آکادمی
ریاضی
مهندس روحانی

مشتق
و کاربرد مشتق

ریاضی ۳ به سبک روحانی

آموزش مهارت حل مسئله

آموزش مفهومی

صفر تا صد هر مبحث

بررسی آزمون های نهایی

مولف : محمد صادق روحانی گَلمِجانی

بسم الله الرحمن الرحیم

مقدمه مولف

این مجموعه شامل درسنامه‌ای کامل به همراه ۱۰۰۰ سؤال متنوع و حل شده از سؤالات کتاب درسی و امتحانات نهایی داخل و خارج از کشور به همراه سؤالات مفهومی و تألیفی از متن کتاب درسیه . تمام نکات لازم برای شما ارائه شده . این کتاب با توجه به رویکرد کتاب ریاضی ۳ تدوین شده و سعی کردم کاستی های اونو پوشش بدم . از طرفی نحوه ی نوشتن پاسخ تشریحی ، برای امتحان نهایی هم ارائه شده تا به" اندازه بنویسی و نمره سوال رو کامل بگیری" . سازو کارتدوین کتاب بطوریه که با استفاده از مفاهیم و سؤالات حل شده قادر به حل سؤالات بعدی باشی . ۸ آزمون شبیه سازی شده امتحان نهایی همراه با پاسخنامه کاملاً تشریحی و "توضیح دار " آوردم تا شما سوالات امتحان نهایی رو قبل از برگزاری دیدار کنید .

برای موفقیت در درس ریاضی باید از حل مثال‌ها و تمرین‌های کتاب درسی شروع کنید و به هیچ‌وجه از آن غافل نشوید سؤالات امتحانات نهایی و حتی کنکور به طور مستقیم از تمرین‌ها و مثال‌های کتاب درسی طراحی می‌شن. آفت موفقیت شما حفظ کردن پاسخ تمریناته! تسلط بر مفاهیم مستلزم فهم درست درسه و اکتفا کردن به خواندن حل مسأله کارساز نیست، دقت کنید که حل هر سؤال برای شما کمکیه برای حل سؤالات جدیدتر و درک مفاهیم اساسی ریاضی از طریق حل مسئله .

دقت به موارد زیر موفقیت شما را افزایش میده :

۱- بررسی موضوعات به صورت تشریحی و مفهومی و هم‌چنین توجه به کاربرد مفاهیم و تعاریف در حل مسئله .

۲- یادگیری عمیق موضوعات با حوصله‌ی زیاد و اینکه روش های مختلف حل یه سوال رو یادبگیری.

۳- بررسی نمونه سوالات حل شده و پس از آن حل تمرین (البته به اعتقاد من مثال های حل شده کتاب رو هم باید اول سعی کنیم خودمون حل کنیم) و در صورت نیافتن راه حل رجوع به پاسخ.

خوبه بدونید ارزش ۵۰ تمرین که خودتون حل می کنید به مراتب بیش‌تر از خوندن و حفظ کردن ۱۰۰۰ تمرین حل شده است، چون مهم‌ترین قسمت یادگیری و کاربردی‌ترین آن برای حل مسأله ریاضی مثال‌ها و تمرین‌هایی است که خودتون به حل آن می‌پردازید.

فرآیند یادگیری ریاضی تدریجیه و در صورت عدم تکرار و تداوم از یاد می‌ره ،بنابراین انتظار نداشته باشید در این درس در کوتاه مدت تسلط کامل پیدا کنید بلکه این مهم آهسته و پیوسته با تمرین مطالب آموخته شده اتفاق می افته . تسلط ومهارت در هر درسی نتیجه تلاش مستمر و پیگیریه .

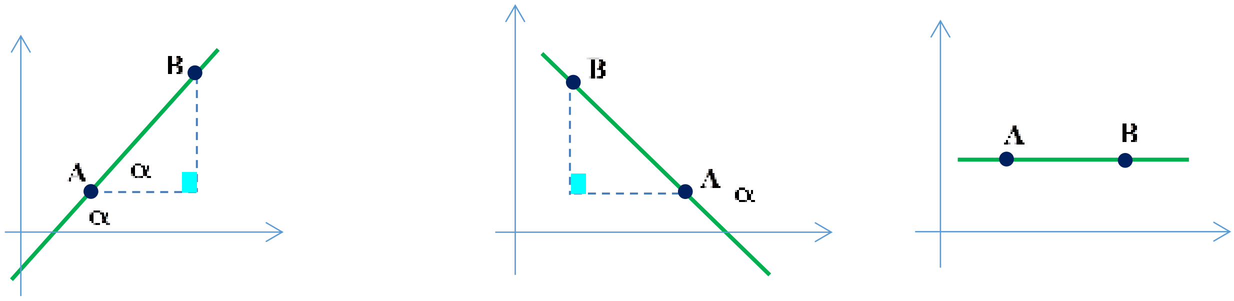
لطف کنید کمی و کاستی این کتاب را از من دریغ نکنید تا مجموعه بهتری ارائه بشه از صبر و حوصله و دقت شما سپاس بی پایان دارم از ودقت نظر تشکر می کنم .

سپاس و عشق ، نثار همسر و فرزندانم که برای تالیف این مختصر وقت بسیاری را از ایشان دریغ داشتم .

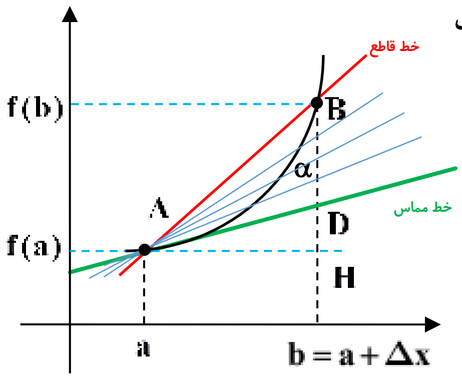
کرج فرودین ۱۴۰۲ : محمد صادق روحانی گَلمِجانی

فصل ۴ مشتق

می دانیم شیب یک خط با داشتن مختصات دو نقطه غیر هم طول واقع بر خط به راحتی از رابطه زیر حاصل می شود .



$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\tan\alpha$$



فرض کنید دو نقطه A , B روی نمودار تابع f باشند خطی که این دو نقطه را به هم وصل می کند اصطلاحاً خط قاطع گفته می شود و شیب آن :

$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=$$ شیب خط قاطع

حالا تصور کن نقطه B یواش یواش به نقطه A نزدیک بشه عملاً وقتی B به اندازه کافی به A نزدیک بشه خط قاطع تبدیل به خط مماس در نقطه A خواهد شد . و شیب این خط هم قابل تعیین است .

$$\text{if}\quad B\to A\quad\Rightarrow\quad m_{AB}\to\quad m_A=\lim_{b\to a}\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\tan\alpha$$ شیب خط مماس بر منحنی در نقطه ی A

اگر $f(x)$ یک تابع باشد شیب خط مماس بر تابع f در نقطه $A(a\,,f(a))$ به صورت زیر تعریف می شود .

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=$$ شیب خط مماس بر منحنی در نقطه ی A

به شرط اینکه این حد موجود باشد .

این حد را به این شکل هم می توان نوشت :

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=$$ شیب خط مماس بر منحنی در نقطه ی A

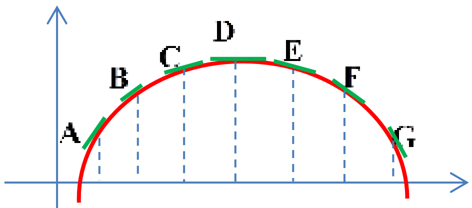
۱) شیب خط مماس بر تابع $f(x)=\sqrt{x}$ در نقطه $x=1$ را تعیین کنید .

☑ پاسخ: چشم

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{\sqrt{x}-1}}{\cancel{(\sqrt{x}-1)}(\sqrt{x}+1)}=\frac{1}{2}$$

مماس بازی

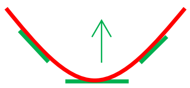
اگر نمودار تابع f در همسایگی نقطه ای صعودی باشد ، خط مماس بر نمودار تابع در آن نقطه نیز صعودی خواهد بود در نتیجه شیب خط مماس یعنی مشتق هم مثبت می باشد . و برعکس



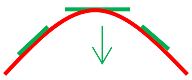
$m_G < m_F < m_E < m_D = ۰ < m_C < m_B < m_A$

اگر نمودار تابع f در همسایگی نقطه ای نزولی باشد ، خط مماس بر نمودار تابع در آن نقطه نیز نزولی خواهد بود در نتیجه شیب خط مماس یعنی مشتق در آن نقطه هم منفی می شود .

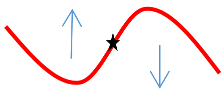
از طرفی هر جا تابع ماکزیمم یا مینیمم کلاسیک بشه مشتق تابع صفره چون شیب خط مماسش افقیه و شیبش صفره



هر جا تقعر یا گودی تابع رو به بالا باشد از چپ به راست مقدار مشتق افزایشی است .



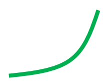
هر جا تقعر یا گودی تابع رو به پایین باشد از چپ به راست مقدار مشتق کاهشی است .

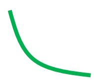


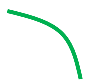
در این شکل از چپ به راست ابتدا گودی تابع رو به بالاست یعنی در این بازه مشتق روندی صعودی یا افزایشی دارد از نقطه ستاره دار به بعد که گودی تابع رو به پایین می شود مشتق تابع کاهشی یا نزولی می شود

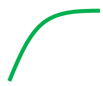
۲) در جدول مقابل بعضی از مقادیر تابع f آمده است نمودار تابع f در بازه $[۲,۶]$ کدام می تواند باشد ؟

x	۲	۳	۴	۵	۶
f(x)	۱۲	۲۰	۲۶	۳۰	۳۲

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

☑ پاسخ :

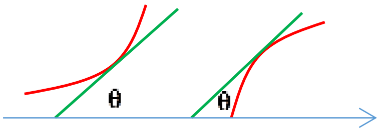
مطابق جدول تابع روندی صعودی دارد . یعنی گزینه های ۱ یا ۴ درست است . از طرفی : $\frac{۲۰-۱۲}{۳-۲}>\frac{۲۶-۲۰}{۴-۳}>\frac{۳۰-۲۶}{۵-۴}>\frac{۳۲-۳۰}{۶-۵}$ و این یعنی شیب های خط مماس بر منحنی از چپ به راست کمتر می شود بنابراین گزینه ۴ درست است چون گودی این تابع رو به پایین است .

تابع صعودی و مشتق تابع ، و شیب خط مماس در $x=a$ مثبتند .

تابع مشتق پزیر و مماس پزیر است . معادله خط مماس بر تابع در نقطه $x=a$

$$y-f(a)=f'(a)(x-a) \quad \Rightarrow \quad y=mx+n$$

$$\tan\theta=m=f'(a)>0$$

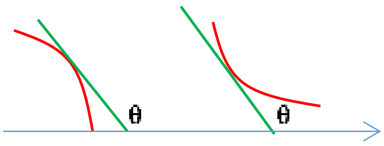


تابع نزولی و مشتق تابع ، و شیب خط مماس در $x=a$ منفی اند .

تابع مشتق پزیر و مماس پزیر است . معادله خط مماس بر تابع در نقطه $x=a$

$$y-f(a)=f'(a)(x-a) \quad \Rightarrow \quad y=mx+n$$

$$\tan\theta=m=f'(a)<0$$

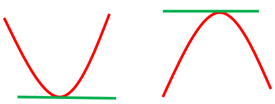


تابع ماکزیمم یا مینیمم دارد و مشتق تابع و شیب خط مماس در $x=a$ صفر اند .

تابع مشتق پزیر و مماس پزیر است . معادله خط مماس بر تابع در نقطه $x=a$

$$y-f(a)=f'(a)(x-a) \xrightarrow{f'(a)=0} y=f(a)$$

$$\tan\theta=m=f'(a)=0$$

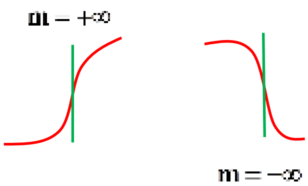


تابع صعودی یا نزولی است و مشتق تابع و شیب خط مماس در $x=a$ بی نهایتند.

تابع مشتق نا پزیر و مماس پزیر است . معادله خط مماس بر تابع در نقطه $x=a$

$$y-f(a)=f'(a)(x-a) \xrightarrow{f'(a)=\infty} x=a$$

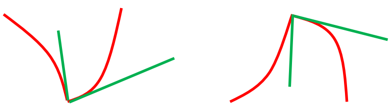
$$\tan\theta=m=f'(a)=\infty$$



تابع در این نقطه زاویه دارد و مشتق تابع وجود ندارد ، ولی شیب دو نیم مماس در $x=a$ قابل تعیین است .

تابع در $x=a$ مشتق ناپزیر و مماس کامل ندارد به این نقطه گوشه گفته می شود

$$f'_+(a)\neq f'_-(a)$$



۳) اگر $\lim\limits_{x\to -۱}\dfrac{f(x)-۴}{x+۱}=-۳$ باشد شیب خط مماس در نقطه .... برابر .... است

☑ پاسخ:

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \Rightarrow \lim_{x\to -۱}\frac{f(x)-۴}{x+۱}=-۳ \Rightarrow a=-۱\ ,\ f(-۱)=۴ \Rightarrow A(-۱,۴)\ ,\ f'(-۱)=-۳$$

۴) شیب خطی که نقاط A , B با طول های ۱ و $x+۱$ روی تابع مشتق پذیر $f(x)$ را به هم وصل می کند برابر است با : $\dfrac{\sin(x-\frac{\pi}{۲})}{۳x+۲}$

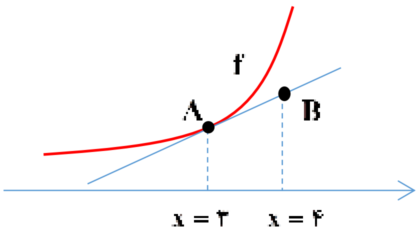
شیب خط مماس بر این تابع در $x=۱$ را تعیین کنید .

☑ پاسخ:

$$\text{شیب خط AB}=\frac{f(x+۱)-f(۱)}{(x+۱)-۱}=\frac{f(x+۱)-f(۱)}{x}=\frac{\sin(x-\frac{\pi}{۲})}{۳x+۲}=\frac{-\cos x}{۳x+۲}$$

$$\text{شیب خط مماس}=\lim_{x\to ۰}\frac{f(x+۱)-f(۱)}{(x+۱)-۱}=\lim_{x\to ۰}\frac{f(x+۱)-f(۱)}{x}=\lim_{x\to ۰}\frac{-\cos x}{۳x+۲}=\frac{-۱}{۰+۲}=\frac{-۱}{۲}$$

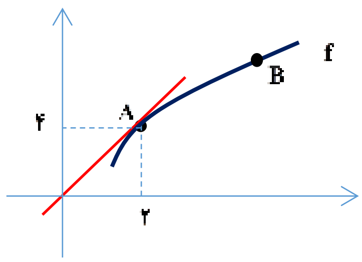
۵) در نمودار زیر خط مماس بر نمودار f در نقطه ای به طول $x=۳$ رسم شده است . اگر $f(۳)=۷$, $f'(۳)=۶$ مختصات نقطه B را مشخص کنید .



☑ پاسخ: اول معادله خط مماس بر منحنی در نقطه A را به دست می آوریم .

$$y-۷=۶(x-۳) \Rightarrow y=۶x-۱۱ \Rightarrow y_B=۶(۴)-۱۱=۱۳$$

۶) نمودار تابع f به صورت زیر رسم شده است . اگر خط d در نقطه A بر نمودار تابع f مماس باشد . (دی ۱۴۰۱)



الف) حاصل $\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{f(x)-f(۲)}{x-۲}$ را بیابید .

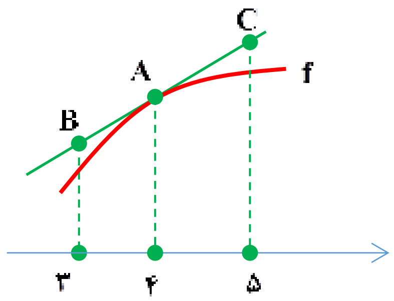
ب) شیب خط های مماس در نقاط A , B را مقایسه کنید .

☑ پاسخ:

الف) $\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=f'(۲)=\tan\alpha=\dfrac{۴}{۲}=۲$

ب) $m_A > m_B$

۷) برای تابع f در شکل مقابل داریم $f'(۴)=۱/۵$, $f(۴)=۲۴$ با توجه به شکل مختصات نقاط B , C را بیابید (خرداد ۱۴۰۰)



☑ پاسخ:

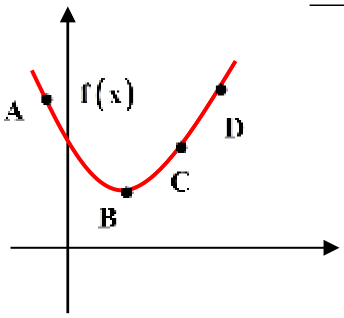
معادله خط مماس بر منحنی در نقطه $x=a$: $y-f(a)=f'(a)(x-a)$

معادله خط مماس بر منحنی در نقطه $x=۴$: $y-۲۴=۱/۵(x-۴)$

$y_B=۱/۵(۳-۴)+۲۴=۲۲/۵$

$y_C=۱/۵(۵-۴)+۲۴=۲۵/۵$

۸) نمودار تابع $f(x)$ به صورت مقابل است . اگر m شیب خط مماس در هر نقطه باشد کدام گزینه درست نیست ؟



۱) $m_A < ۰$

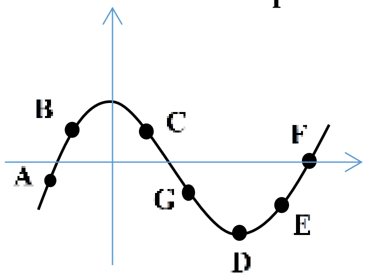
۲) $m_D > m_B$

۳) $m_C < m_A$

۴) $m_B = ۰$

☑ پاسخ: گزینه ۳ : چون مشتق در نقطه C مثبت ولی درنقطه A منفی است پس : $m_A < m_C$

۹) شکل مقابل مربوط به نمودار تابع f است در چند نقطه مشخص شده روی نمودار تابع رابطه $\frac{f}{f'} > ۰$ برقرار است ؟



۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۴

☑ پاسخ:

$\frac{f}{f'} > ۰$ این یعنی نقاطی که مقدار تابع و مشتق تابع هم علامت باشند . یعنی هر هم زمان مثبت و یا هم زمان منفی باشند .

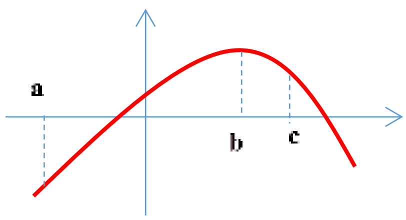
در نقطه A مقدار تابع منفیه ولی مشتق تابع مثبته — در نقطه B مقدار و مشتق تابع هر دو مثبتند

در نقطه C مقدار تابع مثبته و مشتق منفیه — در D مقدار تابع منفی و مشتق تابع صفره

در نقطه E مقدار تابع منفی ولی مشتقش مثبته — در نقطه F مقدار تابع صفر و مشتق تابع مثبته

در نقطه G هم مقدار تابع منفیه و هم چون نزولی مشتق منفیه پس نقاط B,G در شرایط مسئله صدق می کنند .

۱۰) با توجه به نمودار تابع f کدامیک از گزینه ها درست است (خرداد ۱۴۰۱)

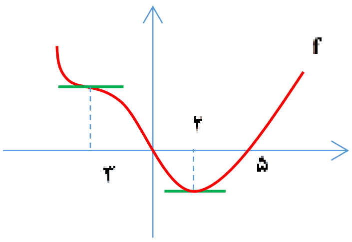


الف) $m_c > m_b > m_a$ — ب) $m_b > m_a > m_c$

پ) $m_a > m_b > m_c$ — ت) $m_a > m_c > m_b$

☑ پاسخ: گزینه پ درست است

۱۱) اگر نمودار تابع $f(x)$ شکل رو به رو باشد در کدام بازه $f'(x) \leq ۰$ است ؟

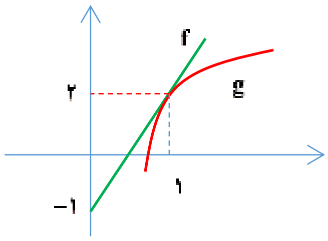


☑ پاسخ:

تابع هر جا که روندی نزولی دارد مشتق آن منفی است

پس بازه $(-\infty , ۲]$ جواب مسئله خواهد بود .

۱۲) در شکل مقابل حاصل $f'(۱)+g'(۱)$ را تعیین کنید .

