آکادمی
ریاضی
مهندس روحانی

ریاضی ۳ به سبک روحانی

آموزش مهارت حل مسئله

آموزش مفهومی

صفر تا صد هر مبحث

بررسی آزمون های نهایی

مولف : محمد صادق روحانی گَلمِجانی

@kimia-mahan

تلفن تماس : ۰۹۱۲۱۸۵۹۷۸۰

بسم الله الرحمن الرحیم

مقدمه مولف

این مجموعه شامل درسنامه‌ای کامل به همراه ۷۰۰ سؤال متنوع و حل شده از سؤالات کتاب درسی و امتحانات نهایی داخل و خارج از کشور به همراه سؤالات مفهومی و تألیفی از متن کتاب درسیه . تمام نکات لازم برای شما ارائه شده . این کتاب با توجه به رویکرد کتاب ریاضی ۳ تدوین شده و سعی کردم کاستی های اونو پوشش بدم . از طرفی نحوه ی نوشتن پاسخ تشریحی ، برای امتحان نهایی هم ارائه شده تا به" اندازه بنویسی و نمره سوال رو کامل بگیری" . سازو کارتدوین کتاب بطوریه که با استفاده از مفاهیم و سؤالات حل شده قادر به حل سؤالات بعدی باشی . ۸ آزمون شبیه سازی شده امتحان نهایی همراه با پاسخنامه کاملاً تشریحی و "توضیح دار " آوردم تا شما سوالات امتحان نهایی رو قبل از برگزاری دیدار کنید .

برای موفقیت در درس ریاضی باید از حل مثال‌ها و تمرین‌های کتاب درسی شروع کنید و به هیچ‌وجه از آن غافل نشوید سؤالات امتحانات نهایی و حتی کنکور به طور مستقیم از تمرین‌ها و مثال‌های کتاب درسی طراحی می‌شن. آفت موفقیت شما حفظ کردن پاسخ تمریناته! تسلط بر مفاهیم مستلزم فهم درست درسه و اکتفا کردن به خواندن حل مسأله کارساز نیست، دقت کنید که حل هر سؤال برای شما کمکیه برای حل سؤالات جدیدتر و درک مفاهیم اساسی ریاضی از طریق حل مسئله .

دقت به موارد زیر موفقیت شما را افزایش میده :

۱- بررسی موضوعات به صورت تشریحی و مفهومی و هم‌چنین توجه به کاربرد مفاهیم و تعاریف در حل مسئله .

۲- یادگیری عمیق موضوعات با حوصله‌ی زیاد و اینکه روش های مختلف حل یه سوال رو یادبگیری.

۳- بررسی نمونه سوالات حل شده و پس از آن حل تمرین (البته به اعتقاد من مثال های حل شده کتاب رو هم باید اول سعی کنیم خودمون حل کنیم) و در صورت نیافتن راه حل رجوع به پاسخ.

خوبه بدونید ارزش ۵۰ تمرین که خودتون حل می کنید به مراتب بیش‌تر از خوندن و حفظ کردن ۱۰۰۰ تمرین حل شده است، چون مهم‌ترین قسمت یادگیری و کاربردی‌ترین آن برای حل مسأله ریاضی مثال‌ها و تمرین‌هایی است که خودتون به حل آن می‌پردازید.

فرآیند یادگیری ریاضی تدریجیه و در صورت عدم تکرار و تداوم از یاد می‌ره ،بنابراین انتظار نداشته باشید در این درس در کوتاه مدت تسلط کامل پیدا کنید بلکه این مهم آهسته و پیوسته با تمرین مطالب آموخته شده اتفاق می افته . تسلط ومهارت در هر درسی نتیجه تلاش مستمر و پیگیریه .

لطف کنید کمی و کاستی این کتاب را از من دریغ نکنید تا مجموعه بهتری ارائه بشه از صبر و حوصله و دقت شما سپاس بی پایان دارم از ودقت نظر تشکر می کنم .

سپاس و عشق ، نثار همسر و فرزندانم که برای تالیف این مختصر وقت بسیاری را از ایشان دریغ داشتم .

کرج فروردین ۱۴۰۲ : محمد صادق روحانی گَلمِجانی

فصل ۳ حد

بخش‌پذیری

قضیه‌ی تقسیم: فرض کنید $p(x)$, $g(x)$ دو چند جمله‌ای باشند. در این صورت چند جمله‌ای‌های منحصر به‌فرد $r(x)$, $q(x)$ وجود دارند، به طوری که:
$$p(x)=g(x)q(x)+r(x)$$

$p(x)$ را مقسوم و $g(x)$ را مقسوم‌علیه و $q(x)$ را خارج قسمت و $r(x)$ را باقی‌مانده می‌نامند.

$$\begin{array}{l|l}
p(x)\ \text{(مقسوم)} & g(x)\ \text{(مقسوم علیه)} \\ \hline
\vdots & q(x)\ \text{(خارج قسمت)} \\
\overline{r(x)}\ \text{(باقی مانده)} &
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
x^5+3x^3-3x^2+3x-5 & x^2+1 \\ \cline{2-2}
-(-x^5+x^3) & x^3+2x-3 \\ \cline{1-1}
2x^3-3x^2+3x-5 & \\
-(2x^3+2x) & \\ \cline{1-1}
-3x^2+x-5 & \\
-(-3x^2-3) & \\ \cline{1-1}
x-2=r(x) &
\end{array}$$

$$\frac{x^5}{x^2}=x^3$$
$$\frac{2x^3}{x^2}=2x$$
$$\frac{-3x^2}{x^2}=-3$$

۱) در تقسیم $f(x)=3x^2-5x+2$ برعبارت $(x-2)$ مراحل زیر را تکمیل کنید آیا $f(x)$ بر $(x-2)$ بخش پذیر است ؟ چرا ؟

$$\begin{array}{l|l}
3x^2-5x+2 & x-2 \\ \cline{2-2}
-(3x^2-6x) & ...x+..... \\ \cline{1-1}
x+2 & \\
-(x-2) & \\ \cline{1-1}
R=...... &
\end{array}$$

پاسخ:

با توجه به روند تقسیم چون باقی مانده صفر نشده پس f بر $x-2$ بخش پذیر نیست

$$\begin{array}{l|l}
3x^2-5x+2 & x-2 \\ \cline{2-2}
-(3x^2-6x) & \boxed{3}x+\boxed{1} \\ \cline{1-1}
x+2 & \\
-(x-2) & \\ \cline{1-1}
R=\boxed{4} &
\end{array}$$

نکته

۱) اگرمقسوم $p(x)$ از درجه‌ی n و مقسوم علیه $g(x)$ از مرتبه‌ی m باشد، آن‌گاه خارج قسمت $q(x)$ از درجه‌ی $(n-m)$ و باقی‌مانده $r(x)$ حداکثر از درجه‌ی $(m-1)$ است.

محاسبه‌ی باقی مانده‌ی تقسیم $p(x)$ بر $(x-a)$

اگر $p(x)$ یک چند جمله‌ای آن‌گاه باقی‌مانده‌ی تقسیم $p(x)$ بر $g(x)=x-a$ برابر است با: $p(a)=R(a)$

$$\begin{array}{c|c} P(x) & x-a \\ \hline R(x) & Q(x) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} P(x)=Q(x)(x-a)+R(x) \\ P(a)=0+R(a) \end{array}$$

که اگر $p(a)=0$ باشد، آن‌گاه $p(x)$ بر $(x-a)$ بخش‌پذیر است. در این حالت $(x-a)$ فاکتور یا عامل $p(x)$ گفته می‌شود.

نکته

$p(a)=0$ به لحاظ شهودی و هندسی، یعنی نمودار چند جمله‌ای $p(x)$ محور xها را در نقطه‌ای به طول $x=a$ قطع می‌کند.

۲) باقیمانده‌ی تقسیم $P(x)=5x^3+2x^2-x+4$ بر $x+1$ برابر با .... است. (خرداد ۹۴)

پاسخ:

$$x+1=0 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow R=p(-1)=5(-1)^3+2(-1)^2-(-1)+4=2$$

۳) اگر باقیمانده‌ی تقسیم چند جمله‌ای $p(x)=2x^4+mx+2$ بر $x+1$ برابر ۲ باشد، باقیمانده‌ی تقسیم آن بر $x-1$ را بیابید. (دی ماه ۹۲)

پاسخ:

$$x+1=0 \to x=-1 \Rightarrow p(-1)=2 \Rightarrow 2(-1)^4+m(-1)+2=2 \Rightarrow m=2$$

$$x-1=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow p(1)=R \Rightarrow R=2(1)^4+2(1)+2=6$$

۴) مقدار k را چنان بیابید که چند جمله‌ای $p(x)=2x^3-kx^2-x+3$ بر $x+1$ بخش‌پذیر باشد. (نهایی)

پاسخ: $x+1=0 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow p(-1)=0 \Rightarrow 2(-1)^3-k(-1)^2-(-1)+3=0 \Rightarrow k=2$

چون گفته بخش پذیره

روش حل مسئله

۱) $P(x)$ را به صورت مرتب بنویسید.

