



سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

...

(@riazisara)

ریاضی سرا در تلگرام:



<https://t.me/riazisara>

(@riazisara.ir) ریاضی سرا در اینستاگرام:



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

فصل چهارم

مستقیم

این فصل را با ما بخوان

تا از ما شوی ...

درس اول

آشنایی با مفهوم مشتق

تعریف

$$y'(a) = f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

مثال

با استفاده از تعریف، مشتق تابع های زیر را در نقطه داده شده به دست آورید.

ب) $x = -1$, $f(x) = x^2 + 5x$

آ) $x = 1$, $f(x) = 5$

ب) $x = 3$, $f(x) = \sqrt{x+1}$

ب) $x = 2$, $f(x) = x^3 + 4x$

ج) $x = -2$, $f(x) = \frac{x+4}{x+3}$

ب) $x = -4$, $f(x) = \sqrt[3]{2x}$

یادآوری

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

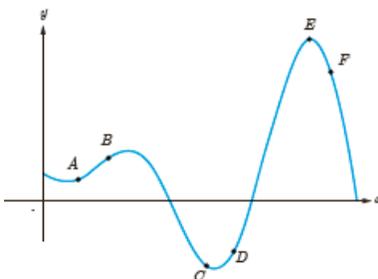
معادله خط بین دو نقطه (x_1, y_1) و (x_2, y_2) :

نکته

مشتق در واقع همان شیب خط هست.

مثال

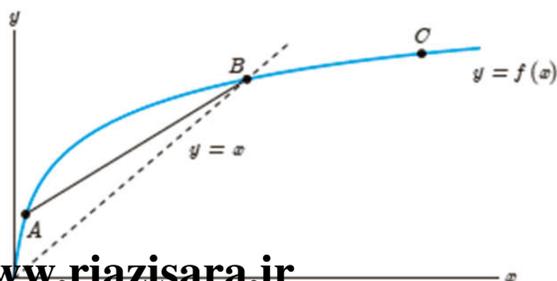
نقاط داده شده روی منحنی زیر را با شیب‌های ارائه شده در جدول تطبیق کنید.



شیب	نقطه
-3	
-1	
0	
$\frac{1}{2}$	
1	
2	

مثال

برای نمودار $y=f(x)$ در شکل زیر شیب‌های داده شده از «الف» تا «ج» را از کوچک‌ترین به بزرگ‌ترین مرتب کنید.



الف) شیب نمودار در نقطه A

ب) شیب نمودار در نقطه B

پ) شیب نمودار در نقطه C

ت) شیب خط AB

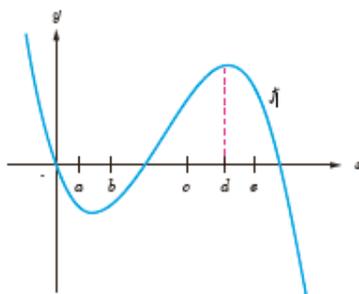
ث) شیب خط $y=2$

ج) شیب خط $y=x$

(شیب های داده شده از «الف» تا «ج» را به ترتیب m_1 ، m_2 ، و m_6 در نظر بگیرید.)



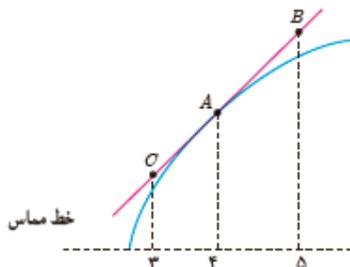
با در نظر گرفتن نمودار f در شکل، نقاط به طول های a، b، c، d و e را با مشتق های داده شده در جدول تغییر کنید.



x	$f'(x)$
	0
	0,5
	2
	-0,5
	-2

مثال

برای تابع f در شکل روپرو داریم؛ $f(4) = 1.5$ و $f(4) = 25$ با توجه به شکل مختصات نقاط A ، B و C را بیابید.



مثال

در هر ثانیه علی z متر با دوچرخه و رضا s متر با پای پیاده طی می کنند، به طوری که $z > s$. در یک زمان داده شده، چگونه می توان مسافت طی شده توسط رضا و علی را مقایسه کرد؟

(الف) علی $s - z$ متر پیش از رضا مسافت طی خواهد کرد.

(ب) علی s . z متر پیش از رضا مسافت طی خواهد کرد.

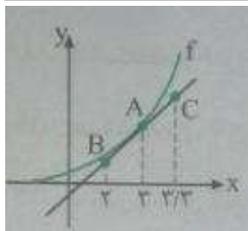
(پ) علی z/s متر پیش از رضا مسافت طی خواهد کرد.

(ت) علی $s.z$ برابر رضا مسافت طی خواهد کرد.

(ث) علی s/z برابر رضا مسافت طی خواهد کرد.

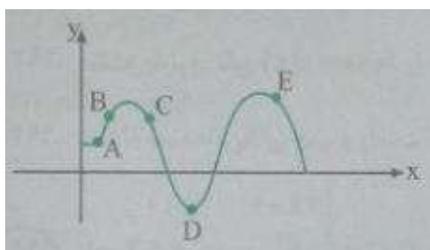
مثال

نمودار تابع f به صورت مقابل است. اگر $f(3) = 2$ و $f(3) = 1$ باشد، مختصات نقاط A ، B و C را مشخص کنید.



مثال

نقاط داده شده روی منحنی را با شیب‌های ارائه شده در جدول تطبیق کنید.



شیب	نقطه
-3	
-2	
0	
2	
$\frac{2}{3}$	

مثال

برای نمودار $y = f(x)$ شکل مقابل، اعداد داده شده را از کوچک ترین به بزرگ ترین مرتب کنید.

m_2 : شیب نمودار در نقطه B

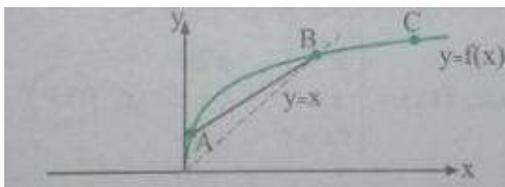
m_1 : شیب نمودار در نقطه A

m_4 : شیب خط AB

m_3 : شیب نمودار در نقطه C

m_6 : شیب خط $y = x$

m_5 : شیب خط $y = 1$



مثال

نقطاتی مانند A, B, C, D, E, F و G را روی نمودار $y = f(x)$ مشخص کنید به طوری که:

(آ) نقطه ای روی نمودار با شیب مثبت باشد.

