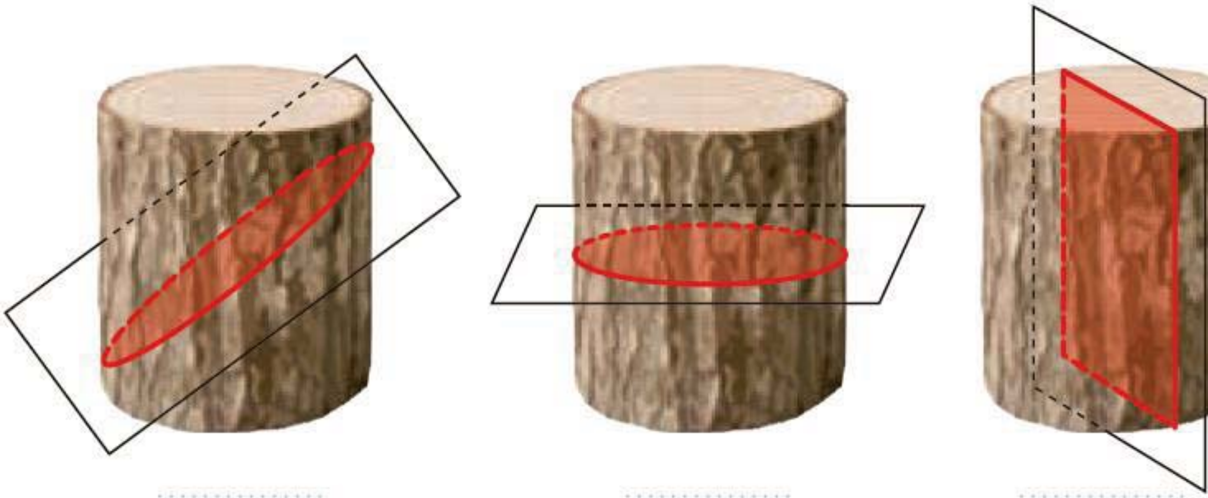


مثال:

الف) بعضی از حالت‌های برخورد یک صفحه با یک مکعب مستطیل توخالی با قاعدهٔ مربع شکل، در زیر نمایش داده شده است. در هر یک از حالت‌ها سطح مقطع را مشخص کنید.



ب) سطح مقطع استوانه با صفحه‌های عمودی، افقی و صفحهٔ مایلی که با قاعده‌های استوانه متقاطع نباشد، به چه شکل است؟

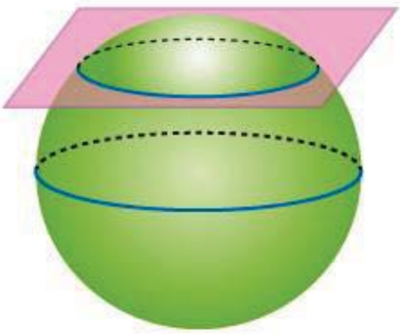


....

تمرین:

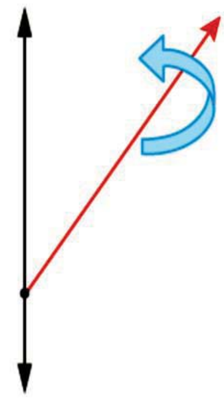
الف) سطح مقطع حاصل از برخورد یک صفحه با یک کره به چه شکلی است؟

ب) در چه حالتی این سطح مقطع، بیشترین مساحت ممکن را دارد؟



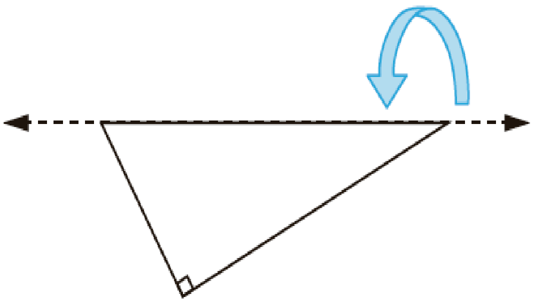
تمرین: شکل حاصل از دوران حول محور را در حالت های زیر مشخص کنید.

الف) شکل حاصل از دوران نیم خط حول محور



ب) شکل حاصل از دوران مثلث قائم الزاویه حول محور

تمرین: شکل حاصل از دوران یک مثلث قائم الزاویه حول وتر آن چیست؟



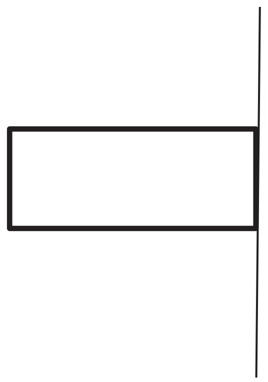
تمرین: مستطیلی را حول عرض آن دوران داده ایم.

الف) شکل حاصل را رسم کنید.

ب) سطح مقطع حاصل از برخورد یک استوانه و یک صفحه در چه حالتی یک مربع است؟

ج) اگر ابعاد مستطیل ۳ و ۴ باشد، مساحت سطح مقطع حاصل از برخورد یک صفحه موازی با قاعده این استوانه چقدر است؟

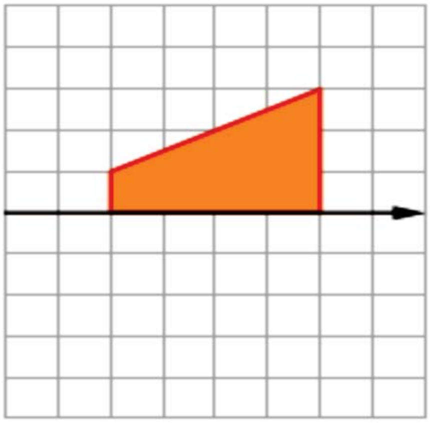
د) درحالت ج، اگر صفحه ای عمود بر قاعده استوانه آن را قطع کند بیشترین مساحت ممکن برای سطح مقطع حاصل چقدر است؟



تمرین: در شکل زیر می خواهیم ذوزنقه قائمه را حول محور دوران دهیم.

الف) حجم شکل حاصل را محاسبه کنید.

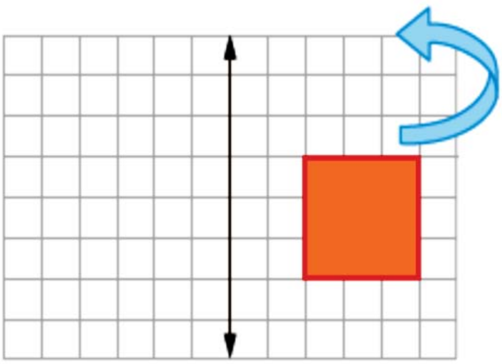
ب) سطح مقطع این شکل در برخورد با صفحه ای که شامل محور دوران باشد، چیست و مساحت آن را بیابید.



تمرین: مربعی با ضلع ۳ واحد مطابق شکل مقابل در فاصله ۲ واحد از یک خط راست قرار دارد.

الف) شکل حاصل از دوران این مربع حول محور داده شده را رسم و حجم آن را محاسبه کنید.

ب) سطح مقطع این شکل در برخورد با صفحه ای موازی با قاعده آن توصیف کنید.

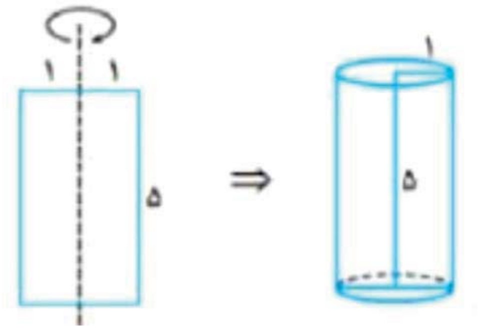


تمرین: اگر یک لوزی با طول قطر های ۴ و ۶ حول قطر بزرگ دوران داده شود، حجم شکل حاصل چقدر است؟

تست: مستطیلی به ابعاد ۲ و ۵ واحد را حول خطی که وسط های عرض های مستطیل را به هم وصل می کند، دوران می دهیم. مساحت شکل حاصل کدام است؟

۱) ۲۰π   ۲) ۲۰π   ۳) ۱۲π   ۴) ۱۶π

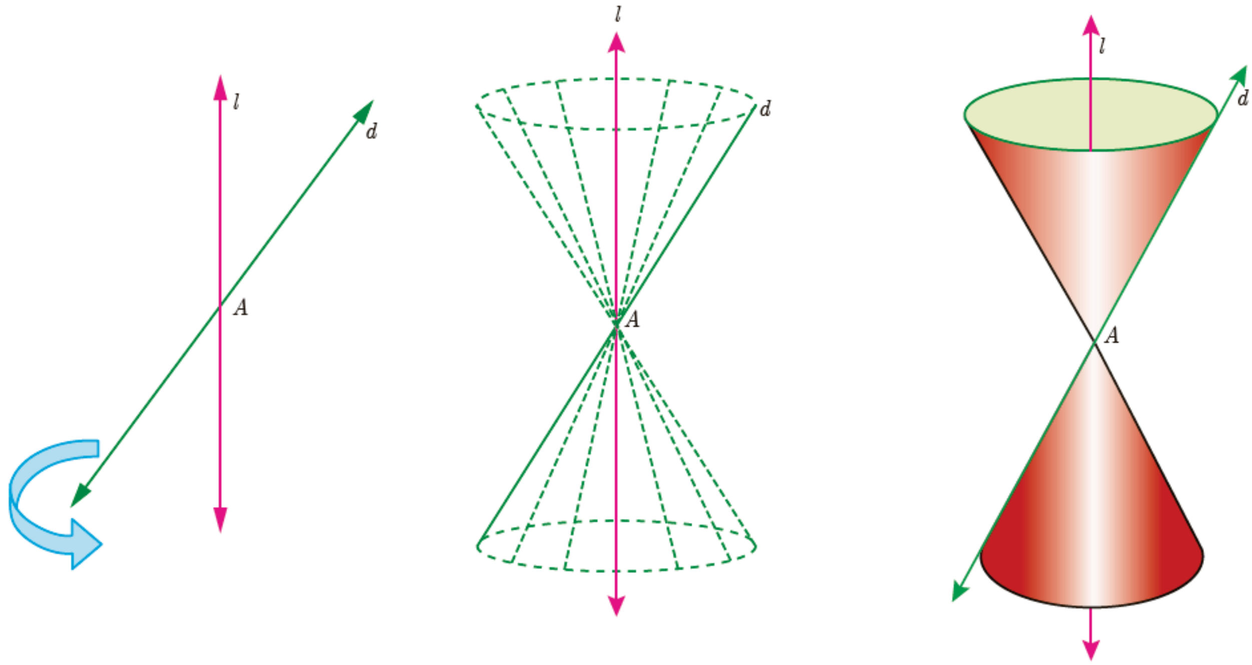
حل:



$$S = \overset{\text{قاعده ها}}{\overbrace{۲\pi r^{۲}}} + \underbrace{۲\pi rh}_{\text{مساحت جانبی}} = ۲\pi(۱)^{۲} + ۲\pi(۱)(۵) = ۱۲\pi$$

مقاطع مخروطی :

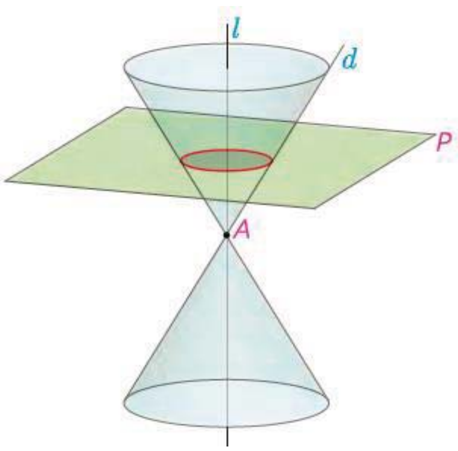
دو خط d و l در نقطه ای مثل A متقاطع اند. اگر خط d راحول خط l دوران کامل دهیم، شکل حاصل یک **سطح مخروطی** نامیده می شود. در این حالت خط l محور، نقطه A راس و خط d مولد این سطح مخروطی می باشد.



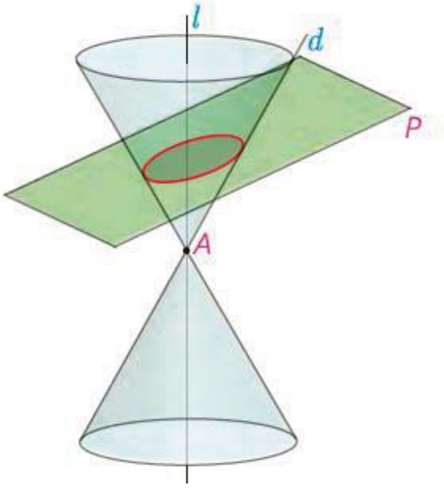
وقتی یک سطح مخروطی توسط یک صفحه برش داده می شود، معمولا سطح مقطع یک منحنی است. از آن جا که این منحنی ها حاصل تقاطع یک صفحه با یک سطح مخروطی هستند، **مقاطع مخروطی** نامیده می شوند.

انواع مقاطع مخروطی:

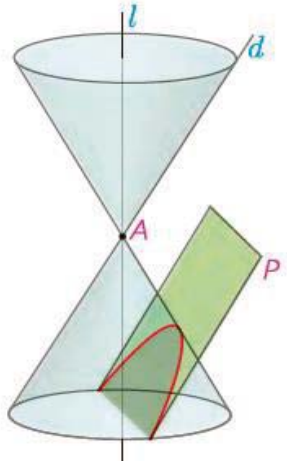
۱) اگر صفحه P بر محور سطح مخروطی عمود باشد و از راس آن عبور نکند شکل حاصل **دایره** است.



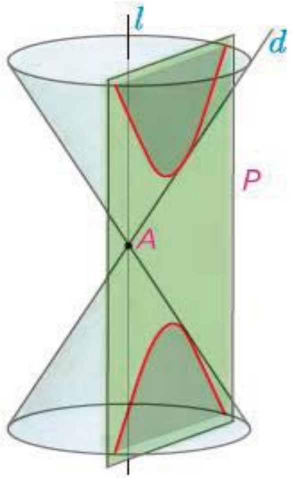
۲) اگر صفحه P بر محور سطح مخروطی عمود نباشد و در هیچ حالتی با مولد سطح مخروطی موازی نشود و از راس آن عبور نکند شکل حاصل **بیضی** است.



۳) اگر صفحه P در یکی از موقعیت ها با مولد سطح مخروطی موازی باشد و از راس آن عبور نکند، شکل حاصل سهمی است.



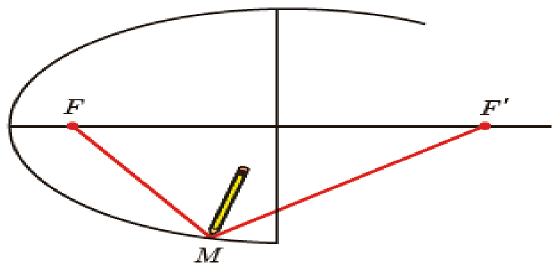
۴) اگر صفحه P سطح مخروطی را ، هم در قسمت بالایی و هم پایینی قطع کند و از راس آن عبور نکند، شکل حاصل را هذلولی گوییم.



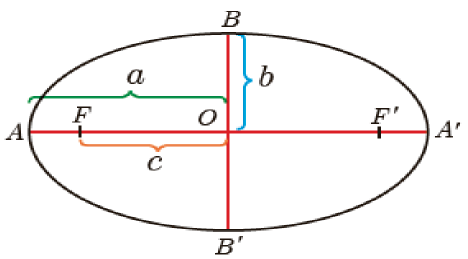
❖ **بنابراین مقاطع مخروطی عبارتند از: دایره، بیضی، سهمی و هذلولی.**

بیضی:

بیضی، مجموعه نقاطی از مجموعه فواصل آن هااز دو نقطه ثابت به نام کانون های بیضی برابر مقدار ثابتی باشد.



$$MF + MF' = \text{مقدار ثابت}$$



نکته: با توجه به شکل مقابل:

۱) F و F' را کانون های بیضی گوییم.

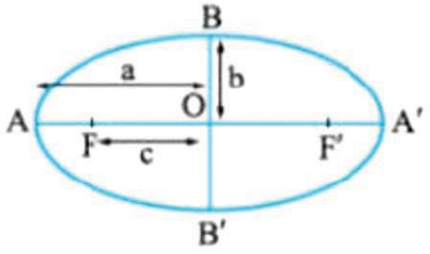
۲) اندازه FF' را فاصله کانونی بیضی گوییم.

۳) نقطه میانی پاره خط FF'، مرکز بیضی است که آن را نقطه O می نامیم.

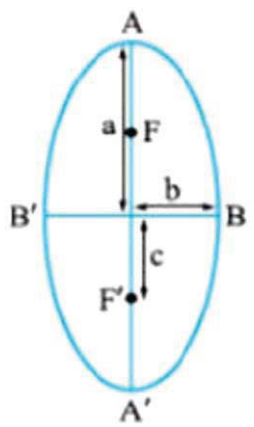
۴) پاره خطی که از کانون های بیضی می گذرد یعنی AA'، قطر بزرگ یا قطر کانونی بیضی است.

۵)پاره خطی که در مرکز بیضی بر قطر بزرگ بیضی عمود است، یعنی قطر BB'، قطر کوچک می نامیم.

نکته: اگر قطر بزرگ بیضی، افقی باشد، آن را **بیضی افقی** و اگر قطر بزرگ، عمودی باشد، بیضی را **بیضی قائم** گوییم.