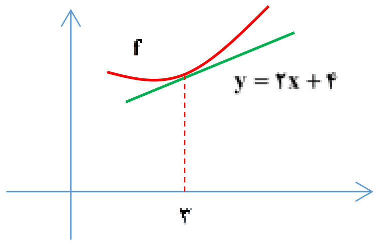


☑ پاسخ:

معادله خط مماس در نقطه $x=۱$ بر منحنی g یعنی تابع f :
$$y-۲=\frac{۲-(-۱)}{۱-۰}(x-۱)=۳x-۳ \quad \Rightarrow \quad f(x)=۳x-۱$$

این خط در نقطه $x=۱$ هم با g هم عرض است و هم ، هم شیب است یعنی : $\begin{matrix} f(۱)=۲=g(۱)=۲ \\ f'(۱)=۳=g'(۱) \end{matrix}$ در نتیجه $f'(۱)+g'(۱)=۳+۳=۶$

۱۳) با توجه به شکل مقابل کدام گزینه صحیح است ؟



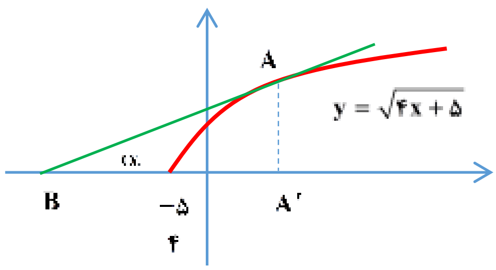
۱) $\lim\limits_{x\to ۳}\frac{f(x)-۶}{x-۳}=۱۰$　　۲) $\lim\limits_{x\to ۳}\frac{f(x)-۱۰}{x-۳}=۴$

۳) $\lim\limits_{x\to ۳}\frac{f(x)-۱۰}{x-۳}=۲$　　۴) $\lim\limits_{x\to ۳}\frac{f(x)-۳}{x-۳}=۲$

☑ پاسخ: مطابق شکل خط در $x=۳$ بر منحنی مماس است یعنی :

$$f'(۳)=\lim_{x\to ۳}\frac{f(x)-f(۳)}{x-۳}=\lim_{x\to ۳}\frac{f(x)-(۲(۳)+۴)}{x-۳}=\lim_{x\to ۳}\frac{f(x)-۱۰}{x-۳}=۲$$

۱۴) در نقطه A به طول $x=۱$ روی منحنی $y=\sqrt{۴x+۵}$ خطی بر منحنی مماس شده است ، امتداد این خط محور x ها را در B قطع کرده است. اگر A' تصویر نقطه A باشد ، اندازه BA' کدام است ؟



☑ پاسخ :

$$\tan\alpha=m_L=\frac{۴}{۲\sqrt{۴x+۵}}\Big|_{x=۱}=\frac{۲}{۳}$$
$$\tan\alpha=\frac{۲}{۳}=\frac{AA'}{BA'}=\frac{۳}{BA'} \quad \Rightarrow \quad BA'=\frac{۹}{۲}$$

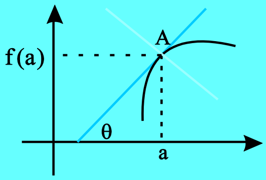
۱۵) اگر $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{h}{f(۱)-f(x+h)}=۳$ و معادله خط قائم بر منحنی f در نقطه $x=۱$ به صورت $ky+۲x=۴$ باشد مقدار k را بدست آورید.

☑ پاسخ :

شیب خط قائم بر منحنی در نقطه $x=۱$:
$$\lim_{h\to ۰}\frac{h}{f(۱)-f(x+h)}=\frac{-h}{f(x+h)-f(۱)}=-\frac{۱}{f'(۱)}=۳ \quad \Rightarrow \quad m'=۳$$

$$ky+۲x=۴ \quad \Rightarrow \quad y=\frac{-۲}{k}x+\frac{۴}{k} \quad \Rightarrow \quad \frac{-۲}{k}=۳ \quad \Rightarrow \quad k=\frac{-۲}{۳}$$

معادله‌ی خط مماس و قائم در نقطه‌ای روی منحنی:



الان دیگه می دانیم اگر خط L در نقطه‌ای به طول a بر منحنی نمایش تابع $y=f(x)$ مماس باشد

شیب خط مماس از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$m=\tan\theta=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$$ شیب خط مماس در نقطه‌ی A

حالا اگه معادله خط مماس و قائم بر تابع رو خواست به شکل زیر عمل کن

روش حل مسئله

۱) اول مختصات نقطه‌ای که می‌خواهیم مماس یا قائم در آن رابنویسیم معلوم کنید. $A\begin{vmatrix} a \\ f(a)\end{vmatrix}$

۲) از تابع $f(x)$ مشتق بگیرید و $f'(a)$ را تعیین کنید این همان شیب خط مماس است. $m=f'(a)$ و

$m'=\frac{-1}{f'(a)}$ شیب خط قائم است. (بعضی وقتا این مشتق رو از راه تعریف می‌خوان)

۳) معادله‌ی خط مماس و معادله‌ی خط قائم به شکل زیر نوشته می‌شوند:

$L:\quad y-f(a)=f'(a)(x-a)$ خط مماس $\quad L':\quad y-f(a)=\frac{-1}{f'(a)}(x-a)$ خط قائم

۱۶) با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع $y=x^2-1$ را در نقطه‌ای به طول ۱ محاسبه نماید. سپس به کمک آن معادله‌ی خط مماس بر منحنی این تابع را در نقطه‌ای به طول ۱ واقع بر منحنی تابع بنویسید. (نهایی)

☑پاسخ:

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1-(1-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)=2$$ مشتق همون شیب خط مماسه

$$A\begin{vmatrix} 1 \\ (1)^2-1=0\end{vmatrix}\quad\Rightarrow\quad L:\quad y-0=2(x-1)$$

۱۷) معادله‌ی خط مماس بر نمودار تابع $y=\frac{x}{x-2}$ را در نقطه‌ی $A(3,3)$ به دست آورید. (نهایی)

☑پاسخ:

$$y'=\frac{-2}{(x-2)^2}\quad\Rightarrow\quad m=y'_{(3)}=-2\quad\Rightarrow\quad y-3=-2(x-3)$$

۱۸) با استفاده از تعریف، مشتق تابع $f(x)=x^3$ را در نقطه a حساب کنید. سپس معادله خط قائم بر نمودار تابع را در نقطه $A(1,1)$ به دست آورید.

☑پاسخ:

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{x^3-a^3}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x^2+ax+a^2)}{x-a}=3a^2$$

$$f(x)=x^3\ \Rightarrow\ f'(x)=3x^2\ \Rightarrow\ f'(1)=3(1)^2=3=m\ \Rightarrow\ m'=\frac{-1}{3}\ \Rightarrow\ L:\ y-1=\frac{-1}{3}(x-1)$$ خط قائم

۱۹) معادله‌ی خط مماس بر تابع $f(x)=\sqrt[3]{x-1}$ در نقطه‌ی $x=1$ را بنویسید.

☑پاسخ:

$$f(x)=\sqrt[3]{x-1} \quad\Rightarrow\quad f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x-1}-0}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

بنابراین خط مماس بر تابع در $x=1$ خطی موازی محور y هاست و معادله‌ی آن همان طول نقطه است. $L: \quad x=1$

۲۰) منحنی تابع $y=x^2+x-1$ محور عرض ها را در نقطه A قطع می کند . معادله خط قائم بر منحنی تابع را در نقطه A بنو یسید .

☑پاسخ:

$$A\left|\begin{array}{l}x=0\\y=-1\end{array}\right. \quad\Rightarrow\quad f'(x)=2x+1 \quad\Rightarrow\quad f'(0)=1=m \quad\Rightarrow\quad m'=\frac{-1}{m}=-1$$

$$L:\ y-(-1)=-1(x-0) \quad\Rightarrow\quad y=-x-1$$

۲۱) نقاطی از نمودار تابع $y=x^3-2x-1$ را تعیین کنید که خط مماس بر منحنی دراین نقاط موازی نیمساز ربع اول و سوم با شد

☑پاسخ:

یعنی نقاطی را باید بیا بیم که مشتق تابع در این نقاط ۱ شود زیرا شیب نیمساز ربع اول و سوم ۱ است . بنابراین داریم :

$$y=x^3-2x-1 \quad\Rightarrow\quad y'=3x^2-2=1 \quad\Rightarrow\quad x^2=1 \quad\Rightarrow\quad x=\pm 1$$

۲۲) نقاطی از منحنی تابع $f(x)=x^3-3x$ را تعیین کنید که خط مماس بر منحنی در آن نقاط موازی خط $y-3x-1=0$ باشد.

☑پاسخ:

$$y=3x+1 \quad\Rightarrow\quad m=3 \quad\Rightarrow\quad f'(x)=3x^2-3=3 \quad\Rightarrow\quad 3x^2=6 \quad\Rightarrow\quad x=\pm\sqrt{2}$$

۲۳) معادله خط مماس بر تابع با ضابطه $f(x)=\frac{4x+6}{x-1}$ در نقطه تلاقی منحنی با نیمساز ناحیه اول را تعیین کنید .

☑پاسخ:

$$f(x)=\frac{4x+6}{x-1}=x \quad\Rightarrow\quad x^2-x=4x+6 \quad\Rightarrow\quad x^2-5x-6=0 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}x=-1\\x=6\end{cases}$$

$$f(x)=\frac{4x+6}{x-1} \quad\Rightarrow\quad f'(x)=\frac{4(x-1)-1(4x+6)}{(x-1)^2}=\frac{-10}{(x-1)^2} \quad\Rightarrow\quad f'(6)=\frac{-10}{25}=\frac{-2}{5}$$

$$y-6=\frac{-2}{5}(x-6)$$

۲۴) عرض از مبدا خط مماس بر منحنی تابع $f(x)=\frac{\sqrt{2x-3}}{x}$ در نقطه به طول $x=2$ را تعیین کنید .

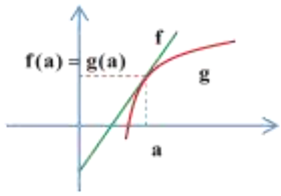
☑پاسخ:

$$f(x)=\frac{\sqrt{2x-3}}{x} \quad\Rightarrow\quad f(2)=\frac{\sqrt{2(2)-3}}{2}=\frac{1}{2} \quad , \quad f'(x)=\frac{\frac{2}{2\sqrt{2x-3}}\times x-(1)\sqrt{2x-3}}{x^2} \quad\Rightarrow\quad f'(2)=\frac{1}{4}$$

$$f(2)=\frac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad y-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}(x-2) \quad\xrightarrow{x=0}\quad y=0$$

نکته

۱) اگر یک خط و یک منحنی و یا (دو منحنی) در $x=a$ بر هم مماس باشند آن گاه :



$$\begin{cases} f(a)=g(a) & \text{هم عرضی دو تابع} \\ f'(a)=g'(a) & \text{هم شیبی دو تابع} \end{cases}$$

۲۵) اگر خط $2x+y=4$ در نقطه ای به طول $x=1$ بر منحنی تابع $y=f(x)$ مماس باشد حاصل $\frac{f(1)}{f'(1)}$ کدام است ؟

۱) ۱   ۲) ۱−   ۳) ۲   ۴) ۲−

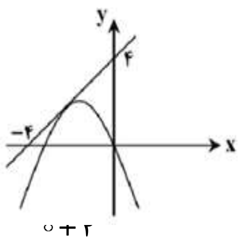
☑ پاسخ: خط مماس بر منحنی در نقطه تماس با منحنی هم عرض و هم شیب است .

$$2x+y=4 \Rightarrow y=-2x+4 \Rightarrow m=-2=f'(1) \quad , \quad f(1)=-2(1)+4=2 \Rightarrow \frac{f(1)}{f'(1)}=\frac{-2}{2}=-1$$

۲۶) در شکل مقابل، خط رسم شده بر نمودار $y=ax-x^2$ مماس است .مقدار a کدام است ؟

۱) $-\frac{15}{4}$ ۲) $-\frac{7}{2}$ ۳) $-\frac{13}{4}$ ۴) -3

☑ پاسخ:



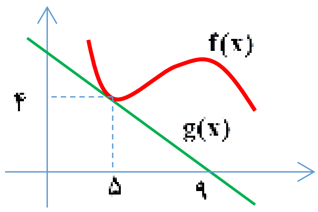
$L: \quad y=x+4$

$$y=ax-x^2=y=x+4 \Rightarrow x^2+(1-a)x+4=0 \xrightarrow{\Delta=0} (1-a)^2-16=0 \Rightarrow |a-1|=4 \Rightarrow \begin{cases} a=-3 \\ a=5 \end{cases}$$

۲۷) در شکل زیر نمودار توابع چند جمله ای $g\,,\,f$ داده شده است . اگر $h(x)=\frac{f(2x-1)}{g(x^2-x)}$ باشد . حاصل $h'(3)$ کدام است ؟

۱) $\frac{-26}{9}$ ۲) $\frac{14}{9}$

۳) ۱۴   ۴) $\frac{-4}{3}$



☑ پاسخ:

معادله خط مماس $\quad y-0=\frac{4-0}{5-9}(x-9)=-x+9 \Rightarrow g(x)=-x+9 \Rightarrow f'(5)=-1 \quad$ شیب خط مماس

$$h(x)=\frac{f(2x-1)}{g(x^2-x)} \Rightarrow h'(x)=\frac{2f'(2x-1)\times g(x^2-x)-(2x-1)g'(x^2-x)\times f(2x-1)}{(g(x^2-x))^2}$$

$$h'(3)=\frac{2f'(5)\times g(6)-(5)g'(6)\times f(5)}{(g(6))^2}=\frac{2(-1)(3)-(5)(-1)(4)}{(3)^2}=\frac{14}{9}$$

مشتق تابع در یک نقطه: فرض کنید تابع $f(x)$ در یک همسایگی نقطه‌ی a تعریف شده باشد. اگر حد $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ موجود باشد، یعنی عدد شود

اصطلاحاً می‌گوییم تابع $f(x)$ در $x=a$ مشتق پذیر است و مقدار آن را با نماد $f'(a)$ نمایش می‌دهیم.

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

تعریف دیگری که با تعریف فوق هم ارز است به صورت زیر است:

$$f'(a)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

تذکر: اگر این حد عدد یکتایی نشود و یا وجود نداشته باشد، تابع $f(x)$ در نقطه‌ی $x=a$ مشتق ناپذیر است.

برای محاسبه مشتق تابع در یک نقطه از یکی از روش های زیر استفاده می‌شود.

$$۱)f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \qquad ۲)f'(a)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

➢ در روش اول به شکل زیر عمل می‌کنیم:

۱.محاسبه $f(a)$ ۲.تعیین $f(x)-f(a)$ ۳.تشکیل و ساده کردن $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ ۴.محاسبه حد $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ که دارای ابهام $\frac{۰}{۰}$ است و روش های رفع ابهام آن را در حد دیدیم.

➢ در روش دوم به شکل زیر عمل می‌کنیم:

۱.محاسبه $f(a)$ ۲.تعیین $f(a+h)$ ۳.محاسبه $f(a+h)-f(a)$ ۴.محاسبه حد $\lim_{h\to ۰}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ که دارای ابهام $\frac{۰}{۰}$ است.

۲۸) با استفاده از تعریف مشتق، مشتق‌پذیری تابع $f(x)=x|x-۲|$ را در نقطه $x=۲$ مورد بررسی قرار دهید. (نهایی)

☑پاسخ:

$$f'(۲)=\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{x|x-۲|-۰}{x-۲}=\begin{cases}\lim_{x\to ۲^+}\frac{x(x-۲)}{x-۲}=۲=f'(۲^+)\\ \lim_{x\to ۲^-}\frac{-x(x-۲)}{x-۲}=-۲=f'(۲^-)\end{cases}$$

تابع در این نقطه مشتق پذیر نیست. زیرا مشتق چپ و راست آن با هم برابر نیست.

۲۹) با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع $f(x)=x^۲+۱$ را در نقطه‌ی $x=a$ محاسبه کنید. (نهایی)

☑پاسخ:

$$f'(a)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{(a+h)^۲+۱-a^۲-۱}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{a^۲+۲ah+h^۲+۱-a^۲-۱}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{۲ah+h^۲}{h}=\lim_{h\to ۰}۲a+h=۲a$$

۳۰) با استفاده از تعریف، مشتق تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ را در نقطه $x=1$ بررسی کنید.

☑پاسخ:

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1-x}{x}}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{x(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{-1}{x}=-1$$

۳۱) مشتق پذیری تابع $f(x)=\left|x^2-1\right|$ را در نقاط $x=1$ بررسی کنید.

☑پاسخ:

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{\left|x^2-1\right|-0}{x-1}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1}=2=f'_+(1)\\[2ex]\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{-(x-1)(x+1)}{x-1}=-2=f'_-(1)\end{cases}$$

تابع در این نقطه مشتق‌ناپذیر است.

۳۲) مشتق تابع $f(x)=x^3+3x$ را در نقطه‌ی $x=1$ با استفاده از تعریف مشتق بیابید.

☑پاسخ:

راه اول)

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^3+3x-4}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+4)}{(x-1)}=\lim_{x\to 1}x^2+x+4=6$$

راه دوم)

$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^3+3(1+h)-4}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(1+h^3+3h^2+3h)+(3+3h)-4}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h^3+6h+3h^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(h^2+3h+6)}{h}=\lim_{h\to 0}(h^2+3h+6)=6$$

۳۳) با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع $f(x)=\sqrt{4-x}$ را به دست آورید. (نهایی)

☑پاسخ:

گویا کردن

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{4-(x+h)}-\sqrt{4-x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{4-(x+h)}-\sqrt{4-x}}{h}\times\frac{\sqrt{4-(x+h)}+\sqrt{4-x}}{\sqrt{4-(x+h)}+\sqrt{4-x}}=$$

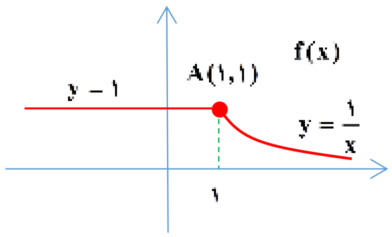
$$=\lim_{h\to 0}\frac{4-(x+h)-4+x}{h\left(\sqrt{4-(x+h)}+\sqrt{4-x}\right)}=\lim_{h\to 0}\frac{-h}{h\left(\sqrt{4-(x+h)}+\sqrt{4-x}\right)}=\frac{-1}{2\sqrt{4-x}}$$

۳۴) با محاسبه مشتق راست و مشتق چپ تابع f در نقطه A نشان دهید که تابع f در نقطه A مشتق پذیر نیست (خرداد ۱۴۰۰)

☑ پاسخ:

می دانیم :

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$



$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{1-1}{x-1}=0 \quad , \quad f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{1}{x}-1}{x-1}=\frac{-\cancel{(x-1)}}{x\cancel{(x-1)}}=-1$$

شرط لازم مشتق پذیری

مشتق راست: در تابع $y=f(x)$ اگر $\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ موجود باشد (عدد شود) این حد را مشتق راست تابع $f(x)$ در $x=a$ نامیده و با نماد $f'_+(a)$ نشان می‌دهند. یادت باشه این حد وقتی قابل محاسبه است که تابع f در $x=a$ پیوستگی راست داشته باشد.

مشتق چپ: در تابع $y=f(x)$ اگر $\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ موجود باشد (عدد شود) این حد را مشتق چپ تابع $f(x)$ در $x=a$ نامیده و با نماد $f'_-(a)$ نشان می‌دهند. بازم یادت باشه این حد وقتی قابل محاسبه است که تابع f در $x=a$ پیوستگی چپ داشته باشد.

هر تابع مشتق پذیر، پیوسته است ولی هر تابع پیوسته‌ای مشتق پذیر نیست.
عملاً پیوستگی شرط لازم مشتق پذیری است ولی کافی نیست.
یعنی توابعی وجود دارند که پیوسته‌اند ولی مشتق پذیر نیستند.

نکته

اگر تابعی در $x=a$ فقط پیوستگی راست داشته باشد در آن نقطه مشتق چپ ندارد و مشتق راست نیز باید بررسی شود و هم‌چنین اگر تابعی فقط پیوستگی چپ داشته باشد در آن نقطه مشتق راست ندارد و مشتق چپ آن باید بررسی شود.

روش حل مسئله

برای حل مسائل مربوط به مشتق پذیری در یک نقطه به روش زیر عمل کنید:

۱) پیوستگی تابع در $x=a$ را بررسی کنید. یعنی باید $\lim\limits_{x\to a^\pm} f(x)=f(a)$ اگر یکی از پیوستگی‌ها برقرار نبود مشتق آن نیز وجود ندارد. (عدم وجود مشتق را بیان کنید. به‌خصوص در توابع قدرمطلقی، چند ضابطه‌ای و براکتی)

۲) مشتق چپ و راست را ازراه تعریف بررسی می‌کنیم. اگرداشته باشیم: $f'(a)=\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ عدد شود می‌گوییم تابع در $x=a$ مشتق پذیر است.

۳۵) ثابت کنید اگر تابع f در $x=a$ مشتق‌پذیر باشد. آن‌گاه تابع f در $x=a$ پیوسته است.

☑پاسخ: کافی است نشان دهیم $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$

$$\lim_{x\to a} f(x)-f(a)=\lim_{x\to a}(x-a)\left(\frac{f(a)-f(a)}{x-a}\right)=\lim_{x\to a}(x-a)\times\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=0\times f'(a)=0$$

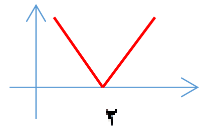
$$\Rightarrow\quad \lim_{x\to a}(f(x)-f(a))=0\quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to a} f(x)=f(a)$$

۳۶) با استفاده از تعریف مشتق، مشتق‌های چپ و راست تابع $f(x)=|x-2|$ را در $x=2$ در صورت وجود بیابید. (نهایی)

☑پاسخ: تابع در $x=2$ مشتق‌پذیر نیست.

بررسی پیوستگی

$$\lim_{x\to 2}|x-2|=0=f(2) \quad\Rightarrow\quad f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{|x-2|-0}{x-2}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x-2}{x-2}=1=f'_+(2)\\[2ex] \lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{-(x-2)}{x-2}=-1=f'_-(2)\end{cases}$$



۳۷) مشتق پذیری تابع مقابل را در نقطه $x=-1$ بررسی کنید. (دی ماه ۱۴۰۰)

$$f(x)=\begin{cases}x^2+3 & x\geq -1\\ 2x+6 & x<-1\end{cases}$$

☑پاسخ:

$$\lim_{x\to -1^+} x^2+3=4=\lim_{x\to -1^-} 2x+6=f(1) \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}f'_+(-1)=\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{x^2+3-4}{x-(-1)}=\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{(x+1)(x-1)}{x+1}=-2\\[2ex] f'_-(-1)=\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{2x+6-4}{x-(-1)}=\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{2(x+1)}{(x+1)}=2\end{cases}$$

تابع در $x=-1$ مشتق ناپذیر است.

۳۸) تا بع $f(x)=\begin{cases}(x^2-1)\sin\frac{x}{2} & x>1\\ 1 & x=1\\ x^2-1 & x<1\end{cases}$ تعریف شده کدام یک از گزاره های زیر درست ا ست؟

۱) f در $x=1$ مشتق دارد.
۲) f در $x=1$ مشتق راست دارد ولی مشتق چپ ندارد.
۳) f در $x=1$ مشتق چپ دارد و لی مشتق راست ندارد.
۴) f در $x=1$ مشتق چپ و را ست ندارد.