(ب) نقطه ای روی نمودار باشد که مقدار تابع در آن منفی باشد.

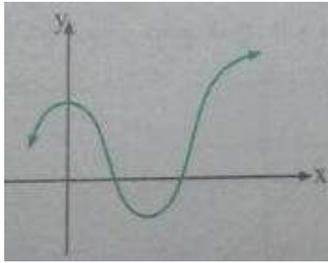
(پ) نقطه ای روی نمودار باشد که مشتق در آن جا صفر است.

(ت) نقاط D و E، نقاط متفاوتی روی نمودار باشند که مشتق یکسان دارند.

(ث) نقطه ای روی نمودار باشد که مقدار تابع در آن جا مثبت ولی مقدار مشتق منفی باشد.

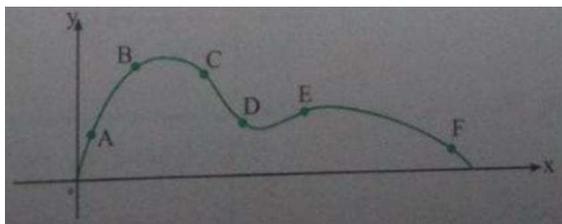
(ج) نقطه ای روی نمودار باشد که مقدار مشتق در آن بیشتر از مقدار مشتق در بقیه نقاط A, B, C, D, E و F

باشد.



مثال

نقاط A, B, C, D, E و F را روی منحنی زیر در نظر بگیرید. در مورد شیب منحنی در این نقاط کدام گزاره درست و کدام یک نادرست است؟ (شیب خط مماس بر منحنی در نقطه A را m_A نمایش می دهیم.)



آ) شیب منحنی در همه این نقاط مثبت است.

$$m_A < m_B \text{ (ب)}$$

$$m_E < m_B < m_A \text{ (پ)}$$

ت) شیب منحنی در نقاط C و D, F منفی است.

$$m_F < m_D < m_C \text{ (ث)}$$

$$m_C < m_D < m_F < m_E < m_B < m_A \text{ (ج)}$$

تست

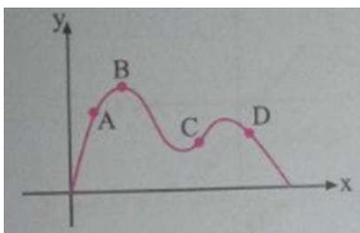
با توجه به نمودار مقابل، در مورد شیب منحنی در این نقاط، کدام گزاره صحیح است؟ (شیب خط مماس در نقطه ای مانند A را m_A نشان می دهیم.)

$$m_A > m_D > m_C > m_B \text{ (1)}$$

$$m_D > m_A > m_B > m_C \text{ (2)}$$

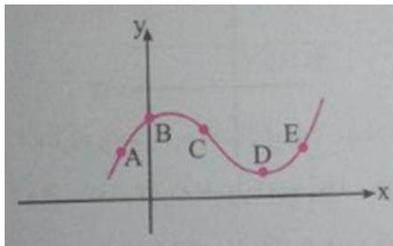
$$m_A > m_C > m_B > m_D \text{ (3)}$$

$$m_C > m_A > m_D > m_B \text{ (4)}$$



تست

با توجه به نمودار، کدام گزینه صحیح است؟



(1) در نقطه D، مقدار مشتق منفی است.

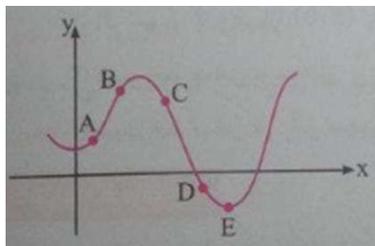
$$m_C < m_D < m_E \quad (2)$$

$$m_E > m_B > m_A \quad (3)$$

$$m_A < m_C < m_D \quad (4)$$

تست

با توجه به نمودار مقابل، اگر شیب خط‌های مماس در نقاط مشخص شده عددهای مجموعه $\{-2, -\frac{2}{3}, 0, 1, 3\}$ باشند، کدام گزینه درست است؟



$$m_C = -2, m_E = 0, m_A = 3 \quad (1)$$

$$m_D = -\frac{2}{3}, m_C = -2, m_B = 3 \quad (2)$$

$$m_A = 3, m_B = 1, m_D = -2 \quad (3)$$

$$m_E = 1, m_D = -2, m_B = 1 \quad (4)$$

تست

با توجه به نمودار مقابل، اعداد m_1 تا m_6 به صورت زیر تعریف شده اند:

m_2 : شیب نمودار در نقطه B

m_1 : شیب نمودار در نقطه A

m_4 : شیب خط AB

m_3 : شیب نمودار در نقطه C

m_6 : شیب خط $y = x$

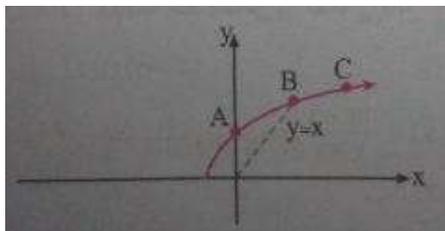
m_5 : شیب خط $y = 4$

$$0 < m_3 < m_2 < m_4 < m_1 < 1 \quad (2)$$

$$m_1 > m_4 > m_2 > m_3 > 1 \quad (1)$$

$$m_3 < m_2 < 1 < m_1 < m_4 \quad (4)$$

$$m_5 < m_4 < m_6 < 1 \quad (3)$$



در هر ثانیه مهدی z متر با اتومبیل و امیر s متر با دوچرخه طی می کنند، به طوری که $z > s$. در یک زمان داده شده، مسافت طی شده توسط مهدی و امیر چگونه است؟

(1) مهدی z/s متر پیش تر از امیر طی می کند.

(2) مهدی s . z متر پیش تر از امیر طی می کند.

(3) مهدی s . z برابر امیر مسافت طی می کند.

(4) مهدی z/s برابر امیر مسافت طی می کند.