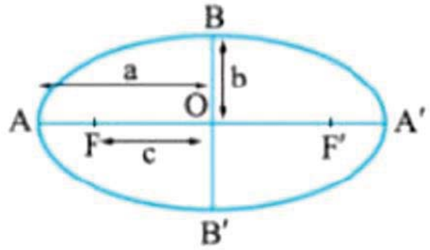


بیضی افقی



بیضی قائم

نکته: با توجه به شکل مقابل(بیضی افقی):



۱) $OA = OA' = a \quad , \quad OB = OB' = b \quad , \quad OF = OF' = c$

۲) $AA' = ۲a$ قطر بزرگ (قطر کانونی)

۳) $BB' = ۲b$ قطر کوچک

۴) $FF' = ۲c$ فاصله کانونی

۵) $AF = AF'$

۶) $BF = BF'$ نقطه B روی عمود منصف پاره خط FF' است.

۷) $c^۲ = a^۲ - b^۲ \quad (a \succ b)$

✓ نکات فوق را می توان برای **بیضی قائم** نیز نوشت.

نکته:

مجموع فواصل هر نقطه از بیضی، از دو کانون آن، مقدار ثابتی است که برابر است با طول قطر بزرگ بیضی.

$$AF + AF' = AF + (AF + FF') = ۲AF + FF' \Rightarrow ۲AF + ۲c = ۲a$$

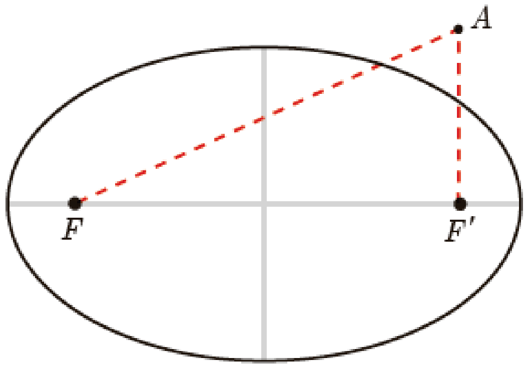
$$A'F' + A'F = A'F' + (A'F' + FF') = ۲A'F' + FF' \Rightarrow ۲A'F' + ۲c = ۲a$$

طرفین رابطه‌های بالا را با هم جمع می‌کنیم:

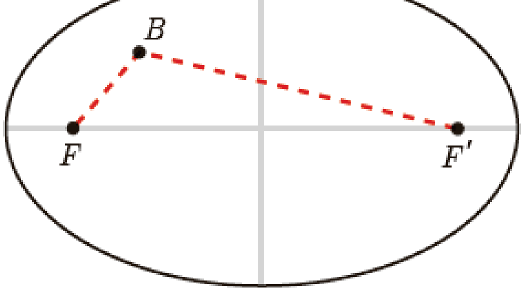
$$۲AF+۲A'F'+۴c=۲\underbrace{(AF+A'F')}_{AA'-FF'}+۴c=۲(AA'-\underbrace{FF'}_{۲c})+۴c=۲(AA'-۲c)+۴c=۲AA'-۴c+۴c=۲AA'=۴a \Rightarrow AA'=۲a$$

نکته:

می‌توان نشان داد که اگر نقطهٔ دلخواه A بیرون بیضی باشد، مجموع فواصل آن از نقاط F و F' بیشتر از l و اگر نقطهٔ دلخواه B، داخل بیضی باشد، مجموع فاصلهٔ آن از دو نقطهٔ F و F' کمتر از l خواهد بود.



$AF + AF' \succ ۲a$



$BF + BF' \prec ۲a$

تمرین: در یک بیضی $c = ۳$ و $a = ۴$ است. اندازه قطر کوچک بیضی را بیابید.

تمرین: در یک بیضی $a = ۵$ و $b = ۳$ است. اندازه فاصله کانونی را بیابید.

تمرین: در یک بیضی افقی طول قطر بزرگ ۶ و قطر کوچک ۴ واحد است. اگر مرکز بیضی نقطه ای با مختصات (۴,۵) باشد:

الف) فاصله کانونی را بیابید.

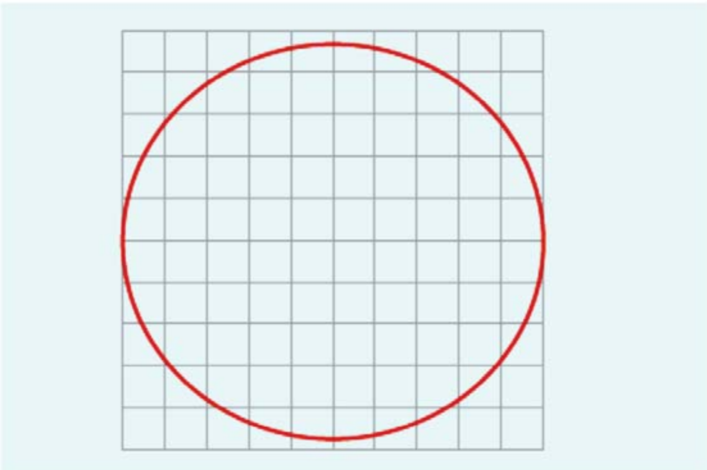
ب) مختصات نقاط دو سر قطر بزرگ و قطر کوچک و همچنین کانون های بیضی را بیابید.

خروج از مرکز:

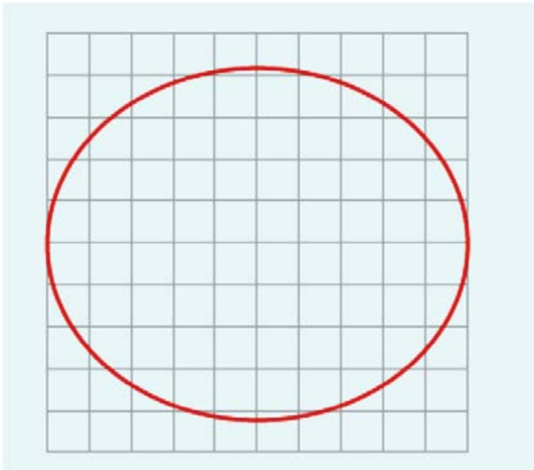
مقدار $\frac{c}{a}$ را خروج از مرکز بیضی می نامیم و معمولا آن را با حرف e نشان می دهیم:

$$e=\frac{c}{a}$$

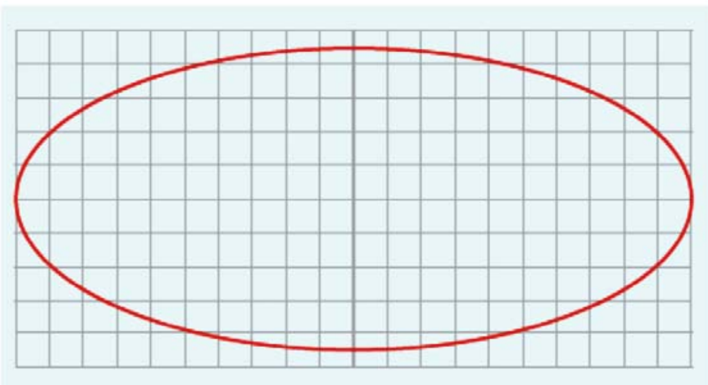
خروج از مرکز پارامتری است که میزان کشیدگی یا فشردگی یک بیضی را تعیین می کند. هرچه نسبت $\frac{c}{a}$ ، بزرگتر و به ۱ نزدیکتر باشد، شکل بیضی کشیده تر می شود و هرچه مقدار $\frac{c}{a}$ کوچکتر و به صفر نزدیکتر باشد، شکل بیضی به شکل دایره نزدیکتر خواهد شد.



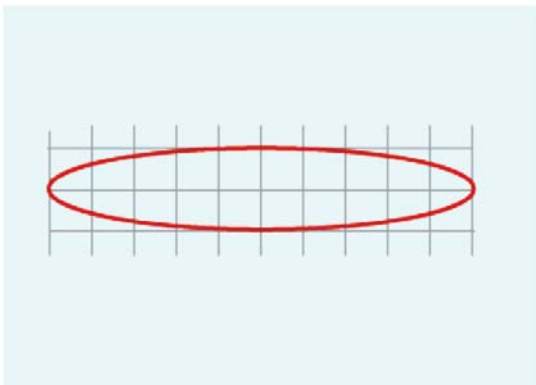
$\frac{c}{a}=۰/۲$



$\frac{c}{a}=۰/۴$



$\frac{c}{a}=۰/۹$



$\frac{c}{a}=۰/۹۸$

تمرین: اگر مقدار خروج از مرکز بیضی برابر ۱ شود، شکل بیضی چگونه خواهد بود؟ اگر برابر صفر باشد، چطور؟

نکته

$$e=\frac{c}{a}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$$

تمرین: کانونی یک بیضی نقاط $(1,3)$ و $(1,-5)$ است.

الف) فاصله کانونی و مختصات مرکز بیضی و معادله قطر بزرگ و کوچک بیضی را بیابید.

ب) اگر $a=6$ باشد، اندازه قطر کوچک و خروج از مرکز بیضی را بیابید.

تمرین: خروج از مرکز بیضی افقی $\frac{۴}{۵}$، مرکز آن $(-۴,-۱)$ و قطر کوچک این بیضی ۶ واحد است.

الف) طول قطرکانونی و فاصله کانونی را بیابید.

ب) مختصات نقاط دو سر قطرکوچک و قطر بزرگ وکانون های بیضی را بیابید.

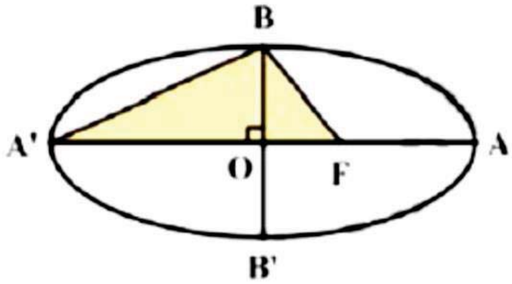
تست: قطر بزرگ بیضی دو برابر قطر کوچک آن می باشد، خروج از مرکز آن کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$　　۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$　　۳) $\frac{۲}{۳}$　　۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

تمرین: اگر طول قطر بزرگ AA' و قطر کوچک BB' بیضی مقابل به ترتیب ۱۰ و ۸ باشد:

الف) مقدار $A'F$ را بیابید.(F کانون بیضی است)

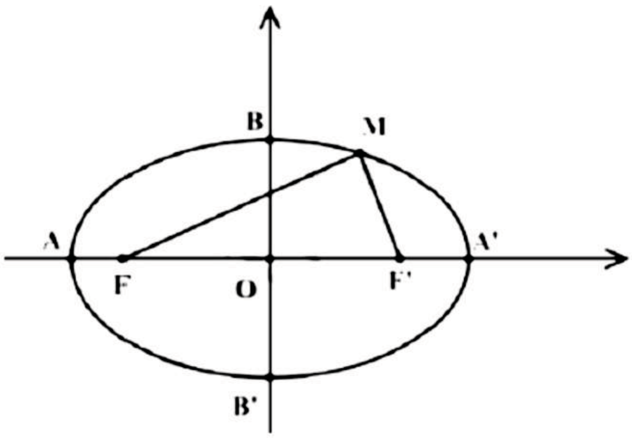
ب) مساحت مثلث هاشور خورده BFA' چقدر است؟



تمرین: اگر در بیضی مقابل مختصات کانون $F'(۴,۰)$ و مختصات راس $B(۰,۳)$ باشد :

الف) قطر بزرگ بیضی را بیابید.

ب) محیط مثلث MFF' را بیابید.

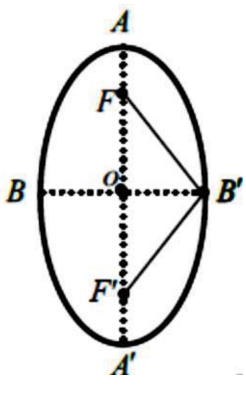


تمرین: در بیضی مقابل کانون ها به مختصات $F(۱,۵)$ و $F'(۱,۱)$ و یک راس قطر بزرگ آن $A(۱,۶)$ می باشد:

الف) فاصله کانونی و مختصات مرکز بیضی را بیابید.

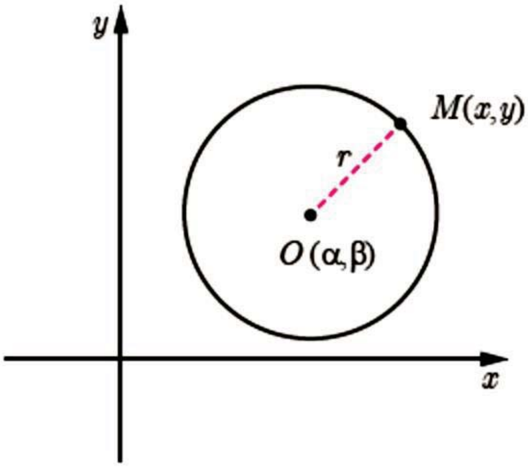
ب) معادله قطر کوچک بیضی را بنویسید.

پ) مساحت مثلث $B'FF'$ را بدست آورید.



دایره :

دایره، مجموعه نقاطی از صفحه است که فاصله آن ها از نقطه ثابتی درهمان صفحه مقداری ثابت و مثبت باشد. این نقطه ثابت را مرکز دایره و مقدار ثابت را اندازه شعاع دایره می نامیم. دایره C را به مرکز O و شعاع r را معمولا با نماد C(o,r) نشان می دهیم.



$$OM = \sqrt{(x-\alpha)^۲ + (y-\beta)^۲}$$

$OM = r$ از طرفی

$$\Rightarrow (x-\alpha)^۲ + (y-\beta)^۲ = r^۲$$

رابطهٔ $(x-\alpha)^۲ + (y-\beta)^۲ = r^۲$ معادلهٔ دایره‌ای به مرکز $O(\alpha,\beta)$ و شعاع r در صفحهٔ مختصات است که به آن **معادلهٔ استاندارد دایره** می‌گوییم.

نکته:

نقاطی که در معادلهٔ $(x-\alpha)^۲ + (y-\beta)^۲ = r^۲$ صدق کنند، نقاطی از صفحه هستند که روی دایره قرار دارند.

مجموعه جواب نامعادلهٔ $(x-\alpha)^۲ + (y-\beta)^۲ < r^۲$ نقاطی از صفحه را مشخص می‌کند که ....

مجموعه جواب نامعادلهٔ $(x-\alpha)^۲ + (y-\beta)^۲ > r^۲$ نقاطی از صفحه را مشخص می‌کند که ....

تمرین: معادله دایره ای را بنویسید که مرکز آن $C(o,r)$ و شعاع آن ۳ باشد.

تمرین: معادله دایره ای به مرکز مبدا مختصات و شعاع r را بیابید.

تمرین: اگر معادله دایره ای به شکل $(x-۳)^۲+(y+۱)^۲=۴$ باشد:

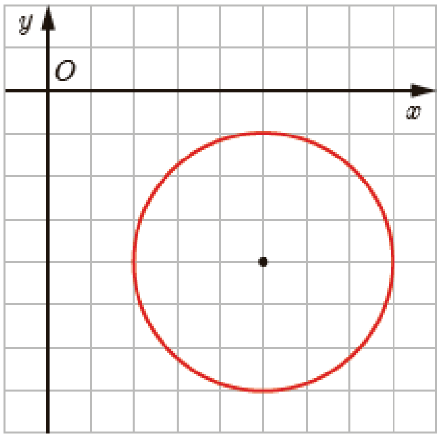
الف) مختصات مرکز و اندازه شعاع آن را بیابید.

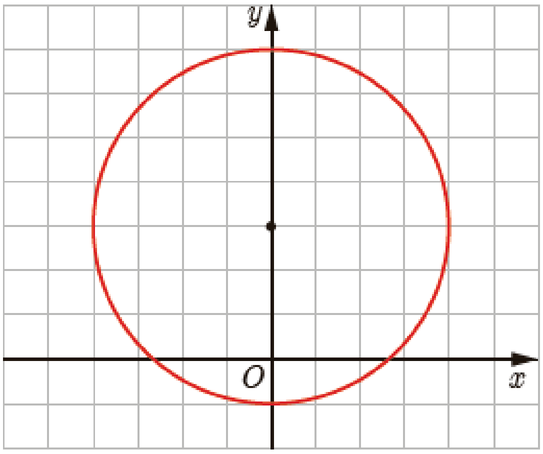
ب) نمودار دایره را رسم کنید.

تمرین: معادله دایره ای را بنویسید که از نقطه $(۱,-۳)$ گذشته و مرکز آن $(۲,-۱)$ باشد.

تمرین: معادله دایره ای را بنویسید که از مبدا مختصات گذشته و مرکز آن $(۲,-۱)$ باشد.

تمرین: معادله دایره های زیر را بیابید.





تمرین: معادله دایره ای را بنویسید که نقاط $(۱,-۳)$ و $(۲,-۱)$ دو سر یکی از قطر های آن باشد.

تمرین: دایره به معادله $(x-۳)^۲+(y+۱)^۲=۴$ مفروض است:

الف) وضعیت نقطه $A(۱,۱)$ نسبت به دایره فوق را بیابید.

ب) وضعیت نقطه $B(۰,۳)$ نسبت به دایره فوق را بیابید.

ج) وضعیت نقطه $C(-۲,۴)$ نسبت به دایره فوق را بیابید.

تمرین: اگر معادله دایره ای به شکل $(x+1)^2+y^2=4$ باشد:

الف) مختصات مرکز دایره و اندازه شعاع دایره را بیابید.