☑پاسخ: $\lim_{x\to 1^\pm} f(x)=0\neq f(1)=1$ تابع نه پیوستگی چپ دارد نه پیوستگی راست پس نه مشتق چپ دارد و نه مشتق راست

۳۹) با فرض $f(x)=\begin{cases}\frac{x-1}{1+\sqrt{x}} & x<1\\ bx+a & x>1\end{cases}$ اگر حاصل $f'_+(1)-f'_-(1)=\frac{3}{2}$ باشد. a کدام است؟

۱) -2 ۲) 2 ۳) 3 ۴) -3

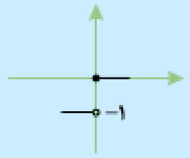
☑پاسخ: شرط پیوستگی

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\dfrac{x-1}{1+\sqrt{x}}\right)=(\sqrt{x}-1)=0\\[2ex] \lim\limits_{x\to 1^+}(bx+a)=b+a\end{cases} \quad\Rightarrow\quad b+a=0$$

$$f'_-(1)=\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)_{x=1}=\frac{1}{2} \quad,\quad f'_+(1)=b \quad\Rightarrow\quad b-\frac{1}{2}=\frac{3}{2} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}b=2\\ \boxed{a=-2}\end{cases}$$

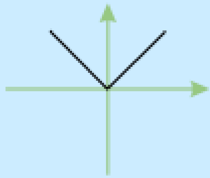
در حالات زیر می‌گوییم مشتق وجود ندارد:

۱) تابع در $x=a$ پیوسته نباشد مانند: $f(x)=[x]$ که در نقطه‌ی $x=0$ پیوستگی چپ ندارد، بنابراین مشتق چپ نخواهد داشت. در نتیجه مشتق‌پذیر نمی‌باشد.



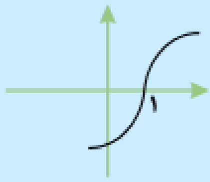
$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{[x]-0}{x}=\frac{0 \text{ مطلق}}{0 \text{ حدی}}=0$$

۲) مشتق چپ و راست با هم برابر نباشند، مانند: $f(x)=|x|$ در نقطه‌ی $x=0$. تابع در این نقطه پیوسته است ولی مشتق‌پذیر نیست.



$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{|x|-0}{x-0}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{|x|-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{x}=1=f'_+(0)\\[2mm] \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{|x|-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-x}{x}=-1=f'_-(0)\end{cases}$$

۳) مشتق چپ یا راست بی‌نهایت شود. مانند: $f(x)=\sqrt[3]{x-1}$ در نقطه‌ی $x=1$.



$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x-1}}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

۴) مشتق تابع قابل تعیین نباشد. مانند: $f(x)=\begin{cases}x\cos\dfrac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ در نقطه‌ی $x=0$

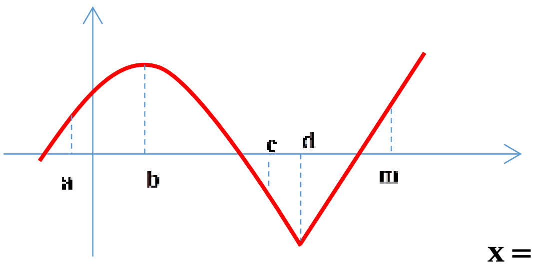
$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos\frac{1}{x}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}=\cos\infty \quad \text{قابل تعیین نیست}$$

۴۰) با توجه به نمودار تابع $f(x)$ به سوالات زیر پاسخ دهید . (خرداد ۱۴۰۰)

الف) طول نقطه ای که مشتق در آن صفر است را بنویسید .

ب) طول نقطه گوشه تابع را بنویسید .

پ) طول نقطه ای که در آن مقدار تابع و شیب خط هر دو منفی است .



☑پاسخ:

الف) $x=b$ ب) $x=d$ پ) $x=c$

۴۱) در تابع با ضابطه ی $f(x)=\begin{cases}x-\dfrac{1}{x} & x\geq 1\\ x^2+ax+b & x<1\end{cases}$ ، مقدار $f'(1)$ موجود است. $f(1-\sqrt{2})$ کدام است؟

۱) $3-\sqrt{2}$ ۲) $2-\sqrt{2}$ ۳) $2-2\sqrt{2}$ ۴) $3-2\sqrt{2}$

☑پاسخ:

$$f(1^+)=f(1^-)=f(1) \Rightarrow 0=1+a+b \quad , \quad f'(1^+)=f'(1^-) \Rightarrow 1+\frac{1}{x^2}\Big|_{x=1}=2x+a\Big|_{x=1} \Rightarrow 2=2+a$$

$$a=0 \quad , \quad b=-1 \quad f(x)=f(x)=\begin{cases}x-\dfrac{1}{x} & x\geq 1\\ x^2-1 & x<1\end{cases} \Rightarrow f(1-\sqrt{2})=(1-\sqrt{2})^2-1=2-2\sqrt{2}$$

۴۲) پاسخ هر عبارت ستون A را از بین گزینه‌های ستون B انتخاب کنید.

ستون A
۱) دامنه‌ی مشتق پذیری تابع $y=\sqrt{1-2x}$ کدام است؟
۲) مشتق چپ تابع $y=[2x]$ در نقطه‌ی $x=1$ کدام است؟
۳) در تابع $y=\lvert 2-x\rvert$ حاصل $f'_+(2)+f'_-(2)$ کدام است؟

ستون B	
الف) ۱	د) صفر
ب) $(\frac{1}{2},+\infty)$	هـ) ۴
ج) وجود ندارد	و) $(-\infty,\frac{1}{2})$

☑پاسخ:

۱) گزینه‌ی «و» صحیح است.

$$1-2x\geq 0 \Rightarrow D_f=\left(-\infty,\frac{1}{2}\right] \Rightarrow f'(x)=\frac{-2}{2\sqrt{1-2x}} \Rightarrow D_{f'}=(-\infty,\frac{1}{2})$$

۲) گزینه‌ی «ج» صحیح است.تابع در $x=1$ پیوستگی چپ ندارد، بنابراین مشتق چپ آن وجود ندارد.

$$\lim_{x\to 1^-}[2x]=[2^-]=1\neq f(1)=2$$

۳) گزینه‌ی «د» صحیح است.

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{\lvert 2-x\rvert-0}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\lvert x-2\rvert}{x-2}=\begin{cases}\lim_{x\to 2^+}\frac{\lvert x-2\rvert}{x-2}=1\\ \lim_{x\to 2^-}\frac{\lvert x-2\rvert}{x-2}=-1\end{cases} \Rightarrow f'_+(2)+f'_-(2)=0$$

۴۳)درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را تعیین کنید.

الف) شرط لازم و کافی برای آن‌که تابع $f(x)$ در $x=a$ مشتق‌پذیر باشد، آن است که در این نقطه پیوسته باشد. نادرست

پیوستگی فقط شرط لازم مشتق پذیری است

ب) هر تابع مشتق پذیر، پیوسته است ولی هر تابع پیوسته‌ای مشتق پذیر نیست. درست

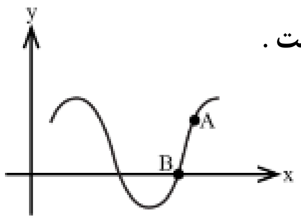
پ) شیب خط مماس بر منحنی در نقطه تماس برابر با مشتق تابع در نقطه تماس است . درست

ت) اگر خط $x=a$ مماس بر منحنی تابع $f(x)$ در نقطه $(a,f(a))$ باشد آن گاه $f'(a)$ موجود است . نادرست

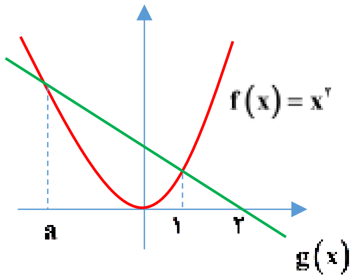
وقتی خط مماس بر منحنی قائم است یعنی مشتق تابع در این نقطه بی نهایت است

ث) در شکل روبه‌رو، شیب خط مماس در نقطه‌ی A از شیب خط مماس در نقطه‌ی B بیش‌تر است .

نادرست چون وقتی گودی تابع به سمت پایین باشد از چپ به راست مشتق کاهش می یابد



۴۴) با توجه به نمودار زیر مشتق تابع $\frac{g(x)}{f(x)}$ در نقطه $x=a$ کدام است ؟



۱) $\frac{-۳}{۴}$ ۲) $\frac{۴}{۳}$ ۳) $\frac{-۴}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

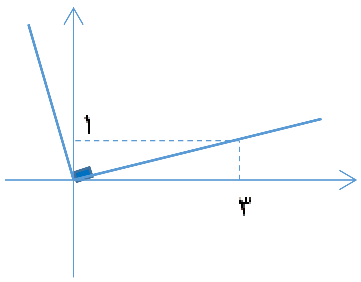
☑پاسخ:

$$y-۰=\frac{۱-۰}{۱-۲}(x-۲) \Rightarrow y=-x+۲ \Rightarrow g(x)=-x+۲ \Rightarrow g'(x)=-۱ \ , \ f'(x)=۲x$$

$$x^۲=-x+۲ \Rightarrow x^۲+x-۲=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=-۲=a \\ x=۱ \end{cases}$$

$$\left(\frac{g(x)}{f(x)}\right)'_{a=-۲}=\frac{g'(a)f(a)-f'(a)g(a)}{f^۲(a)}=\frac{(-۱)\times(۴)-(-۴)\times(۴)}{(۴)^۲}=\frac{۳}{۴}$$

۴۵) نمودار تابع $y=f(x)$ شکل مقابل است ، حاصل $f'(۲)+f'(-۱)+f'_-(۰)$ کدام است ؟



☑پاسخ:

تابع شامل دو نیم خط است که در مبداء بر هم عمودند و داریم : $\begin{cases} x\geq ۰ \Rightarrow m=\frac{۱}{۳} \\ x<۰ \Rightarrow m'=-۳ \end{cases}$

$$y=\begin{cases} \frac{۱}{۳}x & x\geq ۰ \\ -۳x & x<۰ \end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases} \frac{۱}{۳} & x>۰ \\ -۳ & x<۰ \end{cases} \Rightarrow f'(۲)+f'(-۱)+f'_-(۰)=\frac{۱}{۳}+(-۳)+(-۳)=\frac{-۱۷}{۳}$$

مشتق تابع و تابع مشتق

فرض کنید تابع f در بازه ی (a,b) تعریف شده باشد در این صورت اگر $f'(x)$ در هر نقطه $x\in(a,b)$ حد $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$ موجود و متناهی باشد تابع $f'(x)$ تعریف شده ا ست ، بنابراین دامنه ی $f'(x)$ عبارت است از :

$$D_{f'}=\left\{x\in D_f \;\middle|\; \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad \text{موجود و متناهی}\right\}$$

۴۶) دامنه‌ی تابع مشتق تابع $f(x)=\sqrt{x+1}$ را تعیین کنید.

☑پاسخ:

$$D_f=[-1,+\infty) \quad , \quad f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \quad \Rightarrow \quad D_{f'}=[-1,+\infty)-\{-1\}=(-1,+\infty)$$

ریشه‌ی زیر رادیکال و مفرج کسر مشتق

۴۷) تابع مشتق تابع با ضابطه‌ی $f(x)=|2x-1|$ را تعیین نموده و دامنه‌ی آن را بنویسید.

☑پاسخ: تابع در تمام مجموعه اعداد حقیقی پیوسته است. خب میریم سراغ مشتق پذیری

$$f(x)=|2x-1|=\begin{cases}2x-1 & x\ge \frac{1}{2}\\ -2x+1 & x<\frac{1}{2}\end{cases} \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\begin{cases}2 & x>\frac{1}{2}\\ -2 & x<\frac{1}{2}\end{cases}$$

البتّه می تونیم از راه تعریف مشتّق هم بریم

$$f'_+(\tfrac{1}{2})=2\neq f'_-(\tfrac{1}{2})=-2 \quad \Rightarrow \quad D_{f'}=R-\left\{\frac{1}{2}\right\}$$

در این نقطه مشتق پذیر نیست.

۴۸) مشتق توابع زیر را حساب کنید. در کدام نقطه از دامنه تابع، مشتق وجود ندارد.

۱) $f(x)=\sqrt[3]{x}$ ۲) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2}{1+x^2}}$ ۳) $f(x)=\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}$

☑پاسخ:

$$1)\, f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \quad \Rightarrow \quad D_{f'}=R-\{0\}$$

$$2)\, f'(x)=\frac{\frac{2x}{(x^2+1)^2}}{2\sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}}}=\frac{x}{(x^2+1)^2\sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}}} \quad \Rightarrow \quad D_{f'}=R-\{0\}$$

$$3)\, f'(x)=\frac{\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{2\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}}=\frac{x}{2\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}} \quad \Rightarrow \quad D_{f'}=D_f=R$$

۴۹) تابع با ضابطه ی $f(x)=\begin{cases} ax^۲+bx & x\ge ۱\\ x^۳ & x<۱\end{cases}$ مفروض ا ست ، با فرض $D_f=D_{f'}$ مقدار عددی $a-b$ کدام ا ست ؟

۱) ۳　　۲) ۲　　۳) ۱　　۴) ۴

☑پاسخ:

دامنه تابع مشتق با دامنه تابع برابر است یعنی تابع باید در تمام دامنه تابع مشتق پذیر باشد ، به خصوص نقطه ی مرزی دامنه $x=۱$

اول بررسی پیوستگی　$ax^۲+bx_{|x=۱}=x^۳{}_{|x=۱} \Rightarrow a+b=۱$

$f'_-(۱)=۲a(۱)+b=f'_+(۱)=۳(۱)^۲ \Rightarrow ۲a+b=۳$

$a=۲ \ ,\ b=-۱ \Rightarrow a-b=۳$

۵۰)در جاهای خالی عبارت مناسب قرار دهید:

الف) دامنه‌ی مشتق پذیری تابع $f(x)=\sqrt{x}$ برابر است با ....

ب) شیب خط مماس بر نمودار تابع $g(x)=\frac{۱}{x}$ در $x=۱$ برابر است با ....

☑پاسخ:

الف) $f(x)=\sqrt{x} \Rightarrow D_f=[۰,+\infty)$　　　$f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x}} \Rightarrow D_{f'}=(۰,+\infty)$

ب) $g'(x)=\frac{-۱}{x^۲} \Rightarrow m=g'(۱)=-۱$

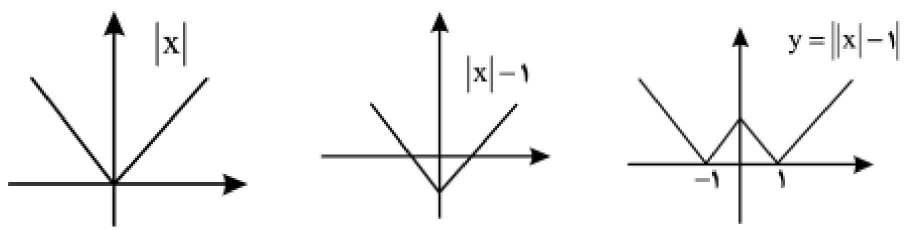
۵۱) دامنه و ضابطه تابع مشتق تابع $f(x)=[x]$ را تعیین کنید .

☑پاسخ: تابع در تمام نقاط با طول صحیح پیوستگی راست دارد ولی چپ ندارد در مجموع نا پیوسته است . در نتیجه مشتق ناپذیر است ولی در سایر نقاط پیوسته و مشتق پذیر و مشتقش صفر است .

$$f(x)=[x] \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\begin{cases} ۰ & x\notin \mathbb{Z}\\ \text{وجود ندارد} & x\in \mathbb{Z}\end{cases}$$

۵۲) دامنه مشتق تابع $f(x)=||x|-۱|$ را تعیین کنید .

☑پاسخ: *تابع در سه نقطه‌ی* $x=۱$, $x=۰$, $x=-۱$ *زاویه‌دار است بنابراین مشتق ناپذیر است.*



نقطه ضعف توابع قدر مطلقی در مشتق ریشه های مرتبه اول داخل قدر مطلقند تابع در این نقاط گوشه یا زاویه دارست و مشتق چپ و راست در این نقاط دو عدد قرینه می شود .　پس :　$D_{f'}=\mathbb{R}-\{-۱,۰,۱\}$

قضایای مشتق

اگر f, g هر دو در نقطه $x=a$ مشتق پذیر با شند ، آنگاه توابع $f\pm g$, kf, $f\times g$ نیز در $x=a$ مشتق پذیرند و

۱) $(f\pm g)'(a)=f'(a)\pm g'(a)$

۲) $(kf)'(a)=kf'(a)$

۳) $(f\times g)'(a)=f'(a)g(a)+g'(a)f(a)$

اگر f و g در $x=a$ مشتق پذیر و g در یک همسایگی a مخا لف صفر با شد آنگاه :

۱) $\left(\frac{1}{g}\right)'(a)=\frac{-g'(a)}{g^{2}(a)}$

۲) $\left(\frac{f}{g}\right)'(a)=\frac{f'(a)g(a)-g'(a)f(a)}{g^{2}(a)}$

۵۳) فرض کنید $f(x)$ تابعی مشتق‌پذیر و a عددی حقیقی باشد با محاسبه و حدگیری نشان دهید تابع $g(x)=f(ax)$ نیز مشتق پذیر و $g'(x)=af'(ax)$ می‌باشد.

☑پاسخ:

$$g'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(ax+ah)-f(ax)}{h}=(a)\lim_{h\to 0}\frac{f(ax+ah)-f(ax)}{ah}=af'(ax)$$

۵۴) اگر f,g در نقطه‌ی $x=a$ مشتق پذیر باشند، نشان دهید.

$$(f\times g)'=f'(a)g(a)+g'(a)f(a)$$

☑پاسخ:

$$(f\times g)'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f\times g(x)-f\times g(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)g(x)-f(a)g(x)+f(a)g(x)-f(a)g(a)}{x-a}=$$

$$\lim_{x\to a}\frac{(f(x)-f(a))g(x)+(g(x)-g(a))f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}g(x)+\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}f(a)=$$

$$f'(a)g(a)+g'(a)f(a)$$

۵۵) اگر توابع f,g مشتق پذیر باشند و $f(2)=3$, $f'(2)=5$, $g(2)=8$, $g'(2)=-6$ حاصل $(f\times g)'(2)$ را به دست آورید
(خرداد ۱۴۰۱)

☑پاسخ:

$$(f\times g)'_{(2)}=f'(2)g(2)+g'(2)f(2)=5\times 8+(-6)\times 3=22$$

۵۶) اگر توابع g , f مشتق پذیر باشند و $f(۳)=۵$, $f'(۳)=۴$, $g(۳)=-۴$, $g'(۳)=۳$ حاصل $(\frac{g}{f})'(۳)$ را به دست آورید .

☑پاسخ:

$$\left(\frac{g}{f}\right)'(۳)=\frac{g'(۳)f(۳)-f'(۳)g(۳)}{f^{۲}(۳)}=\frac{(۳)\times(۵)-(۴)\times(-۴)}{۵^{۲}}=\frac{۳۱}{۲۵}$$

۵۷) تابع f در $x=a$ مشتق پذیر و $f(a)\neq ۰$ ثابت کنید:

$$\left(\frac{۱}{f(x)}\right)'(a)=-\frac{f'(a)}{f^{۲}(a)}$$

☑پاسخ:

$$\left(\frac{۱}{f(x)}\right)'(a)=\lim_{x\to a}\frac{\left(\frac{۱}{f(x)}\right)-\left(\frac{۱}{f(a)}\right)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{f(a)-f(x)}{f(x)f(a)}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{-(f(x)-f(a))}{(x-a)f(x)f(a)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\times\frac{-۱}{f(a)f(a)}$$

$$=f'(a)\times\frac{-۱}{f(a)f(a)}=\frac{-f'(a)}{f^{۲}(a)}$$

۵۸) اگر $f(x)=\frac{۱}{x^{۲}+x+۱}$, $g(x)=x^{۳}-۱$ با شد ، حاصل $f'g+g'f$ را به دست آورید .