درس دوم

فرمول های مشتق

مثال

مشتق توابع زیر را بدست آورید. (ساده کردن الزامی نیست).

$$f(x) = \sqrt{x^3 + 2x^2 + 6} \quad (\text{پ})$$

$$f(x) = \frac{3}{x^2 + 4x} \quad (\text{الف})$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^3 + 1}}{4x - 5} \quad (\text{ب})$$

$$f(x) = (3x^4 - 2x + 1)(x^3 + x) \quad (\text{پ})$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{x^2 - 3x} \quad (\text{ج})$$

$$f(x) = (2x - 3)^4(x^2 + 5x) \quad (\text{ب})$$

$$f(x) = \frac{x}{x + \sqrt{x}} \quad (\text{ح})$$

$$f(x) = \frac{1}{2x + 1} + (\sqrt{x})(x + 5) \quad (\text{ج})$$

$$f(x) = (x^5 - 3x)(x + 1)^4 \quad \text{د}$$

$$f(x) = x^3(3x + 1)^5 \quad \text{خ}$$

$$f(x) = \sqrt[3]{\frac{x+4}{x+1}} \quad \text{ل}$$

$$f(x) = \frac{3x^2 - 6x}{x+1} \quad \text{س}$$

$$f(x) = \left(\frac{3x+1}{x}\right)^2 \quad \text{پ}$$

$$f(x) = \left(\frac{2x+1}{x}\right)^4 \quad \text{ز}$$

مثال

اگر $(f)'(1) = 3$ و $(g)'(1) = 5$ مطلوب است، $(f+g)'(1)$ و $(3f+2g)'(1)$

مثال

اگر $f(3) = -1$ ، $f'(3) = 2$ ، $g(3) = 4$ و $g'(3) = -2$ باشند، مقادیر $(fg)'(3)$ ، $(\frac{f}{g})'(3)$ و

$(5f+3g)'(3)$ را به دست آورید.

مثال

مشتق تابع های زیر را به دست آورید:

$$h(x) = \frac{x}{2x^2+x-1} \quad \text{پ}$$

$$g(x) = \left(\frac{-3x-1}{x^2+5}\right)^8 \quad \text{پ}$$

$$f(x) = \frac{1}{x-4} \quad \text{الف}$$

مثال

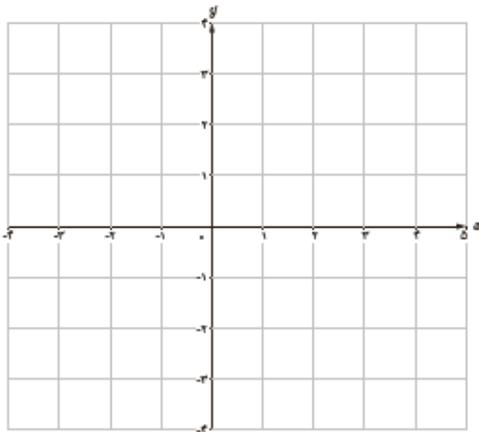
مشتق تابع زیر را به دست آورید.

$$f(x) = (x^2 + 1)^3(5x - 1)$$

مثال

اگر $f(x) = \begin{cases} 2x + 4 & x < -1 \\ x^2 - 1 & -1 \leq x < 2 \\ -x + 5 & 2 < x < 5 \end{cases}$ نمودار f را رسم کنید و مشتق پذیری f را روی بازه های $[-1,1]$ ،

$(2,5)$ و $[-2,0]$ بررسی کنید.



مقدار مشتق توابع شامل قدر مطلق

با توجه به این که مشتق نوعی حد می باشد، برای به دست آوردن مشتق تابع قدر مطلق در نقطه a ، ابتدا علامت

عبارت داخل قدر مطلق را در مجاورت a تعیین می کنیم، سپس با استفاده از تعریف قدر مطلق، تابع را بدون

قدر مطلق می نویسیم و از آن مشتق می گیریم.

مثال

اندازه مشتق تابع با ضابطه $f(x) = |x| + |x^2 - 2x|$ در $x = -1$ را به دست آورید.

مثال

اگر $f(x) = |x^2 - 4|$ ، به کمک تعریف مشتق، مشتق پذیری f را در نقاط به طول های 2 و -2 بررسی کنید.

مشتق توابع شامل جزء صحیح

برای به دست آوردن مقدار مشتق توابع شامل جزء صحیح در نقطه پیوسته $x = a$ ابتدا باید حاصل جزء صحیح را با استفاده از ویژگی های آن به دست بیاوریم و سپس از تابع مشتق بگیریم.

تست

اگر $f(x) = [\sqrt{x}]2x^2 + x$ باشد، مقدار $f'(3)$ کدام است؟

15 (4)

13 (3)

12 (2)

10 (1)

مشتق گیری از توابع با عامل صفرکننده

مثال

اگر $f(x) = (x - 1)\sqrt[3]{5x + 3}$ باشد، مقدار $f'(1)$ را به دست آورید.

مشتق تابع مرکب

$$(f(u))' = u' \times f'(u) = g'(x)f'(g(x))$$

$$((fog)(x))' = g'(x) \times f'(g(x))$$

مثال

اگر $f(x) = x^3 - 4x$ و $g(x) = 2x + 1$ باشد، مشتق توابع gof و fog را به دست آورید.

تست

اگر $f'(x) = 4x$ باشد، مقدار مشتق تابع $f(x^2 + 8x)$ به ازای $x = -3$ کدام است؟

- 120 (1) 60 (2) -60 (3) -120 (4)