ب) مختصات نقاط تقاطع این دایره را با محور های مختصات بیابید.

ج) دایره را رسم کنید.

تست: نقطه $A(3,6)$ روی دایره ای است که بر هر دو محور مختصات مماس است. شعاع دایره کدام است؟

۱) ۲,۱۲ ۲) ۲,۱۵ ۳) ۳,۹ ۴) ۳,۱۵

معادله گسترده دایره:

اگر معادله استاندارد دایره را به کمک اتحاد ها به صورت ساده تر بنویسیم به معادله گسترده دایره خواهیم رسید:

معادله گسترده دایره: $x^2+y^2+ax+by+c=0$

در این صورت:

اگر $x^2+y^2+ax+by+c=0$ **معادلهٔ گستردهٔ** یک دایره باشد، **مختصات مرکز** این دایره $O(\frac{-a}{2},\frac{-b}{2})$ است. شعاع این دایره برابر است با : $r=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}$

نکته: در معادله دایره به فرم گسترده، اولا باید ضریب x^2 و y^2 با هم برابر باشند و ثانیا $a^2+b^2-4c>0$ باشد.

تمرین: اگر معادله دایره ای به شکل $x^2+y^2-2x-6y+6=0$ باشد:

الف) مختصات مرکز دایره و اندازه شعاع دایره را بیابید.

ب) معادله استاندارد دایره فوق را بیابید.

تمرین: اگر معادله دایره ای به شکل $x^2+y^2-2x+4y+1=0$ باشد:

الف) مختصات مرکز دایره و اندازه شعاع دایره را بیابید.

ب) وضعیت نقاط $(-1,-2),(0,0),(1,0)$ را نسبت به دایره فوق مشخص کنید.

ج) مختصات نقاط تقاطع این دایره را با محور های مختصات بیابید.

تمرین: معادله دایره گذرنده از سه نقطه $(-2,0),(0,0),(0,4)$ را بنویسید و سپس مختصات مرکز و اندازه شعاع را بیابید.

تست: به ازای کدام مجموعه مقادیر a، منحنی به معادله $2x^2+(a^2-7)y^2+4y+a=0$ یک دایره است؟

۱) $\{-3\}$ ۲) $\{3\}$ ۳) $\{-3,3\}$ ۴) ϕ

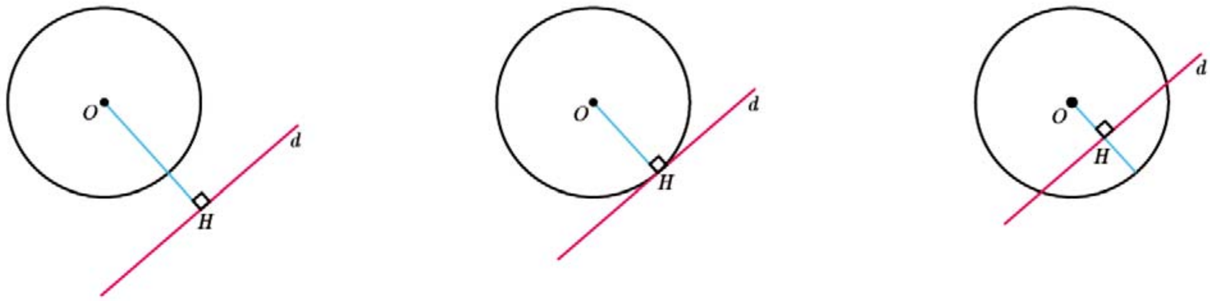
اوضاع نسبی خط و دایره:

خط و دایره می توانند یک یا دو نقطه مشترک داشته یا هیچ نقطه مشترکی نداشته باشند.

اگر خط d با دایره متقاطع باشد، $OH<r$ است.

اگر خط d بر دایره مماس باشد، $OH=r$ است.

اگر خط d، دایره را قطع نکند، $OH>r$ است.



یادآوری

۱ــ خط مماس در نقطهٔ تماس با دایره، بر شعاع آن دایره عمود است.

۲ــ فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_0,y_0)$ از خط به معادلهٔ $ax+by+c=0$ برابر است با :

$$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

تمرین: وضعیت هر خط و دایره را مشخص کنید.

الف) خط $x+y=3$ و دایره $x^2+y^2-2x-3=0$.

ب) خط $x+y=1$ و دایره $x^2+y^2+2x+2y-1=0$.

ج) خط $y=-1$ و دایره $(x-2)^2+(y+3)^2=4$.

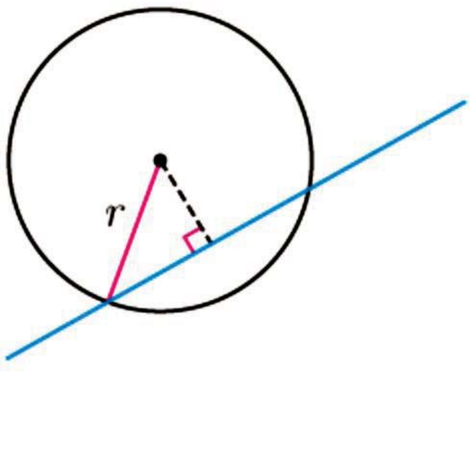
د) خط $y=-x-2$ و دایره $x^2+y^2=2$.

تمرین: معادله دایره ای را بنویسید که بر خط $3x+4y-1=0$ مماس بوده و مرکز آن $o(1,2)$ باشد.

تمرین: معادله دایره ای را بنویسید که بر خط $3x-4y=3$ مماس بوده و مرکز آن $o(0,3)$ باشد.

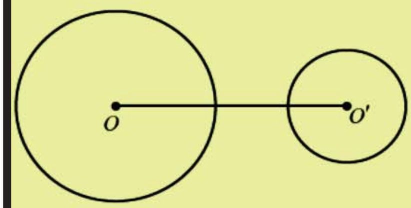
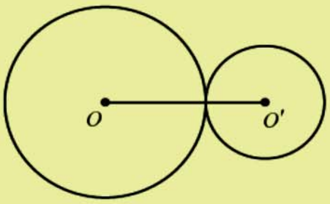
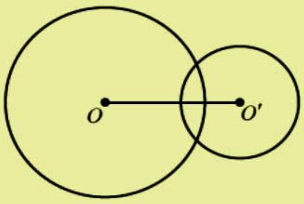
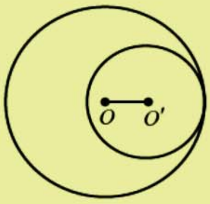
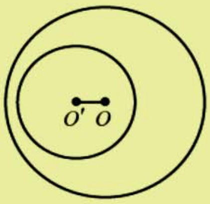
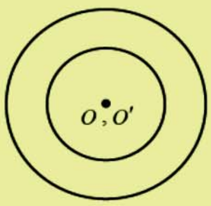
تمرین: اگر بدانیم خط ℓ در نقطه $(3,4)$ بر دایره ای به مرکز مبدا مختصات مماس است. معادله خط مماس را بنویسید.

تمرین: مرکز دایره ای نقطه $o(2,-3)$ است. این دایره روی خط $3x-4y+2=0$ وتری به طول ۶ جدا می کند. معادله این دایره را بیابید.



اوضاع نسبی دو دایره:

دو دایره دلخواه $C(o,r)$ و $C'(o',r')$ را با فرض $r \succ r'$ در نظر بگیرید. می خواهیم وضعیت نسبی دو دایره را بیابیم.
پاره خطی که مرکز دو دایره را به هم وصل می کند، خط المرکزین نامیده می شود، که اندازه آن را با d نشان می دهیم.
(خط المرکزین $oo' = d$)

دو دایره بیرون هم (متخارج)	$d > r + r'$	
دو دایره مماس بیرون	$d = r + r'$	
دو دایرهٔ متقاطع	$r - r' < d < r + r'$	
دو دایرهٔ مماس درون	$d = r - r'$	
دو دایرهٔ متداخل	$d < r - r'$	
دو دایرهٔ هم‌مرکز	$d = 0$	

تمرین: وضعیت دو دایره را نسبت به هم مشخص کنید.

الف) $x^{2}+y^{2}+6x+8y=0$ و $x^{2}+y^{2}-4x+6y+12=0$.

ب) $x^{2}+y^{2}-2x+4y=0$ و $x^{2}+y^{2}+2x-4y=0$.

ج) $(x+1)^{2}+(y-2)^{2}=1$ و $x^{2}+y^{2}-2x+4y+1=0$

د) $x^{2}+(y-5)^{2}=5$ و $(x-2)^{2}+(y+3)^{2}=7$

تمرین: اگر دو دایره به معادله های $x^2+y^2+2x-4y+1=0$ و $(x-2)^2+(y+1)^2=m^2$ مماس خارج باشند، مقدار m را بیابید.

تمرین: معادله دایره ای را بنویسید که بر دایره $x^2+y^2+2x-4y-4=0$ مماس بیرون و مرکز آن نقطه $o(2,-2)$ باشد.

تمرین: معادله دایره ای را بنویسید که مرکز آن نقطه $(-۱,-۱)$ و با دایره $x^۲+y^۲-۴x-۶y=۳$ مماس درون باشد.

تست: دایره های $x^۲+y^۲+۲y=۳$ و $x^۲+y^۲+۲x=۳$ متقاطع اند. معادله وتر مشترک این دو دایره، کدام است؟
تجربی- ۱۴۰۰

۱) $x=y$ ۲) $x=۱+y$ ۳) $x=-y$ ۴) $x=۱-y$

فصل هفتم:

احتمال

در پایه های قبل با مفهوم احتمال آشنا شده ایم. در زیر خلاصه ای از مطالب آموخته شده را مرور می کنیم:

۱ــ پدیده تصادفی : پدیده یا آزمایشی است که نتیجهٔ آن را نتوان قبل از انجام، به‌طور قطعی پیش‌بینی کرد.

۲ــ فضای نمونه : مجموعهٔ تمام نتایج ممکنِ یک پدیدهٔ تصادفی را فضای نمونهٔ آن پدیده می‌نامیم و معمولاً آن را با S نمایش می‌دهیم.

۳ــ پیشامد تصادفی : هر زیر مجموعه از S را یک پیشامد تصادفی در فضای نمونه‌ای S می‌نامیم.

۴ــ پیشامدها و اعمال روی آنها : فرض کنیم A و B پیشامدهایی از فضای نمونه‌ای S باشند.

الف) اجتماع دو پیشامد : پیشامد $A\cup B$ وقتی رخ می‌دهد که حداقل یکی از پیشامدهای A یا B رخ دهد.

ب) اشتراک دو پیشامد : پیشامد $A\cap B$ وقتی رخ می‌دهد که هر دو پیشامد A و B رخ دهند.

پ) تفاضل دو پیشامد : پیشامد $A-B$ وقتی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ دهد، ولی پیشامد B رخ ندهد.

ت) متمم یک پیشامد : پیشامد A' (یا A^c) وقتی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ ندهد. $P(A')=1-P(A)$

۵ــ رابطهٔ محاسبهٔ احتمال وقوع یک پیشامد :

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}}{\text{تعداد همهٔ حالت‌های ممکن}}$$

۶ــ رابطهٔ محاسبهٔ احتمال اجتماع دو پیشامد A و B :

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

۷ــ پیشامدهای ناسازگار : دو پیشامد A و B را ناسازگار می‌گوییم، هرگاه A و B با هم رخ ندهند؛ به بیان دیگر $A\cap B=\varnothing$ در این صورت داریم :

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

۸ــ تعمیم پیشامدهای ناسازگار : پیشامدهای A_1 و A_2 و $\cdots$ و A_n را دو به دو ناسازگار گوییم، هرگاه هیچ دوتایی از آنها نتوانند با هم رخ دهند. در این صورت داریم :

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$$

۹ــ احتمال شرطی : منظور از «احتمال A به شرط B» که آن‌را با $P(A|B)$ نمایش می‌دهیم، احتمال وقوع پیشامد A است، به شرط آنکه بدانیم پیشامد B رخ داده است و داریم :

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\qquad (P(B)\neq 0)$$

۱۰ــ پیشامدهای مستقل : دو پیشامد A و B از هم مستقل‌اند هرگاه وقوع هر یک بر احتمال وقوع دیگری تأثیر نداشته باشد. مستقل بودن دو پیشامد A و B معادل است با اینکه $P(A\cap B)=P(A).P(B)$.

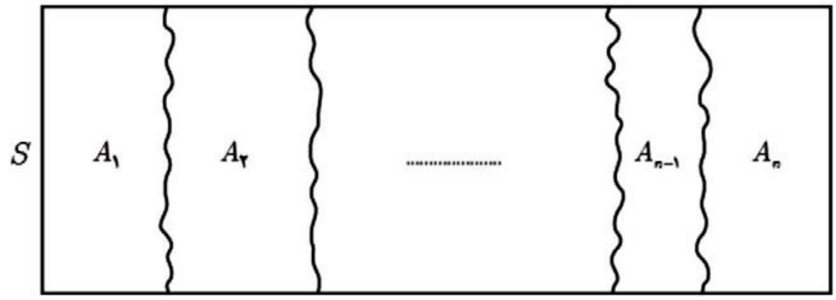
تمرین: دو پیشامدی که باهم رخ ندهند، دو پیشامد .... (مستقل، ناسازگار) هستند.

افراز مجموعه:

فرض می کنیم $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n$ زیر مجموعه هایی ناتهی از مجموعه S باشند، به گونه ای که اجتماع همه آن ها برابر S و اشتراک هر دو تای آن ها برابر ϕ باشد، در این صورت می گوییم این مجموعه ها یک افراز روی S درست کرده اند. به عبارتی:

$$1)\ A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = S \qquad \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i = S\right)$$

$$2)\ A_1 \cap A_2 = \varnothing\ ,\ A_1 \cap A_3 = \varnothing\ ,\ \cdots\ ,\ A_{n-1} \cap A_n = \varnothing \qquad \left(A_i \cap A_j = \varnothing\ ,\ \underset{i \neq j}{1 \leq i, j \leq n}\right)$$



مثال: کشور ایران به ۳۱ استان افراز شده است.

مثال: اگر A مجموعه اعداد طبیعی اول و B مجموعه اعداد طبیعی مرکب و $C = \{1\}$ باشند، در این صورت A و B و C یک افراز روی مجموعه اعداد طبیعی هستند.

مثال: مجموعه اعداد گویا و اصم یک افراز روی مجموعه اعداد حقیقی تشکیل می دهند.

تمرین: تمام افراز های مجموعه $A = \{1, 2, 3\}$ را بیابید.

قانون احتمال کل:

حال اگر فرض کنیم در حالت کلی $A_۱$ ، $A_۲$ ، ... و A_n پیشامدهایی باشند که بر روی فضای نمونه‌ای S یک افراز تشکیل داده باشند و B یک پیشامد دلخواه باشد، رابطهٔ زیر حاصل خواهد شد که به آن **قانون احتمال کل** می‌گوییم :

$$P(B)=\sum_{i=۱}^{n}P(B\cap A_i)=\sum_{i=۱}^{n}P(A_i)P(B|A_i)$$

تمرین: اگر احتمال به دنیا آمدن یک نوزاد پسر مبتلا به نوعی بیماری خاص ۰/۰۸ و همین احتمال برای یک نوزاد دختر ۰/۰۳ باشد و خانواده ای که قصد بچه دار شدن داشته باشد، با چه احتمالی نوزاد آن ها به بیماری مذکور مبتلا خواهد بود؟

تمرین: در یک جامعه ۵ درصد مردان و ۴ درصدزن ها به نوعی بیماری خاص مبتلا هستند. از طرفی مردان مبتلا به این بیماری به احتمال ۰/۷ و زنان مبتلا به این بیماری به احتمال ۰/۶ بهبود می یابند. اگر بخواهیم فردی از این جامعه انتخاب کنیم، با چه احتمالی فرد مورد نظر به بیماری مذکور مبتلا گشته و بهبود یافته است؟

تمرین:۵۲ درصد جمعیت کشوری را زنان و ۴۸ درصد بقیه را مردان تشکیل می دهند. اگر ۸ درصد زنان و ۹ درصد مردان تحصیلات دانشگاهی داشته باشند، چند درصد جمعیت این کشور تحصیلات دانشگاهی دارند؟

تمرین: فرض کنید جمعیت یک کشور متشکل از ۲۰ درصد کودک و نوجوان، ۵۰ درصد بزرگسال و ۳۰ درصد سالمند باشند و شیوع یک بیماری خاص در این دسته ها به ترتیب ۳ درصد، ۵ درصد و ۱ درصد باشد، اگر فردی به تصادف از این جامعه انتخاب شود، با چه احتمالی به بیماری مورد نظر مبتلا است؟

تمرین: دو جعبه داریم. درون یکی از آن ها ۱۲ لامپ قرار دارد که ۶ تای آن ها معیوب هستند و درون جعبه دیگر ۹۶ لامپ قرار دارد که ۴ تای آن ها معیوب هستند. به تصادف جعبه ای انتخاب کرده، یک لامپ از آن بیرون می آوریم. چقدر احتمال دارد لامپ مورد نظر معیوب باشد؟