۲) $g(x)$ را مساوی صفر قرار دهید. $g(x)=ax+b=0 \Rightarrow x=\frac{-b}{a}$

۳) حال در $P(x)$ به جای xها $\frac{-b}{a}$ قرار دهید. عدد حاصل باقی‌مانده‌ی تقسیم P بر g می‌باشد. $P(\frac{-b}{a})=R$

۵) باقیمانده‌ی تقسیم $P(x)=x^3-4x^2+2$ بر $2x+1$ برابر با .... است. (شهریور ۹۴)

پاسخ:

$$2x+1=0 \Rightarrow x=\frac{-1}{2} \Rightarrow R=P\left(\frac{-1}{2}\right)=\left(\frac{-1}{2}\right)^3-4\left(\frac{-1}{2}\right)^2+2=\frac{7}{8}$$

۶) مقدار k را طوری تعیین کنید که عبارت $۸x^{۳}+۴x^{۲}-kx-۸$ بر $۲x-۱$ بخش‌پذیر باشد؟ (نهایی)

☑پاسخ:

$$۲x-۱=۰ \Rightarrow x=\frac{۱}{۲} \Rightarrow p\left(\frac{۱}{۲}\right)=۸\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۳}+۴\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۲}-k\left(\frac{۱}{۲}\right)-۸=۰ \Rightarrow k=-۱۲$$

۷) در چند جمله‌ای $P(x)=x^{۳}-ax+۱$ مقدار a را طوری تعیین کنید که یک جواب معادله برابر ۱ باشد. (نهایی)

☑پاسخ: یک جواب معادله ۱ باشد، یعنی $p(۱)=۰$:

$$p(۱)=(۱)^{۳}-a(۱)+۱=۰ \Rightarrow a=۲$$

تقسیم چند جمله‌ای $p(x)$ بر $ax^{۲}+bx+c$:

چند جمله‌ای $p(x)$ را بر حسب قوای $x^{۲}$ مرتب کرده و در $p(x)$ به جای $x^{۲}$، $x^{۲}=\frac{-b}{a}x-\frac{c}{a}$ را قرار می‌دهیم.

باقی‌مانده به دست می‌آید.

۸) باقی مانده‌ی تقسیم عبارت $f(x)=۳x^{۳}+۲x^{۲}-x+۱$ بر $۲x^{۲}+۳$ را تعیین کنید.

☑پاسخ:

$$۲x^{۲}+۳=۰ \to x^{۲}=\frac{-۳}{۲} \qquad P(x)=P(x^{۲}=\frac{-۳}{۲})=۳x(\frac{-۳}{۲})+۲(\frac{-۳}{۲})-x+۱=\frac{-۹}{۲}x-۳-x+۱=\frac{-۱۱}{۲}x-۲$$

اگر باقیمانده‌ی تقسیم $p(x)$ بر $(x-a)$، $(x-b)$ به ترتیب $R_۱$، $R_۲$ باشد، باقیمانده‌ی تقسیم $p(x)$ بر $(x-a)(x-b)$ برابر است با: $R(x)=Ax+B$ به طوری که ضرائب B,A از دستگاه زیر به دست می‌آید.

$$p(x)=(x-a)(x-b)+Ax+B \qquad \begin{cases} A(a)+B=R_۱ \\ A(b)+B=R_۲ \end{cases}$$

۹) اگر باقی مانده‌ی تقسیم چند جمله‌ای $f(x)$ بر $x+۲, x-۳$ به ترتیب ۲,۱ باشد باقی‌مانده‌ی تقسیم f بر $x^{۲}-x-۶$ را حساب کنید. (نهایی)

☑پاسخ:

$$(x+۲)(x-۳)=x^{۲}-x-۶ \Rightarrow f(x)=(x+۲)(x-۳)q(x)+Ax+B$$

$$R(x)=Ax+B \Rightarrow \begin{cases} A(-۲)+B=۱ \\ A(۳)+B=۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{۱}{۵} \\ B=\frac{۷}{۵} \end{cases} \Rightarrow R(x)=\frac{۱}{۵}x+\frac{۷}{۵}$$

۱۰) $p(x)$ یک چند جمله‌ای درجه‌ی ۲ است و ضریب بزرگ‌ترین توان آن ۱ می‌باشد. $p(x)$ را به گونه‌ای تعیین کنید که شرایط روبه رو صدق کند. (خرداد ۹۲)

$$p(۱)=۱ \quad , \quad p(۲)=۳$$

☑پاسخ:

$$p(x)=x^۲+bx+c \Rightarrow \begin{cases} p(۱)=(۱)^۲+b(۱)+c=۱ \\ p(۲)=(۲)^۲+b(۲)+c=۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b+c=۰ \\ ۲b+c=-۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=-۱ \\ c=۱ \end{cases}$$

$$\therefore \Rightarrow p(x)=x^۲-x+۱$$

۱۱) اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم چند جمله‌ای $p(x)$ بر x مساوی ۲ و بر $x+۲$ مساوی ۱ باشد، باقی‌مانده‌ی تقسیم $p(x)$ بر $x^۲+۲x$ را به دست آورید. (نهایی)

☑پاسخ:

$$p(x)=(x^۲+۲x)q(x)+ax+b \Rightarrow p(۰)=۲ \Rightarrow b=۲ \Rightarrow p(-۲)=۱ \Rightarrow -۲a+۲=۱ \Rightarrow a=\frac{۱}{۲} \Rightarrow R(x)=\frac{۱}{۲}x+۲$$

۱۲) نشان دهید که عبارت $x-۲$ یک فاکتور (عامل) $f(x)=x^۳+۲x^۲-۵x-۶$ است. سپس معادله‌ی $f(x)=۰$ را حل کنید.

☑پاسخ:

چون $f(۲)$ صفره پس f بر $x-۲$ بخش‌پذیر است

$$f(۲)=(۲)^۳+۲(۲)^۲-۵(۲)-۶=۰ \qquad x-۲=۰ \to x=۲$$

$$f(x)=x^۳+۲x^۲-۵x-۶=(x-۲)(x^۲+۴x+۳)$$

$$f(x)=۰ \Rightarrow (x-۲)(x^۲+۴x+۳)=۰$$

$$x-۲=۰ \to x=۲$$

$$x^۲+۴x+۳=(x+۱)(x+۳)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=-۱ \\ x=-۳ \end{cases}$$

چون f بر $(x-۲)$ بخش پزیر است پس می‌توان از آن $(x-۲)$ را فاکتور گرفت. برای این کار f را بر $(x-۲)$ تقسیم می‌کنیم و خارج‌قسمت را به دست می‌آوریم.

۱۳) مقدار k را طوری تعیین کنید که $x=۲$ یک جواب معادله‌ی $f(x)=x^۳-۲x^۲+kx+۲=۰$ باشد، سپس سایر جواب‌ها را تعیین کنید.

☑پاسخ:

$$f(۲)=۰ \Rightarrow ۸-۸+k(۲)+۲=۰ \Rightarrow k=-۱$$

$$\begin{array}{l|l} x^۳-۲x^۲-x+۲ & x-۲ \\ \cline{2-2} -(x^۳-۲x^۲) & x^۲-۱ \\ \cline{1-1} -x+۲ & \\ -(-x+۲) & \\ \cline{1-1} ۰ & \end{array} \qquad \frac{x^۳}{x}=x^۲ \qquad \frac{-x}{x}=-۱$$

$$\Rightarrow f(x)=(x-۲)(x^۲-۱)=۰ \Rightarrow x=۲ \;,\; x=\pm۱$$

۱۴) مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که عبارت $p(x)=x^۴-۲x^۳+ax+b$ بر $g(x)=x^۲-۳x+۲$ بخش‌پذیر باشد.

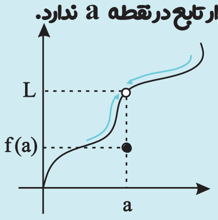
☑پاسخ:

$$g(x)=x^۲-۳x+۲=۰ \quad (x-۱)(x-۲)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۱ \\ x=۲ \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} p(۱)=۰ \Rightarrow ۱-۲+a+b=۰ \Rightarrow a+b=۱ \\ p(۲)=۰ \Rightarrow ۱۶-۱۶+۲a+b=۰ \Rightarrow ۲a+b=۰ \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} a=-۱ \\ b=۲ \end{cases}$$

مفهوم حد

فرض کنید تابع $f(x)$ در یک همسایگی متقارن محذوف نقطه‌ی $x=a$ تعریف شده باشد، آن‌گاه می‌گوئیم تابع $f(x)$ در نقطه $x=a$ حد دارد و مقدار آن L است هر وقت با میل کردن x به سمت a مقادیر $f(x)$ هم به سمت عدد معین L میل کند. درواقع حد یعنی رفتار تابع در مجاورت نقطه a و اصلاً ربطی به مقدار تابع در نقطه a ندارد.