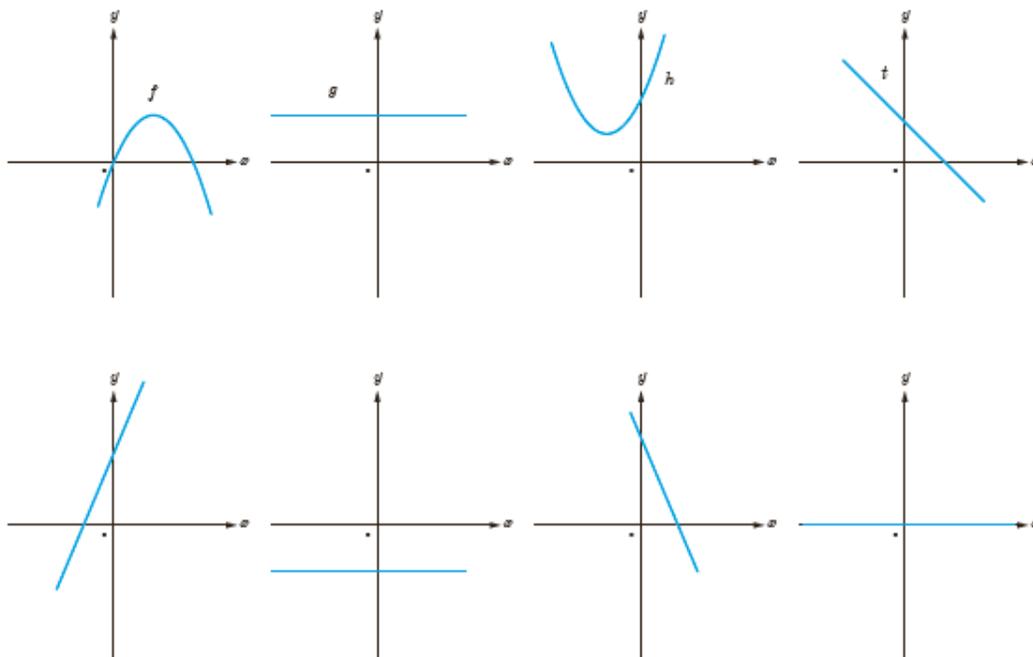
تست

اگر $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 2$ باشد، مقدار مشتق تابع $f(2x - x^3)$ به ازای $x = 1$ کدام است؟

- 2 (1) 1 (2) -2 (3) -1 (4)

مثال

نمودار توابع f و g و h و t را به نمودار مشتق آن‌ها، نظیر کنید.

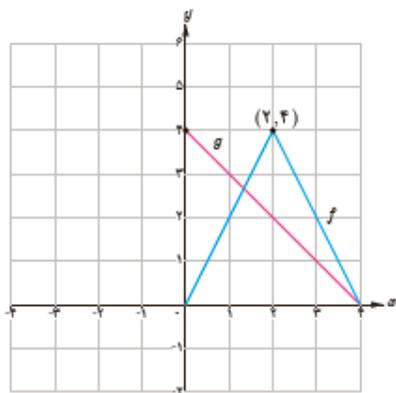


مثال

نمودار توابع f و g را در شکل زیر در نظر بگیرید.

الف) اگر $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ مطلوب است $h'(1)$ ، $h'(2)$ و $h'(3)$

ب) اگر $k(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ مطلوب است $k'(1)$ ، $k'(2)$ و $k'(3)$



مشتق مرتبه دوم

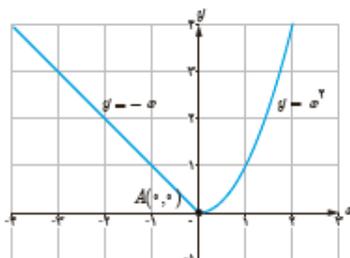
مثال

اگر $y = 4x^3 - 5x^2 + 7x$ باشد، مشتق دوم آن را بدست آورید.

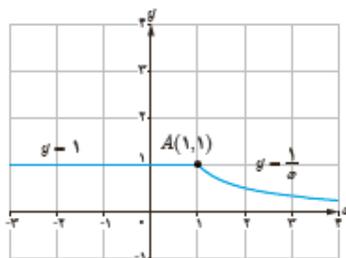
مشتق های یک طرفه و مشتق پذیری

مثال

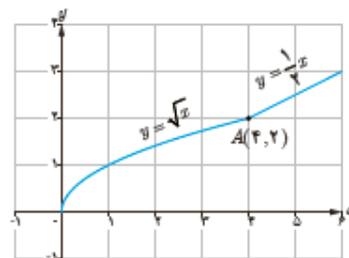
با محاسبه مشتق راست و مشتق چپ توابع داده شده در نقطه A نشان دهید که این توابع در نقطه A مشتق پذیر نیستند.



(الف)



(ب)



(ب)

مثال

مشتق پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & x \geq 1 \\ 2x & x < 1 \end{cases}$ را در نقطه $x = 1$ بررسی کنید.

مثال

اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$ نشان دهید $f'_+(0)$ و $f'_-(0)$ موجودند ولی $f'(0)$ موجود نیست.

حل مسائل پارامتری مشتق

اگر تابع f در a مشتق پذیر باشد، آنگاه با برقراری دو شرط زیر و تشکیل دستگاه دو معادله دو مجهولی، مقادیر پارامتر را بدست می آوریم:

پیوستگی f در a : $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$

مشتق پذیری f در a : $f'_+(a) = f'_-(a)$

تست

تابع $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 1 & x \geq 2 \\ x^3 & x < 2 \end{cases}$ مفروض است. اگر این تابع در نقطه $x = 2$ مشتق پذیر باشد،

مقدار $a + b$ کدام است؟

- (1) $-\frac{3}{4}$ (2) -2 (3) -3 (4) -5

مثال

تعریف: تابع f روی بازه (a, b) مشتق پذیر است هرگاه در هر نقطه این بازه مشتق پذیر باشد. به عنوان مثال،

تابع $f(x) = \sqrt{x}$ روی بازه $(0, 1)$ مشتق پذیر است و داریم $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

تعریف تابع f روی بازه $[a, b]$ مشتق پذیر است، هرگاه f در بازه (a, b) مشتق پذیر باشد و در $x=a$ مشتق راست داشته باشد.

تعریف تابع f روی بازه (a, b) مشتق پذیر است، هرگاه f روی بازه (a, b) مشتق پذیر باشد و در $x=b$ مشتق چپ داشته باشد.

تعریف تابع f روی بازه $[a, b]$ مشتق پذیر است، هرگاه f روی بازه (a, b) مشتق پذیر باشد و در نقطه a مشتق راست و در نقطه b مشتق چپ داشته باشد.

مثال

مشتق پذیری روی بازه های $[a, b]$ و (a, b) را به طور مشابه تعریف کنید.