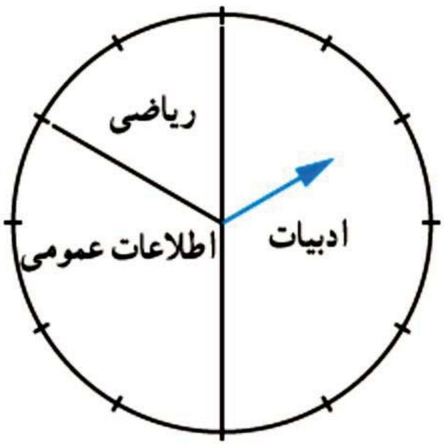
تمرین: ۴ ظرف داریم. در ظرف اول ۱۴ مهره قرار دارد که ۴ تای آن ها قرمز است. در ظرف دوم همه مهره ها قرمزند. در ظرف سوم ۸ مهره قرار دارد که ۶ تای آن ها قرمزند و در ظرف چهارم هیچ مهره قرمزی وجود ندارد. با چشم بسته یکی از ظرف ها را انتخاب کرده و از آن یک مهره بیرون می آوریم. احتمال این که مهره مورد نظر قرمز باشد چقدر است؟

تست: ظرف A دارای ۴ مهره سفید و ۵ مهره سیاه است و هر یک از دو ظرف یکسان B و C دارای ۶ مهره سفید و ۳ مهره سیاه است. به تصادف یکی از سه ظرف را انتخاب کرده و ۴ مهره از آن خارج می کنیم. با کدام احتمال دو مهره از مهره های خارج شده سفید است؟ (سراسری – تجربی ۹۳)

۱) $\frac{25}{63}$ ۲) $\frac{26}{63}$ ۳) $\frac{10}{21}$ ۴) $\frac{11}{21}$

تمرین: دو ظرف داریم. ظرف اول شامل ۶ مهره سبز و ۴ مهره آبی و ظرف دوم شامل ۵ مهره سبز و ۷ مهره آبی است. از ظرف اول به تصادف یک مهره انتخاب کرده و در ظرف دوم قرار می دهیم، سپس یک مهره از ظرف دوم انتخاب می کنیم. با چه احتمالی این مهره سبز است؟

تمرین: فردی در یک مسابقه شرکت کرده است. سه بسته سوال که یکی شامل ادبیات، یکی ریاضی و یکی اطلاعات عمومی است، وجود دارد. اگر سوال های ادبیات را به او بدهند به احتمال ۹۰ درصد برنده خواهد شد. اگر سوال های ریاضی را به او بدهند به احتمال ۶۰ درصد و اگر سوال های اطلاعات عمومی را به او بدهند به احتمال ۸۵ درصد برنده خواهد شد. در صورتی که با چرخاندن عقربه چرخان در شکل مقابل نوع سوال هایی که به او داده می شود مشخص شود تعیین کنید او به چه احتمالی برنده خواهد شد؟



تمرین: یک سکه را پرتاب می کنیم و اگر پشت بیاید ۳ سکه دیگر را با هم پرتاب می کنیم. در این آزمایش احتمال این که دقیقا یک سکه رو ظاهر شود چقدر است؟

تمرین: در یک جعبه ۵ ساعت دیواری از نوع A، ۲ تا از نوع B و ۱۵ تا از نوع C وجود دارد و احتمال این که عمر آن ها از ۱۰ سال بیشتر باشد برای نوع A، $\frac{۴}{۵}$، برای نوع B، $\frac{۹}{۱۰}$ و برای نوع C، $\frac{۱}{۲}$ است. به تصادف یک ساعت از کارتن بیرون می آوریم. با چه احتمالی عمر این ساعت بیش از ۱۰ سال است؟

تمرین: فردی در انتخاب رشته خود برای تحصیل در دبیرستان بین سه رشته ریاضی، تجربی و انسانی مردد است. اگر او رشته ریاضی را انتخاب کند به احتمال ۰/۴۵، اگر تجربی را انتخاب کند به احتمال ۰/۱ و اگر انسانی را انتخاب کند به احتمال ۰/۳ و در آزمون ورودی دانشگاه پذیرفته خواهد شد. اگر احتمال این که رشته ریاضی را انتخاب کند ۰/۱، احتمال این که رشته تجربی را انتخاب کند ۰/۶ و احتمال این که رشته انسانی را انتخاب کند ۰/۳ باشد، با چه احتمالی در دانشگاه پذیرفته خواهد شد؟

تمرین: مدرسه A سه برابر مدرسه B دانش آموز دارد. ۲۵ درصد دانش آموزان مدرسه A و ۱۵ درصد دانش آموزان مدرسه B معدلی بالای ۱۸ دارند. اگر همه دانش آموزان هر دو مدرسه در یک محوطه حاظر باشند و به تصادف یکی از آن ها را انتخاب کنیم:

الف) باچه احتمالی فرد انتخاب شده از مدرسه A و با چه احتمالی از مدرسه B است؟

ب) باچه احتمالی فرد انتخابی معدلی بالای ۱۸ دارد؟

بخش دوم:

تست

فصل اول:

تابع

۱. در کدام بازه تابع $f(x)=x^{3}$ بالاتر از تابع $g(x)=x^{2}$ قرار دارد؟

۱) $[0,1]$ ۲) $[1,2]$ ۳) $[-1,1]$ ۴) $[0,2]$

۲. در مورد تابع $f(x)=|x^{3}|$ کدام درست است؟

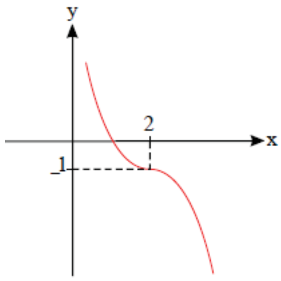
۱) صعودی ۲) نزولی ۳) وارون ناپذیر ۴) یک به یک

۳. نمودارتابع $f(x)=x|x|$ مشابه کدام است؟

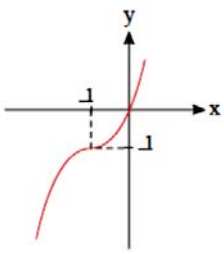
۱) $f(x)=x^{2}$ ۲) $f(x)=x^{3}$ ۳) $f(x)=\sqrt{x}$ ۴) $f(x)=\sqrt[3]{x}$

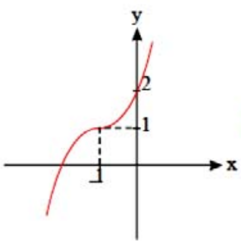
۴. نمودار تابع $f(x)=-x^{3}+ax^{2}+bx+c$ به صورت مقابل است. حاصل $a-b+2c$ کدام است؟

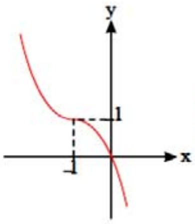
۱) -36 ۲) 32 ۳) 36 ۴) -32

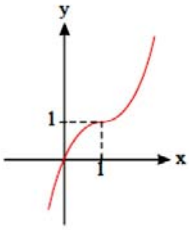


۵. نمودار تابع $f(x)=x^{3}+3x^{2}+3x$ کدام است؟

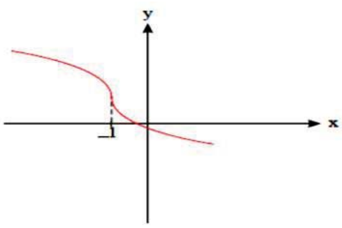
۱) 

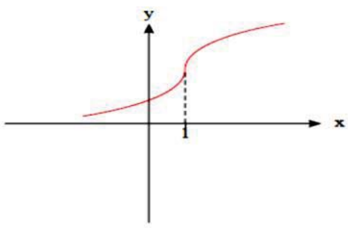
۲) 

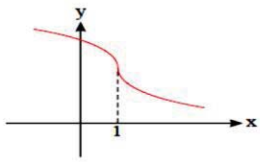
۳) 

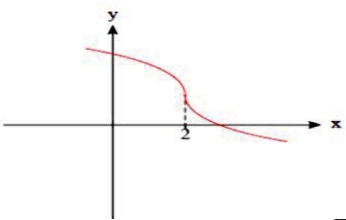
۴) 

۶. نمودار تابع $f(x)=-\sqrt[3]{x-1}+2$ کدام است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۷. کدام تابع وارون پذیر است؟

۱) $y=2x^3-3x^2-12x+1$ ۲) $y=x^3-3x$

۳) $y=x^3+3x+1$ ۴) $y=-x^3-3x$

۸. نمودار تابع $y=f(x-2)+1$ را نسبت به محور xها و yها قرینه می کنیم و سه واحد به چپ منتقل می کنیم و در انتها با ضریب ۴ آن را در راستای عمودی منبسط می کنیم. ضابطه تابع کدام است؟

۱) $y=-4f(-x-5)-1$ ۲) $y=-4f(-x-5)-4$

۳) $y=-4f(-x+1)+4$ ۴) $y=-4f(-x+1)-16$

۹. نمودار تابع $y=-x^2+2x+5$ را سه واحد به طرف xهای مثبت و دو واحد به طرف yهای منفی منتقل می کنیم. نمودار جدید در کدام بازه، بالای نیمساز ربع اول است؟ ریاضی ۹۸

۱) $(3,4)$ ۲) $(2,5)$ ۳) $(3,5)$ ۴) $(2,6)$

۱۰. قرینه نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ را نسبت به محور yها تعیین کرده سپس منحنی حاصل را ۴ واحد به راست منتقل می کنیم. منحنی اخیر و منحنی اصلی نسبت به کدام خط متقارن هستند؟ ریاضی ۹۹

۱) $x=1$ ۲) $x=1/5$ ۳) $x=2$ ۴) $x=2/5$

۱۱. نمودار تابع $f(x)=4x-x^2$ را در امتداد محور xها، ۲ واحد در جهت منفی انتقال می دهیم. فاصله نقطه برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f، از مبدا مختصات کدام است؟ تجربی ۱۴۰۱

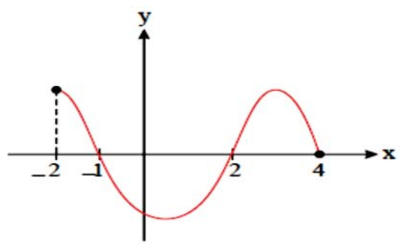
۱) ۱   ۲) ۲   ۳) $2\sqrt{5}$ ۴) $\sqrt{10}$

۱۲. اگردامنه تابع $f(x)$ بازه $[-1,5)$ باشد، دامنه تابع $\frac{1}{3}f(2x-1)+2$ کدام است؟

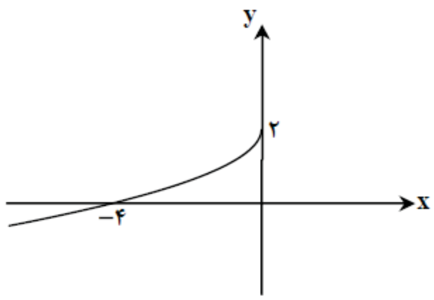
۱) $[0,2)$ ۲) $[-1,3)$ ۳) $[0,3)$ ۴) $[0,6)$

۱۳. شکل مقابل نمودار تابع $f(x-2)$ است . دامنه تابع $\sqrt{xf(x)}$ کدام است؟

۱) $[-3,2]$ ۲) $[2,4]$ ۳) $[-2,3]$ ۴) $[0,1]\cup[4,6]$



۱۴. نمودار مقابل از قرینه یابی و انتقال تابع $y=\sqrt{x}$ بدست آمده است. ضابطه آن کدام است؟



۱) $y=۴-\sqrt{-x+۴}$

۲) $y=۲-\sqrt{۲-x}$

۳) $y=۲-\sqrt{-x+۴}$

۴) $y=۲-\sqrt{-x}$

۱۵. اگر تابع f در بازه $[a,b]$ اکیداً یکنوا باشد، آنگاه تابع f در این بازه ....

۱) حداقل یک بار محور x ها را قطع می کند. ۲) حداقل یک بار محور y ها را قطع می کند.

۳) حداکثر یک بار محور x ها را قطع می کند. ۴) حداکثر یک بار محور y ها را قطع می کند.

۱۶. کدام تابع یکنوا نمی باشد؟

۱) $y=x+|x|$ ۲) $y=x-|x|$ ۳) $y=x|x|$ ۴) $y=x^۲|x|$

۱۷. اگر تابع $f=\{(۱,۴),(۲,۳m+۱),(۳,۱۳),(۴,۶m)\}$ اکیدا صعودی باشد، حدود m کدام است؟

۱) $\frac{۱۳}{۶}\prec m\prec ۴$ ۲) $۱\prec m\prec ۴$ ۳) $\frac{۱۳}{۶}\prec m\prec ۶$ ۴) $۲\prec m\prec ۴$

۱۸. اگر تابع f اکیدا نزولی باشد، دامنه تابع $g(x)=\sqrt{f(x-۳)-f(۵-۳x)}$ کدام است؟

۱) $[۲,+\infty)$ ۲) $\left[\frac{۱}{۲},+\infty\right)$ ۳) $(-\infty,۲]$ ۴) $\left(-\infty,\frac{۱}{۲}\right]$

۱۹. در بازه ای که تابع $f(x)=|x-۲|+|x-۳|$ اکیدا نزولی است، نمودار آن با نمودار تابع $g(x)=۲x^۲-x-۱۰$ در چند نقطه مشترک هستند؟ سراسری ۹۷

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) فاقد نقطه مشترک

۲۰. در مورد تابع $f(x)=x^۲|x|$ کدام درست است؟

۱) صعودی ۲) نزولی ۳) وارون ناپذیر ۴) یک به یک

۲۱. اگر توابع $f-g$ و $f+g$ اکیدا صعودی باشند، کدام تابع الزاما اکیدا نزولی است؟

۱) f ۲) g ۳) $-f$ ۴) $-g$

۲۲. اگر تابع f اکیدا نزولی باشد و داشته باشیم $f(-۲)=۰$، دامنه تابع $\sqrt{xf(x)}$ کدام است؟

۱) $[-۲,+\infty)$ ۲) $(-\infty,-۲]$ ۳) $[-۲,۰)$ ۴) $[-۲,۰]$

۲۳. تابع $f(x)=mx+b-۳x$ هم صعودی و هم نزولی است، مقدار m کدام است؟

۱) صفر ۲) ۳ ۳) -۳ ۴) $\frac{۱}{۳}$

۲۴. تابع $f(x)=(-۹+k^۲)x^۳+۵$ اکیدا نزولی است، مجموع مقادیر صحیح k کدام است؟ تجربی ۱۴۰۱

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۶

۲۵. تابع $f(x)=x^۲\sqrt{x^۲}$ در کدام بازه اکیدا نزولی است؟

۱) $[۱,+\infty)$ ۲) $[۰,+\infty)$ ۳) $(-\infty,۰]$ ۴) $\mathbb{R}$

۲۶. اگر $f(x)=\frac{\sqrt{۲}x}{۳x-\sqrt{۲}}$، آنگاه حاصل $fofof(\sqrt{۲})$ کدام است؟ کنکور ریاضی ۱۴۰۱

۱) ۲ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $-\frac{۱}{۲}$ ۴) -۲

۲۷. اگر $f(x)=۲x-[۲x]$ و $g(x)=-x^۲+۴x$، آنگاه برد تابع gof کدام است؟ تجربی ۹۹

۱) $[۰,۲)$ ۲) $[۰,۳)$ ۳) $[۰,۴)$ ۴) $[۱,۴)$

۲۸. اگر $fog(x)=\frac{x}{x-۳}$ و $g(x)=۲x-۱$، مقدار $f(۳)$ کدام است؟

۱) -۴ ۲) -۲ ۳) ۲ ۴) ۴

۲۹. اگر $gof(x)=۵x^۲+۱۱$ و $f(x)=۲x$ باشد، آنگاه کمترین مقدار $g(x-۷)$ کدام است؟ تجربی ۱۴۰۱

۱) ۳ ۲) ۷ ۳) ۹ ۴) ۱۱

۳۰. کدام تابع وارون پذیر است؟

۱) $y=x+|x|$ ۲) $y=x-|x|$ ۳) $y=x+\sqrt{x}$ ۴) $y=x-\sqrt{x}$

۳۱. اگر $f(x)=x+\sqrt{x}$ مقدار $f^{-1}(6)+f^{-1}(12)$ کدام است؟

۱) ۱۳ ۲) -5 ۳) -2 ۴) ۴

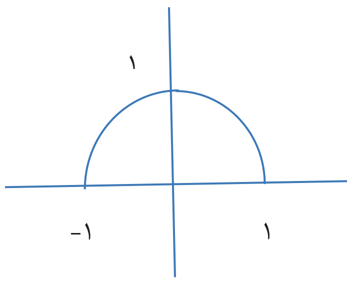
۳۲. تابع $f(x)=x^2\sqrt{x^2}$ در یک بازه نزولی است. ضابطه وارون تابع در این بازه کدام است؟ <u>ریاضی ۱۴۰۱</u>

۱) $-\sqrt{x^3}\ ,\ x\le 0$ ۲) $-\sqrt[3]{x}\ ,x\le 0$ ۳) $-\sqrt{x^3}\ ,\ x\ge 0$ ۴) $-\sqrt[3]{x}\ ,\ x\ge 0$

۳۳. وارون تابع $f(x)=x^3-x+1$ از کدام نقطه عبور می کند؟ <u>تجربی ۱۴۰۱</u>

۱) $(-1,-2)$ ۲) $(\frac{5}{8},\frac{1}{2})$ ۳) $(1,2)$ ۴) $(-\frac{1}{2},-\frac{11}{8})$

۳۳. نمودار تابع $f(x)$ به صورت زیر است. در مورد تابع $(f^{-1}of)(x)$ کدام گزینه درست است؟



۱) ابتدا صعودی و سپس نزولی
۲) ابتدا نزولی و سپس صعودی
۳) صعودی
۴) نزولی

۳۴. کدام تابع صعودی است؟

۱) $y=-2^{-x}$ ۲) $y=|x|+|x-1|$ ۳) $y=-x|x|$ ۴) $y=x^2|x|$

۳۵. کدام نادرست است؟

۱) هر تابع اکیدا یکنوا، یکنوا است.
۲) هر تابع اکیدا یکنوا، یک به یک است و در نتیجه وارون پذیر است.
۳) اگر تابع $f(x)$ اکیدا صعودی باشد، آنگاه $f^{-1}(x)$ اکیدا نزولی است.
۴) اگر تابع $f(x)$ اکیدا نزولی باشد، آنگاه $f^{-1}(x)$ اکیدا نزولی است.