- حد راست:

اگر x از طرف راست به سمت a میل کند و تابع $f(x)$ به عددی مانند L_1 نزدیک شود، می‌گوئیم تابع f در نقطه‌ی a حد راست دارد و به صورت روبه‌رو نشان می‌دهیم: $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=L_1$

- حد چپ:

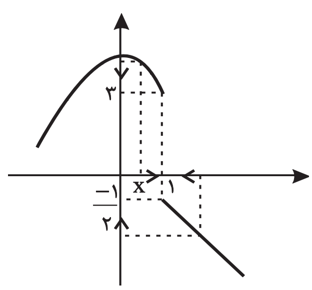
اگر x از طرف چپ به سمت a میل کند و تابع $f(x)$ به عددی مانند L_2 نزدیک شود، می‌گوئیم تابع f در نقطه‌ی a حد چپ دارد و به صورت روبه‌رو نشان می‌دهیم: $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=L_2$

بررسی حد تابع از روی نمودار:

برای تعیین حد تابع از روی نمودار به شکل زیر عمل می‌کنیم:

ابتدا چند نقطه روی محور x ها در سمت راست نقطه a انتخاب می‌کنیم از این نقاط از راست به چپ خطوطی عمود بر محور x ها خارج می‌کنیم و محل تقاطع آن‌ها را با نمودار تابع به دست آورده و از نقاط تقاطع به محور y ها عمود می‌کنیم. با این کار رفتار y تابع هنگامی که x ها به a از سمت راست نزدیک می‌شوند را مشاهده می‌کنیم. همین کار را از سمت چپ نقطه a انجام می‌دهیم اگر شاخه‌هایی سمت چپ و راست نمودار f در x=a به عرض L روی محور y ها برسند آن‌گاه تابع در نقطه a حد دارد.

۱۵) نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} \frac{-1}{2}x & x\ge 1 \\ 4-x^2 & x<1 \end{cases}$ را رسم کنید و به کمک آن وجود حد تابع را در $x=1$ بررسی کنید.



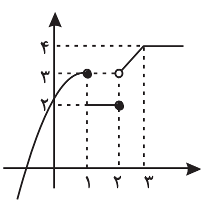
☑پاسخ:

$\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{-1}{2}x=\frac{-1}{2}$

$\lim\limits_{x\to 1^-} 4-x^2=4-1=3$

تابع در این نقطه حد ندارد زیرا.

۱۶) نمودار $f(x)$ شکل مقابل است. حاصل عبارت $3\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)-\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)+2f(3)$ را به دست آورید.

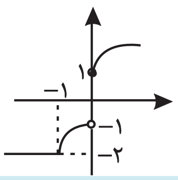


☑پاسخ:

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=3$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=3$ $\quad$ $f(3)=4$

$3\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)-\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)+2f(3)=3(3)-(3)+2(4)=14$

۱۷) با توجه به نمودار تابع f حاصل حدهای زیر را به دست آورید.



پاسخ:

$\lim_{x\to -1} f(x) = -۲$ $\qquad$ $\lim_{x\to ۰^-} f(x) = -۱$

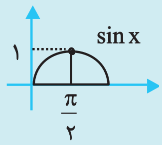
$\lim_{x\to ۰^-} [f(x)] = [-۱^-] = -۲$ $\qquad$ $\lim_{x\to ۰^+} f(x) = ۱$

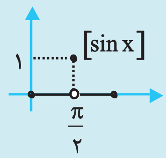
صفر مطلق

اساساً صفرمطلق یعنی تابع ای در تمامی یک بازه همواره صفر باشد یعنی به ازای x های یک بازه $f(x) = ۰$ می‌شود. مثلاً صفری که به وسیله براکت ساخته شود صفر مطلق است.

$$\begin{cases} ۱^- \cong ۰ \le x < ۱ \Rightarrow [۱^-] = ۰ \text{ صفر مطلق} \\ ۰^+ \cong ۰ \le x < ۱ \Rightarrow [۰^+] = ۰ \text{ صفر مطلق} \end{cases}$$

$$\forall x \in [۰, \frac{\pi}{۲}) \to [\sin x] = ۰$$





$$\lim_{x\to ۰^+} [\sin x] = [\sin ۰^+] = [۰^+] = ۰$$

تو یه بازه این تابع صفره. بنابراین صفرش مطلقه.

حدود توابع کسری

برای محاسبه حد توابع کسری به نکات زیر توجه داریم:

اگر صورت و مخرج کسر صفر نشه که خیلی راحته. مقدار گذاری می‌کنیم. خلاص

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{L_۱}{L_۲}$$

اما اگه فقط مخرج صفر حدی بشه و صورت عدد ناصفر، جواب حد بی نهایت میشه.

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L \ne ۰}{\underbrace{۰}_{\text{صفر حدی}}} = \infty$$

اگه صورت و مخرج هر دو صفر بشن حالت‌های زیر رخ میده:

$$\lim_{x\to a} = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\text{صفر حدی}}{\text{صفر مطلق}} = \text{وجود ندارد}$$

$$\lim_{x\to a} = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\text{صفر مطلق}}{\text{صفر حدی}} = ۰$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{۰ \text{ صفر حدی}}{۰ \text{ صفر حدی}} = \text{ابهام}$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{۰ \text{ صفر مطلق}}{۰ \text{ صفر مطلق}} = \text{وجود ندارد}$$

اگر حد ابهام $\frac{۰}{۰}$ داشت، باید آن را رفع ابهام کنیم که روش‌های رفع ابهام را خواهیم گفت .

۱۸) حاصل حدود ۱) $\lim_{x\to ۱} \frac{\sqrt{x+۳}}{۲-\sqrt{x}}$ و ۲) $\lim_{x\to ۲} \frac{x^۲+۱}{x^۲-۴x+۴}$ را به دست آورید.

پاسخ:

$$۱)\ \lim_{x\to ۱} \frac{\sqrt{x+۳}}{۲-\sqrt{x}} = \frac{۴}{۲-\sqrt{۱}} = \frac{۲}{۱} = ۲$$

$$۲)\ \lim_{x\to ۲} \frac{x^۲+۱}{x^۲-۴x+۴} = \lim_{x\to ۲} \frac{x^۲+۱}{(x-۲)^۲} = \frac{۵}{(۰^\pm)^۲} = \frac{۵}{۰^+} = +\infty$$

هر چند حد چپ و راست هر دو برابر $+\infty$ شده‌اند ولی به خاطر آن که عدد نیستند، تابع در این نقطه حد ندارد.

۱۹) حاصل حدود روبه‌رو را محاسبه کنید:

۱) $\lim\limits_{x\to ۰^+}\dfrac{[x]}{x}$ ۲) $\lim\limits_{x\to ۱^+}\dfrac{x-۱}{[x]-۱}$

پاسخ:

۱) $\lim\limits_{x\to ۰^+}\dfrac{[x]}{x}=\dfrac{\overset{\text{مطلق}}{۰}}{\underset{\text{حدی}}{۰}}=۰$

۲) $\lim\limits_{x\to ۱^+}\dfrac{x-۱}{[x]-۱}=\dfrac{x-۱}{[۱^+]-۱}=\dfrac{\overset{\text{حدی}}{۰}}{\underset{\text{مطلق}}{۰}}$ وجود ندارد

رفع ابهام $\frac{۰}{۰}$

سوالات ابهام‌دار

۱) در ابتدای کار ابهام $\frac{۰}{۰}$ را بیان کنید و بنویسید.

۲) عامل ابهام در $x=a$ ، $(x-a)$ می‌باشد. که باید آن را از صورت و مفرج فاکتور بگیریم و ساده کنیم. (به این کار می گن رفع ابهام)

۳) پس از ساده کردن ، مقدار $x=a$ را جایگذاری کنید و حد را به دست آورید.

۴) در هر مرحله $\lim$ یادت نره.

هرگاه $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{۰}{۰}$ بشه اصطلاحاً می‌گویند حد ابهام صفر صفرم داره، معنیش این که عامل $(x-a)$ یعنی عامل صفر کننده هم در صورت و هم در مخرج وجود داره و باعث ابهام $\frac{۰}{۰}$ می شه. برای رفع ابهام یکی از روش‌های زیر را استفاده می‌کنیم.

از عامل $(x-a)$ هم در صورت و هم در مخرج فاکتور می‌گیریم و پس از ساده نمودن مقدارگذاری می‌کنیم. (در توابع چند جمله‌ای خطی بیشتر کاربرد داره)

۲۰) حدود زیر را محاسبه کنید.

۱) $\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{x^۲+x-۶}{x-۲}$ ۲) $\lim\limits_{t\to -۱}\dfrac{t+۱}{t^۳+۱}$ ۳) $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{x^۲-x}{x^۲+x-۲}$

پاسخ:

وقتی $x\to ۲$ عامل صفر $(x-۲)$ میشه. در صورت و مفرج از اون فاکتور گرفتیم.