☑ پاسخ :

بعضی وقتا بهتره اول حاصل ضرب یا تقسیم رو بریم بعد ساده کنیم در نهایت مشتق بگیریم دقت کن

$$f'g+g'f=(f\times g)' \Rightarrow f\times g=\frac{x^{۳}-۱}{x^{۲}+x+۱}=\frac{(x-۱)(x^{۲}+x+۱)}{(x^{۲}+x+۱)}=(x-۱)\Rightarrow f'g+g'f=(x-۱)'=۱$$

۵۹) اگر $g(x)=\frac{x-\sqrt{x}}{x^{۲}+۶x+۹}$, $f(x)=\frac{۱}{x+۳}$ آن گاه حاصل $\frac{g'f'-f''g}{(f')^{۲}}$ در $x=۴$ کدام ا ست ؟

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{-۳}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) صفر

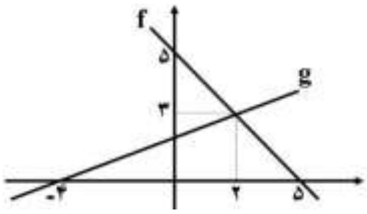
☑ پاسخ :

اول باید تشخیص بدیم مشتق داده شده مشتق چه عبارتیه بعد که فهمیدیم ، اون عبارت رو بسازیم تا جای ممکن ساده کنیم بعد مشتق بگیریم

$$f(x)=\frac{۱}{x+۳} \quad f'(x)=\frac{-۱}{(x+۳)^{۲}} \quad , \quad g(x)=\frac{x-\sqrt{x}}{x^{۲}+۶x+۹}=\frac{x-\sqrt{x}}{(x+۳)^{۲}}$$

$$\frac{g'f'-f''g}{(f')^{۲}}=\left(\frac{g}{f'}\right)'=\left(\frac{\frac{x-\sqrt{x}}{(x+۳)^{۲}}}{\frac{-۱}{(x+۳)^{۲}}}\right)'=(\sqrt{x}-x)'=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}-۱ \quad\Rightarrow\quad f(۴)=\frac{۱}{۲\sqrt{۴}}-۱=-\frac{۳}{۴}$$

۶۰) نمودار توابع f , g به صورت مقابل است، حاصل $(\frac{f}{g})'(۲)$ کدام است



۱) $-\frac{۱}{۳}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$

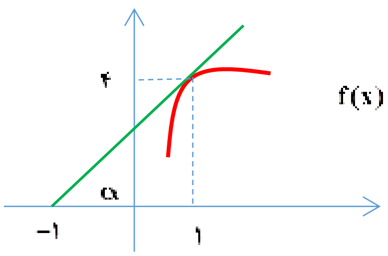
۳) -۳ ۴) -۲

☑ پاسخ :

$$m(f)=f'(x)=\frac{۵-۰}{۰-۵}=-۱ \quad , \quad m(g)=g'(x)=\frac{۳-۰}{۲-(-۴)}=\frac{۱}{۲}$$

$$(\frac{f}{g})'(۲)=\frac{f'(۲)\times g(۲)-g'(۲)\times f(۲)}{(g(۲))^۲}=\frac{(-۱)(۳)-(\frac{۱}{۲})(۳)}{(۳)^۲}=\frac{-۴/۵}{۹}=\frac{۱}{۲}$$

۶۱) با توجه به شکل اگر $g(x)=\frac{x^۲}{f(x)}$ آنگاه $g'(۱)$ کدام است ؟



☑ پاسخ :

$$\tan\alpha=m=\frac{۴}{۲}=۲ \quad \Rightarrow \quad f'(۱)=۲$$

$$y'=\frac{۲xf(x)-x^۲f'(x)}{f^۲(x)} \quad \Rightarrow \quad y'_{(۱)}=\frac{۲(۱)f(۱)-f'(۱)}{f^۲(۱)}=\frac{۸-۲}{۱۶}=\frac{۳}{۸}$$

۶۲) خط d در نقطه $(-۱,۵)$ بر نمودار تابع f مماس است . اگر شیب خط d برابر $\frac{-۱}{۲}$ و $g(x)=\sqrt[۳]{x}\,f(x)$ باشد ، مقدار $g'(-۱)$ کدام است ؟

۱) $\frac{-۴}{۳}$ ۲) $\frac{-۱}{۳}$ ۳) $\frac{۷}{۶}$ ۴) $\frac{۱۳}{۶}$ (کنکور دی ۱۴۰۱)

☑ پاسخ: با توجه به فرض مسئله داریم : $f'(-۱)=\frac{-۱}{۲}$, $f(-۱)=۵$ در نتیجه :

$$g'(-۱)=\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}\times f(x)+\sqrt[۳]{x}\times f'(x)\Big|_{x=-۱}=\frac{۱}{۳}\times ۵+(-۱)\times\frac{-۱}{۲}=\frac{۱۳}{۶}$$

۶۳) اگر منحنی $y=x^۳+ax^۲+bx+۶$ بر خط $y=۲x+۱$ در $x=-۱$ مماس باشد ، b کدام است ؟

۱) ۱۳ ۲) ۷ ۳) ۱۲ ۴) ۶

☑پاسخ:

$$\left(x^۳+ax^۲+bx+۶\right)_{x=-۱}=\left(۲x+۱\right)_{x=-۱} \quad \Rightarrow \quad a-b=-۶$$

$$\left(x^۳+ax^۲+bx+۶\right)'_{x=-۱}=\left(۲x+۱\right)'_{x=-۱} \quad \Rightarrow \quad -۲a+b=-۱$$

$a=۷ \quad , \quad b=۱۳$

روش های محاسبه ی مشتق توابع:

$f(x)=c \Rightarrow f'(x)=0$

مشتق تابع ثابت صفره

$f(x)=\sin^2 x+\cos^2 x \Rightarrow f'(x)=(1)'=0$

$f(x)=ax^n \Rightarrow f'(x)=nax^{n-1}$

$f(x)=au^n \Rightarrow f'(x)=anu^{n-1}u'$

$f(x)=2x^7 \Rightarrow f'(x)=14x^6$

$h(x)=f(x)\pm g(x) \Rightarrow h'(x)=f'(x)\pm g'(x)$

$h(x)=f(x)\times g(x) \Rightarrow h'(x)=f'(x)g(x)+g'(x)f(x)$

مهمتر

$f(x)=(2x^2+3x-1)(4x^3+2x^2+3) \Rightarrow f'(x)=(4x+3)(4x^3+2x^2+3)+(12x^2+4x)(2x^2+3x-1)$

$h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow h'(x)=\dfrac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{g^2(x)}$

مهم

$h(x)=\dfrac{x^2+1}{x-1} \Rightarrow h'(x)=\dfrac{2x(x-1)-(1)(x^2+1)}{(x-1)^2}$

$f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

$f(x)=\dfrac{au+b}{cu+d} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{ad-bc}{(cu+d)^2}u'$

$f(x)=\sqrt[n]{u^m} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{mu'}{n\sqrt[n]{u^{n-m}}}$

نکته

$y=(\text{عبارت های جبری})^n \rightarrow y'=n\times(\text{مشتق عبارت جبری})\times(\text{عبارت های جبری})^{n-1}$

۶۴) مشتق بگیرید .

۱) $f(x)=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2}(1)x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

توان — مشتق عبارت کسری — عبارت کسری با یک توان کمتر

۲) $f(x)=\left(\dfrac{2x+1}{x-2}\right)^4 \Rightarrow f'(x)=(4)\left(\dfrac{2(x-2)-(1)(2x+1)}{(x-2)^2}\right)\left(\dfrac{2x+1}{x-2}\right)^3$

۳) $f(x)=\dfrac{(3x^2-1)^3}{x+1} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{3(6x)(3x^2-1)^2(x+1)-(3x^2-1)^3(1)}{(x+1)^2}$

۴) $y=\sqrt{x}(2x-1)^5 \Rightarrow y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}(2x-1)^5+5(2)(2x-1)^4\sqrt{x}$

۵) $y=\dfrac{x^2-1}{(3x+5)^2} \Rightarrow y'=\dfrac{2x(3x+5)^2+2(3)(3x+5)(x^2-1)}{(3x+5)^4}$

۶۵) مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)

$$۱)f(x)=\left(\frac{۲x+۱}{x}\right)^{۵} \qquad ۲)\ g(x)=(\sqrt{۵-۷x})(۴-\frac{x}{۳})$$

☑پاسخ:

$$۱)\ y'=۵(\frac{۲(x)-(۱)(۲x+۱)}{x^۲})(\frac{۲x+۱}{x})^۴$$

$$۲)\ y'=\frac{-۷}{۲\sqrt{۵-۷x}}(۴-\frac{x}{۳})-\frac{۱}{۳}(\sqrt{۵-۷x})$$

۶۶) مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.) (خرداد ۱۴۰۰)

$$f(x)=\frac{۹x-۲}{\sqrt{x}} \quad , \quad g(x)=(۳x^۲-۴)(۲x-۵)^۳$$

☑پاسخ:

$$f(x)=\frac{۹x-۲}{\sqrt{x}} \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\frac{۹(\sqrt{x})-\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(۹x-۲)}{(\sqrt{x})^۲}$$

$$g(x)=(۳x^۲-۴)(۲x-۵)^۳ \quad \Rightarrow \quad f'(x)=(۶x)\times(۲x-۵)^۳+۳(۲x-۵)^۲(۲)\times(۳x^۲-۴)$$

۶۷) مشتق تابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.) (خرداد ۱۴۰۱)

$$f(x)=\sqrt{\frac{۹x-۲}{x+۱}}$$

☑پاسخ:

$$f(x)=\sqrt{\frac{۹x-۲}{x+۱}} \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\frac{(\frac{۹x-۲}{x+۱})'}{۲\sqrt{\frac{۹x-۲}{x+۱}}}=\frac{\frac{۹(x+۱)-(۹x-۲)}{(x+۱)^۲}}{۲\sqrt{\frac{۹x-۲}{x+۱}}}=\frac{\frac{۱۱}{(x+۱)^۲}}{۲\sqrt{\frac{۹x-۲}{x+۱}}}$$

۶۸) مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.) (شهریور ۱۳۹۹)

$$f(x)=\sqrt{۳x+۲}(x^۲+۱) \quad , \quad g(x)=(x^۲+۳x+۱)^۷ \quad , \quad h(x)=\frac{x^۲-۵x+۷}{-۲x+۹}$$

☑پاسخ:

$$f(x)=\sqrt{۳x+۲}(x^۲+۱) \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\frac{۳}{۲\sqrt{۳x+۲}}(x^۲+۱)\ +\ (۲x)\sqrt{۳x+۲}$$

$$g(x)=(x^۲+۳x+۱)^۷ \quad \Rightarrow \quad g'(x)=۷(x^۲+۳x+۱)^۶(۲x+۳)$$

$$h(x)=\frac{x^۲-۵x+۷}{-۲x+۹} \quad \Rightarrow \quad h'(x)=\frac{(۲x-۵)(-۲x+۹)-(-۲)(x^۲-۵x+۷)}{(-۲x+۹)^۲}$$

۶۹)اگر $f(x)=(\frac{۸}{x}+\sqrt[۳]{x^۲})^۲$ باشد، حاصل $f'(۸)$ کدام است؟

۱) $\frac{۲۵}{۲۴}$ ۲) $\frac{۲۵}{۱۲}$ ۳) $\frac{۳۰۵}{۱۲}$ ۴) $\frac{۳۰۵}{۲۴}$

☑پاسخ:

$$f(۸)=۲(\frac{-۸}{x^۲}+\frac{۲}{۳\sqrt[۳]{x}})(\frac{۸}{x}+\sqrt[۳]{x^۲})=۲(\frac{-۱}{۸}+\frac{۱}{۳})(۱+۴)=۲(\frac{۵}{۲۴})(۵)=\boxed{\frac{۲۵}{۱۲}}$$

نکته

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+mh)-f(x)}{h}=mf'(x)\\[2ex]\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+mh)-f(x+nh)}{rh}=\dfrac{m-n}{r}f'(x)\end{cases}$$

۷۰) اگر $f(x)=3x^2+4x$ باشد حاصل $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(2h-1)-f(-1)}{2h}$ کدام است ؟

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) ۲- ۴) ۲

☑پاسخ:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2h-1)-f(-1)}{2h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+2h)-f(-1)}{4h}=\frac{2}{4}f'(1)=\frac{2}{4}(6x+4)_{x=-1}=-1$$

۷۱) فرض کنید $f(x)=x^3-x^2$ در این صورت $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-f(1-2h)}{h^3+h^2+h}$ کدام است ؟

۱) $\frac{5}{3}$ ۲) $\frac{3}{5}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) ۵

☑پاسخ:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-f(1-2h)}{h^3+2h^2+3h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-f(1-2h)}{3h}=\frac{2+2}{3}f'(1)=\frac{4}{3}(3x^2-2x)_{x=1}=\frac{4}{3}$$

۷۲) فرض کنید $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر و $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{h}=\sin^2\frac{\pi}{x^2+1}$ حاصل $f'\left(\sqrt{3}\right)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{8}$ ۴) $\frac{1}{16}$

☑پاسخ:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{h}=2f'(x)=\sin^2\frac{\pi}{x^2+1}\quad\Rightarrow\quad 2f'(\sqrt{3})=\sin^2\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}\quad\Rightarrow\quad f'(\sqrt{3})=\frac{1}{4}$$

مشتق توابع مرکب

فرض کنیم تابع $g(x)$ در نقطه‌ی $x=a$ مشتق پذیر و تابع $f(x)$ در $g(a)$ مشتق پذیر باشد. آن‌گاه تابع $h(x)=f(g(x))$ در $x=a$ مشتق پذیر است و داریم:

$$h(x)=f(g(x)) \quad \Rightarrow \quad h'(a)=g'(a)f'(g(a))$$

$$(f(u))'=u'f'(u) \quad , \quad ((u)^m)'=m(u')(u)^{m-1}$$

۷۳) اگر $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(2-h)-f(2)}{h}=\frac{-2}{3}$ باشد، مشتق تابع $f(\sqrt{x-1})$ در $x=5$ را به دست آورید.

☑ پاسخ:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2-h)-f(2)}{h}=-\lim_{h\to 0}\frac{f(2-h)-f(2)}{-h}=-f'(2)=\frac{-2}{3} \quad \Rightarrow \quad f'(2)=\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \quad \left(f\left(\sqrt{x-1}\right)\right)'=\left(\frac{1}{2\sqrt{x-1}}f'\left(\sqrt{x-1}\right)\right)_{x=5}=\frac{1}{4}f'(2)=\frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{6}$$

۷۴) اگر $f'(x)=\frac{1}{2x^2+3}$ باشد، آن‌گاه مشتق تابع $f\left(\frac{1}{x}\right)$ را در $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ به دست آورید.

☑ پاسخ:

$$\left(f\left(\frac{1}{x}\right)\right)'=\frac{-1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right)_{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\left(\frac{-1}{x^2}\right)\times\left(\frac{1}{2\left(\frac{1}{x}\right)^2+3}\right)_{\frac{\sqrt{2}}{2}}=-2\times\frac{1}{2\times(2)+3}=\frac{-2}{7}$$

۷۵) اگر $f'(x)=\sqrt{x^2+1}$ باشد، مشتق تابع $y=f(5x^2-x)$ را نسبت به x تعیین کنید. (نهایی)

☑ پاسخ: $y=f(5x^2-x) \quad \Rightarrow \quad y'=(5x^2-x)'f'(5x^2-x) \Rightarrow y'=(10x-1)f'(5x^2-x)=(10x-1)\sqrt{(5x^2-x)^2+1}$

۷۶) مشتق $f\left(\sqrt[3]{6x+2}\right)$ در نقطه‌ی $x=1$ برابر -2 است. مشتق تابع f در نقطه‌ای به طول ۲ کدام است؟

☑ پاسخ:

$$\sqrt[3]{6x+2}=2 \Rightarrow x=1 \Rightarrow \left(f\left(\sqrt[3]{6x+2}\right)\right)_{x=1}=\left(\frac{6}{3\sqrt[3]{(6x+2)^2}}f'\left(\sqrt[3]{6x+2}\right)\right)_{x=1}=\frac{6}{12}f'(2)=-2 \Rightarrow f'(2)=-4$$

۷۷) مشتق توابع زیر را به دست آورید.

☑ پاسخ

$$f(x)=\left(\frac{-3x-1}{x^2+5}\right)^8 \quad \Rightarrow \quad f'(x)=8\left(\frac{-3x-1}{x^2+5}\right)^7\frac{(-3)(x^2+5)-(2x)(-3x-1)}{(x^2+5)^2}$$

$$g(x)=\sqrt[3]{\frac{-3x-1}{x^2+5}} \quad \Rightarrow \quad g'(x)=\frac{\frac{(-3)\times(x^2+5)-(2x)\times(-3x-1)}{(x^2+5)^2}}{3\times\sqrt[3]{\left(\frac{-3x-1}{x^2+5}\right)^2}}$$

۷۸) اگر f , g توابع مشتق پذیر باشند و $f'(2)=3$, $g(3)=2$, $g'(3)=5$ ، مشتق تابع $y=f(g(x))$ در $x=3$ را تعیین کنید.

☑ پاسخ

$$y=f(g(x)) \quad \Rightarrow \quad y'(3)=g'(3)f'(g(3))=g'(3)f'(2)=5\times3=15$$

۷۹) در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\left(\sqrt{\frac{x+2}{2x-3}}\right)^3$، حاصل $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$، کدام است؟

۱) -21 ۲) -18 ۳) 12 ۴) 15

☑پاسخ:

$$f(x)=\left(\sqrt{\frac{x+2}{2x-3}}\right)^3 \quad\Rightarrow\quad f'=3\left(\sqrt{\frac{x+2}{2x-3}}\right)^2\frac{\frac{-7}{(2x-3)^2}}{2\left(\sqrt{\frac{x+2}{2x-3}}\right)}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2) \quad\Rightarrow\quad f'(2)=-21$$

۸۰) اگر $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{1-\sqrt{x}}=5$، مشتق تابع $y=f(\frac{2}{x})$ در $x=2$ کدام است؟

۱) $\frac{5}{4}$ ۲) $\frac{-5}{2}$ ۳) $\frac{5}{2}$ ۴) $\frac{-5}{4}$

☑پاسخ:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{1-\sqrt{x}}=5=\lim_{x\to 1}\left(1+\sqrt{x}\right)\frac{f(x)-f(1)}{\left(1+\sqrt{x}\right)1-\sqrt{x}}=\lim_{x\to 1}\left(1+\sqrt{x}\right)\left(-\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\right)=-2f'(1)=5$$

$$f'(1)=\frac{-5}{2} \quad\Rightarrow\quad \left(f\left(\frac{2}{x}\right)\right)'_{x=2}=\frac{-2}{x^2}f'\left(\frac{2}{x}\right)_{x=2}=\frac{-1}{2}f'(1)=\frac{-1}{2}\times\frac{-5}{2}=\frac{5}{4}$$

۸۱) اگر $f(x)=\frac{4}{5}x-\frac{1}{5}|x|$ و $g(x)=4x+|x|$ باشند، مشتق تابع fog، کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) مشتق ندارد.

☑پاسخ:

$$f(x)=\frac{4}{5}x-\frac{1}{5}|x|=\begin{cases}\frac{3}{5}x & x\geq 0\\ x & x<0\end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases}5x & x\geq 0\\ 3x & x<0\end{cases}$$

$$fog=\begin{cases}3x & x\geq 0\\ 3x & x<0\end{cases} \qquad (fog)'=3$$

۸۲) اگر مشتق $y=f\left(3x-1\right)$ در نقطه $x=1$ برابر ۶ باشد مقدار $\lim_{x\to 0}\frac{f\left(2+3x\right)-f\left(2\right)}{x}$ کدام است ؟

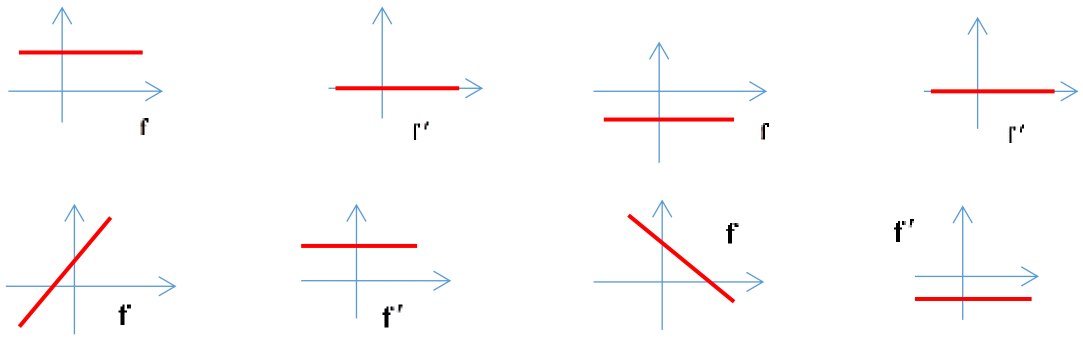
۱) ۶ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) $\frac{3}{2}$

☑پاسخ:

$$y=f\left(3x-1\right) \Rightarrow y'=3f'(3x-1) \Rightarrow y'_{x=1}=3f'(2)=6 \Rightarrow f'(2)=2$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f\left(2+3x\right)-f\left(2\right)}{x}=3f'(2)=3\times 2=6$$

نمودار توابع f , f'

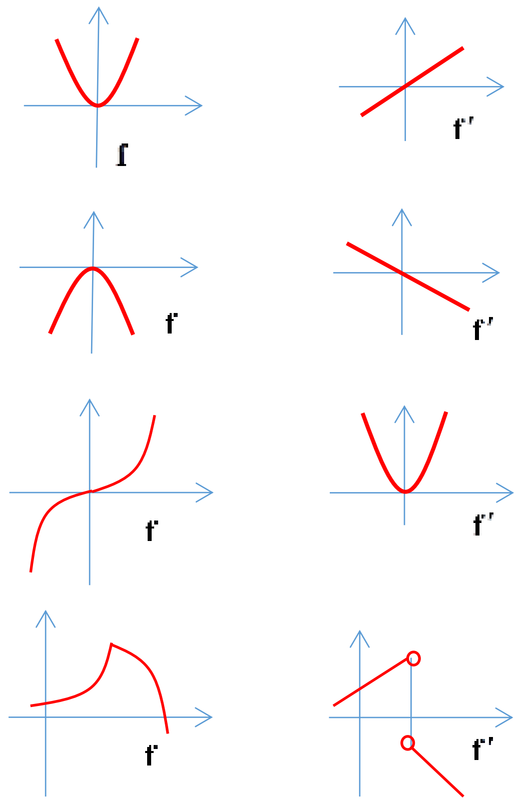


۱-در هر بازه که f اکیداً صعودی باشد . نمودار f' بالای محور x هاست و در هر بازه که اکیداً نزولی باشد ، نمودار f' زیر محور x ها خواهد بود .

۲-در هربازه که نمودار f ثابت باشد (خط افقی باشد) نمودار f' روی محور x ها است .

۳-اگر نمودار f خط راست مایل باشد نمودار f' خط افقی خواهد بود .

۴-اگر f در $x=a$ زاویه دار باشد ، f' در $x=a$ نا پیوسته است .

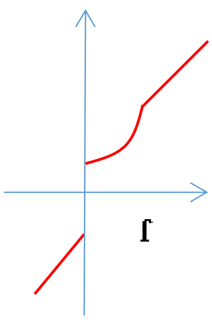


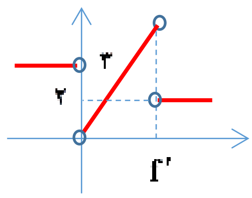
۸۳) اگر تابع f به صورت زیر تعریف شده باشد، ضابطه و نمودار تابع f' را بنویسید.

☑پاسخ:

$$f(x)=\begin{cases}3x-2 & x<0\\ x^2+1 & 0\le x\le 2\\ 2x+1 & x>2\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}3x-2 & x<0\\ x^2+1 & 0\le x\le 2\\ 2x+1 & x>2\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}3 & x<0\\ 2x & 0<x<2\\ 2 & x>2\end{cases}$$

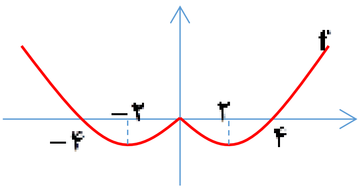


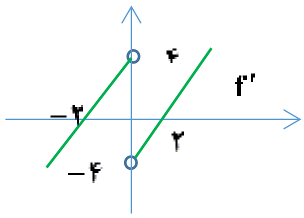


۸۴) نمودار مشتق (f') تابع با ضابطه $f(x)=x^{2}-4|x|$ را رسم کنید .