۳۶. اگر $f=\{(1,2),(-1,0),(0,[a])\}$ و $g(x)=2^x$ باشند، به ازای چه مقادیری از a، تابع $f+g$ صعودی است؟

۱) $[0,3]$ ۲) $[0,4)$ ۳) $\left[-\frac{1}{2},3\right]$ ۴) $\left[-\frac{1}{2},4\right)$

۳۷. تابع $f(x)=x^2-2x-3$ با دامنه $\{x:|x-1|\prec 2\}$ همواره چگونه است؟

۱) منفی ۲) مثبت ۳) صعودی ۴) نزولی

۳۸. اگر $f(x)$ صعودی باشد، کدام تابع همواره صعودی است؟

۱) $x-f(x)$　۲) $x+f(x)$　۳) $|x|+f(x)$　۴) $x^{۲}+f(x)$

۳۹. تابع $f(x)=|x-۱|+|x+۲|$ در کدام بازه نزولی اکید است؟

۱) $(۱,+\infty)$　۲) $[-۲,+\infty)$　۳) $(-\infty,-۲]$　۴) $[-۲,۱]$

۴۰. به ازای کدام مقدار a تابع $f(x)=\dfrac{۳x+a}{x-۲}$ صعودی است؟

۱) ۶　۲) ۶-　۳) ۴　۴) ۴-

۴۱. دو تابع $f=\{(۲,۵),(۶,۳),(۳,۷),(۴,۱),(۱,۹)\}$ و $g(x)=\dfrac{x}{x-۱}$ مفروض اند. اگر $f^{-۱}(g(۲a))=۶$ باشد، a کدام است؟

۱) $\dfrac{۱}{۲}$　۲) $\dfrac{۳}{۴}$　۳) $\dfrac{۳}{۲}$　۴) $\dfrac{۵}{۲}$

۴۲. دو تابع $f=\{(۵,۲),(۷,۳),(۱,۴),(۳,۶),(۹,۱)\}$ و $g(x)=\sqrt{۵x+۹}$ مفروض اند. اگر $(g^{-۱}of^{-۱})(a)=۸$ باشد، a کدام است؟

۱) ۲　۲) ۳　۳) ۶　۴) ۷

۴۳. با فرض $f=\{(۱,۲),(۳,-۲),(۴,۱),(۲,-۱)\}$ و $g=\{(۲,۳),(۱,۱),(۳,۲)\}$، برد $gof^{-۱}$ چند عضوی است؟

۱) ۱　۲) ۲　۳) ۳　۴) ۴

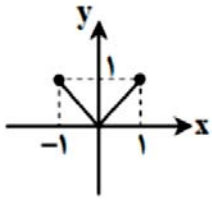
۴۴. اگر $f(x)=\dfrac{۱}{۲}(x+\sqrt{x^{۲}+۴})$ باشد، حاصل $f^{-۱}(x)+f^{-۱}(\dfrac{۱}{x})$ کدام است؟

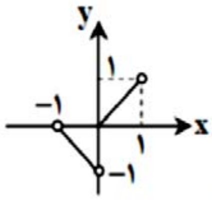
۱) $۲x$　۲) $\dfrac{۲}{x}$　۳) $x^{۲}-۱$　۴) صفر

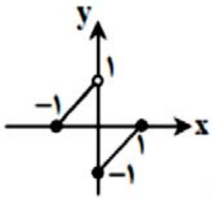
۴۵. اگر $f(x)=\dfrac{۱}{۸}x-۳$ و $g(x)=x^{۳}$، حاصل $(fog)^{-۱}(۵)+(f^{-۱}og^{-۱})(۱)$ کدام است؟

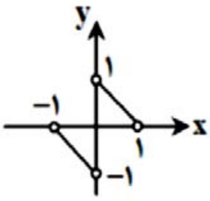
۱) ۳۳　۲) ۲۰　۳) ۳۶　۴) ۱۲

۴۶. نمودار کدام تابع در شرط $f(x)+f(-x)=۰$ صدق می کند؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۴۷. اگر $f(x)=۲[x]-x$ و $g(x)=f([x+f(x)])$ باشد، $gof(-\frac{۵}{۳})$ کدام است؟ تجربی۱۴۰۲

۱) ۴ ۲) -۴ ۳) -۶ ۴) ۶

۴۸. تابع $f(x)=\begin{cases} ۲-۳x & ۲x+۳\leq ۰ \\ ۲+۲mx-x^{۲} & ۲x+۳\leq ۰ \end{cases}$ روی دامنه تعریف خود، وارون پذیر است. اگر $f^{-۱}$ وارون تابع f به ازای مقدار صحیح m باشد، مقدار $f^{-۱}(-۱۹)$ کدام است؟ تجربی۱۴۰۲

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

فصل دوم:

مثلثات

۱. دوره تناوب تابع $f(x)=\cos(\cos \pi x)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) تابع متناوب نیست.

۲. اگر f تابعی متناوب با دوره تناوب ۳ باشد، کدام گزینه با $f(۲)$ برابر است؟

۱) $f(۷)$ ۲) $f(۹)$ ۳) $f(۱۰)$ ۴) $f(۱۱)$

۳. دوره تناوب تابع $f(x)=|\sin x|+|\cos x|$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۲}$ ۲) π ۳) ۲π ۴) تابع متناوب نیست.

۴. اگر f تابعی متناوب باشد، کدام تابع زیر ممکن است متناوب نباشد؟

۱) $y=f^{۲}(x)$ ۲) $y=gof(x)$ ۳) $y=fog(x)$ ۴) $y=\sqrt[۳]{f(x)}$

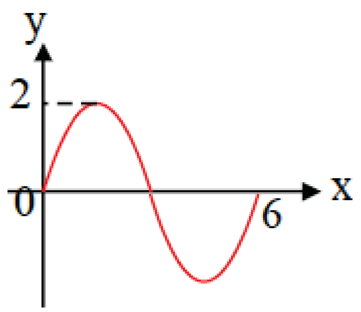
۵. کدام یک از گزینه های زیر درست است؟

۱) هر تابع متناوب، معکوس پذیر است.
۲)تابع متناوب می تواند معکوس پذیر است.
۳) هر تابع اکیدا صعودی، نامتناوب است.
۴) یک تابع متناوب می تواند اکیدا نزولی است.

۶. کدام تابع متناوب نیست؟

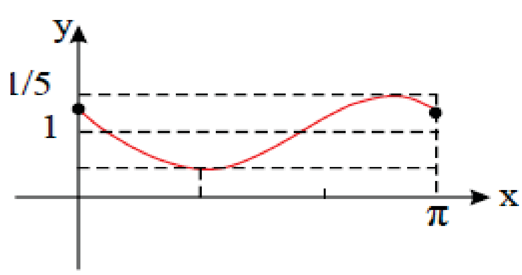
۱) $y=|\sin x|$ ۲) $y=\cos\sqrt{۲}x$ ۳) $y=\sin\frac{x}{۲}$ ۴) $y=\sin\sqrt{x}$

۷. شکل مقابل قسمتی از تابع $y=a\sin(b\pi x)$ است. $a+b$ کدام است؟



۱) $\frac{۴}{۳}$ ۲) $\frac{۵}{۳}$ ۳) $\frac{۷}{۳}$ ۴) $\frac{۸}{۳}$

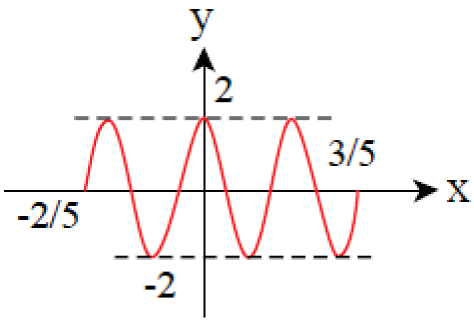
۸. شکل مقابل قسمتی از تابع $y=۱+a\sin(bx-\frac{\pi}{۶})$ است. $a+b$ کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) $\frac{۳}{۲}$

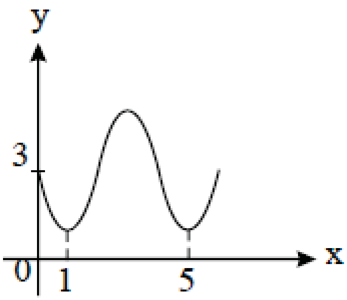
۹. شکل مقابل قسمتی از تابع $y=a\sin\pi(\frac{۱}{۲}+bx)$ است. $a.b$ کدام است؟

۱) ۲   ۲) ۲/۵   ۳) ۳   ۴) ۳/۵



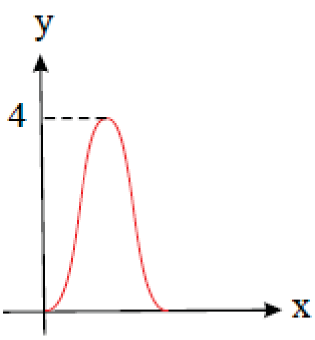
۱۰. شکل مقابل قسمتی از تابع $y=a+\sin(b\pi x)$ است. مقدار y در نقطه $\frac{۲۵}{۳}$ کدام است؟

۱) ۲   ۲) ۲/۵   ۳) ۳   ۴) ۳/۵



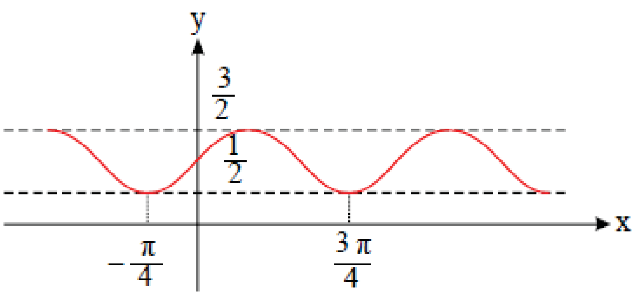
۱۱. شکل مقابل قسمتی از تابع $y=a+b\cos(\frac{\pi}{۲}x)$ در بازه $(۰,۴)$ است. مقدار b کدام است؟

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۱   ۴) ۲

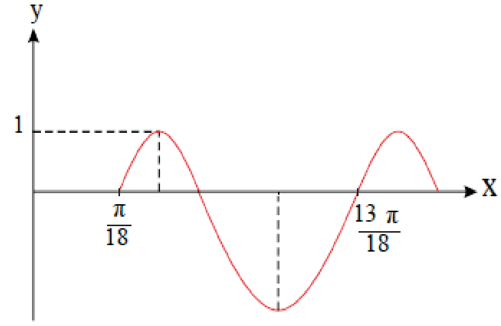


۱۲. شکل مقابل قسمتی از تابع $y=۱+a\sin bx\cos bx$ است. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) ۲   ۴) ۳

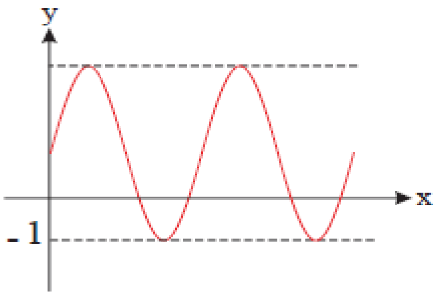


۱۳. شکل مقابل قسمتی از تابع $y=a-۲\cos(bx+\frac{\pi}{۲})$ است. مقدار $a+b$ کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۲

۱۴. شکل مقابل قسمتی از تابع $y=۱+a\sin(b\pi x)$ در بازه $(۰,\frac{۴}{۳})$ است. مقدار b کدام است؟



۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۱۵. دوره تناوب تابع $y=\tan x-\cot x$ کدام است؟

۱) π ۲) ۲π ۳) $\frac{\pi}{۲}$ ۴) $\frac{\pi}{۴}$

۱۶. مقدار $\tan ۷۵$ کدام است؟

۱) $۲+\sqrt{۳}$ ۲) $۲-\sqrt{۳}$ ۳) $\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) $۳+\sqrt{۳}$

۱۷. حاصل عبارت $\frac{۱+\tan ۱۵}{۱-\tan ۱۵}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}+۱$ ۲) $\sqrt{۲}-۱$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۴) $\sqrt{۳}$

۱۸. اگر $\tan(a+b)=۲$ و $\tan(a-b)=۳$ باشد، حاصل $\tan ۲a$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) -۲

۱۹. حاصل عبارت $\frac{\sin x}{1+\cos x}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}\cot x$　۲) $\cot\frac{x}{2}$　۳) $\tan\frac{x}{2}$　۴) $\frac{1}{2}\tan x$

۲۰. اگر $\tan x+\cot x=6$ باشد، حاصل $\sin 2x$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{6}$　۲) $\frac{1}{3}$　۳) $\frac{2}{3}$　۴) $\frac{1}{4}$

۲۱. فرض کنید $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{10}}{10}$ و α زاویه ای در ناحیه سوم باشد، در این صورت حاصل $\tan(\frac{3\pi}{2}-\alpha)$ کدام است؟

۱) -3　۲) $-\frac{1}{3}$　۳) $\frac{1}{3}$　۴) 3

۲۲. فرض کنید $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ و α زاویه ای منفرجه باشد، در این صورت حاصل $\tan(\frac{\pi}{4}+\alpha)$ کدام است؟

۱) -7　۲) $-\frac{1}{7}$　۳) $\frac{1}{7}$　۴) 7

۲۳. حاصل عبارت $\sin x.\cos x(1-2\sin^2 x)$ به ازای $x=7/5$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$　۲) $\frac{1}{8}$　۳) $\frac{3}{8}$　۴) $\frac{3}{16}$

۲۴. اگر $\tan a=2$ و $\tan b=\frac{1}{3}$ باشد، حاصل $\tan(2a-b)$ کدام است؟

۱) -3　۲) -2　۳) $\frac{1}{2}$　۴) 3

۲۵. اگر $2\sin^2 x+\cos^2 x=\frac{4}{3}$ باشد، حاصل $\tan^2 x$ کدام است؟ تجربی ۱۴۰۱

۱) $\frac{3}{2}$　۲) $\frac{2}{3}$　۳) $\frac{1}{2}$　۴) $\frac{1}{4}$

۲۶. اگر $f(x)=16\cos^2(3x)\cos^2(6x)\cos^2(12x)\cos^2(24x)$ باشد، مقدار $f(\frac{\pi}{36})$ کدام است؟ تجربی ۱۴۰۰

۱) $\frac{6-3\sqrt{3}}{16}$ ۲) $\frac{6-\sqrt{3}}{16}$ ۳) $\frac{6+\sqrt{3}}{16}$ ۴) $\frac{6+3\sqrt{3}}{16}$

۲۷. اگر $\frac{3\pi}{2} \succ x \succ \pi$ باشد، حاصل $\sqrt{1+\tan^2 x}(2\sin^2\frac{\pi}{4}-\sin^2 x)$ کدام است؟ تجربی ۹۸

۱) $\sin x$ ۲) $\cos x$ ۳) $-\sin x$ ۴) $-\cos x$

۲۸. اندازه زاویه A در مثلث ABC، ۴۵ درجه بیشتر از اندازه زاویه B است. حاصل $2\cos A\sin B-\sin C$ کدام است؟ ریاضی ۱۴۰۱

۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۴) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

۲۹. مجموع جواب های معادله $\sin 2x+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=0$ را در بازه $[0,2\pi]$ کدام است؟

۱) $\frac{14\pi}{3}$ ۲) 4π ۳) $\frac{9}{2}$ ۴) 5π

۳۰. معادله $\tan x-3\cot x=0$ را در بازه $[0,2\pi]$ چند جواب دارد؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳۱. مجموع جواب های معادله $4\sin x\sin(\frac{3\pi}{2}-x)=1$ را در بازه $[0,2\pi]$ کدام است؟ تجربی ۹۸

۱) $\frac{5\pi}{2}$ ۲) 3π ۳) 4π ۴) 5π

۳۲. مجموع جواب های معادله $\sin^3 x+\cos^3 x=1-\frac{1}{2}\sin 2x$ را در بازه $[0,2\pi]$ کدام است؟ ریاضی ۹۸

۱) $\frac{5\pi}{2}$ ۲) $\frac{7\pi}{2}$ ۳) 2π ۴) 3π

۳۳. مجموع جواب های معادله $\tan 3x\tan x=1$ را در بازه $[\pi,2\pi]$ کدام است؟ ریاضی ۹۹

۱) 5π ۲) 6π ۳) $\frac{9\pi}{2}$ ۴) $\frac{11\pi}{2}$

۳۴. جواب های معادله $\sin(۲x-\frac{\pi}{۴})=\cos(x+\frac{\pi}{۴})$ با شرط $x\neq k\pi$، که در آن k یک عدد صحیح است. کدام است؟ تجربی ۹۹