۱) $\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{x^۲+x-۶}{x-۲}=\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{(x-۲)(x+۳)}{x-۲}=\lim\limits_{x\to ۲}(x+۳)=۵$

اتحاد چاق و لاغر

۲) $\lim\limits_{t\to -۱}\dfrac{t+۱}{t^۳+۱}=\lim\limits_{x\to -۱}\dfrac{(t+۱)}{(t+۱)(t^۲-t+۱)}=\lim\limits_{x\to -۱}\dfrac{۱}{(t^۲-t+۱)}=\dfrac{۱}{۳}$

۳) $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{x^۲-x}{x^۲+x-۲}=\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{x\cancel{(x-۱)}}{(x+۲)\cancel{(x-۱)}}=\dfrac{۱}{۳}$

۲۱) حد توابع زیر را محاسبه کنید. (خرداد و شهریور ۹۰)

۱) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{3x^2-12}$ ۲) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{2}{x-3}-\dfrac{12}{x^2-9}\right)$

☑پاسخ:

۱) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{3x^2-12}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x^2+2x+4)}{3(x-2)(x+2)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+2x+4}{3(x+2)}=\dfrac{12}{12}=1$

۲) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{2}{x-3}-\dfrac{12}{x^2-9}\right)=\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{2}{x-3}-\dfrac{12}{(x-3)(x+3)}\right)=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x-6}{(x-3)(x+3)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2\cancel{(x-3)}}{\cancel{(x-3)}(x+3)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2}{(x+3)}=\dfrac{1}{3}$

نکته

نکته : اگر تجزیه صورت و مخرج برای یافتن عامل ابهام مشکل باشد می توانیم با تقسیم هر کدام بر $(x-a)$ آن را تجزیه کنیم.

۲۲) حدود توابع زیر را تعیین کنید.

۱) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-2x-1}{x^2-1}$ ۲) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-x^2-x-2}{x^4-2x^3-x^2+2x}$ ۳) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-2x+1}{2x^2-3x+1}$

☑پاسخ:

۱) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-2x-1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\cancel{(x+1)}(x^2-x-1)}{\cancel{(x+1)}(x-1)}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x-1}{x-1}=\dfrac{1}{-2}$

۲) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-x^2-x-2}{x^4-2x^3-x^2+2x}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\cancel{(x-2)}(x^2+x+1)}{\cancel{(x-2)}(x^3-x)}=\dfrac{4+2+1}{8-2}=\dfrac{7}{6}$

۳) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-2x+1}{2x^2-3x+1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cancel{(x-1)}(x^3+x^2+x-1)}{\cancel{(x-1)}(2x-1)}=\dfrac{2}{1}=2$

$$\begin{array}{l|l}
x^4-2x+1 & x-1 \\ \hline
-(x^4-x^3) & x^3+x^2+x-1 \\
x^3-2x+1 & \\
-(x^3-x^2) & \\
x^2-2x+1 & \\
-(x^2-x) & \\
-x+1 & \\
-(-x+1) & \\
0 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
2x^2-3x+1 & x-1 \\ \hline
-(2x^2-2x) & 2x-1 \\
-x+1 & \\
-(-x+1) & \\
0 &
\end{array}$$

۲۳) حد $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{2x^2-7x+3}$ را در صورت وجود محاسبه کنید . (خرداد ۱۴۰۱)

☑پاسخ:

$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{2x^2-7x+3}=\dfrac{0}{0}$ ابهام $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\cancel{(x-3)}(x-2)}{\cancel{(x-3)}(2x-1)}=\dfrac{1}{5}$

روش حل مسئله

۲) هرگاه صورت یا مخرج عامل ابهام رادیکالی داشته باشد (مثلاً: $\left(\sqrt{x}-\sqrt{a}\right)$) صورت و مخرج را در مزدوج عامل رادیکالی ضرب می‌کنیم پس از گویا و ساده کردن رفع ابهام نموده، حد را به دست می‌آوریم.

مزدوج‌های مهم:

$$\left(\sqrt{x}-\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)=x-a \qquad (x-a)(x+a)=x^2-a^2$$

$$\left(\sqrt[3]{x}\pm\sqrt[3]{a}\right)\left(\sqrt[3]{x^2}\mp\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a^2}\right)=x\pm a \qquad (x\pm a)\left(x^2\mp ax+a^2\right)=x^3\pm a^3$$

۲۴) حد زیر را محاسبه کنید. (نهایی)

$$1)\ \lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x^2-16} \qquad 2)\ \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{2x-2}$$

پاسخ:

$$1)\ \lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x^2-16}=\frac{0}{0}\Rightarrow \lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x^2-16}\times\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2}=\lim_{x\to 4}\frac{\cancel{(x-4)}}{\cancel{(x-4)}(x+4)(\sqrt{x}+2)}=\lim_{x\to 4}\frac{1}{(x+4)(\sqrt{x}+2)}=\frac{1}{32}$$

$$2)\ \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{2x-2}=\frac{0}{0}\Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{2(x-1)}\times\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}}{2\cancel{(x-1)}(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{2(\sqrt{x}+1)}=\frac{1}{4}$$

۲۵) حدود روبه رو را محاسبه کنید.

$$1)\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{2x}-2} \qquad 2)\lim_{x\to 8}\frac{x^2-64}{\sqrt[3]{x}-2} \qquad 3)\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{3x+7}-4}{9-x^2}$$

پاسخ:

$$1)\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{2x}-2}\times\frac{\sqrt{2x}+2}{\sqrt{2x}+2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\left(\sqrt{2x}+2\right)}{2x-4}=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}\left(\sqrt{2x}+2\right)}{2\cancel{(x-2)}}=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2x}+2}{2}=2$$

$$2)\lim_{x\to 8}\frac{x^2-64}{\sqrt[3]{x}-2}=\lim_{x\to 8}\frac{(x-8)(x+8)}{\left(\sqrt[3]{x}-2\right)}\times\frac{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}=\lim_{x\to 8}\frac{\cancel{(x-8)}(x+8)\left(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4\right)}{\cancel{(x-8)}}=192$$

$$3)\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{3x+7}-4}{9-x^2}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{3x+7}-4}{(3-x)(3+x)}\times\frac{\sqrt{3x+7}+4}{\sqrt{3x+7}+4}=\lim_{x\to 3}\frac{3x-9}{(3-x)(3+x)(8)}=\lim_{x\to 3}\frac{3\cancel{(x-3)}}{-\cancel{(x-3)}(x+3)(8)}=\frac{-1}{16}$$

۲۶) حدود توابع زیر را محاسبه کنید. (نهایی)

$$1)\ \lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2} \qquad 2)\ \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$$

پاسخ:

$$1)\ \lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}=\frac{0}{0}\Rightarrow \lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}\times\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2}=\lim_{x\to 4}\frac{\cancel{(x-4)}(\sqrt{x}+2)}{\cancel{(x-4)}}=\sqrt{4}+2=4$$

$$2)\ \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}=\frac{0}{0}\Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}\times\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(\sqrt{x}+1)}{\cancel{(x-1)}}=\lim_{x\to 1}\sqrt{x}+1=2$$

۲۷) حد تابع زیر را تعیین کنید.

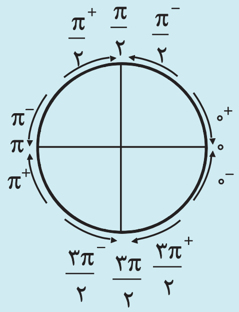
$$\lim_{x\to ۱}\frac{x^{۲}-۱}{۱-\sqrt{x}}$$

☑پاسخ:

$$\lim_{x\to ۱}\frac{x^{۲}-۱}{۱-\sqrt{x}}=\frac{۰}{۰}=\lim_{x\to ۱}\frac{(x-۱)(x+۱)}{۱-\sqrt{x}}\times\frac{۱+\sqrt{x}}{۱+\sqrt{x}}=\lim_{x\to ۱}\frac{\cancel{(x-۱)}(x+۱)(۱+\sqrt{x})}{۱-x=-\cancel{(x-۱)}}=-۴$$

حدود توابع مثلثاتی در نقاط مرزی

در محاسبه حدهای یک طرفه در توابع مثلثاتی دونستن این که زاویه در کدوم ناحیه مثلثاتیه خیلی مهمه. مثلا وقتی $x\to ۰^-$ یعنی x در ربع چهارمه و به صفر نزدیک میشه، یا وقتی $x\to ۰^+$ یعنی x در ربع اوله و به صفر نزدیک میشه. این مطالب را در شکل زیر بررسی می‌کنیم.



تعریف نشده $\tan\frac{\pi}{۲}$　ناحیه دوم $\tan\frac{\pi^+}{۲}=-\infty$　ناحیه اول $\tan\frac{\pi^-}{۲}=+\infty$

تعریف نشده $\tan\frac{۳\pi}{۲}$　ناحیه چهارم $\tan\frac{۳\pi^+}{۲}=-\infty$　ناحیه سوم $\tan\frac{۳\pi^-}{۲}=+\infty$

۲۸) حاصل حدود زیر را بیابید.