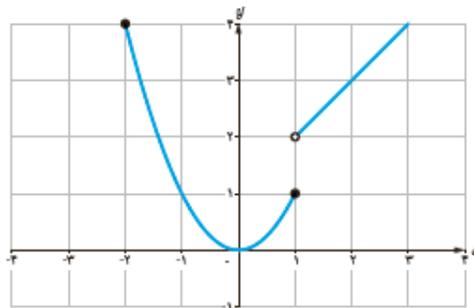
تابع f روی بازه $[a, b]$ مشتق پذیر است هرگاه

تابع f روی بازه (a, b) مشتق پذیر است هرگاه

اگر $D_f = R$ و f در هر عدد حقیقی مشتق پذیر باشد، گوئیم f روی بازه $(-\infty, +\infty)$ مشتق پذیر است.

مثال: تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & -2 \leq x \leq 1 \\ x+1 & x > 1 \end{cases}$ را در نظر می گیریم.

f روی بازه های $[-2, 1]$ و $(1, \infty)$ مشتق پذیر است. ولی f روی بازه $[1, 2]$ مشتق پذیر نیست (چرا؟)



مثال

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x < 2 \\ 2x & x > 2 \end{cases} \text{ تابع داده شده است.}$$

ب) نشان دهید که $f'(0)$ و $f'(2)$ وجود ندارند.

آ) نمودار تابع f را رسم کنید.

ت) نمودار تابع f' را رسم کنید.

پ) ضابطه تابع مشتق را بنویسید.

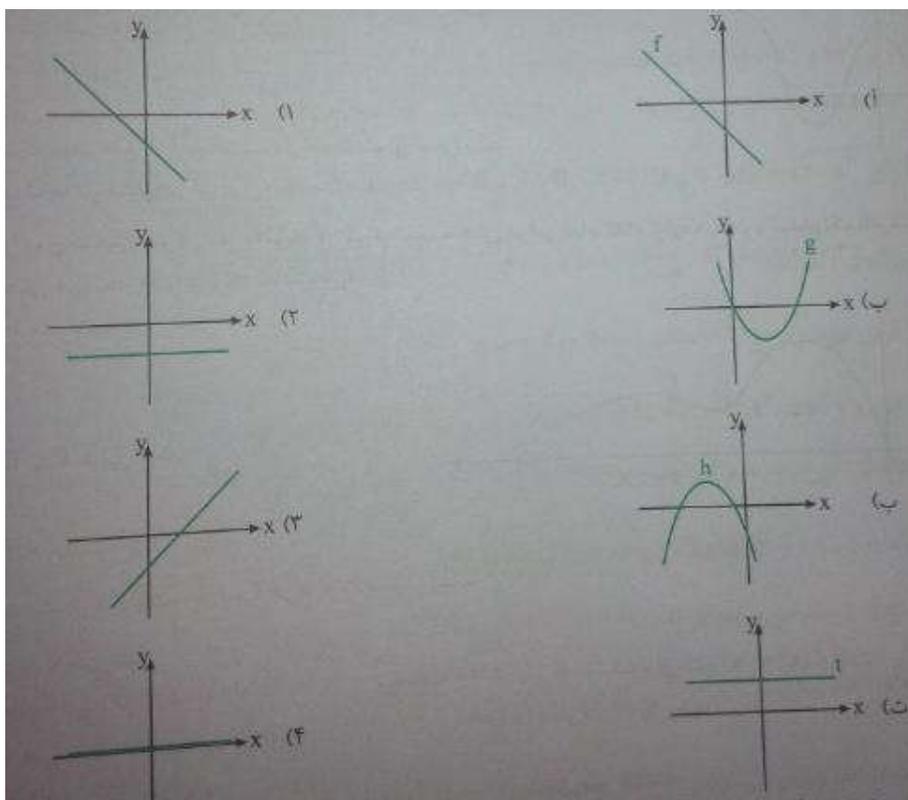
مثال

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x \geq 1 \\ x + 2 & 0 < x < 1 \\ 3x + 2 & x \leq 0 \end{cases} \text{ اگر } f(x) \text{ باشد، نمودار } f \text{ را رسم کنید و مشتق پذیری } f \text{ را روی بازه های}$$

$(-\infty, 0)$ ، $(0, 1)$ و $[1, 2]$ بررسی کنید.

مثال

نمودار توابع f ، g ، h و t هم چنین نمودار مشتق آن‌ها داده شده است. نمودار هر یک از این توابع را به نمودار مشتق آن‌ها نظیر کنید.



تست

اگر $f(x) = (x^2 + 3x)(x + 1)^2$ باشد، مقدار مشتق تابع f به ازای $x = -2$ کدام است؟

5 (4)

3 (3)

-2 (2)

-1 (1)

تست

اگر $y = \sqrt{x + f(x)}$ و $f(0) = 4$ و $f'(0) = 1$ باشند، مقدار مشتق y به ازای $x = 0$ کدام است؟

- (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{1}{4}$ (3) 2 (4) 4

تست

اگر $f(x) = \sqrt{\frac{3x-1}{2x+1}}$ ، آن گاه $f'(2)$ کدام است؟

- (1) $-0/2$ (2) $-0/1$ (3) $0/1$ (4) $0/2$

تست

اندازه مشتق $\frac{x-\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$ به ازای $x = \frac{1}{4}$ کدام است؟

- (1) -1 (2) $-\frac{1}{2}$ (3) $\frac{1}{2}$ (4) 1

تست

اگر $f(x) = \frac{3x+2}{\sqrt{x}}$ باشد، مقدار $f'(4)$ کدام است؟

- (1) $\frac{5}{8}$ (2) $\frac{7}{16}$ (3) $\frac{3}{4}$ (4) $\frac{9}{16}$

تست

اگر $f(x) = 2x + \sqrt[3]{x}$ باشد، مقدار $f'(8)$ کدام است؟

- $\frac{19}{6}$ (4) $\frac{19}{12}$ (3) $\frac{25}{12}$ (2) $\frac{25}{6}$ (1)

تست

اگر $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 7x}$ باشد، مقدار $f'(-1)$ کدام است؟

- $\frac{5}{6}$ (4) $\frac{5}{12}$ (3) $-\frac{5}{12}$ (2) $-\frac{5}{6}$ (1)