۱) $\frac{k\pi}{۳}$　۲) $\frac{۲k\pi}{۳}$　۳) $\frac{۲k\pi}{۳}-\frac{\pi}{۶}$　۴) $\frac{۲k\pi}{۳}+\frac{\pi}{۶}$

۳۵. تعداد جواب های معادله $\cos^۲ x-\sin^۲ x\cos ۳x=۱$ را در بازه $[۰,۲\pi]$ کدام است؟ تجربی ۱۴۰۰

۱) ۱　۲) ۳　۳) ۵　۴) ۶

۳۶. مجموع جواب های معادله $\sin x+\sqrt{۳}\cos x=\sqrt{۲}$ را در بازه $[-\pi,۲\pi]$ کدام است؟ ریاضی ۱۴۰۱

۱) $\frac{\pi}{۳}$　۲) $\frac{۷\pi}{۳}$　۳) $\frac{۹\pi}{۴}$　۴) $\frac{۱۱\pi}{۶}$

۳۷. تعداد جواب های معادله $۸\cos x-\tan^۲ x=۱$ را در بازه $[۰,۲\pi]$ کدام است؟ تجربی ۱۴۰۱

۱) ۵　۲) ۴　۳) ۳　۴) ۲

۳۸. مثلثی با مساحت ۳ سانتی متر مربع مفروض است. اگر اندازه دو ضلع ان به ترتیب ۲ و ۶ سانتی متر باشند، آنگاه چند مثلث با این خاصیت می توان ساخت؟

۱) ۱　۲) صفر　۳) ۳　۴) ۲

۳۹. مثلثی با مساحت ۶ سانتی متر مربع مفروض است. اگر اندازه دو ضلع ان به ترتیب ۲ و ۳ سانتی متر باشند، آنگاه چند مثلث با این خاصیت می توان ساخت؟

۱) ۱　۲) صفر　۳) ۲　۴) بیشمار

۴۰. اگر $۴۵\leq\alpha\prec۱۳۵$ و مقدار $\tan(۷۵+\alpha)=۳m$ باشد، m در کدام بازه قرار می گیرد؟

۱) $\left[-\sqrt{۳},\frac{\sqrt{۳}}{۳}\right)$　۲) $\left[-\frac{\sqrt{۳}}{۳},\sqrt{۳}\right)$　۳) $\left[-\sqrt{۳},\sqrt{۳}\right)$　۴) $\left[-\frac{\sqrt{۳}}{۳},\frac{\sqrt{۳}}{۹}\right)$

۴۱. طول بزرگترین بازه ای که $y=\tan x+۱$ در آن اکیدا صعودی باشد، کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۲}$　۲) ۲π　۳) π　۴) $\frac{۳\pi}{۲}$

۴۲. اگر $\tan ۱۵$ و $\cot ۱۵$ ریشه های معادله $x^۲+ax+b=۰$ باشند، حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) ۳　۲) -۳　۳) ۲　۴) -۴

۴۳. اگر $\tan\alpha$ و $\tan\beta$ ریشه های معادله $۲x^{۲}+۳x-۱=۰$ باشند، حاصل $\tan(\alpha+\beta)$ کدام است؟ ریاضی ۹۹

۱) ۱ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) -۳ ۴) -۱

۴۴. دوره تناوب تابع $y=(-۱)^{[۲x]}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) $\frac{۱}{۴}$

۴۵. دوره تناوب تابع $y=\tan x+\cot x$ کدام است؟

۱) π ۲) ۲π ۳) $\frac{\pi}{۲}$ ۴) $\frac{\pi}{۴}$

۴۶. اگر $\tan x+\cot x=-۳$ و $۳\pi \prec ۴x \prec ۴\pi$ باشد، حاصل $\frac{۱}{\cos^{۳}x+\sin^{۳}x}$ کدام است؟ تجربی ۱۴۰۲

۱) $-۰/۵\sqrt{۶}$ ۲) $۰/۷۵\sqrt{۳}$ ۳) $-۰/۷۵\sqrt{۳}$ ۴) $۰/۵\sqrt{۶}$

۴۷. اگر اختلاف جواب های معادله $\frac{۱}{\cos(\frac{\pi+۸x}{۲})}+\frac{۱}{\sin(\frac{\pi+۴x}{۲})}=۰$ در بازه $[۰,\pi]$ برابر α باشد، مقدار $\tan ۲\alpha$ کدام است؟ تجربی ۱۴۰۲

۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۲) $-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) $-\sqrt{۳}$

فصل سوم:

حدهای نامتناهی- حد در بینهایت

۱. چندجمله ای $x^{۳}+ax^{۲}+bx+۱$ بر $x^{۲}-۴$ بخشپذیر باشد، حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱۵}{۸}$　۲) $\frac{-۱۷}{۴}$　۳) $\frac{۱۷}{۱۶}$　۴) $\frac{۱۵}{۸}$

۲. اگر باقیمانده تقسیم $f(x)$ بر $(x-۲),(x+۱)$ به ترتیب ۲ و ۳ باشد، باقیمانده تقسیم $f(x)$ بر $x^{۲}-x-۲$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}x-\frac{۷}{۳}$　۲) $\frac{۱}{۳}x+\frac{۷}{۳}$　۳) $\frac{۱}{۲}x-\frac{۵}{۲}$　۴) $\frac{۱}{۲}x+\frac{۵}{۲}$

۳. دو عبارت $x^{۵}+۴x^{۲}+۹$ و $ax^{۳}-x-۱$ در تقسیم بر $x+۲$ هم باقیمانده هستند، a کدام است؟

۱) ۱　۲) -۱　۳) -۲　۴) ۲

۴. اگر باقیمانده تقسیم $P(x)=۲x^{۲n+۱}+ax^{۳}+bx^{۲}-۱$ $(n\in\mathbb{N})$ بر $x+۱$ برابر ۵ باشد، باقیمانده تقسیم $f(x)=ax^{۳}-۲bx^{۲}+x-۱$ بر $x-۲$ کدام است؟

۱) -۶۳　۲) ۶۵　۳) -۳۱　۴) ۳۳

۵. اگر عبارت $ax^{۳}+۴x^{۲}-۱۴x+۱۰-a$ بر سه جمله ای $x^{۲}-۲x+۱$ بخشپذیر باشد، مقدار a کدام است؟

۱) ۱　۲) ۲　۳) ۳　۴) ۴

۶. اگر باقیمانده تقسیم $f(x)$ و $g(x)$ بر $x^{۲}+x-۱$ به ترتیب $x+۲$ و $۲x-۳$ باشد، باقیمانده تقسیم $f(x)+g(x)$ بر $x^{۲}+x-۱$ کدام است؟

۱) $۳x-۱$　۲) $-x+۵$　۳) $۲x^{۲}+x-۶$　۴) $x-۱$

۷. اگر باقیمانده تقسیم $f(x)$ و $g(x)$ بر $x^{۲}-x+۲$ به ترتیب $۲x+۱$ و $x-۳$ باشد، باقیمانده تقسیم $f(x)g(x)$ بر $x^{۲}-x+۲$ کدام است؟

۱) $۲x^{۲}-۵x+۳$　۲) $-۳x-۷$　۳) $-۳x+۲$　۴) $۲x-۳$

۸. اگر باقیمانده تقسیم $f(x)$ بر ۲ برابر ۳ باشد، باقیمانده تقسیم $f(۷-x)$ بر ۵ کدام است؟

۱) ۱　۲) ۲　۳) ۳　۴) ۴

۹. عبارت $x^{n}-a^{n}$ زمانی بر $x+a$ بخشپذیر باشد، که n ....

۱) زوج　۲) فرد　۳) همواره بخشپذیر است　۴) هیچ گاه بخشپذیر نیست.

۱۰. فرض کنید چند جمله ای $P(x)$ بر $x^{۲}-۱$ بخشپذیر باشد. اگر $Q(x)=p(x-۱)+p(۱-x)$، آنگاه حاصل باقیمانده تقسیم $Q(x)$ بر $x-۲$ کدام است؟ تجربی ۹۹

۱) -۱　　۲) صفر　　۳) ۱　　۴) ۲

۱۱. حاصل $\dfrac{x^{۹}+x^{۸}+x^{۷}+...+x+۱}{x+۱}$ به ازای $x=\sqrt{۳}$ کدام است؟

۱) ۲۴۲　　۲) ۱۲۱　　۳) ۲۴۴　　۴) ۱۲۲

۱۲. به ازای کدام مجموعه مقادیر x، بازه $(x+۱,۲x-۱)$ یک همسایگی عدد ۳ می باشد؟ ریاضی ۹۹

۱) ϕ　　۲) $\{۲\}$　　۳) $۲\prec x\prec ۲/۵$　　۴) $۱/۵\prec x\prec ۲$

۱۳. حاصل حد $\lim\limits_{x\to -۸}\dfrac{x^{۲}+۱۰x+۱۶}{۱۲+۶\sqrt[۳]{x}}$ کدام است؟ سراسری ۹۸

۱) -۲۴　　۲) -۱۸　　۳) -۱۲　　۴) -۶

۱۴. حاصل حد $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{x}{۱-\sqrt{۱-x}}$ کدام است؟

۱) -۲　　۲) ۲　　۳) ۴　　۴) $\dfrac{۱}{۲}$

۱۵. اگر $\dfrac{۱}{۲}=\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{x-\sqrt{۳x-۲}}{ax+b}$ باشد، آنگاه b کدام است؟ خارج ۹۵

۱) -۲　　۲) -۱　　۳) ۱　　۴) ۲

۱۶. اگر $\dfrac{۳}{۲}=\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{\sqrt{ax+b}-۲}{x^{۲}-۱}$ باشد، آنگاه b کدام است؟ خارج ۹۵

۱) -۸　　۲) -۶　　۳) ۴　　۴) ۵

۱۷. حاصل حد $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{۲x-۷\sqrt{x}+۵}{۲x-\sqrt{۳x+۱}}$ کدام است؟ ریاضی ۹۹

۱) $-۱/۵$　　۲) $-۱/۲$　　۳) $-۰/۸$　　۴) $-۰/۶$

۱۸. حاصل حد $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{2x+3}-\sqrt{3x+4}}{1+\sqrt[3]{x}}$ کدام است؟ ریاضی ۱۴۰۱

۱) ۳　　۲) $\dfrac{1}{2}$　　۳) -2　　۴) $-\dfrac{3}{2}$

۱۹. حاصل حد $\lim\limits_{x\to 0^+} \log x$ کدام است؟

۱)صفر　　۲) ۱　　۳) $+\infty$　　۴) $-\infty$

۲۰. اگر $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{1}{x^2+ax+b}=+\infty$ باشد، آنگاه $a+b$ کدام است؟

۱)۳　　۲) -3　　۳) ۶　　۴) -6

۲۱. حاصل حد $\lim\limits_{x\to -2^-} \dfrac{[x]+3}{x+2}$ کدام است؟ تجربی ۹۹

۱) $-\infty$　　۲) -1　　۳) صفر　　۴) ۱

۲۲. حاصل حد $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x^2-4}{x^3-[x^3]}$ کدام است؟ تجربی ۱۴۰۱

۱) صفر　　۲) $\dfrac{1}{2}$　　۳) ۱　　۴) $+\infty$

۲۳. حاصل $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{[x]-2}{x^2+x-6}$ کدام است؟

۱) صفر　　۲) ۱　　۳) $-\infty$　　۴) $+\infty$

۲۴. حاصل حد $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x(x-2)(x+3)}{2x^3+x-1}$ کدام است؟

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) $\dfrac{1}{2}$

۲۵. حاصل حد $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{(x+1)(3x+1)(x+2)}{3x^3-1}$ کدام است؟

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) $\dfrac{1}{3}$

۲۶. حاصل حد $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{(2x+1)(1-x)(x+3)}{x^3-x}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -2 ۳) ۲ ۴) -1

۲۷. اگر حد کسر $\dfrac{x^{m+3}+nx+m}{mx^{n-2}-mx+n-1}$ با شرط $n \succ 3$ وقتی $x\to\infty$ برابر ۲- باشد، $m+n$ کدام است؟

۱) ۳/۵ ۲) ۴ ۳) ۴/۵ ۴) ۵

۲۸. حاصل حد $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{4x^2+3x+1}-2x$ کدام است؟

۱) $+\infty$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) صفر ۴) $\frac{3}{4}$

۲۹. حاصل حد $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sqrt{\dfrac{x+5}{x-1}}-x$ کدام است؟

۱) $+\infty$ ۲) ۲ ۳) صفر ۴) ۳

۳۰. حاصل حد $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2\sqrt{x+3}+\sqrt{9x+1}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{4x-1}}$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۵ ۴) -5

۳۱. حاصل حد $\lim\limits_{x\to 0} |x|\left[\dfrac{1}{x}\right]$ کدام است؟

۱) -1 ۲) ۱ ۳) صفر ۴) حد ندارد.

۳۲. اگر $\lim\limits_{x\to+\infty} (ax+2-\sqrt{x^2+bx+5})$ برابر ۳ باشد، آنگاه ab کدام است؟

۱) ۲ ۲) -2 ۳) ۴ ۴) -4

۳۳. حاصل $\lim\limits_{x\to+\infty} x-[x]$ کدام است؟

۱) -1 ۲) ۱ ۳) صفر ۴) حد ندارد.

۳۴. حاصل $\lim\limits_{x\to+\infty} \tan x$ کدام است؟

۱) $+\infty$ ۲) $-\infty$ ۳) صفر ۴) حد ندارد.

۳۵. حاصل $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\left(1-x\left[\frac{1}{x}\right]\right)$ کدام است؟

۱) $+\infty$　　۲) ۱　　۳) صفر　　۴) حد ندارد.

۳۶. حاصل حد $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x+\sqrt[3]{x+1}}{2x+\sqrt{x^2+3}}$ کدام است؟

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) $\frac{1}{2}$

۳۷. حاصل $\lim\limits_{x\to -\infty} \left[\frac{2x^2-x}{x^2+1}\right]$ کدام است؟

۱) ۳　　۲) ۱　　۳) صفر　　۴) ۲

۳۸. نمودار تابع $f(x)=\frac{ax+1+\sqrt{4x^2+9}}{3x-2}$ از نقطه $(2,1)$ می گذرد، $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{3}$　　۲) $\frac{1}{3}$　　۳) $\frac{2}{3}$　　۴) ۱

۳۹. در تابع $f(x)=\frac{2x+\sqrt{x^2-3x}}{ax^n-6}$ اگر $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=-\frac{1}{2}$ ، آنگاه $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{6}$　　۲) $-\frac{1}{8}$　　۳) $\frac{1}{4}$　　۴) $\frac{1}{3}$

۴۰. فرض کنید $n\in\mathbb{N}$ حاصل $\lim\limits_{n\to +\infty} \frac{2^{2n+1}-2^{1-2n}}{2^{2n+1}+3\times 2^{1-2n}}$ کدام است؟ ریاضی ۹۹

۱) ۱　　۲) $\frac{1}{3}$　　۳) $-\frac{1}{3}$　　۴) -1

۴۱. حاصل $\lim\limits_{x\to +\infty} \left[\frac{x}{[x]}\right]$ کدام است؟

۱) ۱　　۲) صفر　　۳) -1　　۴) حد وجود ندارد.

۴۲. حاصل $\lim\limits_{x\to -\infty}\left[\dfrac{x}{[x]}\right]$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) صفر ۳) -۱ ۴) حد وجود ندارد.

۴۳. اگر حاصل $\lim\limits_{x\to +\infty} x\sqrt{\dfrac{ax+b}{x-۱}}-۳x$ برابر ۵ باشد، حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) ۲۷ ۲) ۳۰ ۳) ۳۱ ۴) ۳۳

۴۴. اگر $g(x)=\dfrac{\sqrt{ax^۲+bx+c}}{|x-۱|}$ و $\lim\limits_{x\to ۱^+}(۴-[x])g(x)=۶$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$ کدام است؟ تجربی ۱۴۰۱

۱) -۱ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) -۲

۴۵. حاصل $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۶}^-}[۲\sin x-۱]$ کدام است؟ تجربی ۱۴۰۰

۱) -۱ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) وجود ندارد.