$۱)\ \lim\limits_{x\to \frac{۵\pi}{۲}^+}\tan x$　$۲)\ \lim\limits_{x\to \frac{-\pi}{۳}^+}\dfrac{\cos(x+\frac{\pi}{۳})}{\sin(x+\frac{\pi}{۳})}$　$۳)\ \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}^+}\dfrac{۱}{\cos x}$　$۴)\ \lim\limits_{x\to \pi^+}\dfrac{۱}{\sin x}$　$۵)\ \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}}\dfrac{۱+\cos x}{۱-\sin x}$

☑پاسخ:

$$۱)\ \lim_{x\to \frac{۵\pi}{۲}^+}\tan x=\lim_{x\to \frac{۵\pi}{۲}^+}\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{۱}{۰^-}=-\infty$$

$$۲)\ \lim_{x\to \frac{-\pi}{۳}^+}\frac{\cos(x+\frac{\pi}{۳})}{\sin(x+\frac{\pi}{۳})}=\frac{۱}{۰^+}=+\infty$$

$$۳)\ \lim_{x\to \frac{\pi}{۲}^+}\frac{۱}{\cos x}=\frac{۱}{۰^-}=-\infty$$

$$۴)\ \lim_{x\to \pi^+}\frac{۱}{\sin x}=\lim_{x\to \pi^+}\frac{۱}{\sin\pi^+}=\frac{۱}{۰^-}=-\infty$$

$$۵)\ \lim_{x\to \frac{\pi}{۲}}\frac{۱+\cos x}{۱-\sin x}=\frac{۱+۰}{۱-۱^-}=\frac{۱}{۰^+}=+\infty$$

۲۹) حاصل $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}}\left(\dfrac{x+۱}{\tan x}\right)$ برابر .... است　(حسابان دی ۱۴۰۱)

☑پاسخ:

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}^\pm}\left(\frac{x+۱}{\tan x}\right)=\frac{\frac{\pi}{۲}+۱}{\mp\infty}=۰$$

۳۰) اگر $\lim\limits_{x\to ۲^+} \frac{ax-۳}{(۲-x)^۳} = +\infty$ باشد ، حدود a را تعیین کنید . (حسابان دی ۱۴۰۱)

☑پاسخ:

$$\lim_{x\to ۲^+} \frac{ax-۳}{(۲-x)^۳} = \frac{۲a-۳}{۰^-} = +\infty \quad \Rightarrow \quad ۲a-۳<۰ \quad \Rightarrow \quad a<\frac{۳}{۲}$$

در حالت ابهام $\frac{۰}{۰}$ اگر عامل ابهام در صورت یا مخرج داخل قدر مطلق باشد، باید تکلیف قدر مطلق را با تعیین علامت مشخص کنیم و حد چپ و راست را جداگانه بررسی کنیم.

۳۱) حدود زیر را محاسبه کنید.

$$۱)\ \lim_{x\to ۳^+} \frac{|۹-x^۲|}{x-۳} \qquad ۲)\ \lim_{x\to ۳^-} \frac{x^۲-۷}{|۳-x|} \qquad ۳)\ \lim_{x\to ۱} \frac{|x^۲-۱|}{x-۱}$$

☑پاسخ:

$$۱)\ \lim_{x\to ۳^+} \frac{|۹-x^۲|}{x-۳} = \lim_{x\to ۳^+} \frac{-(۳-x)(۳+x)}{x-۳} = \lim_{x\to ۳^+} \frac{\cancel{(x-۳)}(x+۳)}{\cancel{(x-۳)}} = \lim_{x\to ۳^+} (۳+x) = ۶$$

$$۲)\ \lim_{x\to ۳^-} \frac{x^۲-۷}{|۳-x|} = \lim_{x\to ۳^-} \frac{x^۲-۷}{۳-x} = \frac{۲}{۰^+} = +\infty$$

$$۳)\ \lim_{x\to ۱} \frac{|x^۲-۱|}{x-۱} = \frac{۰}{۰} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to ۱^+} \frac{(x-۱)(x+۱)}{x-۱} = ۲ \\ \lim\limits_{x\to ۱^-} \frac{-(x-۱)(x+۱)}{x-۱} = -۲ \end{cases}$$

۳۲) حاصل حدود زیر را به دست آورید.

$$۱)\ \lim_{x\to ۳^-} \frac{|x-۳|+|x^۲-۹|}{|x-۳|} \qquad ۲)\ \lim_{x\to ۲^-} \frac{x^۲-۴}{|x^۲-۵x+۶|}$$

☑پاسخ:

$$۱)\ \lim_{x\to ۳^-} \frac{|x-۳|+|x^۲-۹|}{|x-۳|} = \lim_{x\to ۳^-} \frac{|x-۳|+|x-۳||x+۳|}{|x-۳|} = \lim_{x\to ۳^-} \frac{\cancel{|x-۳|}(۱+|x+۳|)}{\cancel{|x-۳|}} = \lim_{x\to ۳^-} (۱+|x+۳|) = ۱+|۳+۳| = ۷$$

$$۲)\ \lim_{x\to ۲^-} \frac{x^۲-۴}{|x^۲-۵x+۶|} = \lim_{x\to ۲^-} \frac{(x-۲)(x+۲)}{|(x-۲)(x-۳)|} = \lim_{x\to ۲^-} \frac{\cancel{(x-۲)}(x+۲)}{\cancel{(x-۲)}(x-۳)} = \frac{۴}{-۱} = -۴$$

برای محاسبه‌ی حدودی که شامل عبارت براکتی است، اول تکلیف قسمت براکتی را تعیین می‌کنیم و به جای آن عدد صحیح مناسب را قرار می‌دهیم، سپس به ادامه حد می‌پردازیم.

۳۳) حدود توابع زیر را محاسبه کنید.

۱) $\lim\limits_{x\to ۳^+}\dfrac{[x]-۳}{x-۳}$　　　۲) $\lim\limits_{x\to ۱^+}\dfrac{x^۳-[x^۳]}{x-[x]}$

پاسخ:

$$۱)\ x\to ۳^+ \Rightarrow ۳\le x<۴ \Rightarrow [x]=۳ \Rightarrow [۳^+]=۳ \Rightarrow \lim_{x\to ۳^+}\frac{[x]-۳}{x-۳}=\lim_{x\to ۳^+}\frac{[۳^+]-۳}{x-۳}=\frac{\circ\ \text{مطلق}}{\circ\ \text{حدی}}=\circ$$

$$[(۱^+)^۳]=۱$$

$$۲)\lim_{x\to ۱^+}\frac{x^۳-[x^۳]}{x-[x]}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{x^۳-۱}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{\cancel{(x-۱)}(x^۲+x+۱)}{\cancel{(x-۱)}}=۳$$

$$[(۱^+)]=۱$$

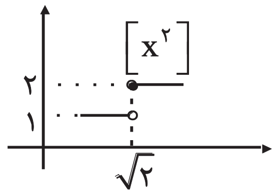
۳۴) حاصل حد $\lim\limits_{x\to\sqrt{۲}}[x^۲]$ را به دست آورید.

پاسخ:

$$\lim_{x\to\sqrt{۲}}[x^۲]=[(\sqrt{۲})^۲]=[۲^?] \Rightarrow \begin{cases} x\to\sqrt{۲}^+ \Rightarrow x>\sqrt{۲} \Rightarrow x^۲>۲ \\ x\to\sqrt{۲}^- \Rightarrow x<\sqrt{۲} \Rightarrow x^۲<۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \nearrow \lim\limits_{x\to\sqrt{۲}^+}[x^۲]=[۲^+]=۲ \\ \searrow \lim\limits_{x\to\sqrt{۲}^-}[x^۲]=[۲^-]=۱ \end{array}$$

$$f(\sqrt{۲})=(\sqrt{۲})^۲=۲=k\in Z$$

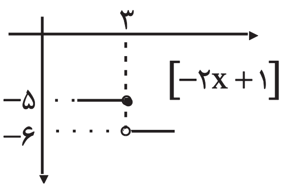
داخل براکت در $\sqrt{۲}$ صحیح شده، پس باید حد چپ و راست را مجزا محاسبه کنیم.



۳۵) حاصل عبارت زیر را بیابید.　　$\lim\limits_{x\to ۳}[-۲x+۱]$

پاسخ:

$$\lim_{x\to ۳}[-۲x+۱]=[-۵^?] \Rightarrow \begin{cases} x\to ۳^+ \Rightarrow x>۳ \Rightarrow -۲x<-۶ \Rightarrow -۲x+۱<-۵ \\ x\to ۳^- \Rightarrow x<۳ \Rightarrow -۲x>-۶ \Rightarrow -۲x+۱>-۵ \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to ۳^+}[-۵^-]=-۶ \\ \lim\limits_{x\to ۳^-}[-۵^+]=-۵ \end{array}$$



۳۶) حاصل $\lim\limits_{x\to(\frac{۱}{۱۰})^+}\left[\dfrac{۱}{x}\right]$ را به دست آورید.

پاسخ:

$$x\to(\tfrac{۱}{۱۰})^+ \Rightarrow x>\frac{۱}{۱۰} \Rightarrow \frac{۱}{x}<۱۰$$

$$\lim_{x\to(\frac{۱}{۱۰})^+}\left[\frac{۱}{x}\right]=[۱۰^-]=۹$$

۳۷) حدود زیر را محاسبه کنید.