تست

اگر f و g دو تابع مشتق پذیر در $x = 1$ و $2f(1) = g(1) = 2$ و $f'(1) = -g'(1) = 4$ باشند، مقدار

$(\frac{f}{g})'(1)$ کدام است؟

- $\frac{4}{3}$ (4) $\frac{3}{4}$ (3) 3 (2) 4 (1)

تست

مشتق تابع $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ در نقطه $x = 1$ برابر 3 است. اگر $f(1) = 0$ ، $f'(1) = -4$ و $g'(1)$ موجود باشد،

مقدار $g(1)$ کدام است؟

- $\frac{4}{3}$ (4) $\frac{3}{4}$ (3) $-\frac{3}{4}$ (2) $-\frac{4}{3}$ (1)

تست

در تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{\frac{4x+5}{x+3}}$ حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ کدام است؟

- (1) $\frac{7}{48}$ (2) $\frac{5}{24}$ (3) $\frac{7}{24}$ (4) $\frac{7}{16}$

تست

در تابع با ضابطه $f(x) = \left(\sqrt{\frac{x+2}{2x-3}}\right)^3$ حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ کدام است؟

- (1) -21 (2) -18 (3) 12 (4) 15

تست

اگر $f(x) = \frac{|x|}{|x+3|}$ ، آن گاه $f'(-1)$ کدام است؟

- (1) $-\frac{1}{4}$ (2) $-\frac{3}{4}$ (3) $\frac{3}{4}$ (4) $\frac{1}{4}$

تست

اگر $f(x) = [x]x^3 - 5x$ باشد، مقدار $f'(\sqrt{2})$ کدام است؟

- (1) $2\sqrt{2}$ (2) $\sqrt{2}$ (3) 2 (4) 1

تست

اگر $f(x) = \frac{|x|}{x + \sqrt{x}}$ باشد، مقدار $f'(2)$ کدام است؟

- $\frac{1}{6}$ (1) $\frac{1}{9}$ (2) $-\frac{1}{6}$ (3) $-\frac{1}{9}$ (4)

تست

اگر $f(x) = x^3 + x$ ، $g(-1) = 1$ و $g'(-1) = 2$ باشد، مقدار مشتق $(f \circ g)(x)$ به ازای $x = -1$ کدام

است؟

- 8 (1) 4 (2) -4 (3) -8 (4)

تست

اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x) - g(2)}{x - 2} = \frac{3}{2}$ و $f(x) = \sqrt{5 - x^2}$ ، آنگاه $(g \circ f)'(1)$ کدام است؟

- $-\frac{3}{4}$ (1) $-\frac{1}{2}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{3}{2}$ (4)

تست

اگر $f(2) = 2f'(2) = -2$ باشد، مقدار مشتق عبارت $\frac{f(2x)}{x^2}$ به ازای $x = 1$ ، کدام است؟

- -2 (1) 6 (2) 2 (3) -6 (4)

تست

اگر f یک تابع سه جمله ای از درجه دوم باشد به طوری که $f(1) = 3$ ، $f'(1) = 0$ و $f''(1) = 4$ ، مقدار

$f'(2)$ کدام است؟

4 (4

6 (3

-2 (2

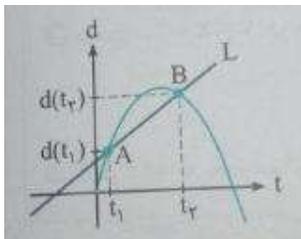
1) صفر

درس سوم

سرعت متوسط و لحظه ای

اگر نمودار مکان - زمان حرکت یک اتومبیل را داشته باشیم، آن گاه:

(آ) سرعت متوسط اتومبیل بین هر دو لحظه دلخواه، برابر شیب خطی است که نمودار مکان - زمان را در آن دو لحظه قطع می کند.

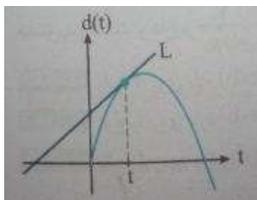


با توجه به شکل، سرعت متوسط اتومبیل در بازه زمانی $[t_1, t_2]$ برابر است با:

$$m_L = m_{AB} = \frac{d(t_2) - d(t_1)}{t_2 - t_1}$$

(ب) سرعت لحظه ای اتومبیل در هر لحظه دلخواه t ، برابر شیب خط مماس بر نمودار در آن لحظه است و می دانیم شیب خط مماس در t برابر $d'(t)$ است.

$d'(t) =$ شیب خط مماس در $t =$ سرعت لحظه ای اتومبیل در لحظه دلخواه t



مثال

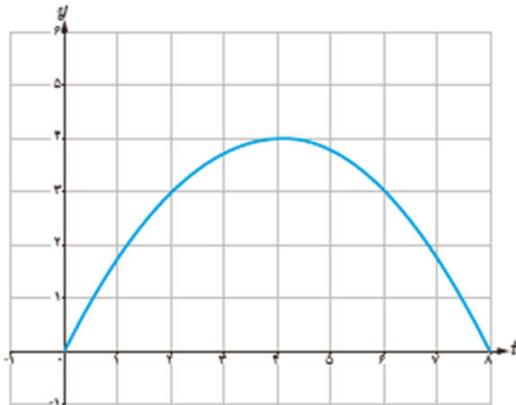
خودرویی در امتداد خط راست طبق معادله $d(t) = -6t^2 + 24t$ در بازه زمانی $0 \leq t \leq 4$ حرکت می کند.

(آ) سرعت متوسط خودرو را در بازه زمانی $[1, 3]$ به دست آورید.

(ب) سرعت لحظه ای در $t = 1$ ، $t = 2$ و $t = 3$ چقدر است؟

مثال

نمودار زیر موقعیت یک ذره را در لحظه t نمایش می دهد. مقادیر زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید:



A سرعت متوسط بین $t = 1$ و $t = 3$

B سرعت متوسط بین $t = 5$ و $t = 6$

C سرعت لحظه ای در $t = 1$

D سرعت لحظه ای در $t = 3$

E سرعت لحظه ای در $t = 5$

F سرعت لحظه ای در $t = 6$

آهنگ متوسط تغییر

$$\text{آهنگ متوسط تغییر } f \text{ در بازه } [x_1, x_2] = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

مثال

تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{2x}$ داده شده است. آهنگ متوسط تغییر این تابع را وقتی متغیر از $x_1 = 2$ تا $x_2 = 18$ تغییر می کند، تعیین کنید.