۴۶. جواب نامعادله $x^۲ \prec ۲x+۳$، همسایگی کدام عدد نیست؟

۱) ۲ ۲) $-\dfrac{۱}{۲}$ ۳) $-۲/۳$ ۴) $۱/۳$

۴۷. حاصل $\lim\limits_{x\to -\frac{۱}{۲}^-}\dfrac{۱۰x-۵+\left[\dfrac{۳}{x^۲}\right]}{۱۶x-\left[\dfrac{-۲}{x^۲}\right]}$ کدام است؟ ریاضی ۱۴۰۱

۱) $-\infty$ ۲) صفر ۳) $\dfrac{۵}{۸}$ ۴) $-\infty$

۴۸. اگر $f(x)=x(\sqrt{\dfrac{۲x+۱}{۵x+۹}})^۲$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{f(x)}{x}$ کدام است؟ تجربی ۱۴۰۱

۱) $\dfrac{۱}{۲۷}$ ۲) $\dfrac{۱}{۹}$ ۳) $\dfrac{۲}{۷}$ ۴) $\dfrac{۳}{۱۴}$

۴۹. حاصل $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{(۱+x)^{۳}-(x+۱)^{۲}}{\sqrt[۳]{۱+x}-۱}$ کدام است؟

۱) ۱　　۲) صفر　　۳) $\dfrac{۱}{۳}$　　۴) ۳

۵۰. حاصل $\lim\limits_{x\to ۴}\dfrac{۳x^{۲}-۱۰x-۸}{\sqrt{۳-\sqrt{x}}-۱}$ کدام است؟ تجربی ۹۷

۱) -۱۱۲　　۲) -۹۶　　۳) -۸۴　　۴) -۷۲

۵۱. حاصل حد تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{۱}{x} & x\succ ۰\\ \dfrac{۵x^{۲}-۳x}{-x^{۲}+۱} & x\leq ۰\end{cases}$، وقتی $x\to -\infty$ کدام است؟

۱) ۵　　۲) صفر　　۳) ۳　　۴) -۵

۵۲. مقدار غیرصفر حد $\lim\limits_{x\to ۸}\dfrac{b\sqrt{۲+\sqrt[۳]{x}}-۲b}{ax-b}$ کدام است؟ تجربی۱۴۰۲

۱) $\dfrac{۱}{۱۲}$　　۲) $\dfrac{۱}{۶}$　　۳) $\dfrac{۱}{۴۸}$　　۴) $\dfrac{۱}{۲۴}$

فصل چهارم:

مشتق

۱. اگر $\lim\limits_{x\to -۱}\dfrac{f(x)-f(-۱)}{x+۱}=۳$، آنگاه $f'(-۱)$ کدام است؟

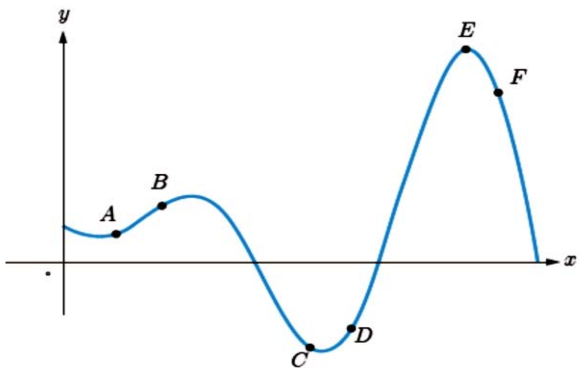
۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳-   ۴) ۲-

۲. اگر $\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{f(x)-f(۲)}{x^{۲}-۴}=\dfrac{۱}{۶}$، آنگاه $f'(۲)$ کدام است؟

۱) $\dfrac{۱}{۲}$ ۲) $\dfrac{۲}{۳}$ ۳) $\dfrac{۳}{۲}$ ۴) $\dfrac{۱}{۲۴}$

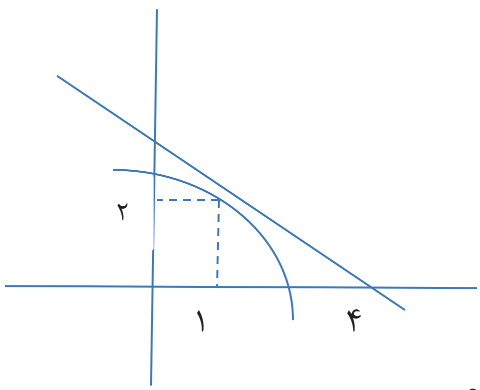
۳. با توجه به شکل زیر، شیب در کدام نقطه منفی است؟

۱) A   ۲) B   ۳) C   ۴) D



۴. در شکل مقابل، خط مماس بر منحنی f در $x=۱$ رسم شده است. حاصل $\lim\limits_{h\to ۰}\dfrac{f(۱+h)-f(۱)}{h}$ کدام است؟

۱) $\dfrac{۲}{۳}$ ۲) $-\dfrac{۲}{۳}$ ۳) $\dfrac{۳}{۲}$ ۴) $-\dfrac{۳}{۲}$



۵. اگر $f(x)=x^{۳}+۲x+۱$، آنگاه حاصل $\lim\limits_{h\to ۰}\dfrac{f(۱+h)-f(۱)}{h}$ کدام است؟

۱) ۱   ۲) ۵   ۳) ۳   ۴) ۲

۶. اگر $f'(۲)=۳$، آنگاه حاصل $\lim\limits_{h\to ۰}\dfrac{f(۲)-f(۲+h)}{۲h}$ کدام است؟

۱) ۳   ۲) ۳-   ۳) $۱/۵$ ۴) $-۱/۵$

۷. اگر $f'(2)=3$ و $f(2)=3$، آنگاه حاصل $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f^2(x)-9}{x^2-x-2}$ کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۹ ۳) ۸ ۴) ۶

۸. اگر $f(x)=x^2+1$، آنگاه حاصل $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+2h)-f(x-3h)}{h}$ کدام است؟

۱) $6x$ ۲) $4x$ ۳) $10x$ ۴) $15x$

۹. معادله خط مماس بر منحنی $f(x)=3x^2-2x+1$ در نقطه $x=2$، محور xها را در چه نقطه ای قطع می کند؟

۱) ۰/۹ ۲) ۱/۱ ۳) ۱/۹ ۴) ۲/۱

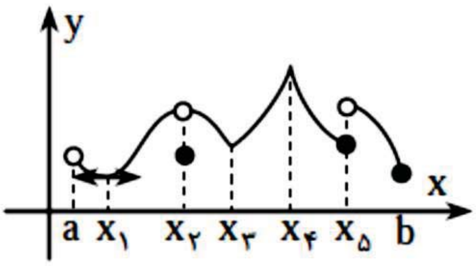
۱۰. کدام گزینه برابر $f'(x)$ است؟

۱) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+2h)-f(1+3h)}{h}$ ۲) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+3h)-f(1-2h)}{5h}$

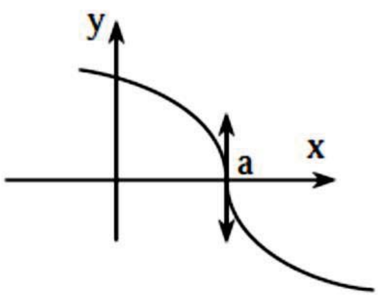
۳) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-2h)-f(1-3h)}{5h}$ ۴) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+2h)-f(1-h)}{h}$

۱۱. نمودار تابع مقابل در بازه (a,b) در چند نقطه از نقاط x_i مشتق ناپذیر است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵



۱۲. با توجه به نمودار مقابل کدام درست است؟



۱) $\begin{cases} f'_+(a)=+\infty \\ f'_-(a)=+\infty \end{cases}$ ۲) $\begin{cases} f'_+(a)=-\infty \\ f'_-(a)=-\infty \end{cases}$

۳) $\begin{cases} f'_+(a)=+\infty \\ f'_-(a)=-\infty \end{cases}$ ۴) $\begin{cases} f'_+(a)=-\infty \\ f'_-(a)=+\infty \end{cases}$

۱۳. تابع $f(x)=\begin{cases} ax+b & x\succ 1 \\ x^3-2x & x\le 1\end{cases}$، در $x=1$ مشتق پذیر است. $a-b$ کدام است؟

۱) ۱　۲) ۲　۳) ۳　۴) ۴

۱۴. اگر تابع $f(x)=\begin{cases} ax^2 & x\prec 1 \\ bx^3+2x & x\ge 1\end{cases}$، در $x=1$ مشتق پذیر باشد، مقدار $a-b$ کدام است؟

۱) ۶−　۲) ۴−　۳) ۶　۴) ۴

۱۵. تابع $f(x)=\begin{cases} \sqrt{5-2x} & x\le -2 \\ -\frac{1}{2}x^2+bx+c & x\succ -2\end{cases}$، در $x=-2$ مشتق پذیر است. مقدار c کدام است؟ تجربی ۹۹

۱) $-\frac{2}{3}$　۲) $-\frac{1}{3}$　۳) $\frac{1}{3}$　۴) $\frac{2}{3}$

۱۶. اگر $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & x\prec 1 \\ 3x-1 & x\ge 1\end{cases}$، حاصل $\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{f(1-h)-f(1)}{h}$ کدام است؟

۱) ۶−　۲) ۴−　۳) ۶　۴) ۴

۱۷. اگر $f(x)=\begin{cases} x^4+1 & x\ge 1 \\ x^2-1 & x\prec 1\end{cases}$، حاصل $\lim\limits_{h\to 0^-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ کدام است؟

۱) ۲　۲) ۴　۳) ۱　۴) وجود ندارد.

۱۸. اگر تابع $f(x)=\begin{cases} ax^2-x+b & |x|\le 2 \\ |x-2| & |x|\succ 2\end{cases}$، در $x=1$ مشتق پذیر باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$　۲) $-\frac{1}{4}$　۳) $\frac{1}{2}$　۴) صفر

۱۹. اگر تابع $f(x)=\begin{cases} ax^3+bx & x\prec 1 \\ 2\sqrt{4x-3} & x\ge 1\end{cases}$، روی مجموعه اعداد حقیقی مشتق پذیر باشد، مقدار b کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$　۲) ۱　۳) $\frac{3}{2}$　۴) ۲

۲۰. تابع $f(x)=|x^۲-۲x|$ در چند نقطه مشتق ناپذیر است؟

۱) هیچ نقطه　　۲) ۱　　۳) ۲　　۴) ۳

۲۱. تابع $f(x)=(x^۲-۱)|x^۲-۳x+۲|$ در چند نقطه مشتق ناپذیر است؟

۱) هیچ نقطه　　۲) ۱　　۳) ۲　　۴) ۳

۲۲. تابع $f(x)=\frac{۱}{|x|-۱}$ در چند نقطه مشتق ناپذیر است؟

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) ۴

۲۳. تابع $f(x)=\sqrt[۳]{x^۳+x^۲}$ در چند نقطه مشتق ناپذیر است؟

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) هیچ نقطه

۲۴. تعداد نقاط مشتق ناپذیری تابع $f(x)=\big||x|-۱\big|$ بر روی $\mathbb{R}$ کدام است؟

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) صفر

۲۵. تابع $f(x)=\begin{cases}\sqrt[۳]{(x-۱)(x+۱)^۳} & x\geq ۰\\ |(x+۱)(x+۲)^۲| & x\prec ۰\end{cases}$ در چند نقطه مشتق ناپذیر است؟

۱) ۲　　۲) ۳　　۳) ۴　　۴) ۵

۲۶. اگر $f(x)=(x-۲)[۳x-۲]$، حاصل $f'_-(۲)-f'_+(۲)$ کدام است؟

۱) صفر　　۲) ۲　　۳) ۱　　۴) -۱

۲۷. اگر $f(x)=(x^۲-\sqrt{x})([x]+[-x])$، حاصل $f'(۱)$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$　　۲) $-\frac{۳}{۲}$　　۳) صفر　　۴) مشتق وجود ندارد.

۲۸. اگر $f(x)=\sqrt{x^۲-[x]+|x|}$، حاصل $\lim\limits_{h\to ۰^+}\frac{f(۱+h)-f(۱)}{h}$ کدام است؟ ریاضی ۹۷

۱) $\frac{۱}{۲}$　　۲) $\frac{۵}{۴}$　　۳) $\frac{۳}{۲}$　　۴) $\frac{۵}{۲}$

۲۹. مقدارمشتق تابع $f(x)=(\frac{۳}{x}-x^{۲})^{۳}$ در نقطه $x=۱$ کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۲− ۳) ۶۰ ۴) ۶۰−

۳۰. مقدارمشتق تابع $f(x)=\sqrt{۱+\sqrt{x}}$ در نقطه $x=\frac{۱}{۴}$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۶}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۶}$ ۳) $\frac{\sqrt{۶}}{۶}$ ۴) $\frac{\sqrt{۶}}{۱۲}$

۳۱. اگر f در $x=I$ مشتق پذیر و $\lim\limits_{x\to ۴}\frac{f(x)+۷}{x-۴}=-\frac{۳}{۲}$ باشد، آن گاه مشتق $\frac{f(۲x)}{x}$ در $x=۲$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۴}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۳۲. اگر $f(x)=(\sqrt{۱+x^{۲}}-x)^{۵}$ و $g(x)=\frac{۱}{(\sqrt{۱+x^{۲}}+x)^{۵}}$، آن گاه مقدار $\frac{f'g-gf'}{g^{۲}}$ کدام است؟

۱) ۱− ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

۳۳. اگر $f(x)=|x^{۲}-۴|$، آن گاه مقدار $\lim\limits_{h\to ۰^-}\frac{f(۲+h)-f(h-۲)}{h}$ کدام است؟

۱) ۴− ۲) صفر ۳) ۸− ۴) ۴

۳۴. اگر $f(x)=\frac{۴}{۵}x-\frac{۱}{۵}|x|$ و $g(x)=۴x+|x|$، مشتق تابع fog کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) تعریف نشده

۳۵. خط گذرنده بر دو نقطه $(۱,۲)$ و $(-۱,۳)$ بر منحنی پیوسته $y=f(x)$ در نقطه $x=۳$ مماس است. حد عبارت $\frac{f^{۲}(x)+۴f(x)-۵}{۳-x}$ وقتی $x\to ۳$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۳۶. اگر $f(x)=\frac{۱}{\sqrt{x}}$، حاصل $f'(۴)$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۱۶}$ ۲) $-\frac{۱}{۴}$ ۳) $-\frac{۱}{۸}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

۳۷. در تابع $f(x)=\sqrt{\frac{۴x+۵}{x+۳}}$، حاصل $f'(۱)$ کدام است؟

۱) $\frac{۷}{۴۸}$ ۲) $\frac{۵}{۲۴}$ ۳) $\frac{۷}{۲۴}$ ۴) $\frac{۷}{۱۶}$

۳۸. معادله خط مماس بر نمودار $y=\frac{x^۲+mx+۱}{x+۳}$ در نقطه ای به طول واحد بر روی نمودار، به صورت $۴y-۳x=n$ است. مقدار $m+n$ چقدر است؟ تجربی ۱۴۰۱

۱) -۳ ۲) -۲ ۳) ۲ ۴) ۳

۳۹. مشتق تابع با ضابطه $f(x)=\left(\frac{\sqrt[۳]{x^۲+۲x}}{x^۲-x}\right)^۳$ در نقطه $x=۲$ کدام است؟ تجربی ۹۹

۱) $\frac{-۳}{۴}$ ۲) $-\frac{۵}{۴}$ ۳) $-\frac{۵}{۲}$ ۴) $-\frac{۱۵}{۴}$

۴۰. تابع f مشتق پذیر و با دوره تناوب ۵ است. اگر $f'(-۱)=\frac{۳}{۲}$ و $g(x)=f(x+۱)+f(۳x+۱۰)$ باشد، حاصل $g'(-۲)$ کدام است؟ ریاضی ۱۴۰۱

۱) ۳ ۲) $\frac{۷}{۲}$ ۳) ۶ ۴) $\frac{۱۳}{۲}$

۴۱. اگر $f(x)=(x-۴)\sqrt[۳]{x+۳}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f^۲(۵-h)-۳f(۵-h)+۲}{h(۵-h)}$ کدام است؟ ریاضی ۱۴۰۱

۱) $\frac{۱۳}{۳۰}$ ۲) $-\frac{۵}{۱۲}$ ۳) $\frac{۵}{۶}$ ۴) $-\frac{۱۳}{۱۵}$

۴۲. تابع $f(x)=(x^۳+ax^۲-۳x+b)[x]$ در نقطه $x=۱$ مشتق پذیر است، $a-b$ کدام است؟

۱) $\frac{-۳}{۴}$ ۲) -۲ ۳) ۲ ۴) $\frac{۳}{۴}$

۴۳. تابع $f(x)=(x-۳)\left[\frac{x}{۳}+۱\right]$ در بازه $(۰,۹)$ در چند نقطه مشتق ناپذیر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۴۴. تابع مقابل در چند نقطه نا پیوسته و در چند نقطه مشتق ناپذیر است؟

$$f(x)=\begin{cases}1 & x<0\\ x+1 & 0\le x<1\\ 2x+2 & 1\le x\le 2\\ x^2+2 & x\ge 2\end{cases}$$

۱) دریک نقطه ناپیوسته- در دو نقطه مشتق ناپذیر
۲) دریک نقطه ناپیوسته- درسه نقطه مشتق ناپذیر
۳) دردو نقطه ناپیوسته- در سه نقطه مشتق ناپذیر
۴) درسه نقطه ناپیوسته- در سه نقطه مشتق ناپذیر

۴۵. تابع $f(x)=[x^2]$ در بازه $(-2,2)$ در چند نقطه مشتق ناپذیر است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۴۶. اگر $f(x)=\sqrt[3]{x}$ حاصل $\frac{y''}{y'}$ در نقطه $x=4$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{9}$ ۲) $-\frac{1}{9}$ ۳) $\frac{1}{6}$ ۴) $-\frac{1}{6}$

۴۷. اگر $f(x)=\sin x$ آهنگ متوسط تابع در بازه $\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{\pi}$ ۲) $-\frac{3}{\pi}$ ۳) $\frac{3}{2\pi}$ ۴) $-\frac{3}{2\pi}$

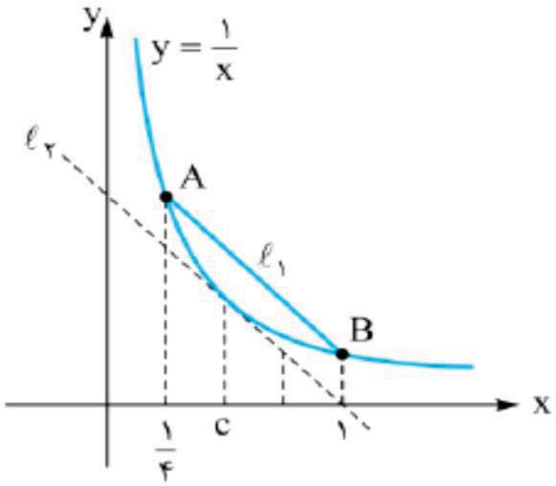
۴۸. در تابع با ضابطه $f(t)=\frac{240}{t}$ آهنگ آنی تغییر f در لحظه $t=4$، چقدر از آهنگ متوسط تغییر f از لحظه $t=3$ تا $t=5$ بیشتر است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{3}{2}$