☑ پاسخ:

$$f(x)=x^{2}-4|x|=\begin{cases}x^{2}-4x & x\geq 0\\ x^{2}+4x & x<0\end{cases}\quad\Rightarrow\quad f'(x)=\begin{cases}2x-4 & x>0\\ 2x+4 & x<0\end{cases}$$



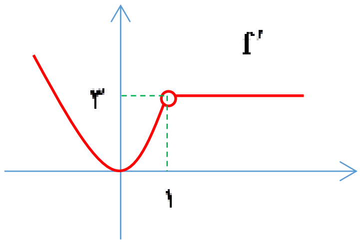


۸۵) اگر $f(x)=\begin{cases}x^{3} & x\leq 1\\ 3x & x>1\end{cases}$ باشد نمودار تابع $f'(x)$ را رسم کنید .

☑ پاسخ: تابع در $x=1$ نا پیوسته و مشتق ناپذیر است .

$$f(1)=\lim_{x\to 1^{-}}x^{3}=1\neq\lim_{x\to 1^{+}}3x=3$$

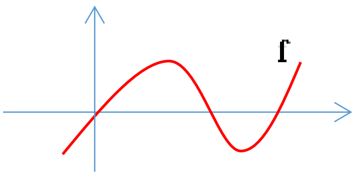
$$f(x)=\begin{cases}x^{3} & x\leq 1\\ 3x & x>1\end{cases}\quad\Rightarrow\quad f'(x)=\begin{cases}3x^{2} & x<1\\ 3 & x>1\end{cases}$$

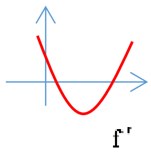


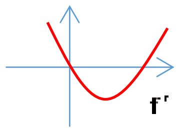
تابع در $x=1$ مشتق چپ دارد ولی راست ندارد چون در این نقطه پیوستگی راست ندارد .

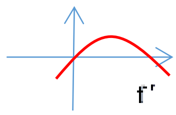
$$\begin{cases}f'_{-}(1)=3\\ f'_{+}(1)=\end{cases}$$

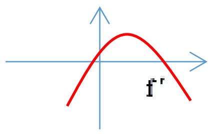
۸۶) نمودار تابع f شکل مقابل است نمودار f' کدام است ؟



۱)


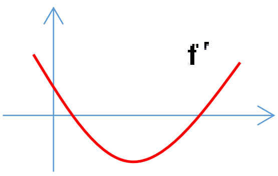
۲)


۳)


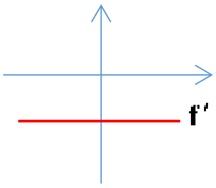
۴)


☑پاسخ:

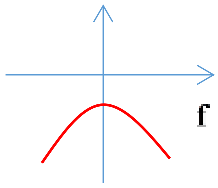
تابع ابتداء صعودی است پس مشتق مثبت است سپس مشتق صفر می شود و چون بعد از این نقطه تابع نزولی است مشتق منفی دوبار مشتق صفر می شود پس از این نقطه تابع صعودی است و مشتق مثبت می شود در مبدا هم مشتق مثبت است پس گزینه ۱ کاملا درست است .



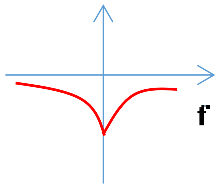
۸۷) اگر نمودار تابع f' شکل مقابل باشد نمودار f کدام گزینه است .



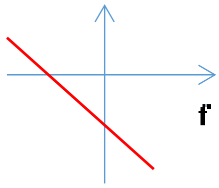
۱)



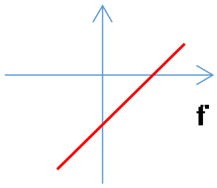
۲)



۳)



۴)



☑پاسخ:

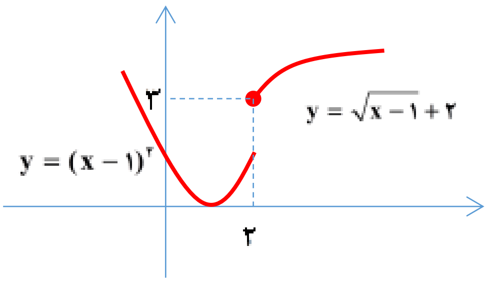
f' خطی افقی (تابع ثابت) و منفی است بنابراین تابع f تابعی خطی (مایل) و نزولی است .بنابراین گزینه ۳ درست است .

۸۸) نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x-۱}+۲ & x\geq ۲\\ (x-۱)^۲ & x<۲\end{cases}$ را رسم کنید و به سوالات زیر پاسخ دهید (دی ماه ۱۴۰۱ با تغییر)

الف) آیا تابع f در نقطه $x=۲$ مشتق پذیر است ؟

ب) آیا تابع در بازه $(-\infty,۲)$ مشتق پذیراست چرا ؟

ج) مشتق راست تابع f در $x=۲$ را به دست آورید .



☑ پاسخ:

الف) مطابق شکل ، تابع در $x=۲$ پیوستگی راست دارد

ولی پیوستگی چپ ندارد بنابراین در این نقطه مشتق ناپذیر است .

ب) تابع در بازه $(-\infty,۲)$ مشتق پذیر است چون تابعی چند جمله ای خطی است و در تمام نقاط این بازه مشتق پذیر است و داریم : $y'=۲(x-۱)$

پ)

$x\geq ۲ \quad f(x)=\sqrt{x-۱}+۲$

$$f'_+(۲)=\lim_{x\to ۲^+}\frac{\sqrt{x-۱}+۲-(۳)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{\sqrt{x-۱}-۱}{x-۲}\times\frac{\sqrt{x-۱}+۱}{\sqrt{x-۱}+۱}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{\cancel{(x-۲)}}{\cancel{(x-۲)}(\sqrt{۲-۱}+۱)}=\frac{۱}{۲}$$

مشتق توابع حاصل عامل صفرکننده:

همان‌طور که می‌دانیم مشتق حاصل‌ضرب به شکل روبه‌رو محاسبه می‌شود.

$$(uv)'_a = u'_a v_a + v'_a u_a$$

حال در توابعی به فرم $f(x) = u_{(x)} v_{(x)}$ که در آن $u_{(a)} = 0$ و $v_{(x)}$ در $x = a$ پیوسته باشد، داریم:

$$f'(a) = u'_{(a)} v_{(a)}$$

$$f'(a) = (\text{مشتق عامل صفرکننده})(\text{مابقی عوامل})$$

در توابعی که به صورت ضرب چند عامل در هم می‌باشند، اگر مشتق را در نقطه‌ای بخواهند که یکی از عامل‌ها در آن صفر می‌شود، کافی است فقط از عامل صفرکننده مشتق گرفته و در بقیه عبارت‌ها ضرب کنیم، و سپس طول نقطه را در آن قرار دهیم.

۸۹) مشتق تابع $f(x) = (x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$ مفروض است. مشتق آن را در نقطه $x = -4$ به دست آورید.

☑پاسخ:

عامل صفر $(x+4)$ است. بنابراین از این عبارت مشتق گرفته در الباقی فقط مقدار گذاری می‌کنیم.

$$f'(-4) = \underbrace{(1)}_{\text{مشتق عامل صفر}}\underbrace{(-4+1)(-4+2)(-4+3)}_{\text{الباقی}} = -6$$

۹۰) مقدار مشتق تابع با ضابطه‌ی $y = (x-1)\sqrt[3]{\dfrac{x+2}{2x-1}}$ را در نقطه‌ی $x = 1$ به دست آورید.

☑پاسخ:

$$y'(1) = \underbrace{(1)}_{\text{مشتق عامل صفر}} \times \left(\underbrace{\sqrt[3]{\frac{x+2}{2x-1}}}_{\text{الباقی}}\right)\Bigg|_{x=1} = (1)\sqrt[3]{\frac{3}{1}} = \sqrt[3]{3}$$

۹۱) اگر $f(x) = (x^2 - x - 2)\sqrt[3]{x^2 - 7x}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$ کدام است؟ (سراسری ۹۲)

۱) -6　　۲) -3　　۳) $\dfrac{-3}{2}$　　۴) $\dfrac{-3}{4}$

☑پاسخ:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = f'(-1) = \underbrace{(2x-1)}_{\text{مشتق عامل صفر}} \times \underbrace{\sqrt[3]{x^2 - 7x}}_{\text{الباقی}}\Bigg|_{x=-1} = -3 \times 2 = -6$$

۹۲) اگر $f(x) = \dfrac{x(x+5)(x+6)}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$ باشد، مقدار $f'(-5)$ را به دست آورید

☑پاسخ:

$$f'(-5) = \underbrace{(1)}_{\text{مشتق عامل صفر}} \times \left(\underbrace{\frac{(x)(x+6)}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}}_{\text{الباقی}}\right)\Bigg|_{x=-5} = \frac{-5}{24}$$

در توابع دو یا چند ضابطه ای : $y=\begin{cases} f(x) & x\geq a \\ g(x) & x<a \end{cases}$ محور اصلی سوالات برای نقاط مرزی دامنه تابع ا ست $(x=a)$ در این نقاط اول پیوستگی تابع را چک می کنیم ، سپس با توجه به نوع پیوستگی مشتق می گیریم .

۹۳) اگر $f(x)=\begin{cases} ax+1 & x<0 \\ x^2+3x+1 & x\geq 0 \end{cases}$ در $x=0$ مشتق پذیر باشد ، مقدار a را محاسبه کنید . (خرداد ۱۴۰۱)

☑پاسخ:

$$f(0)=\lim_{x\to 0} x^2+3x+1=1=\lim_{x\to 0} a(0)+1$$

$$f'_+(0)=(2x+3)_{x=0}=f'_-(0)=(a) \quad \Rightarrow \quad a=3$$

۹۴) تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases} \sqrt{4x+1} & x\geq 2 \\ ax^2+bx & x<2 \end{cases}$ روی مجموعه اعداد حقیقی مشتق پذیر است . مقدار b کدام است ؟ (کنکور مجدد ۱۴۰۱)

۱) $\frac{7}{3}$ ۲) $\frac{7}{6}$ ۳) $\frac{-5}{6}$ ۴) $\frac{-5}{12}$

☑پاسخ:

$$\begin{cases} f(2)=\lim\limits_{x\to 2^+}\sqrt{4x+1}=3=\lim\limits_{x\to 2^-} 4a+2b \quad \Rightarrow \quad 4a+2b=3 \\ f'(2)=\dfrac{4}{2\sqrt{4x+1}}\Big|_{x=2}=\dfrac{4}{6}=f'_-(2)=2ax+b\,\Big|_{x=2} \quad \Rightarrow \quad 4a+b=\dfrac{2}{3} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad b=\frac{7}{3}$$

۹۵) فرض کنید $(a\neq 0)$ $g(x)=ax^2+bx+c$, $f(x)=\begin{cases} g(x) & x\geq k \\ g'(x) & x<k \end{cases}$ باشد . اگر f یک تابع مشتق پذیر باشد ، حداکثر مقدار k به شرط $b+c=a$ ، کدام است ؟ (کنکور تجربی ۱۴۰۰)

۱) $\frac{3}{4}$ ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۴

حل : گزینه ۳

$$f(x)=\begin{cases} g(x) & x\geq k \\ g'(x) & x<k \end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases} 2ax+b & x>k \\ 2a & x<k \end{cases} \Rightarrow 2ak+b=2a \Rightarrow k=\frac{2a-b}{2a}=1-\frac{b}{2a}$$

$$ak^2+bk+c=2ak+b \Rightarrow a(1-\frac{b}{2a})^2+b(1-\frac{b}{2a})+c=2a(1-\frac{b}{2a})+b$$

$$a+\frac{b^2}{4a}-b+b-\frac{b^2}{2a}+c=2a-b-b \Rightarrow a+c-\frac{b^2}{4a}=2a \Rightarrow a+a-b-\frac{b^2}{4a}=2a$$

$$-b-\frac{b^2}{4a}=0 \Rightarrow b=-4a \Rightarrow k=1-(\frac{-4a}{2a})=1+2=3$$

۹۶) اگر $f(x)=\begin{cases}\sin^2(x-1) & x\ge 1\\ 1-x^2 & x<1\end{cases}$ باشد، آنگاه حاصل $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-|h|)-f(1)}{|h|}$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) −۱ ۴) −۲

حل : گزینه ۲

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1-|h|)-f(1)}{|h|}=-f'_-(1)=-(1-x^2)'\Big|_{x=1}=2x\Big|_{x=1}=2$$

۹۷) تابع $f(x)=\sqrt{1+|x|}$ در نقطه ی $x=\alpha$ مشتق ندارد. مقدار $f'_+(\alpha)-f'_-(\alpha)$ کدام ا ست ؟ (سراسری خارج کشور)

☑پاسخ:

نقطه مشتق ناپذیری تابع $x=0$ ریشه داخل قدر مطلق ا ست پس داریم :

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\sqrt{1+|0|}=f(0)=1 \quad\Rightarrow\quad f(x)=\sqrt{1+|x|}=\begin{cases}\sqrt{1+x} & x\ge 0\\ \sqrt{1-x} & x<0\end{cases} \quad\Rightarrow\quad f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}} & x>0\\[2mm] \dfrac{-1}{2\sqrt{1-x}} & x<0\end{cases}$$

$$f'_+(0)=\frac{1}{2\sqrt{1+x}}=\frac{1}{2}\quad,\quad f'_-(0)=\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}=\frac{-1}{2}\quad\Rightarrow\quad f'_+(0)-f'_-(0)=1$$

مشتق توابع شامل براکت

روش حل مسئله

در توابعی که شامل براکت هستند ابتدا پیوستگی تابع را در نقطه داده شده بررسی می کنیم .سپس در یک همسایگی مناسب پیرامون $x=a$ تکلیف قسمت براکتی را تعیین نموده یعنی عدد صحیح متناسب با آن را قرارمی دهیم .

درنهایت با توجه به نوع پیوستگی مشتق می گیریم .

۹۸) در تابع با ضابطه $f(x)=|x|[x]$ مقدار $f'_-(0)-f'_+(0)$ کدام است ؟ (سراسری تجربی ۸۷)

۱) −۱ ۲) ۰ ۳) ۱ ۴) ۲

☑پاسخ:

$$\lim_{x\to 0}|x|[x]=|0|[0^{\pm}]=0$$ این یعنی پیوسته است

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{|x|[x]-0}{x-0}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-\cancel{x}[0^+]-0}{\cancel{x}-0}=0\\[2mm] \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-\cancel{x}[0^-]-0}{\cancel{x}-0}=1\end{cases}$$

ولی مشتق چپ وراستش متفاوته

۹۹) مجموع مشتق چپ و راست تابع $f(x)=x^{۲}+x[x]-۳$ در نقطه $x=۰$ کدام است؟

۱) ۱- ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

☑پاسخ:

$$\lim_{x\to ۰^{\pm}} x^{۲}+x[x]-۳=۰+۰\left[۰^{\pm}\right]-۳=-۳$$

$$\begin{cases} \xrightarrow{[۰^{+}]=۰} f'_{+}(۰)=(x^{۲}+x(۰)-۳)'_{x=۰}=(۲x)_{x=۰}=۰ \\ \xrightarrow{[۰^{-}]=-۱} f'_{-}(۰)=(x^{۲}+x(-۱)-۳)'_{x=۰}=(۲x-۱)_{x=۰}=-۱ \end{cases} \Rightarrow (-۱)+(۰)=-۱$$

۱۰۰) اگر $f(x)=(x-۱)[۲x+۱]$ مقدار $f'_{+}(۱)-f'_{-}(۱)$ کدام است؟

۱) ۱- ۲) ۳ ۳) ۱ ۴) صفر

☑پاسخ:

$$\lim_{x\to ۱^{\pm}}(x-۱)[۲x+۱]=۰\left[۳^{\pm}\right]=۰=f(۱)$$

$$\lim_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{(x-۱)[۲x+۱]}{x-۱}=\begin{cases}\lim_{x\to ۱^{+}}[۲x+۱]=۳\\ \lim_{x\to ۱^{-}}[۲x+۱]=۲\end{cases} \Rightarrow f'_{+}(۱)-f'_{-}(۱)=۳-۲=۱$$

۱۰۱) اختلاف مشتق چپ و راست تابع $f(x)=|x^{۲}-۹|[۲x]$ در $x=۳$ چقدر است؟

۱) ۶۶ ۲) ۶ ۳) ۳۶ ۴) ۱۸

☑پاسخ:

تابع در $x=۳$ پیوسته است چون: $f(۳)=۰=\lim_{x\to ۳}|x^{۲}-۹|[۲x]=۰$ پس مشتق چپ و راست را حساب کرده و از هم کم می کنیم .

$$\begin{cases} x>۳\xrightarrow{\left[۲\times ۳^{+}\right]=۶} f(x)=(x^{۲}-۹)\times ۶ \Rightarrow f'(x)=۱۲x \Rightarrow f'_{+}(۳)=۱۲\times ۳=۳۶ \\ x<۳\xrightarrow{\left[۲\times ۳^{-}\right]=۵} f(x)=-(x^{۲}-۹)\times ۵ \Rightarrow f'_{-}(۳)=-۱۰x \Rightarrow f'_{-}(۳)=-۱۰\times ۳=-۳۰ \end{cases} \to ۳۶-(-۳۰)=\boxed{۶۶}$$

۱۰۲) اگر $f(x)=\frac{x^{۲}}{|۱-x|}[x]$ باشد، حاصل $\lim_{h\to ۰^{-}}\frac{f(۳+h)-f(۳)}{h}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

☑پاسخ:

$$\lim_{h\to ۰^{-}}\frac{f(۳+h)-f(۳)}{h}=f'_{-}(۳) \Rightarrow f(x)=\frac{x^{۲}}{|۱-x|}[x] \quad x<۳ \xrightarrow{\left[۳^{-}\right]=۲} f(x)=\frac{x^{۲}}{x-۱}\times ۲=\frac{۲x^{۲}}{x-۱}$$

$$f'(۳)=\frac{۴x(x-۱)-۲x^{۲}}{(x-۱)^{۲}}\Bigg|_{x=۳}=\frac{۲۴-۱۸}{۴}=\frac{۶}{۴}=\boxed{\frac{۳}{۲}}$$

۱۰۳) اگر $f(x)=x[2x+1]$ مقدار $f'_+(1)-f'_-(1)$ کدام است ؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) قابل تعیین نیست

☑پاسخ:

به ازای $x=1$ داخل براکت صحیح می شود و تابع داخل براکت صعودی است پس تابع در $x=1$ فقط پیوستگی راست دارد و پیوستگی چپ ندارد .
بنابراین مشتق راست دارد ولی مشتق چپ ندارد

$f'_+(x)_{x=1}=(3x)'=3$

$f'_-(x)_{x=1}=$ چون پیوستگی چپ ندارد مشتق چپ ندارد

۱۰۴) اگر $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$ آن گاه مقدار $\left(f^{-1}\right)'(2)$ کدام است ؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۱

☑پاسخ:

$$y=\frac{x-1}{x+1}\Rightarrow yx+y=x-1\Rightarrow x(y-1)=-1-y\Rightarrow x=\frac{-y-1}{y-1}\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{-x-1}{x-1}$$

$$f^{-1}(x)=\frac{-x-1}{x-1}\Rightarrow \left(f^{-1}(x)\right)'=\frac{2}{(x-1)^2}\Rightarrow \left(f^{-1}\right)'(2)=2$$

یادت باشه

$$(f^{-1}(b))'=\frac{1}{f'(a)}\xrightarrow{\frac{x-1}{x+1}=2=b\ \Rightarrow\ x=-3=a}\left(f^{-1}\right)'(2)=\frac{1}{f'(-3)}=\left(\frac{1}{\frac{2}{(x+1)^2}}\right)_{x=-3}=2$$

۱۰۵) با فرض $f(x)=\begin{cases}\frac{x-1}{1+\sqrt{x}} & x<1\\ bx+a & x>1\end{cases}$ اگر حاصل $f'_+(1)-f'_-(1)=\frac{3}{2}$ باشد. a کدام است؟

۱) -2 ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) -3

☑پاسخ:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x-1}{1+\sqrt{x}} & x\le 1\\ bx+a & x>1\end{cases}\Rightarrow f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}-1 & x\le 1\\ bx+a & x>1\end{cases}\Rightarrow b+a=0$$

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{x}} & x<1\\ b & x>1\end{cases}\Rightarrow f'(1^-)=\frac{1}{2}\ ,\ f'(1^+)=b$$

$$b-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\Rightarrow b=2\Rightarrow b+a=0\Rightarrow a=-2$$

۱۰۶) اگر $y=\frac{x}{\sqrt{1+x}}$ آنگاه حاصل $y^2+2y'y(x+1)$ کدام است؟

۱) x^2 ۲) $2x$ ۳) $4x$ ۴) $-2x$

☑پاسخ:

$$y^2+2y'y(x+1)=\left(y^2(x+1)\right)'=\left(\frac{x^2}{1+x}(x+1)\right)'=2x$$

آهنگ تغییر و آهنگ متوسط

نکته

شیب خط مماس بر تابع، تغییر آهنگ یا تغییر آنی، تغییرات لحظه‌ای، همگی یعنی مشتق تابع در نقطه‌ی داده شده

تغییر آهنگ = شیب خط مماس در نقطه‌ی $A(a,f(a))$ $=m=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$

۱۰۷) تابع $f(x)$ با ضابطه‌ی $f(x)=x^2+5x+4$ داده شده است.

الف) دستور کلی آهنگ متوسط تغییر این تابع را نسبت به متغیر x تعیین کنید.

ب) آهنگ متوسط تغییر این تابع را وقتی $x=3$, $\Delta x=0/4$ را به دست آورید.

ج) آهنگ آنی را در $x=3$ به دست آورید.