تست

آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x) = \sqrt[3]{x}$ به ازای $a = 1$ و $h = 7$ کدام است؟

$\frac{2}{7}$ (4)

$\frac{1}{21}$ (3)

$\frac{1}{7}$ (2)

$\frac{1}{14}$ (1)

آهنگ لحظه ای تغییر

$$x = a \text{ در نقطه } f \text{ تغییر تابع } \text{ آهنگ لحظه ای تغییر تابع } = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

مثال

آهنگ لحظه ای تغییر تابع $f(x) = \sqrt{x^3 + 1}$ را در نقطه $x = 2$ به دست آورید.

تست

آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x) = \sqrt{x+4}$ روی بازه $[0,12]$ ، از آهنگ لحظه ای تغییر f در $x = 5$ چقدر

بیشتر است؟

- (1) صفر (2) $\frac{1}{3}$ (3) $\frac{1}{4}$ (4) $\frac{1}{12}$

تست

در تابع $f(x) = x^2 + 3x$ با ضابطه $f(x) = x^2 + 3x$ ، آهنگ متوسط تغییر از $x_1 = 1$ تا $x_2 = 2$ ، برابر آهنگ لحظه ای تغییر

آن در $x = \alpha$ است. α کدام است؟

- (1) $\frac{1}{2}$ (2) 1 (3) $\frac{3}{2}$ (4) 2

مثال

معادله حرکت متحرکی به صورت $f(t) = t^2 - t + 10$ بر حسب متر در بازه زمانی $[0,5]$ (t بر حسب ثانیه)

داده شده است. در کدام لحظه سرعت لحظه ای با سرعت متوسط در بازه زمانی $[0,5]$ با هم برابرند؟

مثال

یک توده باکتری پس از t ساعت دارای جرم $m(t) = \sqrt{t} + 2t^3$ گرم است.
 الف) جرم این توده باکتری در بازه زمانی $3 \leq t \leq 4$ چند گرم افزایش می یابد؟
 ب) آهنگ رشد جرم توده باکتری در لحظه $t = 3$ چقدر است؟

مثال

کنجایش ظرفی 40 لیتر مایع است. در لحظه $t = 0$ سوراخی در ظرف ایجاد می شود. اگر حجم مایع باقی مانده در ظرف پس از t ثانیه از رابطه $V = 40(1 - \frac{t}{100})^2$ به دست آید؛
 الف) آهنگ تغییر متوسط حجم مایع در بازه زمانی $[0,1]$ چقدر است؟
 ب) در چه زمانی، آهنگ تغییر لحظه ای حجم برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازه $[0,100]$ می شود؟

نکته

در توابع درجه دوم، آهنگ متوسط تغییر در بازه $[a,b]$ با آهنگ لحظه ای تغییر در وسط بازه، یعنی $x = \frac{a+b}{2}$ برابر است. به عنوان مثال، آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x) = x^2 - 4x$ در بازه $[0,2]$ ، با آهنگ لحظه ای تغییر در $x = \frac{0+2}{2} = 1$ برابر است.

مثال

جدول زیر درجه حرارت T (سانتی گراد) را در شهری از ساعت 8 تا 18 در یک روز نشان می دهد.

ساعت h	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
درجه حرارت T	11	13	14	17	19	18	17	15	13	10	9

آهنگ تغییر متوسط درجه حرارت نسبت به زمان را:

الف) از ساعت 8 تا 12 به دست آورید.

ب) از ساعت 12 تا ساعت 18 به دست آورید.

مثال

توپ تنیسی را به هوا پرتاب کرده ایم. اگر مسافت پیموده شده به وسیله توپ، بر حسب متر، تابعی از زمان t بر حسب ثانیه به صورت $h(t) = 12t - 3t^2$ باشد، سرعت متوسط توپ را در 2 ثانیه اول بدست آورید. سرعت آن را در لحظه t حساب کنید. در چه زمانی این سرعت صفر می شود و در چه ارتفاعی؛ در لحظه $t = 4$ ثانیه پس از پرتاب، وضعیت توپ چگونه است و سرعت آن چقدر است؟

تست

معادله حرکت یک متحرک به صورت $x = 2t^2 - 8t + 100$ است، که در آن t بر حسب ثانیه و x بر حسب متر

است. متحرک در چند متری مبدأ توقف می کند؟

78 (4)

86 (3)

92 (2)

110 (1)

آهنگ رشد

تابع $f(x) = 7\sqrt{x} + 50$ قد متوسط کودکان را بر حسب سانتی متر تا حدود 60 ماهگی نشان می دهد که در آن x مدت زمان پس از تولد (بر حسب ماه) است. به عنوان مثال، آهنگ متوسط رشد در بازه زمانی $[0, 36]$ به صورت زیر است:

$$\frac{f(36)-f(0)}{36-0} = \frac{(7\sqrt{36}+50)-50}{36} = \frac{7 \times 6}{36} = \frac{7}{6} \cong 1.17$$

یعنی در طی سه سال اول، رشد متوسط قد کودکان به اندازه $1/17$ سانتی متر در هر ماه است.

مثال

حجم آب یک استخر در حال تخلیه بر حسب لیتر به وسیله پمپری $V(t) = 120(2500 - 50t + t^2)$ به زمان t بر حسب دقیقه بستگی دارد.

(آ) آهنگ متوسط تخلیه در 8 دقیقه اول را پیدا کنید.

(ب) آهنگ لحظه ای خالی شدن را در دقیقه دهم از آغاز تخلیه به دست آورید.

مثال

تابع $f(x) = x^2 + 2x - 1$ داده شده است.

(آ) آهنگ متوسط تغییر این تابع را وقتی که متغیر از $x = 1$ به $x = 3$ تغییر می کند، تعیین کنید.

(ب) آهنگ لحظه ای تغییر این تابع را در $x_0 = 2$ به دست آورید.

مثال

تابع با ضابطه $f(x) = x^2 + x + 1$ داده شده است.