۴۹. در تابع با ضابطه $f(x)=\sqrt{x}$ آهنگ متوسط تغییر تابع وقتی از عدد ۴ به ۲۵ تغییر کند برابر آهنگ لحظه ای در نقطه $x=a$ است. مقدار a کدام است؟

۱) ۱۱/۷۵ ۲) ۱۲/۲۵ ۳) ۱۲/۵ ۴) ۱۳/۵

۵۰. در شکل مقابل اگر دو خط $\ell_۱$, $\ell_۲$ موازی باشند، c کدام است؟



۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۵}{۸}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۵۱. در تابع با ضابطه $f(x)=x+\frac{۱}{x}$ آهنگ متوسط تغییر تابع وقتی از عدد ۲ به $۲+h$ تغییر کند برابر $\frac{۸}{۹}$ است، h کدام است؟

۱) صفر ۲) $\frac{۱}{۱۸}$ ۳) $\frac{۱}{۱۲}$ ۴) $\frac{۱}{۹}$

۵۲. اگر آهنگ لحظه ای تغییر f در نقطه $x=۲$ برابر $-۱/۵$ باشد، آن گاه $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(۲)-f(۲+h)}{h}$ کدام است؟

۱) -۳ ۲) $-۱/۵$ ۳) $۱/۵$ ۴) ۳

۵۳. آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x)=\sqrt{۲۱-x^۲+۴x}$ در بازه $[۵,۶]$ برابر آهنگ تغییر لحظه ای این تابع با کدام مقدار x است؟ ریاضی ۹۹

۱) $۴+\sqrt{۲}$ ۲) $۳+۲\sqrt{۲}$ ۳) $۲+\frac{۲}{۳}\sqrt{۲}$ ۴) $۲+\frac{۵}{۲}\sqrt{۲}$

۵۴. اگر $f(x)=\frac{۱}{\sqrt[۳]{x-|x|}}$ و $g(x)=\frac{۱}{x^۳-|x^۳|}$ باشد، مقدار $g'(-\sqrt[۳]{۲})f'(g(-\sqrt[۳]{۲}))$ کدام است؟ تجربی ۱۴۰۲

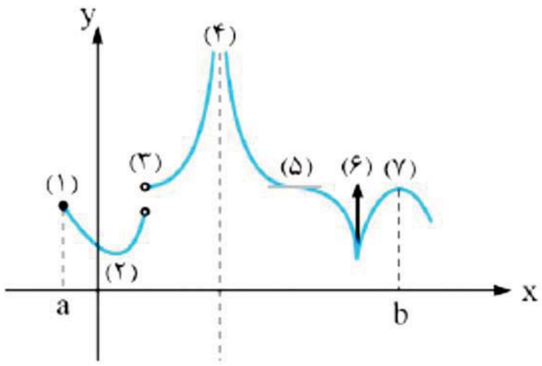
۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۱ ۴) -۱

فصل پنجم:

کاربرد مشتق

۱. با توجه به نمودار مقابل، تابع در $[a,b]$ چند نقطه بحرانی دارد؟

۱) ۷　　۲) ۶　　۳) ۵　　۴) ۳



۲. تابع $f(x)=۳$ در $[-۱,۵]$ چند نقطه بحرانی دارد؟

۲) بیشمار　　۲) ۶　　۳) ۷　　۴) ۳

۳. نقاط بحرانی تابع $f(x)=x^۲(x-۲)^۲$ سه راس یک مثلث اند. نوع مثلث کدام است؟

۱) متساوی الاضلاع　　۲) متساوی الساقین　　۳) قائم الزاویه　　۴) قائم الزاویه متساوی الساقین

۴. تابع $f(x)=x|x^۲-۳|$ چند نقطه بحرانی دارد؟

۱) ۲　　۲) ۳　　۳) ۴　　۴) ۵

۵. مینیمم مطلق تابع $f(x)=\frac{x^۴}{۴}+\frac{x^۳}{۳}-x^۲$ بر روی $[-۱,۳]$ کدام است؟

۱) $\frac{-۱۱}{۳}$　　۲) $\frac{-۱۰}{۳}$　　۳) $\frac{-۸}{۳}$　　۴) $\frac{-۷}{۳}$

۶. ماکزیمم مطلق تابع $f(x)=\frac{۱}{x^۴-۴x^۳+۴x^۲+۵}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۶}$　　۲) $\frac{۱}{۵}$　　۳) $\frac{۱}{۳}$　　۴) $\frac{۱}{۲}$

۷. اگر x و y دو عدد مثبت و $۳x+۲y=۲$ باشد، ماکزیمم xy را کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$　　۲) $\frac{۱}{۶}$　　۳) $\frac{۱}{۲}$　　۴) $\frac{۱}{۴}$

۸. از میان مثلث هایی که مجموع طول قاعده و ارتفاع وارد بر آن ۱۶ سانتی متر است. مثلثی را اختیار کرده ایم که مساحت آن ماکزیمم است. مساحت این مثلث چند سانتی متر مربع است؟

۱) ۳۰　　۲) ۳۲　　۳) ۳۴　　۴) ۳۶

۹. اگر $x+y=۴$ باشد، ماکزیمم $x^۳y$ کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) ۲۷ ۳) ۳۲ ۴) ۳۶

۱۰. کم ترین فاصله نقطه $A(۶,۰)$ از نقاط منحنی به معادله $y=\sqrt{۴x-۱}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۱۸}$ ۲) $\sqrt{۱۹}$ ۳) $\sqrt{۲۰}$ ۴) $\sqrt{۲۱}$

۱۱. تابع $f(x)=\frac{x}{۱-x^۲}$ درکدام بازه صعودی است؟

۱) $(-۲,۰)$ ۲) $(-\infty,-۲)$ ۳) $(۰,۲)$ ۴) $(-۲,۲)$

۱۲. عدد a را در کدام فاصله در نظر بگیریم که تابع $x\succ ۱$; $f(x)=\frac{ax-۲}{x+a-۳}$، اکیدا صعودی باشد؟

۱) $(-\infty,۱]$ ۲) $(-\infty,۰]$ ۳) $[۲,+\infty)$ ۴) $(۲,+\infty)$

۱۳. تابع f با ضابطه $f(x)=x^۳+ax^۲+x$ همواره صعودی است. حدود تغییرات a کدام است؟

۱) $۰\le a\le ۲$ ۲) $-\sqrt{۳}\le a\le ۲$ ۳) $|a|\le\sqrt{۳}$ ۴) $|a|\le ۲$

۱۴. اگر تابع $f(x)=\begin{cases}x^۴+ax & x\le ۱\\ ۳-x & x\succ ۱\end{cases}$ نزولی اکید باشد، حدود a کدام است؟

۱) $[۱,+\infty)$ ۲) $(-\infty,-۴]$ ۳) $\mathbb{R}$ ۴) ϕ

۱۵. تابع $f(x)=-\frac{۱}{x}$ درکدام بازه صعودی است؟

۱) $(-۱,۱)$ ۲) $(-۲,۰)$ ۳) $[۰,۴)$ ۴) همه موارد

۱۶. در نمودار $f(x)=x^۳-۱۲x+۴$، عرض نقطه ماکزیمم نسبی کدام است؟

۱) ۱۴ ۲) ۱۶ ۳) ۲۰ ۴) ۲۲

۱۷. فرض کنید A و B نقاط اکسترمم تابع $f(x)=۲x^۳-۳x^۲-۱۲x+۱$ باشند. چند نقطه روی منحنی f وجود دارد که خطوط مماس بر آن ها، موازی پاره خط AB است؟ ریاضی ۱۴۰۰

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۸. نقطه $(-۱,۱)$ اکسترمم نسبی تابع $y=x^{۲}|x|+۳ax^{۲}+b$ است، مقدار $\frac{b}{a}$ کدام است؟ ریاضی ۱۴۰۱

۱) -۳ ۲) $-\frac{۱}{۳}$ ۳) ۳ ۴) $\frac{۱}{۳}$

۱۹. اگر نقطه $(۲,۵)$ نقطه اکسترمم نسبی تابع $f(x)=\frac{x^{۲}+ax+b}{x-۱}$ باشد، حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) صفر ۴) -۱

۲۰. طول نقطه ماکزیمم نسبی تابع با ضابطه $f(x)=(x-۱)^{۲}\sqrt[۳]{x^{۲}}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۲۱. تابع $f(x)=۳x^{۲}-x^{۳}$ درکدام بازه اکیدا صعودی است؟

۱) $(۳,+\infty)$ ۲) $(۰,۲)$ ۳) $(۲,۳)$ ۴) $(-\infty,۰)$

۲۲. نقطه $(۲,۳)$ مینیمم نسبی تابع $y=x^{۳}+ax+b$ است، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۶ ۳) ۴ ۴) ۵

۲۳. بیشترین مقدار تابع $y=x+\frac{۹}{x}$ به ازای مقادیر منفی x کدام است؟

۱) -۲ ۲) -۶ ۳) -۴ ۴) -۸

۲۴. مینیمم مطلق تابع $y=x^{۲}|x|$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) صفر ۴) -۱

۲۵. مینیمم مطلق تابع $y=x-\sqrt[۳]{x^{۳}-۳x^{۲}}$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) ۳ ۳) صفر ۴) $\frac{۱}{۳}$

فصل ششم:

هندسه

۱. مستطیلی به ابعاد ۲ و ۵ واحد را حول خطی که وسط های عرض های مستطیل را به هم وصل می کند، دوران می دهیم. مساحت شکل حاصل کدام است؟

۱) ۲۰π ۲) ۲۰π ۳) ۱۲π ۴) ۱۶π

۲. اگر صفحه P بر محور سطح مخروطی عمود باشد و از راس آن عبور نکند، شکل حاصل به **کدام** صورت است؟

۱) دایره ۲) سهمی ۳) بیضی ۴) هذلولی

۳. اگر صفحه P بر محور سطح مخروطی عمود نباشد ودر هیچ حالتی با مولد سطح مخروطی موازی نشود و از راس آن عبور نکند، شکل حاصل به **کدام** صورت است؟

۱) دایره ۲) سهمی ۳) بیضی ۴) هذلولی

۴. اگر صفحه P در یکی از موقعیت ها با مولد سطح مخروطی موازی باشد و از راس آن عبور نکند، شکل حاصل به **کدام** صورت است؟

۱) دایره ۲) سهمی ۳) بیضی ۴) هذلولی

۵. اگر صفحه P سطح مخروطی را ، هم در قسمت بالایی و هم پایینی قطع کند و از راس آن عبور نکند، شکل حاصل به **کدام** صورت است؟

۱) دایره ۲) سهمی ۳) بیضی ۴) هذلولی

۶. کانون های یک بیضی در $F(۶,-۳)$ و $F'(-۲,-۳)$ هستند و $N(۲,-۶)$ نقطه ای از این بیضی است. کدام نقطه به طول ۷ روی بیضی قرار دارد؟

۱) $(۷,-۱)$ ۲) $(۷,-۲)$ ۳) $(۷,-۳)$ ۴) $(۷,-۴)$

۷. $F(۳,۱)$ و $F'(-۳,۱)$ کانون های یک بیضی هستند و $P(-۵,۱)$ نقطه ای از این بیضی است. طول قطر بزرگ بیضی کدام است؟

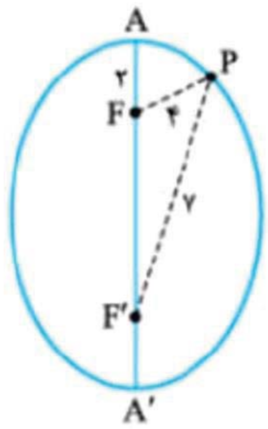
۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۰

۸. قطر بزرگ بیضی دو برابر قطر کوچک آن می باشد، خروج از مرکز آن کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۹. F و F' کانون های بیضی مقابل هستند و $P(-۵,۱)$ نقطه ای از آن است. فاصله کانونی بیضی کدام است؟

۱) ۱　　۲) ۷　　۳) ۲　　۴) $\frac{۵}{۲}$



۱۰. نقطه $(-۱۲,۰)$ یکی از کانون های یک بیضی است که طول قطر کوچک آن برابر ۱۸ است. اگر مبدا مختصات مرکز بیضی باشد، خروج از مرکز بیضی، چقدر است؟ تجربی- ۱۴۰۱

۱) $۰/۶$　　۲) $۰/۸$　　۳) $۱/۴$　　۴) $۱/۸$

۱۱. نقطه $A(۳,۶)$ روی دایره ای است که بر هر دو محور مختصات مماس است. شعاع دایره کدام است؟

۱) ۲,۱۲　　۲) ۲,۱۵　　۳) ۳,۹　　۴) ۳,۱۵

۱۲. به ازای کدام مجموعه مقادیر a، منحنی به معادله $۲x^۲+(a^۲-۷)y^۲+۴y+a=۰$ یک دایره است؟

۱) $\{-۳\}$　　۲) $\{۳\}$　　۳) $\{-۳,۳\}$　　۴) ϕ

۱۳. دایره های $x^۲+y^۲+۲y=۳$ و $x^۲+y^۲+۲x=۳$ متقاطع اند. معادله وتر مشترک این دو دایره، کدام است؟

۱) $x=y$　　۲) $x=۱+y$　　۳) $x=-y$　　۴) $x=۱-y$

۱۴. شعاع دایره ای که از سه نقطه $C(۸,-۲),B(۷,۱),A(۶,۲)$ می گذرد. کدام است؟

۱) ۳　　۲) ۴　　۳) ۵　　۴) ۶

۱۵. دو دایره به معادلات $(x-۲)^۲+(y-۱)^۲=۹$ و $x^۲+y^۲+۲x+۶y+۶=۰$ نسبت به هم چه وضعی دارند؟

۱) متخارج　　۲) مماس درون　　۳) مماس برون　　۴) متقاطع

۱۶. طول کوتاه ترین وتری که از $(-۱,۲/۵)$ در دایره $۲x^۲+۲y^۲-۶x-۱۰y+۱=۰$ رسم می شود، کدام است؟
تجربی۱۴۰۲

۱) $\sqrt{۵}$　　۲) $\sqrt{۷}$　　۳) $\frac{\sqrt{۵}}{۲}$　　۴) $\frac{\sqrt{۷}}{۲}$

فصل هفتم:

احتمال

۱. دریک شهر صنعتی ۶۰ درصد جمعیت را مردان و ۴۰ درصد بقیه را زنان تشکیل می دهند. اگر ۱۲ درصد زنان و ۱۸ درصد مردان تحصیلات دانشگاهی داشته باشند، چند درصد جمعیت این کشور تحصیلات دانشگاهی دارند؟

۱) ۱۵/۲　۲) ۱۵/۶　۳) ۱۵/۸　۴) ۱۶/۲

۲. ظرف A دارای ۴ مهره سفید و ۵ مهره سیاه است و هر یک از دو ظرف یکسان B و C دارای ۶ مهره سفید و ۳ مهره سیاه است. به تصادف یکی از سه ظرف را انتخاب کرده و ۴ مهره از آن خارج می کنیم. با کدام احتمال دو مهره از مهره های خارج شده سفید است؟

۱) $\frac{۲۵}{۶۳}$　۲) $\frac{۲۶}{۶۳}$　۳) $\frac{۱۰}{۲۱}$　۴) $\frac{۱۱}{۲۱}$

۳. در یک بازی اگر تاس مضرب ۳ بیاید، ۷۰ درصد شانس برد داریم و در غیر این صورت، شانس پیروزی برابر ۳۴ درصد است. با کدام احتمال برنده می شویم؟

۱) ۴۳%　۲) ۴۶%　۳) ۴۸%　۴) ۴۴%

۴. دو ظرف داریم. ظرف اول شامل ۶ مهره سبز و ۴ مهره آبی و ظرف دوم شامل ۵ مهره سبز و ۷ مهره آبی است. از ظرف اول به تصادف یک مهره انتخاب کرده و در ظرف دوم قرار می دهیم، سپس یک مهره از ظرف دوم انتخاب می کنیم. با چه احتمالی این مهره سبز است؟

۱) $\frac{۳۱}{۶۵}$　۲) $\frac{۳۳}{۶۵}$　۳) $\frac{۲۸}{۶۵}$　۴) $\frac{۳۸}{۶۵}$

۵. یک سکه را پرتاب می کنیم و اگر پشت بیاید ۳ سکه دیگر را با هم پرتاب می کنیم. در این آزمایش احتمال این که دقیقا یک سکه رو ظاهر شود چقدر است؟

۱) $\frac{۱۱}{۱۶}$　۲) $\frac{۹}{۱۶}$　۳) $\frac{۱}{۸}$　۴) $\frac{۱}{۴}$

۶. اگر احتمال به دنیا آمدن یک نوزاد پسر مبتلا به نوعی بیماری خاص ۰/۰۸ و همین احتمال برای یک نوزاد دختر ۰/۰۴ باشد و خانواده ای که قصد بچه دار شدن داشته باشد، با چه احتمالی نوزاد آن ها به بیماری مذکور مبتلا خواهد بود؟

۱) ۰/۰۵　۲) ۰/۰۶　۳) ۰/۰۷　۴) ۰/۰۸