☑پاسخ:

الف) $$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x+\Delta x)^2+5(x+\Delta x)+4-(x^2+5x+4)}{\Delta x}$$

ب) $$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(3+0/4)^2+5(3+0/4)+4-\left((3)^2+5(3)+4\right)}{0/4}=\frac{1/2+0/16+2}{0/4}=\frac{3/36}{0/4}$$

ج) $$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x)\quad\Rightarrow\quad f'(3)=\left(x^2+5x+4\right)'_3=(2x+5)_3=11$$

۱۰۸) اگر $f(t)=t^2+3t$ نمایش جمعیت یک نوع باکتری در زمان t باشد ، نسبت آهنگ متوسط تغییر f در بازه ی زمانی $1\le t\le 1/2$ به آهنگ لحظه ای تغییر f در $t=1$ کدام ا ست ؟

☑پاسخ:

$$\frac{f(1/2)-f(1)}{1/2-1}=\frac{\left((1/2)^2+3(1/2)\right)-(1+3)}{0/2}=\frac{10/4}{2}=5/2$$

$$f'(1)=(2t+3)_{x=1}=5\quad\Rightarrow\quad\frac{5/2}{5}=1/04$$

۱۰۹) در چه نقطه ای از بازه $[۹,۲۵]$ آهنگ لحظه ای $f(x)=\sqrt{x}$ با آهنگ متوسط آن برابر است ؟

پاسخ:

$$\frac{f(۲۵)-f(۹)}{۲۵-۹}=\frac{\sqrt{۲۵}-\sqrt{۹}}{۱۶}=\frac{۲}{۱۶} \quad , \quad f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x}} \Rightarrow \frac{۱}{۸}=\frac{۱}{۲\sqrt{x}} \Rightarrow \sqrt{x}=۴ \Rightarrow x=۱۶$$

۱۱۰) گنجایش ظرفی ۴۰ لیتر مایع است. در لحظه $t=۰$ سوراخی در ظرف ایجاد میشود اگر حجم مایع باقی مانده در ظرف پس از t ثانیه از رابطه ی $V_{(t)}=۴۰\left(۱-\frac{t}{۱۰۰}\right)^۲$ به دست می آید در چه زمانی آهنگ تغییر لحظه ای برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازه $[۰,۱۰۰]$ می شود ؟

پاسخ:

$$\frac{V(۱۰۰)-V(۰)}{۱۰۰-۰}=\frac{۰-۴۰}{۱۰۰}=\frac{-۴}{۱۰} \quad , \quad V'(t)=۸۰\left(\frac{-۱}{۱۰۰}\right)\left(۱-\frac{t}{۱۰۰}\right)=\frac{-۸۰}{۱۰۰}\left(۱-\frac{t}{۱۰۰}\right)=\frac{-۴}{۱۰۰}$$

حالا آهنگ تغییر رو مساوی تغییرات متوسط قرار می دیم

$$۲-\frac{t}{۵۰}=۱ \Rightarrow t=۵۰$$

۱۱۱) جسمی را از سطح زمین به طور عمودی پرتاب می کنیم . جهت حرکت به طرف بالا را مثبت در نظر می گیریم . فرض کنید ارتفاع این جسم از سطح زمین در هر لحظه از معادله $h(t)=-۵t^۲+۴۰t$ به دست می آید . مطلوب است :

الف) سرعت متوسط در بازه $[۱,۲]$

ب) سرعت لحظه ای در زمان $t=۳$

پاسخ:

الف) سرعت متوسط $=\frac{h(b)-h(a)}{b-a}=\frac{h(۲)-h(۱)}{۲-۱}=\frac{۶۰-۳۵}{۱}=۲۵$

ب) سرعت لحظه ای $=h'(t)=-۱۰t+۴۰ \Rightarrow h'(۳)=۱۰$

۱۱۲) آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x)=\sqrt{x^۲+۱۶}$ نسبت به تغییر x روی بازه $[۰,۳]$ از آهنگ لحظه ای تابع در $x=\sqrt{۲}$ چقدر کمتر ا ست ؟

۱) صفر ۲) $\frac{۱}{۱۸}$ ۳) $\frac{۱}{۱۲}$ ۴) $\frac{۱}{۹}$

پاسخ:

آهنگ متوسط تغییر $=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(۳)-h(۰)}{۳-۰}=\frac{\sqrt{۲۵}-\sqrt{۱۶}}{۳}=\frac{۱}{۳}$

آهنگ لحظه ای تغییر $=f'(x)=\frac{۲x}{۲\sqrt{x^۲+۱۶}} \Rightarrow f'(\sqrt{۲})=\frac{۲\sqrt{۲}}{۲\sqrt{۲+۱۶}}=\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۱۸}}=\frac{۱}{۳}$

اختلاف $=(\frac{۱}{۳})-(\frac{۱}{۳})=۰$

۱۱۳)در تابع ای با ضابطه $f(t)=\frac{۲۴۰}{t}$ آهنگ تغییر آنی در لحظه $t=۴$ چقدر از آهنگ متوسط تغییر f از لحظه $t=۳$ تا $t=۵$ بیشتر ا ست

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{۳}{۲}$

پاسخ: گزینه ۱

آهنگ متوسط تغییر $=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{\frac{۲۴۰}{۵}-\frac{۲۴۰}{۳}}{۵-۳}=\frac{۴۸-۸۰}{۲}=-۱۶$

آهنگ آنی $=f'(x)=\frac{-۲۴۰}{t^۲} \Rightarrow f'(۴)=\frac{-۲۴۰}{(۴)^۲}=-۱۵$

اختلاف $=(-۱۵)-(-۱۶)=۱$

۱۱۴) در تابع با ضابطه‌ی $f(X)=\frac{x-1}{\sqrt{x}}$، آهنگ متوسط تغییر تابع نسبت به تغییر متغیر x، در نقطه‌ی $x=1$ با نمو ۰/۴۴، از آهنگ لحظه‌ای تابع در این نقطه، چه‌قدر کم‌تر است؟(خارج-۹۴)

۱) $\frac{1}{30}$ ۲) $\frac{1}{24}$ ۳) $\frac{1}{12}$ ۴) $\frac{1}{6}$

☑ پاسخ :

$$\text{آهنگ متوسط تغییر} = \frac{f(1/44)-f(1)}{1/44-1} = \frac{\frac{0/44}{1/2}-0}{0/44} = \frac{5}{6}$$

$$\text{آهنگ لحظه ای} = f'(x) = \frac{\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}(x-1)}{x} \Rightarrow f'(1)=1$$

اختلاف این دو مقدار برابر است با: $1-\frac{5}{6}=\frac{1}{6}$

۱۱۵) معادله حرکت متحرکی برابر $f(t)=t^2-4t+8$ می باشد a کدام باشد تا اختلاف سرعت متوسط متحرک روی بازه $[2,a]$ با سرعت لحظه ای در لحظه $t=5$ برابر ۲ کیلو متر بر ساعت باشد ؟

☑ پاسخ :

$$\text{آهنگ متوسط} \quad \frac{f(a)-f(2)}{a-2} = \frac{(a^2-4a+8)-(4-8+8)}{a-2} = \frac{(a-2)^2}{a-2} = a-2$$

$$\text{آهنگ لحظه} \quad f'(t)=2t-4 \xrightarrow{t=5} f'(5)=6 \Rightarrow \text{اختلاف سرعت ها} \quad (a-2)-6=2 \Rightarrow a=10$$

۱۱۶) اگر خط مماس بر منحنی $y=x-\sqrt{x-1}$ در نقطه $x=a$ موازی با خط گذرنده بر دو نقطه به طول های ۲ و ۵ واقع بر منحنی باشد ، مقدار a کدام است ؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) $\frac{13}{4}$ ۴) $\frac{7}{4}$

☑ پاسخ :

آهنگ لحظه ای همان شیب خط مماس است $f(x)=x-\sqrt{x-1} \Rightarrow f'(x)=1-\frac{1}{2\sqrt{x-1}} \Rightarrow f'(a)=1-\frac{1}{2\sqrt{a-1}}$

آهنگ متوسط همان شیب خط قاطع است $f(5)=5-\sqrt{5-1}=3 \quad , \quad f(2)=2-\sqrt{2-1}=1 \Rightarrow \frac{f(5)-f(2)}{5-2}=\frac{2}{3}$

$$1-\frac{1}{2\sqrt{a-1}}=\frac{2}{3} \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{a-1}}=\frac{1}{3} \Rightarrow \sqrt{a-1}=\frac{3}{2} \Rightarrow a-1=\frac{9}{4} \Rightarrow a=\frac{13}{4}$$

فصل ۵ کاربرد مشتق

دیدیم هر جا تابع نزولی بود مشتق تابع منفی می شد و هر جا تابع صعودی بود مشتق تابع مثبت می شد خب یعنی با تعیین علامت تابع f' میشه یکنوایی تابع f رو بررسی کرد .

برای تعیین یکنوایی تابع پیوسته $f(x)$ (صعودی یا نزولی بودن تابع)، ابتدا از تابع مشتق می‌گیریم و تابع مشتق را تعیین علامت می‌کنیم در بازه‌هایی که مشتق مثبت باشد، یعنی تابع صعودی است و در بازه‌هایی که مشتق منفی است، یعنی تابع نزولی است.

x		x_1		x_2	
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

۱) اول از تابع مشتق بگیرید.

۲) معادله $f'(x) = 0$ را حل کنید و ریشه‌های مشتق را به دست آورید. و البته جاهایی که تابع مشتق پذیر نیست

۳) با توجه به ریشه‌ها، و نقاطی که مشتق وجود ندارد مشتق را تعیین علامت کنید *(ممکن است احتیاج به جدول داشته باشید.)*

۴) در هر بازه‌ای که علامت مشتق مثبت باشد یعنی تابع $f(x)$ صعودی است. و در هر بازه‌ای که علامت مشتق منفی باشد یعنی تابع $f(x)$ نزولی است.

۱۱۷) در چه بازه‌ای تابع $f(x) = ۳x^۲ - ۱۸x$ صعودی است؟

☑ پاسخ:

$$f(x) = ۳x^۲ - ۱۸x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = ۶x - ۱۸ = ۰ \quad \Rightarrow \quad x = ۳$$

x		$x=۳$	
f'	$-$	0	$+$

تابع در بازه‌ی $(-\infty, ۳)$ نزولی و در بازه‌ی $(۳, +\infty)$ صعودی است.

۱۱۸) تعیین کنید تابع $f(x) = ۲x - \sqrt{x}$ در کدام بازه نزولی است

☑ پاسخ:

یعنی باید بازه ای را تعیین کنیم که مشتق تابع در این بازه همواره منفی باشد.

$$f'(x) = ۲ - \frac{۱}{۲\sqrt{x}} < ۰ \Rightarrow ۲ < \frac{۱}{۲\sqrt{x}} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x} < \frac{۱}{۴} \quad \Rightarrow \quad x < \frac{۱}{۱۶} \xrightarrow{\text{با توجه به دامنه}} ۰ \le x < \frac{۱}{۱۶}$$

۱۱۹) تابع $f(x)=\frac{1}{x^2}$ را روی بازه‌ی $(0,+\infty)$ در نظر بگیرید. صعودی یا نزولی بودن این تابع را روی بازه ی $(0,+\infty)$ تعیین کنید .

پاسخ:
$$f(x)=\frac{1}{x^2} \Rightarrow f'(x)=\frac{-2x}{x^4}=\frac{-2}{x^3} \Rightarrow \forall \in(0,+\infty)\quad f'(x)<0$$

بنابراین در بازه $(0,+\infty)$ تابع نزولی است.

۱۲۰) تابع $f(x)=\frac{2}{x}+x^2$ در چه فاصله‌ای صعودی است؟

پاسخ:
$$f(x)=\frac{2}{x}+x^2 \Rightarrow f'(x)=\frac{-2}{x^2}+2x=\frac{2(x^3-1)}{x^2}\ge 0 \Rightarrow x^3-1\ge 0 \Rightarrow x\ge 1$$

۱۲۱) حدود m را طوری تعیین کنید تا تابع با ضابطه $f(x)=\frac{mx+1}{x+m}$ در بازه ی $(-\infty,0)$ همواره نزولی باشد

پاسخ: یعنی باید m را طوری تعیین کنیم که مشتق تابع در این بازه همواره منفی باشد .
$$f'(x)=\frac{m(x+m)-(mx+1)}{(x+m)^2}=\frac{m^2-1}{(x+m)^2} \Rightarrow f'(x)<0 \Rightarrow m^2-1<0 \Rightarrow -1<m<1 \quad \boxed{1}$$

و از طرفی باید ریشه مخرج کسر در این بازه نباشد یعنی $x=-m>0 \Rightarrow m<0 \quad \boxed{2}$ در نهایت : $\boxed{1}\cap\boxed{2} \Rightarrow -1<m<0$

۱۲۲) تابع $f(x)=\frac{x}{x^2+4}$ در بازه ی $[a,b]$ صعودی اکید است. بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) $4\sqrt{2}$ ۲) ۴ ۳) ۲ ۴) $2\sqrt{2}$

پاسخ:
$$y'=\frac{x^2+4-2x^2}{(x^2+4)^2}=\frac{4-x^2}{(x^2+4)^2}\ge 0 \Rightarrow 4-x^2\ge 0 \Rightarrow -x^2\ge -4 \Rightarrow x^2\le 4 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |x|\le 2 \Rightarrow -2\le x\le 2 \Rightarrow \boxed{b-a=4}$$

۱۲۳) تابع $y=\frac{2x+a-1}{x+a}$ در بازه ی $(2,+\infty)$ نزولی اکید است. حدود a کدام است؟

۱) $-2\le a<1$ ۲) $a\le -2$ ۳) $a<-1$ ۴) $-2\le a<-1$

پاسخ:
اولا باید ریشه ی مخرج(مجانب قائم) در این بازه نباشد.ثانیا باید f' منفی باشد. $x+a=0 \Rightarrow x=-a \Rightarrow -a\le 2 \Rightarrow a\ge -2$
$$y'=\frac{2a-a+1}{(x+a)^2}<0 \Rightarrow a+1<0 \Rightarrow a<-1 \xrightarrow[a<-1]{a\ge -2} \boxed{-2\le a<-1}$$

۱۲۴) جهت تغییرات تابع $y=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$ را بررسی کنید .

پاسخ:
$$y=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} \Rightarrow y'=\frac{\sqrt{x^2+1}-\frac{x(x+1)}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=\frac{1-x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

x		1	
f'	+	0	−
	↗	max	↘

تابع در بازه $(-\infty,1)$ اکیداً صعودی و در بازه $(1,+\infty)$ اکیداً نزولی است .

۱۲۵) چند مورد از گزاره های زیر درست است ؟

الف) هر تابع که اکیداً نزولی باشد ، در هر نقطه که مشتق پذیر باشد ، مشتق آن منفی است .

ب) اگر تابعی در بازه ای اکیداً صعودی باشد در آن بازه مشتق پذیر است .

ج) اگر مشتق تابعی در نقطه ای صفر باشد ، تابع در همسایگی آن نقطه ثابت است .

د) ضرب دو تابع اکیداً صعودی همیشه تابعی صعودی است .

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) هیچ کدام

☑ پاسخ:

گزینه ۴ درست است

برای هر مورد مثال نقض ارائه می کنیم .

۱) $f'(x)=-1-\sin x\le 0 \quad \Rightarrow \quad f(x)=-x+\cos x$ این تابع اکیداً نزولی و در همه نقاط مشتق پذیر است و در بی نهایت نقطه مشتق آن صفر می شود (منفی نمی شود) ولی در این نقاط مشتق تغییر علامت نمی دهد .

۲) $y=x+[x]$ اکیداً صعودی است ولی در بی نهایت نقطه مشتق ناپذیر است

۳) $y=x^2$ در نقطه صفر مشتقش صفر می شود ولی در همسایگی این نقطه ثابت نیست

۴) دو تابع $f=x$, $g=-x^2$ را در بازه $(-1,0)$ هر دو صعودی اند ولی $f\times g=-x^3$ در همین بازه نزولی است

۱۵۳) اگر $y=f(x)$ تابعی منفی و اکیداً صعودی باشد ، چند تابع از توابع زیر اکیداً نزولی است ؟

الف) $f(-x)$　　ب) $f^2(x)$　　ج) $\sqrt[3]{f(x)}$　　د) $-x^3-f(x)$　　ه) $x^2+f(x)$

۱) دو　　۲) سه　　۳) یک　　۴) چهار

☑پاسخ: گزینه ۲ درست است .

$f(x)<0 \quad , \quad f'(x)>0$

$(f(-x))'=(-)f'(-x)<0 \quad \Rightarrow$ گزینه الف نزولی است چون مشتق منفی است

$(f^2(x))'=2f(x)f'(x)<0 \quad \Rightarrow$ گزینه ب نزولی است چون مشتق منفی است

$(\sqrt[3]{f})'=\frac{f'}{3\sqrt[3]{f^2}}>0 \quad \Rightarrow$ گزینه ج صعودی است چون مشتقش مثبت است

$(-x^3-f(x))'=-3x^2-f'<0 \quad \Rightarrow$ گزینه د نزولی است چون مشتقش منفی است

$(x^2+f)'=2x+f' \quad \Rightarrow$ در گزینه ه با توجه به معلومات یکنوایی قابل تعیین نیست

اکسترمم های نسبی

نقاط بحرانی

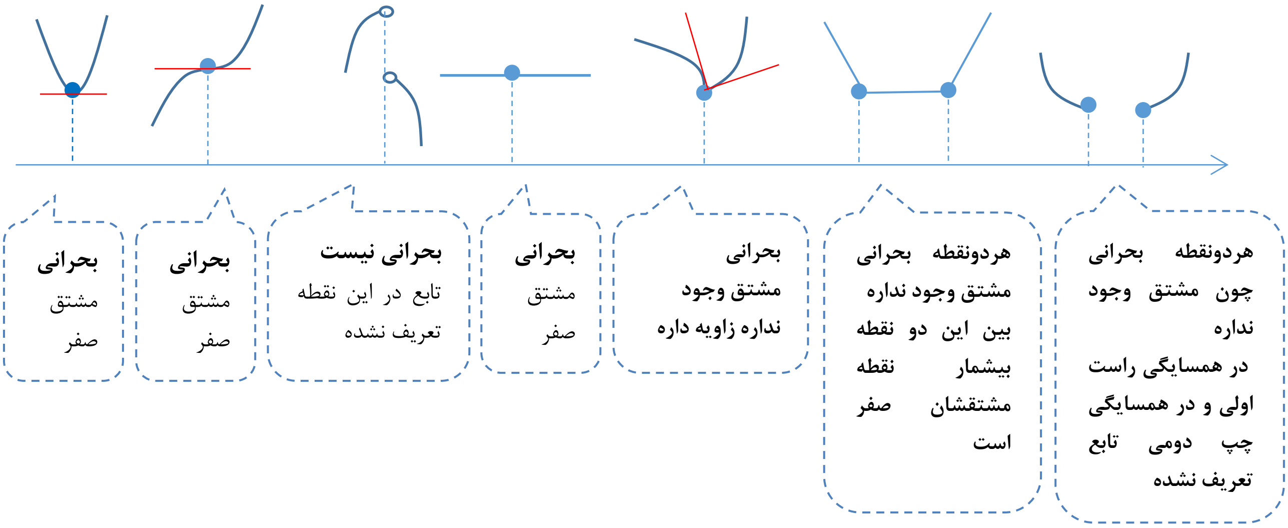
نقطه ی $x=a$ متعلق به دامنه تابع را نقطه بحرانی تابع f می نامند هرگاه دراین نقطه تابع تعریف شده باشد و مشتق تابع در این نقطه صفر یا وجود ندارد ، شود .

$$\begin{cases} (۱) \quad a \in D_f \\ (۲) \quad f'(a)=0 \quad \vee \quad f'(a) \text{ وجود ندارد} \end{cases}$$

برای به دست آوردن نقاط بحرانی تابع با توجه به دامنه از تابع مشتق می گیریم و می پرسیم f' کجا صفر می شود یا کجا وجود ندارد .

انواع وجود ندارد : الف کجا ناپیوسته است ب) کجا مشتق چپ وراست نابرابرند ج) کجا مشتق بی نهایتی می شود .

۱۲۶) نقاط بحرانی را تعریف کنید . (خرداد ۹۹ خارج کشور)



۱۲۷) نقاط بحرانی تابع با ضابطه ی $y=\sqrt[3]{x^3-3x^2}$ را به دست آورید .

پاسخ:

$$D_f=R \ , \ f'(x)=\frac{3x^2-6x}{3\sqrt[3]{(x^3-3x^2)^2}} \Rightarrow \begin{vmatrix} f'=0 & 3x^2-6x=3x(x-2)=0 \Rightarrow x=0 \ , \ x=2 \\ f' \text{ وجود ندارد} & x^3-3x^2=x^2(x-3)=0 \Rightarrow x=0 \ , \ x=3 \end{vmatrix}$$

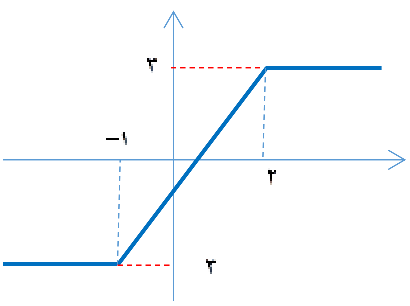
مجموعه نقاط بحرانی : $\{0,2,3\}$

۱۲۸) نقاط بحرانی تابع با ضابطه $f(x)=|x+1|-|x-2|$ را بیابید .

پاسخ:

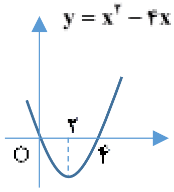
تابع داده شده یک تابع آبشاری است .

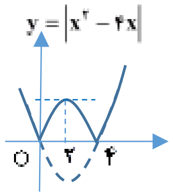
و مجموعه نقاط بحرانی آن : $(-\infty,-1]\cup[2,+\infty)$



۱۲۹) نمودار تابع $f(x)=|x^{2}-4x|$ رسم کنید و نقاط بحرانی تابع را تعیین کنید .

پاسخ:





$$f(x)=\begin{cases} x^{2}-4x & x<0 \\ -(x^{2}-4x) & 0\le x\le 4 \\ x^{2}-4x & x>4 \end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases} 2x-4 & x<0 \\ -(2x-4) & 0\le x\le 4 \\ 2x-4 & x>4 \end{cases}$$

$f'(x)=0 \Rightarrow -(2x-4)=0 \Rightarrow x=2$

در این نقطه مشتق صفر است

در $x=4,\ x=0$ مشتق وجود ندارد

این نقاط زاویه دارند .

$$\begin{cases} f'_{-}(0)=-4 \ , \ f'_{+}(0)=4 \\ f'_{-}(4)=-4 \ , \ f'_{+}(4)=4 \end{cases}$$

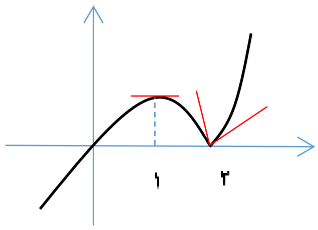
تابع سه نقطه بحرانی دارد . $\{0\ ,\ 2\ ,\ 4\}$

نکته مهم : با توجه به تعریف کتاب درسی نقاط ابتدا و انتهای بازه اگر متعلق به دامنه تابع باشند نقاط بحرانی تابع هستند .