$1)\ \lim\limits_{x\to 1} x-[x]$ $\qquad$ $2)\ \lim\limits_{x\to 2}[x]+[-x]$

پاسخ:

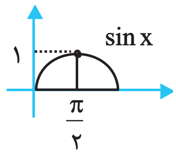
$$\lim_{x\to 1^+} x-[x]=1-[1^+]=1-1=0$$
$$\lim_{x\to 1^-} x-[x]=1-[1^-]=1-0=1$$
$$\lim_{x\to 2^+}[x]+[-x]=[2^+]+[-(2)^+]=2-3=-1$$
$$\lim_{x\to 2^-}[x]+[-x]=[2^-]+[-(2)^-]=1-2=-1$$

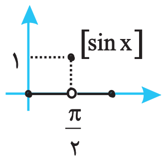
۳۸) حاصل حدود رو به رو را به دست آورید.

$1)\ \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}[\sin x]$ $\qquad$ $2)\ \lim\limits_{x\to\pi}[\cos x]$

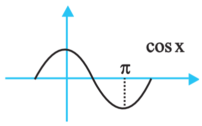
پاسخ:

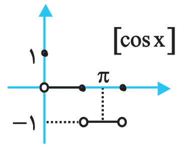
$$1)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}[\sin x]=\left[\sin\frac{\pi}{2}^{\pm}\right]=[1^-]=0$$





$$2)\ \lim_{x\to\pi}[\cos x]=[\cos\pi^{\pm}]=[-1^+]=-1$$





نکته

در حدگیری هروقت به ازای رفتن x به سمت a $(x\to a)$ اگه سینوس یا کسینوس برن به سمت ۱ همیشه یکش کمتره یعنی $(1)^-$ و اگر سینوس یا کسینوس برن به سمت -1 منهای یکش بیشتره $(-1)^+$ چرا ؟ معلومه !

$-1\le\cos x\le 1$ $\qquad$ $-1\le\sin x\le 1$

۳۹)اگر تابع $f(x)=\begin{cases}(a-2)[x]+4x & x>1\\ a[x]+6x & x<1\end{cases}$ در نقطه $x=1$ حد داشته باشد، مقدار a را به دست آورید.

پاسخ: باید حد چپ و راست تابع در $x=1$ با هم برابر باشند.

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}(a-2)[x]+4x=(a-2)[1^+]+4(1)=a+2$$
$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}a[x]+6x=a[1^-]+6(1)=a(0)+6=6$$
$$a+2=6\quad\Rightarrow\quad a=4$$

۴۰) حاصل $\lim\limits_{x\to 3}\left[\dfrac{x+3}{2}\right]+\left[\dfrac{x-3}{2}\right]$ را به دست آورید.

پاسخ: حد ندارد چون حد چپ و راست در این نقطه برابر نیستند.

$$\lim_{x\to 3}\left[\frac{x+3}{2}\right]+\left[\frac{x-3}{2}\right]=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 3^+}[3^+]+[0^+]=3+0=3\\ \lim\limits_{x\to 3^-}[3^-]+[0^-]=2-1=1\end{cases}$$

۴۱) اگر تابع $f(x)=a[x+2]+[x^2]$ در نقطه‌ی $x=1$ حد دارد. مقدار a را بیابید.

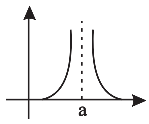
پاسخ: حد دارد، یعنی حد چپ وراستش در این نقطه با هم برابرند.

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^+}a[1^++2]+[(1^+)^2]=3a+1\\ \lim\limits_{x\to 1^-}a[1^-+2]+[(1^-)^2]=2a+0\end{cases}\Rightarrow\quad 3a+1=2a\quad\Rightarrow\quad a=-1$$

ببین $1^+\simeq 1/01$ $\quad$ $1^-\simeq 0/99999$

حدود نامتناهی :

اگر تابع f در همسایگی محذوف نقطه $x=a$ تعریف شده باشد و $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ شود ،معنایش این است که مقادیر y تابع یعنی عرض آن از هر عدد مثبت بسیار بزرگی ، بزرگتر است به شرط آن که x به اندازه کافی به a نزدیک شود (در مجاورت $x=a$ عرض تابع بیکران یا همان بی نهایت می شود)



$\begin{vmatrix} x\to a \ \text{عدد} \\ y\to +\infty \end{vmatrix}$

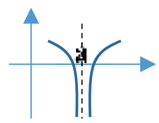
۴۲) حاصل $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+1}{x^2-4x+4}$ را به دست آورید .

☑پاسخ:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+1}{x^2-4x+4}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+1}{(x-2)^2}=\frac{5}{(0^{\pm})^2}=\frac{5}{0^+}=+\infty$$

هر چند ، حد چپ و راست هر دو برابر $+\infty$ شده اند ولی به خاطر آن که عدد نیستند ، تابع در این نقطه حد ندارد .

اگر تابع f در همسایگی محذوف نقطه $x=a$ تعریف شده باشد و $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$ شود ،معنایش این است که مقادیر y تابع یعنی عرض آن از هر عدد منفی کوچکتر است به شرط آن که x به اندازه کافی به a نزدیک شود .



$\begin{vmatrix} x\to a \ \text{عدد} \\ y\to -\infty \end{vmatrix}$

مثلاً

$$\lim_{x\to -3}\frac{x-4}{x^2+6x+9}=\lim_{x\to -3}\frac{x-4}{(x+3)^2}=\frac{-7}{(0^{\pm})^2}=\frac{-7}{0^+}=-\infty$$

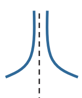
بعضی وقت ها حاصل حد در یک نقطه ۲ تا بی نهایت با علامت های متفاوت میشه

مثلاً)

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x+1}{x-2}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{2x+1}{x-2}=\dfrac{5}{0^+}=+\infty \\[2ex] \lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{2x+1}{x-2}=\dfrac{5}{0^-}=-\infty\end{cases}$$

در توابع کسری ریشه هایی از مخرج کسر ، به شرط آن که در این نقاط بتوان حد گرفت و حد ∞ شود . (*یعنی باید در همسایگی چپ یا راست ریشه مخرج تابع تعریف شده باشد*) حدود بی نهایتی ایجاد می کنند .

۴۳) اگر رفتار تابع $f(x)=\dfrac{x+3}{x^2+bx+c}$ در اطراف نقطه $x=-1$ به صورت شکل مقابل باشد . مقدار های c , b را تعیین کنید .



$x=-1$

☑پاسخ:

چون جواب حد چپ و راست تابع در $x=-1$ هر دو بینهایت مثبت شده باید $x=-1$ ریشه مضا عف مخرج کسر باشد

$$x^2+bx+c=(x+1)^2=x^2+2x+1 \qquad \Rightarrow \qquad b=2 \ , \ c=1$$

۴۴) حاصل حدود زیر را محاسبه کنید:

$۱)\ \lim\limits_{x\to ۰^+} \frac{[x]}{x}$ $\qquad$ $۲)\ \lim\limits_{x\to ۳} \frac{۱}{[x]-۳}$ $\qquad$ $۳)\ \lim\limits_{x\to -۱} \sqrt{\frac{۱-x}{۱+x}}$

☑پاسخ:

$$۱)\ \lim\limits_{x\to ۰} \frac{۳}{x^۲} = \frac{۳}{۰^+} = +\infty$$

$$۲)\ D_f = R - \{x \ | [x]-۳=۰\} = R-[۳,۴)$$

می‌دانیم:

$\lim\limits_{x\to ۳^+} f(x)$ این حد وجود ندارد، چون در همسایگی راست این نقطه تابع تعریف نشده

$$\lim\limits_{x\to ۳^-} f(x) = \lim\limits_{x\to ۳^-} \frac{۱}{[۳^-]-۳} = \frac{۱}{۲-۳} = -۱$$

$$۳)\ \lim\limits_{x\to -۱} \sqrt{\frac{۱-x}{۱+x}} = \begin{cases} \lim\limits_{x\to -۱^+} \sqrt{\frac{۱-x}{۱+x}} = \sqrt{\frac{۲}{۰^+}} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to -۱^-} \sqrt{\frac{۱-x}{۱+x}} = \sqrt{\frac{۲}{۰^-}} = \end{cases}$$

با توجه به دامنه اساساً این حد وجود ندارد چون در سمت چپ نقطه $x=-۱$ تابع تعریف نشده .

x		-۱		۱	
$\frac{۱-x}{۱+x}$	$-$	۰	$+$	ن ت	$-$

۴۵) حدود زیر را محاسبه کنید .