(آ) آهنگ متوسط تغییر این تابع را وقتی که متغیر از نقطه $x_1 = 3$ به $x_2 = 5$ تغییر می کند، تعیین کنید.

(ب) آهنگ لحظه ای تغییر این تابع را در نقطه $x_0 = 2$ به دست آورید.

مثال

آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x) = \frac{x}{2} + 1$ را به ازای $a = 2$ و $h = 0.2$ به دست آورید.

مثال

معادله حرکت متحرکی به صورت $f(t) = 200t^2 - 50t$ می باشد.

(آ) سرعت متوسط این متحرک را در فاصله زمانی $t = 0$ تا $t = 4$ به دست آورید.

(ب) آهنگ لحظه ای تغییرات تابع را در $t = 3$ به دست آورید.

مثال

خودرویی در امتداد خط راست طبق معادله $d(t) = -4t^2 + 16t$ حرکت می کند که در آن $0 \leq t \leq 4$ پر

حساب ثانیه می باشد.

(آ) سرعت متوسط این خودرو را در بازه $[2,3]$ به دست آورید.

(ب) سرعت لحظه ای خودرو را در $t = 1$ ، $t = 2$ و $t = 3$ به دست آورید.

مثال

نمودار روبه رو موقعیت یک ذره را در لحظه t نمایش می دهد. مقادیر زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

B: سرعت متوسط بین $t = 2$ و $t = 4$

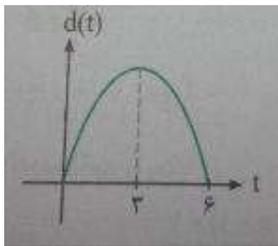
A: سرعت متوسط بین $t = 0$ و $t = 2$

D: سرعت لحظه ای در $t = 2$

C: سرعت متوسط بین $t = 3$ و $t = 5$

F: سرعت لحظه ای در $t = 5$

E: سرعت لحظه ای در $t = 3$



مثال

اگر $P(t) = 2000 + 500t^2$ نمایش جمعیت یک نوع باکتری در زمان t باشد (t بر حسب ساعت)

(آ) آهنگ متوسط افزایش جمعیت را در 4 ساعت اول پس از زمان $t_0 = 1$ به دست آورید.

(ب) آهنگ لحظه ای افزایش جمعیت را در $t = 2$ حساب کنید.

مثال

کنجایش ظرفی 40 لیتر مایع است. در لحظه $t = 0$ سوراخی در ظرف ایجاد می شود. اگر حجم مایع باقی مانده در

ظرف پس از t ثانیه از رابطه $V = 40(1 - \frac{t}{100})^2$ به دست آید؛

(آ) آهنگ متوسط تغییر حجم مایع در بازه زمانی $[0, 1]$ چقدر است؟

(ب) در چه زمانی، آهنگ لحظه ای تغییر حجم برابر آهنگ متوسط تغییر آن در بازه $[0, 100]$ می شود؟

مثال

یک توده باکتری پس از t ساعت دارای جرم $f(t) = \sqrt{t} + 2t^3$ گرم است.
 (آ) جرم این توده باکتری در بازه زمانی $1 \leq t \leq 4$ چند گرم افزایش می یابد؟
 (ب) آهنگ رشد جرم توده باکتری در لحظه $t = 4$ چقدر است؟

مثال

تابع $f(x) = 7\sqrt{x} + 50$ ، قد متوسط کودکان را بر حسب سانتی متر تا حدود 60 ماهگی نشان می دهد که در آن، x تعداد ماه های پس از تولد است.
 (آ) آهنگ متوسط رشد در بازه زمانی $[1, 9]$ چقدر است؟
 (ب) آهنگ لحظه ای تغییر قد کودک را در 16 ماهگی و 25 ماهگی با هم مقایسه کنید. کدام یک پیش تر است؟
 (پ) اگر علی در 25 ماهگی، 90 سانتی متر و در 49 ماهگی 97 سانتی متر باشد، آهنگ متوسط تغییر رشد او را با آهنگ تغییر متوسط استاندارد مقایسه کنید.

تست

در تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{x}$ آهنگ متوسط تغییر تابع از نقطه $x = 4$ تا $x = 6.25$ از آهنگ لحظه ای آن در نقطه $x = 4$ چقدر کمتر است؟

$$\frac{1}{12} \quad (4)$$

$$\frac{5}{72} \quad (3)$$

$$\frac{1}{18} \quad (2)$$

$$\frac{1}{36} \quad (1)$$

تست

در تابع با ضابطه $f(x) = (2x + 1)^{-\frac{1}{2}}$ آهنگ متوسط تغییر تابع از نقطه $x = 4$ تا $x = 12$ از آهنگ لحظه ای آن در نقطه $x = 4$ چقدر پیش تر است؟

- (1) $\frac{7}{540}$ (2) $\frac{11}{540}$ (3) $\frac{7}{270}$ (4) $\frac{11}{270}$

تست

در تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{x}$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع نسبت به تغییر متغیر x ، در نقطه $x = 1$ با نمو متغیر $0/21$ ، از آهنگ لحظه ای تابع در این نقطه، چقدر کمتر است؟

- (1) $\frac{1}{42}$ (2) $\frac{1}{21}$ (3) $\frac{3}{42}$ (4) $\frac{2}{21}$

تست

گنجایش ظرفی 60 لیتر مایع است. در لحظه $t = 0$ سوراخی در ظرف ایجاد می شود. حجم مایع باقی مانده در ظرف پس از t ثانیه از رابطه $V = 60(1 - \frac{t}{100})^2$ به دست می آید. در چه زمانی، آهنگ لحظه ای تغییر حجم برابر آهنگ متوسط تغییر آن در بازه $[0, 100]$ است؟

- (1) 25 (2) 50 (3) 60 (4) 80

تست

آهنگ لحظه ای تغییر حجم مکعبی به ضلع x وقتی که $x = 2$ می باشد، کدام است؟

- (1) 12 (2) 10 (3) 8 (4) 6

تست

آهنگ لحظه ای تغییر مساحت مثلث متساوی الاضلاع نسبت به ضلع آن وقتی طول ضلع آن $2\sqrt{3}$ است، کدام

است؟

3 (4)

6 (3)

1 (2)

$\frac{1}{2}$ (1)