۱۳۰) نقاط بحرانی توابع زیر را به کمک رسم نمودار توابع پیدا کنید . $y=x|x|$ ، $y=|x^{2}-4x|$ ، $y=x|x-2|$

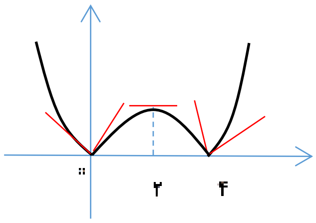
پاسخ:

$$y=x|x-2|=\begin{cases} x^{2}-2x & x\ge 2 \\ 2x-x^{2} & x<2 \end{cases}$$



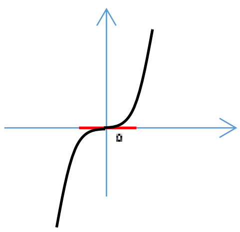
در $x=2$ مشتق ناپذیر و در $x=1$ مشتق صفر است . بنابراین نقاط بحرانی اند .

$$y=|x^{2}-4x|=\begin{cases} x^{2}-4x & x<0 \\ 4x-x^{2} & 0\le x\le 4 \\ x^{2}-4x & x>4 \end{cases}$$



در $x=4$ ، $x=0$ مشتق وجود ندارد و در $x=2$ مشتق صفر است پس مجموعه نقاط بحرانی $\{0\ ,\ 2\ ,\ 4\}$ می باشند .

$$y=x|x|=\begin{cases} x^{2} & x\ge 0 \\ -x^{2} & x<0 \end{cases}$$



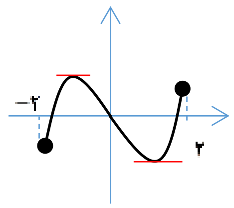
در $x=0$ مشتق تابع صفر است و تنها نقطه بحرانی تابع است .

۱۳۱) نقاط بحرانی تابع $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x$ را در بازه $[-2,2]$ بیابید .

☑پاسخ:

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-x \quad \Rightarrow \quad f'(x)=x^2-1=0 \quad \Rightarrow \quad x=\pm 1$$

تابع در تمام بازه $(-2,2)$ مشتق پذیر است بنابراین مجموعه نقاط بحرانی این تابع در بازه داده شده : $\{-2,-1,1,2\}$ می باشد .



۱۳۲) نقاط بحرانی تابع $f(x)=\begin{cases} x^2+2x & x\ge 1 \\ 4x-2 & x<1 \end{cases}$ را تعیین کنید .

☑ پاسخ:

در نقطه مرزی دامنه ابتدا با پیوستگی شروع می کنیم . $f(1)=\lim\limits_{x\to 1^+}x^2+2x=3\neq \lim\limits_{x\to 1^-}4x-2=2$ تابع در این نقطه مشتق ناپذیر

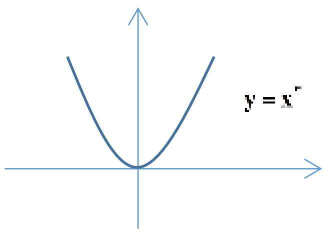
است بنابراین این نقطه بحرانی است حال مشتق تابع را بررسی می کنیم .

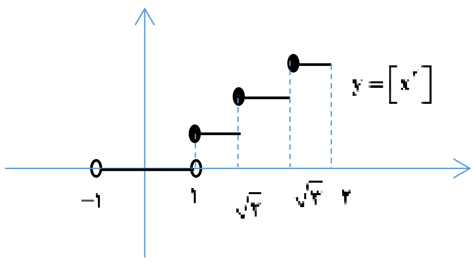
$$f(x)=\begin{cases} x^2+2x & x\ge 1 \\ 4x-2 & x<1 \end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases} 2x+2 & x>1 \\ 4 & x<1 \end{cases} \Rightarrow f'=0 \Rightarrow 2x+2=0 \Rightarrow x=-1$$

این نقطه بحرانی نیست چون در دامنه ضابطه خود قرار ندارد بنابراین در هیچ نقطه ای مشتق تابع صفر نمی شود . و فقط یک نقطه بحرانی دارد : $\{1\}$

۱۳۳) نقاط بحرانی تابع با ضابطه $f(x)=[x^2]$ در بازه $[-1,2]$ را تعیین کنید .

☑پاسخ:



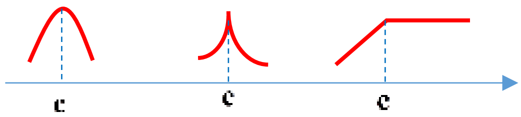


تابع در نقاط $\{-1,1,\sqrt{2},\sqrt{3},2\}$ مشتق ناپذیر و در سایر نقاط بازه داده شده مشتقش صفر است پس تمام بازه $[-1,2]$ بحرانی اند

واژه اکسترمم نسبی برای ماکسیمم و مینیمم تابع بکار برده می شود که تعاریف آنها به شرح زیر است .

نقطه $x=c$ طول ماکسیمم نسبی تابع f است که اولاً در یک همسایگی متقارن این نقطه تابع تعریف شده باشد ، و ثانیا عرض این نقطه از تمامی عرض های این همسایگی بزرگتر یا مساوی است . به زبان ریاضی یعنی :

$$۱)\ \forall x \in (c-\delta , c+\delta) \Rightarrow f(c) \geq f(x)$$

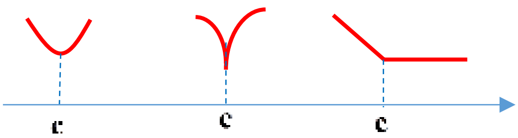


در این حالت $f(c)$ را مقدار ماکسیمم نسبی تابع f می نامند .

نقطه $x=c$ طول مینیمم نسبی تابع f است که اولاً در یک همسایگی متقارن این نقطه ، تابع تعریف شده باشد ، و ثانیاً عرض این نقطه از تمامی عرض های این همسایگی نیز کوچکتر یا مساوی باشد . به زبان ریاضی یعنی :

$$۲)\ \forall x \in (c-\delta ,\ c+\delta) \Rightarrow f(c) \leq f(x)$$

در این حالت $f(c)$ را مقدار مینیمم نسبی تابع f می نامند .



نقاط ابتدا و انتهای بازه نمی توانند اکسترمم نسبی باشند زیرا تابع در همسایگی متقارن آن ها تعریف نشده .

۱۳۴) طول نقاط اکسترمم نسبی $y=\frac{۱}{۳}x^۳-\frac{۵}{۲}x^۲+۶x+۱$ را تعیین کنید .

☑ پاسخ :

$$y=\frac{۱}{۳}x^۳-\frac{۵}{۲}x^۲+۶x+۱ \quad \Rightarrow \quad y'=x^۲-۵x+۶=(x-۲)(x-۳)=۰ \quad \Rightarrow \begin{cases} x=۲ \\ x=۳ \end{cases}$$

۱۳۵) به ازای چه مقادیر a و b نقطه‌ی $A\left|\begin{matrix}-۱\\۲\end{matrix}\right.$ مینیمم تابع $y=x^۲+ax+b$ می‌باشد؟

☑پاسخ:

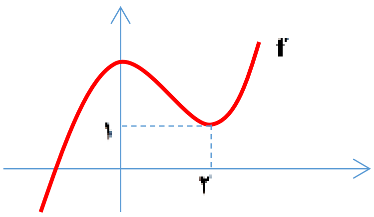
اگر یک نقطه اکسترمم یک تابع چند جمله ای خطی باشه اولاً باید مختصاتش در ضابطه تابع صدق کنه و ثانیاً طول این نقطه باید مشتق اول تابع رو صفرکنه .

$$y'=۲x+a=۰ \Rightarrow x=\frac{-a}{۲}=-۱ \Rightarrow a=۲$$

$$f(-۱)=۱-۲+b=۲ \qquad \Rightarrow \quad b=۳$$

۱۳۶) نمودار تابع با ضابطه $f(x)=x^{۳}+bx^{۲}+d$ به صورت شکل مقابل است مقادیر $b\ ,\ d$ را تعیین کنید . (دی ۱۴۰۱)

☑پاسخ



$$f(x)=x^{۳}+bx^{۲}+d \quad\Rightarrow\quad f'(x)=۳x^{۲}+۲bx=۰ \quad\Rightarrow\quad x(۳x+۲b)=۰ \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} x=۰ \\ x=\dfrac{-۲b}{۳}=۲ \quad\Rightarrow\quad b=-۳ \end{cases}$$

$$f(۲)=(۲)^{۳}+-۳(۲)^{۲}+d=۱ \quad\Rightarrow\quad d=۵$$

) اگر نقطه $(۲,۱)$ نقطه اکسترمم نسبی تابع $f(x)=x^{۳}+bx^{۲}+d$ باشد . مقادیر b, d را به دست آورید . (خرداد ۱۴۰۰)

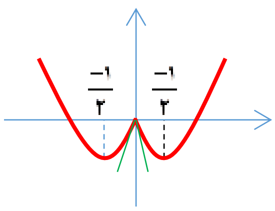
☑پاسخ : من چیزی نمیگم خودتون می دونید .

۱۳۷) تابع $y=x^{۲}-|x|$ چند نقطه اکسترمم نسبی دارد نوع آن ها را تعیین کنید .

☑ پاسخ

$$y=x^{۲}-|x|=\begin{cases} x^{۲}-x & x\geq ۰ \\ x^{۲}+x & x<۰ \end{cases} \quad\Rightarrow\quad y'=\begin{cases} ۲x-۱ & x>۰ \\ & x=۰ \\ ۲x+۱ & x<۰ \end{cases}$$

تابع در $x=۰$ مشتق ناپذیر است . چون ($f'(۰^{-})=+۱$, $f'(۰^{+})=-۱$) و در $x=\pm\frac{۱}{۲}$ مشتقش صفر است .



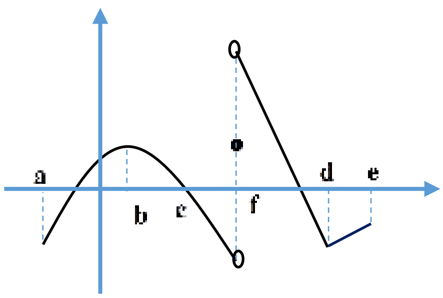
x		$\frac{-۱}{۲}$		۰		$\frac{۱}{۲}$	
f'	−	∪	+	∩	−	∪	+
		min		max		min	

۱۳۸) با توجه به شکل تابع $f(x)$ و نقاط روی آن به سوالات زیر پاسخ دهید .

الف) طول نقاط اکسترمم نسبی تابع اند .

ب) طول نقاطی که ماکسیمم مطلق تابع است .

پ) طول نقاطی که تابع بحرانی است ولی اکسترمم نسبی نیست .



☑پاسخ

الف) $x=d$, $x=b$　　　ب) ندارد　　　پ) $x=e$, $x=f$, $x=a$

۱۳۹) تابع $f(x)=\dfrac{x^2+x+a}{x-2}$ فاقد اکسترمم نسبی است. حدود a کدام است؟

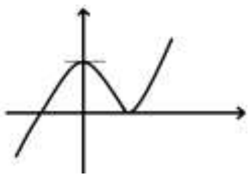
۱) $a<-6$ ۲) $a>-6$ ۳) $a\le -6$ ۴) $a\ge -6$

☑ پاسخ

$$y'=\frac{(2x+1)(x-2)-(x^2+x+a)}{(x-2)^2}=\frac{2x^2-3x-2-x^2-x-a}{(x-2)^2}=0$$

$$x^2-4x-2-a=0 \quad\Rightarrow\quad \Delta\le 0 \quad\Rightarrow\quad 16+8+4a\le 0 \quad\Rightarrow\quad 4a\le -24 \quad\Rightarrow\quad \boxed{a\le -6}$$

۱۴۰) نمودار تابع $f(x)=x^3-3x^2+ax+b$ به صورت مقابل است. b کدام است؟



۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

☑پاسخ :

$$y'=3x^2-6x+a \xrightarrow{x=0} y'(0)=0 \Rightarrow a=0 \quad\Rightarrow\quad y'=3x^2-6x=3x(x-2)=0 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$$

$$\Big|_0^2 \quad\Rightarrow\quad 0=8-12+b \quad\Rightarrow\quad \boxed{b=4}$$

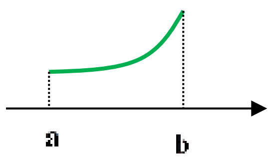
قضیه فرما : اگر در نقطه ی $x=a$ تابع $f(x)$ ماکزیمم یا مینیمم نسبی داشته باشد ، و $f'(a)$ موجود باشد آنگاه $f'(a)=0$ خواهد بود به عبارت دیگر هر نقطه اکسترمم نسبی تابع یک نقطه بحرانی آن است ولی عکس قضیه فرما در حالت کلی درست نیست .

ماکسیمم مطلق : اگر $x=a$ نقطه ای از دامنه تابع به طوری که برای هر $x\in D_f$ داشته باشیم $f(a)\ge f(x)$ یعنی عرض نقطه a از تمامی عرض های این تابع در تمام دامنه بزرگتر یا مساوی باشد . آنگاه $f(a)$ ماکسیمم مطلق تابع f می نامیم

مینیمم مطلق : اگر $x=a$ نقطه ای از دامنه تابع به طوری که برای هر $x\in D_f$ داشته باشیم $f(a)\le f(x)$ یعنی عرض نقطه a از تمامی عرض های این تابع در تمام دامنه کوچکتر یا مساوی باشد . آنگاه $f(a)$ مینیمم مطلق تابع f می نامیم .

در توابع یکنوا به راحتی ماکسیمم و مینیمم مطلق را می توان تعیین نمود .

$$\text{if} \quad \forall x\in(a,b) \quad f'(x)>0 \quad\Rightarrow\quad f\uparrow \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} y_{max}=f(b) \\ y_{min}=f(a) \end{cases}$$



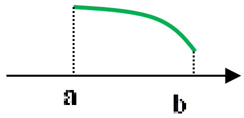
۱۴۱) ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع با ضابطه $f(x)=x^3+2x+1$ را در بازه $[-2,3]$ تعیین کنید .

☑پاسخ:

یعنی تابع در تمام دامنه اش اکیداً یکنوا صعودی است : $f(x)=x^3+2x+1 \quad\Rightarrow\quad \forall x\in[-2,3] \quad f'(x)=3x^2+2>0$

$$y_{max}=f(3)=3^3+2(3)+1=34 \qquad , \qquad y_{min}=f(-2)=(-2)^3+2(-2)+1=-11$$

$$\text{if}\quad \forall x\in(a,b)\quad f'(x)<0 \;\Rightarrow\; f\downarrow \qquad \Rightarrow \begin{cases} y_{max}=f(a) \\ y_{min}=f(b) \end{cases}$$



۱۴۲) ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع با ضابطه $f(x)=\dfrac{x-۲}{x-۳}$ را در بازه $[۴,۱۰]$ تعیین کنید .

☑ پاسخ:

مشتق می گیریم : $f'(x)=\dfrac{-۱}{(x-۳)^۲} \Leftarrow f(x)=\dfrac{x-۲}{x-۳}$ مشتق تابع همواره منفی است و در بازه داده شده یکنوا نزولی است بنابراین :

$$y_{max}=f(a)=f(۴)=\frac{۴-۲}{۴-۳}=۲ \qquad , \qquad y_{min}=f(b)=f(۱۰)=\frac{۱۰-۲}{۱۰-۳}=\frac{۸}{۷}$$

> هر تابع پیوسته در بازه ای بسته ماکسیمم و مینیمم مطلق دارد .

برای تعیین **min,max** مطلق تابع پیوسته $y=f(x)$ در بازه $[a,b]$ ابتدا نقاط بحرانی تابع را تعیین کرده و جدو ل زیر را تنظیم می کنیم .

x	a	$x_۱$	$x_۲$	$x_۳$	$x_۴$.................x_n	b
$f(x)$	$f(a)$	$f(x_۱)$	$f(x_۲)$	$f(x_۳)$	..............$f(x_n)$	$f(b)$

سطر اول نقاط بحرانی تابع در این فاصله و نقاط ابتدا و انتهای بازه و سطر دوم مقادیر تابع به ازای این نقاط می با شد . آنگاه بیشترین مقدار سطر دوم ماکسیمم مطلق و کمترین مقدار سطر دوم مینیمم مطلق تابع در این بازه خواهد بود .

۱۴۳) بیشترین مقدار تابع $y=x^۳-۳x^۲-۹x+۵$ ، در بازه‌ی $[-۲,۲]$ ، کدام است؟

☑پاسخ:

ابتدا از تابع مشتق می گیریم و نقاط بحرانی را تعیین و مقادیر تابع به ازای این نقاط را به دست می آوریم . عرض نقاط بحرانی تابع را بازه ی $(-۲,۲)$

$$f=x^۳-۳x^۲-۹x+۵ \;\Rightarrow\; f'=۳x^۲-۶x-۹=0 \;\Rightarrow \begin{cases} x=-۱ \;\Rightarrow\; f(-۱)=-۱-۳+۹+۵=۱۰ \\ x=۳\notin(-۲,۲) \end{cases}$$

عرض تابع را در نقاط ابتدایی و انتهایی این بازه به دست می آوریم.داریم:

$$\begin{cases} f(-۲)=-۸-۱۲+۱۸+۵=۳ \\ f(۲)=۸-۱۲-۱۸+۵=-۱۷ \end{cases}$$

درآخر، بین مقادیر به دست آمده ،بیشترین مقدار را به عنوان ماکزیمم مطلق تابع در این بازه معرفی می کنیم:

x	-۲	-۱	۲
$f(x)$	۳	۱۰	-۱۷

$$y_{max}=۱۰$$

۱۴۴) ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x)=|x|(x+۱)$ در فاصله $[-۲,۱]$ را به دست آورید .

☑پاسخ:

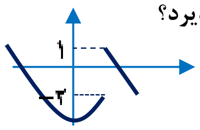
$$f(x)=\begin{cases}x^۲+x & x>۰\\ -x^۲-x & x\le ۰\end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases}۲x+۱ & x>۰ & \Rightarrow ۲x+۱=۰\Rightarrow x=-\frac{۱}{۲} \text{ غ ق ق}\\ \text{موجود نیست} & x=۰ & \\ -۲x-۱ & x<۰ & \Rightarrow -۲x-۱=۰\Rightarrow x=-\frac{۱}{۲} \text{ ق ق}\end{cases}$$

x	-۲	$\frac{-۱}{۲}$	۰	۱
$f(x)$	-۲	$\frac{۱}{۴}$	۰	۲

مینیمم مطلق ماکزیمم مطلق

در توابع نا پیوسته در حالت کلی نمی توان از نکته فوق برای تعیین ماکسیمم و مینیمم مطلق استفاده نمود ، و بهتر است نمودار تابع ، مورد بررسی قرار گیرد .

۱۴۵) اگر تابع $f(x)=\begin{cases}x^۲-۳ & x<۱\\ a & x=۱\\ ۳-۲x & x>۱\end{cases}$ در $x=۱$ ماکزیمم یا می‌نیمم نسبی داشته باشد، a چند مقدار صحیح را نمی‌تواند بپذیرد؟



☑پاسخ:

با توجه به شکل داریم :

$$\left.\begin{array}{l}(\text{ماکزیمم نسبی در } x=۱)\Rightarrow a\ge ۱\\ (\text{مینیمم نسبی در } x=۱)\Rightarrow a<-۲\end{array}\right\}\Rightarrow a\in R-[-۲,۱)$$

پس a سه مقدار صحیح ۲−و ۱−و ۰ را نمی‌تواند بپذیرد.

۱۴۶) مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x)=x^۲+|x+۱|$ را در بازه‌ی $[-۲,۲]$ به دست آورید.