☑پاسخ:

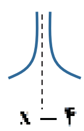
$$\lim\limits_{x\to ۰} \frac{۱}{|x|} + \frac{x^۲+۱}{\sin^۲ x} = \frac{۱}{|۰^\pm|} + \frac{(۰^\pm)^۲+۱}{(۰^\pm)^۲} = \frac{۱}{۰^+} + \frac{۱}{۰^+} = (+\infty)+(+\infty) = +\infty$$

$$\lim\limits_{x\to ۰^+} \frac{۱}{x^۲-۳x} = \lim\limits_{x\to ۰^+} \frac{۱}{x(x-۳)} = \frac{۱}{۰^+(۰^+-۳)} = \frac{۱}{۰^-} = -\infty$$

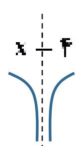
$$\lim\limits_{x\to \frac{۱}{۲}} \frac{[x]-۳}{|۲x-۱|} = \lim\limits_{x\to \frac{۱}{۲}} \frac{۰-۳}{|۰^\pm|} = \frac{-۳}{۰^+} = -\infty$$

۴۶) کدام شکل وضعیت نمودار تابع $f(x) = \frac{۲[x]}{۴-x}$ را در همسایگی $x=۴$ نشان می دهد . دلیل بیاورید . (حسابان دی ۱۴۰۱)

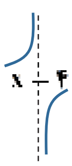
الف)



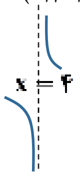
ب)



پ)



ت)



☑پاسخ: گزینه پ درست است چون:

$$\lim\limits_{x\to ۴^+} \frac{۲[x]}{۴-x} = \frac{۲[۴^+]}{۰^-} = \frac{۸}{۰^-} = -\infty$$

$$\lim\limits_{x\to ۴^-} \frac{۲[x]}{۴-x} = \frac{۲[۴^-]}{۰^+} = \frac{۶}{۰^+} = +\infty$$

حد در بینهایت : اگه متغییر ما بره به سمت بینهایت یعنی $x\to\infty$ و عرض تابع یعنی y آن به یک عدد نزدیک شود می گوییم تابع ما در بینهایت حد دارد و می نویسیم : $\lim_{x\to\infty} f(x)=L$

به عبارت دیگر

$x\to\infty$

$y\to$ عدد بشه

در کتاب درسی تاکید به محاسبه حد در بینهایت توابع کسری که صورت و مخرج آنها چند جمله می باشند داره . برای محاسبه حد توابع کسری وقتی $x\to+\infty$ یا $x\to-\infty$ میل می کند در صورت و مخرج از بزرگترین توان x فاکتور بگیر، ساده کن و حاصل حد رو پیدا کن .

یادت باشه : در توابع کسری وقتی $x\to\pm\infty$ میل می کند و صورت و مخرج کسر ∞ می شود و ابهام $\frac{\infty}{\infty}$ رخ می دهد می توان از قاعده پرتوان استفاده کرد یعنی در صورت و مخرج جمله ای که بزرگترین توان از x را دارد در نظر می گیریم و حد عبارت حاصل را محاسبه می کنیم .

$$\lim_{x\to\infty}\frac{ax^n+bx^{n-۲}+.......}{a'x^m+b'x^{m-۱}+.......}=\xrightarrow{\text{قاعده پرتوان}}\lim_{x\to\infty}\frac{ax^n}{a'x^m}=\begin{cases}\frac{a}{a'} & n=m\\ ۰ & n<m\\ \infty & n>m\end{cases}$$

یعنی

۱) وقتی جواب حد عدد ناصفر بشه معنیش اینکه توان صورت و مخرج برابره

۲) اگه جواب حد صفر بشه توان مخرج بیشتر از توان صورته .

۳) اگه بی نهایت شد یعنی توان و مرتبه ی صورت بزرگتراز توان و مرتبه ی مخرجه .

۴۷) حاصل $\lim_{x\to-\infty}\left(۹+\frac{۷}{x^۳}\right)$ چند برابر $\lim_{x\to-\infty}\frac{-۶x^۳+۷x-۹}{۲x^۳-۴x^۲+x}$ است ؟

☑پاسخ:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(۹+\frac{۷}{x^۳}\right)=\lim_{x\to-\infty}۹+\frac{۷}{(-\infty)^۳}=۹+۰=۹$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-۶x^۳+۷x-۹}{۲x^۳-۴x^۲+x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-۶\cancel{x^۳}}{۲\cancel{x^۳}}=\frac{-۶}{۲}=-۳$$

هر دو تابع ، هنگامی که x شان بینهایت می شود ، عرض شان عدد شده، پس هر دو در بینهایت حد دارند و اولی -۳ برابر دومی است .

۴۸) حدود زیر را محاسبه کنید

☑پاسخ:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{۲\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}+۲}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^۳-۲x+۴}{x^۲+۳x-۲x^۳}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^۳}{-۲x^۳}=\frac{-۱}{۲}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^۲+۳x-۵}{x^۳-x+۱}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^۲}{x^۳}=\lim_{x\to-\infty}\frac{۱}{x}=\frac{۱}{-\infty}=۰$$

۴۹) حاصل حد $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^۲+۲x+۳}-x}{۳x-۱}$ را به دست آورید .

☑پاسخ:

رادیکال میره به سمت ۱

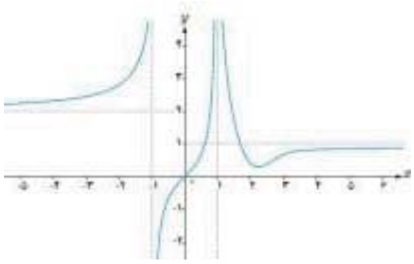
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^۲+۲x+۳}-x}{۳x-۱}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^۲\left(۱+\frac{۲}{x}+\frac{۳}{x^۲}\right)}-x}{۳x-۱}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{۱+\frac{۲}{x}+\frac{۳}{x^۲}}-x}{۳x-۱}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\left(\sqrt{۱+\frac{۲}{x}+\frac{۳}{x^۲}}+۱\right)}{۳x}=\frac{-۲x}{۳x}=\frac{-۲}{۳}$$

۵۰) حاصل حد $\lim_{x\to\infty}\frac{۵x^۲+\sqrt{x^۲+x}}{۲x^۲-۳x-۱}$ را حساب کنید .

☑پاسخ:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{۵x^۲+\sqrt{x^۲+x}}{۲x^۲-۳x-۱}=\lim_{x\to\infty}\frac{۵x^۲}{۲x^۲}=\frac{۵}{۲}$$

۵۱) حاصل تمامی حدود زیر را محاسبه کنید .



☑پاسخ:

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=۲$$

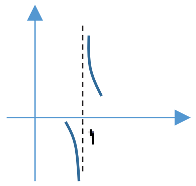
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=۱$$

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)]+\lim_{x\to+\infty}[f(x)]=[۲^+]+[۱^-]=۲+۰=۲$$

$$\lim_{x\to۱}f(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to-۱}f(x)=\begin{cases}\lim_{x\to-۱^+}f(x)=-\infty\\ \lim_{x\to-۱^-}f(x)=+\infty\end{cases}$$

۵۲) حد کدام تابع شبیه شکل مقابل است ؟



۱) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-x}{x-1}$　　۲) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{(x-1)^2}$　　۳) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$　　۴) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-1}{1-x}$

☑پاسخ:

$$\lim_{x\to 1}\frac{-1}{1-x}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{-1}{1-x}=\dfrac{-1}{0^-}=+\infty\\[2ex]\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{-1}{1-x}=\dfrac{-1}{0^+}=-\infty\end{cases}$$

۵۳)حدود روبرو را تعیین کنید .

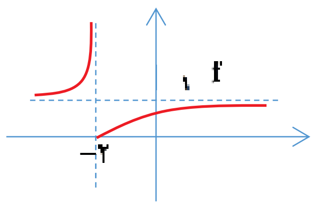
۱) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2+x}{x^2}$　　　۲) $\lim\limits_{x\to \pm\infty}\dfrac{2x^2-x+1}{4x^3+2x-1}$

☑پاسخ:

$$1)\ \lim_{x\to 0^+}\frac{x^2+x}{x^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x(x+1)}{x^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{(x+1)}{x}=\frac{0+1}{0^+}=+\infty$$

$$2)\ \lim_{x\to \pm\infty}\frac{2x^2-x+1}{4x^3+2x-1}=\lim_{x\to \pm\infty}\frac{2x^2}{4x^3}=\lim_{x\to \pm\infty}\frac{1}{2x}=\frac{1}{\infty}=0$$

۵۴) با توجه به نمودار تابع f حدود زیر را تعیین کنید .