☑ پاسخ : من که میگم شبیه سازی کن رفیق

$$f(x)=x^۲+|x+۱|=\begin{cases}x^۲+x+۱ & -۱\le x\le ۲\\ x^۲-x-۱ & -۲\le x<-۱\end{cases} \Rightarrow \quad \Rightarrow f'(x)=\begin{cases}۲x+۱ & -۱<x<۲\\ ۲x-۱ & -۲<x<-۱\end{cases}$$

$$\begin{cases}f'(x)=۰ \Rightarrow ۲x+۱=۰ \Rightarrow x=\frac{-۱}{۲}\\ f'(x)= \text{وجود ندارد} \quad x=-۱ \Rightarrow \begin{cases}f'_-(-۱)=-۳\\ f'_+(-۱)=-۱\end{cases}\end{cases}$$

x	-۲	-۱	$\frac{-۱}{۲}$	۲
$f(x)$	۵	۱	$\frac{۳}{۴}$	۷

مینیمم مطلق ماکزیمم مطلق

۱۴۷) مقدار ماکزیمم مطلق تابع $f(x)=\sqrt{x-۲}-\sqrt{۱۲-۲x}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) $۲\sqrt{۲}$

☑پاسخ:

$$f(x)=\sqrt{x-۲}-\sqrt{۱۲-۲x} \Rightarrow \begin{cases} x-۲ \geq ۰ \Rightarrow x\geq ۲ \\ ۱۲-۲x \geq ۰ \Rightarrow x\leq ۶ \end{cases} \Rightarrow D_f=[۲,۶]$$

$$f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x-۲}}+\frac{۲}{۲\sqrt{۱۲-۲x}}$$

$f'(x)$ در بازه ی $(۲,۶)$ تعریف شده و مخالف صفر است ،پس f فاقد نقطه ی بحرانی است.بنابراین برای تعیین ماکزیمم مطلق تابع f کافی است مقادیر تابع را به ازای $x=۲$ و $x=۶$ محاسبه کنیم :

$$f(۲)=-۲\sqrt{۲} \quad , \quad f(۶)=۲$$

۱۴۸) ماکزیمم مطلق تابع $y=x\sqrt{۴-x^۲}$ کدام ا ست ؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) $۲\sqrt{۲}$

☑پاسخ:

$$f'=\sqrt{۴-x^۲}-\frac{x^۲}{\sqrt{۴-x^۲}}=۰ \Rightarrow x=\pm\sqrt{۲}$$

راه اول

$$y_{max}=f\left(\sqrt{۲}\right)=۲ \quad , \quad y_{min}=f\left(-\sqrt{۲}\right)=-۲$$

۱۴۹) در تابع $y=x\sqrt{a^۲-x^۲}$ نقاط بحرانی $x=\frac{\pm a}{\sqrt{۲}}$ و ماکسیمم و مینیمم مطلق $\frac{a^۲}{۲}$, $\frac{-a^۲}{۲}$ می باشند

راه دوم :

$$y_{max}=\frac{a^۲}{۲}=\frac{۴}{۲}=۲$$

۱۵۰) اگر تابع $f(x)=ax^۳+bx+۷$ در نقطه ی $x=۱$ دارای ماکزیمم نسبی ۱۰ باشد،حاصل $a-b$ کدام است؟

۱) -۶ ۲) -۴ ۳) $-\frac{۱۱}{۲}$ ۴) $-\frac{۱۳}{۲}$

☑پاسخ:

$$f'(x)=۳x^۲-۶x=۳x(x-۲)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۰ \\ x=۲ \end{cases}$$

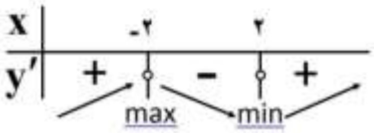
نقطه ی $(۱,۱۰)$ نقطه ی ماکزیمم نسبی تابع f است.پس داریم :

$$\begin{cases} f(۱)=۱۰ \Rightarrow (a+b+۷=۱۰) \Rightarrow a+b=۳ \\ f'(۱)=۰ \Rightarrow ۳a+b=۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-\frac{۳}{۲} \\ b=\frac{۹}{۲} \end{cases} \Rightarrow a-b=-۶$$

۱۵۱) اگر مقدار ماکزیمم نسبی تابع $f(x)=x+\frac{4}{x}+a$ برابر ۶ باشد، مقدار می نیمم نسبی آن کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۴ ۳) -2 ۴) -8

پاسخ:



$$y'=1-\frac{4}{x^2}=\frac{x^2-4}{x^2}=0 \rightarrow x^2=4 \rightarrow x=\pm 2$$

$$f(-2)=6 \rightarrow -2+\frac{4}{-2}+a=6 \rightarrow a=10 \Rightarrow f(2)=2+\frac{4}{2}+10=\boxed{14}$$

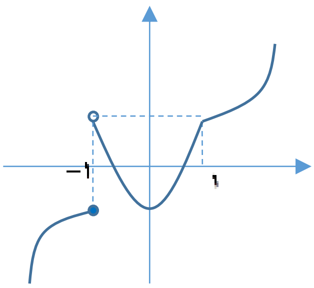
۱۵۲) تابع $f(x)$ با ضابطه ی : $y=\begin{cases} x^3 & |x|\ge 1 \\ 2x^2-1 & |x|<1 \end{cases}$ چند نقطه بحرانی و چند اکسترمم نسبی دارد ؟

۱) سه بحرانی – سه اکسترمم نسبی ۲) دو بحرانی – دو اکسترمم نسبی

۳) دو بحرانی – یک اکسترمم نسبی ۴) سه بحرانی – یک اکسترمم نسبی

پاسخ:

مطابق شکل تابع در سه نقطه بحرانی است و فقط در یک نقطه اکسترمم نسبی است .



تابع در این نقطه زاویه دارد

مشتق تابع در این نقطه از منفی به مثبت تغییر علامت میدهد پس این نقطه مینیمم

$f'(x)=\begin{cases} 3x^2 & x>1 \quad x<-1 \\ 4x & -1<x<1 \end{cases} \Rightarrow f'(0)=0 \ , \ \left(f'_+(1)=3 \ , \ f'_-(1)=4 \right) \ , \ f'(-1)=$ وجود ندارد چون ناپیوسته است

بنابراین ۳ نقطه بحرانی و فقط یک نقطه اکسترمم دارد : $x=0$

یادآوری

اصطلاح اکسترمم $\frac{\text{نسبی}}{\text{مطلق}}$ اشاره به ماکزیمم یا مینیمم $\frac{\text{نسبی}}{\text{مطلق}}$ دارد .

منظور از اکسترمم های تابع عرض نقاط $\frac{\text{ماکزیمم}}{\text{مینیمم}}$ است . اگر منظور طول باشد حتما واضح بیان خواهد شد .

در نقاط اکسترمم $\frac{\text{نسبی}}{\text{مطلق}}$ f' یا برابر صفر است یا وجود ندارد .

در نقاط اکسترمم $\frac{\text{نسبی}}{\text{مطلق}}$ ممکن است تابع پیوسته نباشد .

در نقاط اکسترمم ممکن است مشتق تغییر علامت ندهد . (اکسترمم های نا پیوسته)

اگر تابع f در نقطه a دارای اکسترمم مطلق باشد و در همسایگی متقارن a تعریف شده باشد آنگاه f در a اکسترمم نسبی نیز هست .

۱۵۳)درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را تعیین کنید.

الف) شرط لازم و کافی برای آن‌که تابع $f(x)$ در $x=a$ مشتق‌پذیر باشد، آن است که در این نقطه پیوسته باشد.

ب) هر نقطه‌ی اکسترمم مطلق تابع f که این تابع در همسایگی‌اش تعریف شده باشد، اکسترمم نسبی هم می‌باشد.

پ) اگر $x=a$ طول نقطه‌ی اکسترمم نسبی تابع $f(x)$ باشد، آن‌گاه $f'(a)=0$ است.

ت) تابع $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ در نقطه به طول $x=0$ دارای نقطه‌ی اکسترمم مشتق‌ناپذیر می‌باشد.

☑پاسخ:

الف) درست نیست پیوستگی فقط شرط لازم مشتق پذیری است .

ب) درست است .

پ) درست نیست می تواند این گونه نباشد مثل $y=|x|$ در $x=0$

ت) درست است

بهینه سازی

روش حل مسئله

روش کلی بهینه سازی :

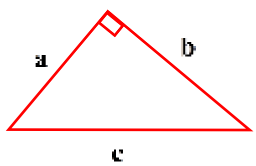
۱- در صورت نیاز ترسیم شکل برای درک بهتر مسئله . (به خصوص هنگامی که ایده ی اولیه ندارید)

۲- ایجاد رابطه بین معلومات و مجهولات مسئله و فرموله کردن آن و تبدیل آن به یک تابع یک متغیره.

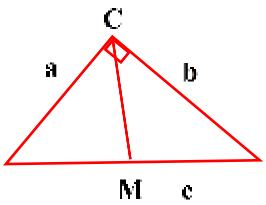
۳- پس از تشکیل تابع مسئله ، نقاط بحرانی تابع را تعیین، مقادیر تابع ، به ازاء نقاط بحرانی را به دست می آوریم و با توجه به ماهیت سوال ، ماکزیمم یا مینیمم حاصل از تابع جواب مسئله خواهد بود.

بهتره بدونی

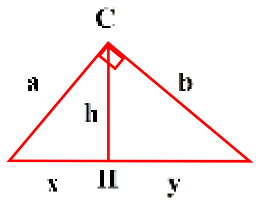
در مثلث قائم الزاویه موارد زیر را داریم :



$$c^2 = a^2 + b^2$$

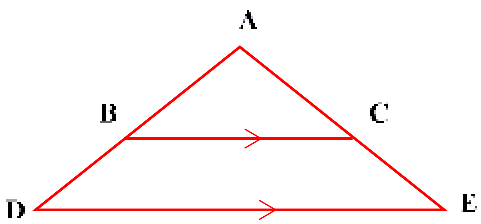


$$MC = \frac{c}{2}$$



$$a^2 = x(x+y)$$
$$b^2 = y(x+y)$$
$$h^2 = xy$$

قضیه تالس در طرح سوالات بهینه سازی اهمیت دارد .



تالس جزء به جزء $\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CE}$

تالس جزء به کل $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}$

در هر مثلث متساوی الاضلاع به طول ضلع a ، اندازه ارتفاع برابر است با : $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ و مساحت آن برابر است با : $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

در هر مثلث متساوی الساقین ارتفاع وارد بر قاعده ، نیمساز و میانه و عمود منصف هم می باشد .

۱۵۴) دو عدد حقیقی چنان بیابید که تفاضل آن ها ۱۰ باشد و حاصل ضربشان کمترین مقدار ممکن گردد . (دی ۱۴۰۱)

☑ پاسخ:

$$x-y=10$$

$$p=xy=x(10+x)=x^2-10x \quad\Rightarrow\quad p'=2x-10=0 \quad\Rightarrow\quad x=5 \;,\; y=-5$$

۱۵۵)محیط یک مستطیل ۲۴ سانتی متر است اگر مساحت مستطیل ماکزیمم باشد مقدار مساحت را به دست آورید .

☑ پاسخ:

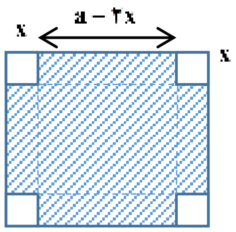
$$2x+2y=24 \Rightarrow x+y=6 \;,\; S=xy=x(6-x)=6x-x^2 \Rightarrow S'=6-2x=0 \Rightarrow x=3 \Rightarrow S_{(3)}=18-9=9$$

۱۵۶) دربین مستطیل هایی با محیط ثابت ۱۴ سانتی متر طول و عرض مستطیلی با بیشترین مساحت را بیابید (دی ۱۴۰۱)

☑ پاسخ: مثل بالایی شبیه ساز کنید

۱۵۷) می خواهیم با یک ورقه مربع شکل به ضلع a یک جعبه مکعب شکل در باز با حجم ماکزیمم بسازیم ، اگر از چهار گوشه ورقه چهار مربع به ضلع x بریده شود ، اندازه قسمت بریده شده بر حسب a کدام است ؟

☑ پاسخ:



$$V=(a-2x)^2x=a^2x-4ax^2+4x^3 \quad\Rightarrow\quad V'=12x^2-8ax+a^2=0 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} x=\dfrac{a}{2} & \text{ق ق ن} \\ x=\dfrac{a}{6} & \text{ق ق} \end{cases}$$

۱۵۸) کم ترین فاصله منحنی $y=x^2$ از خط $y-4x+2=0$ را به دست آورید ؟

☑ پاسخ:

$$h(x)=\frac{|x^2-4x+2|}{\sqrt{1+16}} \quad\Rightarrow\quad h'(x)=2x-4=0 \quad\Rightarrow\quad x=2 \quad\Rightarrow\quad h(2)=\frac{|4-8+2|}{\sqrt{17}}=\frac{2}{\sqrt{17}}$$

۱۵۹) مینیمم فاصله نقطه $M\left(\frac{3}{2},0\right)$ از منحنی $y=2\sqrt{x}$ کدام است ؟

☑ پاسخ:

$$h(x)=MB=\sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(2\sqrt{x}\right)^2}=\sqrt{x^2+x+\frac{9}{4}} \quad,\quad 0\le x<+\infty$$

$$h'(x)=0 \quad\Rightarrow\quad 2x+1=0 \quad\Rightarrow\quad x=\frac{-1}{2}$$

در دامنه تابع قرار ندارد

$$h(0)=\frac{3}{2} \quad\Rightarrow\quad h_{min}=\frac{3}{2}$$

$x=0$ نقطه بحرانی تابع h

۱۶۰) کوتاه ترین فاصله ی مبدا مختصات از نقاط منحنی به معادله ی $y=\frac{۲}{x^۲}$ کدام است؟

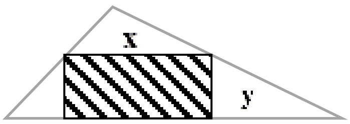
۱ (۱ $\sqrt{۳}$ (۲ $\sqrt{۲}$ (۳ ۲ (۴

☑ پاسخ:

$$A\left|\begin{matrix}\alpha\\ \frac{۲}{\alpha^۲}\end{matrix}\right. ,O\left|\begin{matrix}۰\\ ۰\end{matrix}\right. \Rightarrow y=|AO|=\sqrt{\alpha^۲+\frac{۴}{\alpha^۴}} \xrightarrow{(\sqrt{u})'=\frac{u'}{۲\sqrt{u}}} y'=۲\alpha-\frac{۱۶}{\alpha^۵}=۰$$

$$۲\alpha=\frac{۱۶}{\alpha^۵} \Rightarrow \alpha^۶=۸ \Rightarrow \alpha^۲=۲ \Rightarrow |AO|_{min}=\sqrt{۲+۱}=\boxed{\sqrt{۳}}$$

۱۶۱) اگر قاعده مثلث ۳۶ و ارتفاع آن ۱۲ باشد در شکل مقابل بیشترین مساحت ناحیه هاشور زده کدام ا ست ؟



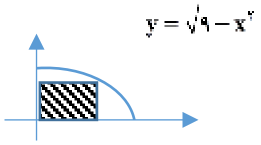
☑ پاسخ:

اینجا تالس زدیم جز به کل

$$\frac{x}{۳۶}=\frac{۱۲-y}{۱۲} \Rightarrow x=۳(۱۲-y) \Rightarrow S=xy \Rightarrow S=۳(۱۲-y)y=۳۶y-۳y^۲$$

$$S'_y=۳۶-۶y=۰ \Rightarrow y=۶ \Rightarrow S_{max}=S_{(y=۶)}=(۳۶)(۶)-۳(۶)^۲=۱۰۸$$

۱۶۲) اگر شعاع ربع دایره ۳ باشد ، بیش ترین مساحت مستطیل محاط شده در شکل را بدست آورید .



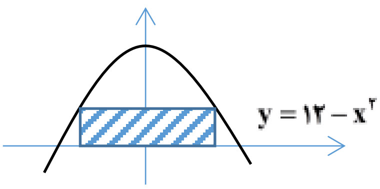
☑پاسخ:

$$y=\sqrt{۹-x^۲} \quad , \quad ۰\le x\le ۳$$

$$S(x)=xy=x\sqrt{۹-x^۲} \Rightarrow S'(x)=\sqrt{۹-x^۲}+\frac{-x^۲}{\sqrt{۹-x^۲}}=\frac{۹-۲x^۲}{\sqrt{۹-x^۲}}=۰ \Rightarrow x^۲=\frac{۹}{۲} \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{۹}{۲}}$$

x	۰	$\sqrt{\frac{۹}{۲}}$	۳
S(x)	۰	$\frac{۹}{۲}$	۰

۱۶۳) در شکل مقابل بیشترین مساحت ناحیه هاشور زده را تعیین کنید .



☑پاسخ:

ناحیه هاشور زده یک مستطیل است که دو راس آن روی منحنی $y=۱۲-x^۲$ قرار دارند

بنابراین داریم :

$$\underbrace{S_{(x)}}_{\text{مساحت مستطیل}}=\underbrace{(۲x)}_{\text{طول}}\times\underbrace{(۱۲-x^۲)}_{\text{عرض}}=۲۴x-۲x^۳ \Rightarrow S'_{(x)}=۲۴-۶x^۲=۰ \Rightarrow x=۲ \Rightarrow S_{(۲)}=۳۲$$

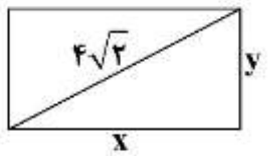
۱۶۴)غلظت یک داروی شیمیایی در خون t ساعت پس از تزریق از رابطه ی $f(t)=\frac{t}{t^۳+۵۴}$ به دست می آید چند ساعت پس از تزریق غلظت آن در خون بیشترین مقدار ممکن را خواهد داشت .

☑پاسخ:

$$f'(t)=\frac{۱\times(t^۳+۵۴)-۳t^۲\times t}{(t^۳+۵۴)^۲}=\frac{-۲t^۳+۵۴}{(t^۳+۵۴)^۲}\Rightarrow f'(t)=۰\Rightarrow -۲t^۳+۵۴=۰\Rightarrow t^۳=۲۷\Rightarrow t=۳$$

۱۶۵) اندازه ی قطر مستطیلی برابر $۴\sqrt{۲}$ است. بیشترین مقدار مساحت مستطیل چقدر است؟

۱) $۸\sqrt{۲}$ ۲) $۱۶\sqrt{۲}$ ۳) ۳۲ ۴) ۱۶



☑ پاسخ:

$$x^۲+y^۲=۳۲\Rightarrow y=\pm\sqrt{۳۲-x^۲}$$

$$S=x\times\sqrt{۳۲-x^۲}\Rightarrow S'_x=\sqrt{۳۲-x^۲}+x\frac{-۲x}{۲\sqrt{۳۲-x^۲}}=۰$$

$$۳۲-۲x^۲=۰\Rightarrow x=\pm۴\Rightarrow S_{max}=۴\times\sqrt{۳۲-۱۶}=۱۶$$

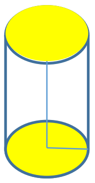
حال راه تستی : وقتی مجموع دو متغیر مثبت مقدار ثابتی باشد حاصل ضرب آنها وقتی ماکزیمم می شود که آن دو متغیر با هم برابر باشند

$$x^۲+y^۲=۳۲\Rightarrow x^۲=y^۲=۱۶\Rightarrow x=y=۴$$

$$S_{max}=x\times y=۴\times۴=۱۶$$

۱۶۶) می خواهیم با یک صفحه فلزی به مساحت ۲۷π یک استوانه در باز با حجم ماکزیمم بسازیم . شعاع قاعده ارتفاع و حجم این استوانه چقدر است .

☑پاسخ:



حجم استوانه

$$V=\pi r^۲h$$,

مساحت استوانه

$$S=\pi r^۲+۲\pi rh=۲۷\pi\Rightarrow h=\frac{۲۷\pi-\pi r^۲}{۲\pi r}=\frac{۲۷-r^۲}{۲r}$$

$$V=\pi r^۲(\frac{۲۷-r^۲}{۲r})=\pi(\frac{۲۷r-r^۳}{۲})\Rightarrow V'_r=\pi(\frac{۲۷-۳r^۲}{۲})=۰\Rightarrow r=۳$$

بنابراین شعاع : $r=۳$ و ارتفاع : $h=\frac{۲۷-۹}{۶}=۳$ و حجم باید : $V=\pi r^۲h=\pi(۳^۲)(۳)=۲۷\pi$

۱۶۷) اگر مجموع شعاع قاعده و ارتفاع یک استوانه ۲۵ باشد، شعاع قاعده را چقدر اختیار کنیم تا حجم آن ماکزیمم شود؟

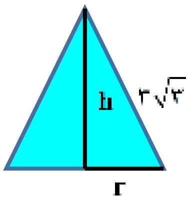
۱) ۱۱ ۲) ۱۰ ۳) $\frac{۳۲}{۳}$ ۴) ۱۵

☑پاسخ: گزینه ۲ درست است

$$h+r=۱۵\quad,\quad V=\pi r^۲h=\pi r^۲(۱۵-r)=۱۵\pi r^۲-\pi r^۳$$

$$V'_r=۳۰\pi r-۳\pi r^۲=۰\Rightarrow ۳\pi r(۱۰-r)=۰\Rightarrow r=۰\quad,\quad r=۱۰$$

۱۶۸) بین مخروط هایی که طول مولد آن ها $3\sqrt{3}$ می باشد ماکزیمم حجم کدام است ؟



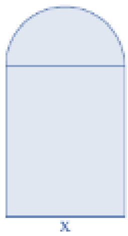
☑پاسخ:

$$V=\frac{\pi}{3}hr^2 \quad , \quad r^2+h^2=27 \quad \Rightarrow \quad r^2=27-h^2 \quad \Rightarrow \quad V=\frac{\pi}{3}(27h-h^3)$$

$$V'_h=\frac{\pi}{3}(27-3h^2)=0 \quad \Rightarrow \quad h=3 \quad \Rightarrow \quad V_{max}=\frac{\pi}{3}(54)=18\pi$$

۱۶۹) مطابق شکل پنجره ای داریم. اگر قطر نیم دایره با عرض مستطیل برابر باشد و محیط پنجره ۹ متر باشد آنگاه عرض مستطیل چقدر باشد تا بیشترین نور دهی را داشته باشد ؟

☑پاسخ:



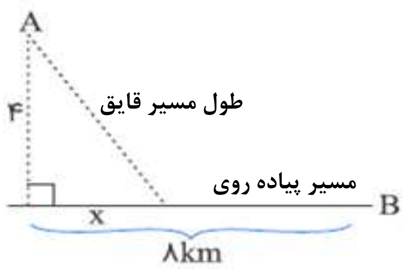
$$p=\pi\left(\frac{x}{2}\right)+x+2y=30$$

$$S=\frac{\pi}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2+xy=\frac{\pi}{2}\frac{x^2}{4}+x\left(\frac{30-x-\frac{\pi}{2}x}{2}\right)$$

$$S=\frac{\pi}{8}x^2+15x-\frac{x^2}{2}-\pi\frac{x^2}{4} \quad \Rightarrow \quad S'=\frac{\pi}{4}x+15-x-\frac{\pi x}{2}=0$$

$$x\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}-1\right)=-15 \qquad x=\frac{15}{\frac{\pi}{4}+1}=\frac{60}{\pi+4}$$

۱۷۰) علی درون قایقی در نقطه **A** قرار دارد که فاصله آن از نزدیک ترین نقطه ساحل یعنی نقطه **H** برابر ۴ کیلو متر است . او می خواهد به نقطه **B** در ساحل برسد که در ۸ کیلومتری **H** قرار دارد (فاصله **H** تا **B** را قدم می زند) فرض کنید سرعت حرکت قایق ۲ و سرعت پیاده روی او ۴ کیلومتر بر ساعت باشد . برای این که علی در کوتاهترین زمان به **B** برسد در چه نقطه ای از ساحل باید از قایق پیاده شود ؟



☑پاسخ:

$$\sqrt{16+x^2} \quad \Rightarrow \quad \text{زمان قایق سواری} \quad t_1=\frac{\sqrt{16+x^2}}{2}$$

$$8-x \quad \Rightarrow \quad \text{زمان پیاده روی} \quad t_2=\frac{8-x}{4}$$

$$=t_1+t_2=\frac{\sqrt{16+x^2}}{2}+\frac{8-x}{4}$$

$$t'=\frac{1}{2}\frac{2x}{2\sqrt{16+x^2}}-\frac{1}{4}=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{2x}{\sqrt{16+x^2}}=1$$

$$\sqrt{16+x^2}=2x \quad \Rightarrow \quad 3x^2=16 \qquad x=\frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$8-x=8-\frac{4}{\sqrt{3}}$$

ریاضیات به سبک روحانی