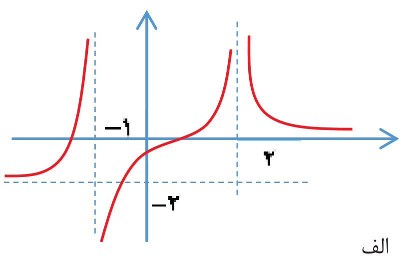
۱) $\lim\limits_{x\to(-2)}f(x)$　　　۲) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)]$

☑پاسخ:

$$1)\ \lim_{x\to(-2)}f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to(-2)^+}f(x)=0\\ \lim\limits_{x\to(-2)^-}f(x)=+\infty\end{cases}$$

$$2)\ \lim_{x\to\pm\infty}[f(x)]=\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)]=[1^-]=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)]=[1^+]=1\end{cases}$$

۵۵)نمودارتابع f شکل مقابل است حدهای زیر را محاسبه کنید . (دی ماه ۱۴۰۱)



الف) $\lim\limits_{x\to(-1)^+}f(x)$　　ب) $\lim\limits_{x\to(2)^-}f(x)$

پ) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$

☑ پاسخ:

الف) $\lim\limits_{x\to(-1)^+}f(x)=-\infty$

ب) $\lim\limits_{x\to(2)^-}f(x)=+\infty$

پ) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=2$

۵۶) حدود زیر را محاسبه کنید .

$$1)\ \lim_{x\to(-2)^-}\frac{2}{x^2+3x+2}-\frac{3}{x+2}\qquad 2)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\tan x}{\cot x}\qquad 3)\ \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2-3x}\right)$$

☑پاسخ:

$$1)\ \lim_{x\to(-2)^-}\frac{2}{x^2+3x+2}-\frac{3}{x+2}=\lim_{x\to(-2)^-}\frac{2}{(x+2)(x+1)}-\frac{3}{x+2}=\lim_{x\to(-2)^-}\frac{2-3(x+1)}{(x+2)(x+1)}=\lim_{x\to(-2)^-}\frac{-3x-1}{(x+2)(x+1)}=\frac{5}{0^+}=+\infty$$

$$2)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\tan x}{\cot x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^{\pm}}\tan^2 x=(\mp\infty)^2=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2-3x}\right)\times\frac{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2-3x}}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2-3x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+3x-x^2+3x}{|x|+|x|}=\lim_{x\to-\infty}\frac{6x}{-2x}=-3$$

۵۷) حدود زیر را محاسبه کنید .

$$1)\ \lim_{x\to3^-}\frac{x^2+3x-2}{x^2+x-12}\qquad 2)\ \lim_{x\to2^+}\frac{(-1)^{[x]+1}}{x^2-4}\qquad 3)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{2x-1}{\sqrt{4x^2+x+1}}$$

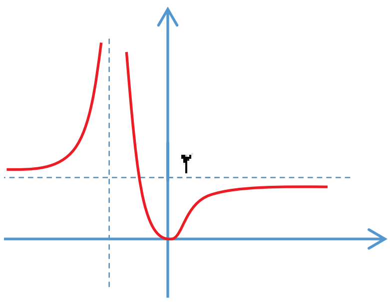
☑پاسخ:

$$1)\ \lim_{x\to3^-}\frac{x^2+3x-2}{x^2+x-12}=\lim_{x\to3^-}\frac{x^2+3x-2}{(x+4)(x-3)}=\frac{16}{0^-}=-\infty$$

$$2)\ \lim_{x\to2^+}\frac{(-1)^{[x]+1}}{x^2-4}=\xrightarrow{[2^+]=2}=\frac{(-1)^3}{0^+}=-\infty$$

$$3)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{2x-1}{\sqrt{4x^2+x+1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{2|x|}=\frac{2x}{-2x}=-1$$

۵۸) شکل مقابل نمودار تابع $g(x)=\dfrac{ax^2+b}{x^2+cx+1}$ است . مقادیر $a\ ,\ b\ ,\ c$ را تعیین کنید .



☑پاسخ:

تابع از مبدا مختصات می گذرد پس : $g(0)=\dfrac{b}{1}=0 \quad\Rightarrow\quad b=0$

تابع حدش در بینهایت ۲ می باشد پس : $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ax^2+b}{x^2+cx+1}=\dfrac{ax^2}{x^2}=a=2$

$$\Delta=c^2-4=0\quad\Rightarrow\quad c=\pm2$$

تابع حدش در یک نقطه ای با طول منفی $+\infty$ شده پس مخرج باید ریشه مضاعف داشته باشد که با توجه بشکل فقط $c=2$ درست است .

۵۹) در تابع $f(x)=\dfrac{2x-\sqrt{x^2-3x}}{ax^n-6}$. اگر $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\dfrac{-1}{2}$ باشد آنگاه $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)$ را به دست آورید .

☑پاسخ: چون حد تابع در بی نهایت عدد ناصفر شده باید درجه صورت و مخرج یکسان باشد در نتیجه :

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-\sqrt{x^2-3x}}{ax^n-6}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-|x|}{ax^n}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x}{ax^n}=\frac{-1}{2}\quad\Rightarrow\quad n=1\ ,\ \frac{3}{a}=\frac{-1}{2}\quad\Rightarrow\quad a=-6$$

$$\lim_{x\to-1^-} f(x)=\lim_{x\to-1^-}\frac{2x-\sqrt{x^2-3x}}{-6x-6}=\frac{-4}{0^+}=-\infty$$

۶۰) حاصل $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{2x+\sqrt{3x+\sqrt{4x}}}}-\sqrt{x}\right)$ کدام است؟

۱) $2\sqrt{2}$ ۲) $+\infty$ ۳) 0 ۴) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

☑پاسخ : گزینه ۴

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{2x+\sqrt{3x+\sqrt{4x}}}}-\sqrt{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sqrt{2x+\sqrt{3x+\sqrt{4x}}}-x}{\sqrt{x+\sqrt{2x+\sqrt{3x+\sqrt{4x}}}}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2x}}{2\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

۶۱) اگر $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+ax-1}+bx-2\right)=4$ ، زوج مرتب (b,a) کدام است؟

۱) $(1,12)$ ۲) $(1,-12)$ ۳) $(-1,12)$ ۴) $(-1,-12)$

☑پاسخ

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+ax-1}+bx-2\right)=x+\frac{a}{2}+bx-2=(1+b)x+\frac{a}{2}-2=4\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}b=-1\\a=12\end{cases}$$

۶۲) اگر $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2}{x+1}+mx+n\right)=2$ باشد آنگاه $m-n$ کدام است؟

۱) -4 ۲) 4 ۳) 2 ۴) 3

☑پاسخ : گزینه ۱

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x+1}+mx+n\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(1+m)x^2+(m+n)x+n}{x+1}\right)=2\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}1+m=0\\-1+n=2\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}m=-1\\n=3\end{cases}$$

۶۳) حاصل $\lim\limits_{x\to(1)^+}\left[x^2-5x+2\right]$ کدام است ؟

۱) -3 ۲) -2 ۳) -4 ۴) -5

☑پاسخ : گزینه ۱

$$\lim_{x\to(1)^+}\left[x^2-5x+2\right]=\left[(-2)^-\right]=-3$$

۶۴) اگر $f\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^3}\right)=[-2x]$ ، حاصل $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ کدام است ؟

۱) صفر ۲) -1 ۳) $+\infty$ ۴) وجود ندارد

☑پاسخ

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to0^+} f\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}\right)=\lim_{x\to0^+}[-2x]=\left[0^-\right]=-1$$

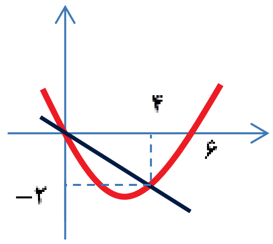
۶۵) اگر $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{ax+۳+\sqrt{۴x^۲-x}}{۷x-۱}=-\frac{۳}{۷}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to۱}\frac{x^۳+a}{x^۲+x-۲}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $-\frac{۲}{۷}$ ۳) ۱- ۴) ۱

☑پاسخ

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{ax+۳+\sqrt{۴x^۲-x}}{۷x-۱}=\lim_{x\to-\infty}\frac{ax+۲|x|}{۷x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(a-۲)x}{۷x}=-\frac{۳}{۷}\Rightarrow a-۲=-۳\Rightarrow a=-۱$$

۶۶) در شکل مقابل تابع درجه دوم f و تابع خطی g رسم شده است حاصل $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{g^۲(x)}$ کدام است ؟



۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۱- ۴) ۲-

☑پاسخ

$$f(x)=a(x)(x-۶)\quad,\quad f(۴)=a(۴)(۴-۶)=-۸a=-۲\Rightarrow a=\frac{۱}{۴}\quad,\quad g(x)=-\frac{۱}{۲}x$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{g^۲(x)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{۱}{۴}x^۲-\frac{۶}{۴}x}{\frac{۱}{۴}x^۲}=\frac{\frac{۱}{۴}x^۲}{\frac{۱}{۴}x^۲}=۱$$

۶۷) اگر $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[۳]{ax^۳-۳x^۲+x-۱}-(x-b)=۲$ با شد ، مقدار $a+b$ کدام است ؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۶

☑پاسخ

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt[۳]{ax^۳-۳x^۲+x-۱}-(x-b)=۲=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[۳]{a}(x-\frac{۳}{۳a})-x+b=\lim_{x\to+\infty}(\sqrt[۳]{a}-۱)x-\frac{۳\sqrt[۳]{a}}{۳a}+b=۲$$

$$\sqrt[۳]{a}-۱=۰\Rightarrow a=۱\quad,\quad -۱+b=۲\Rightarrow b=۳\Rightarrow a+b=۴$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{g^۲(x)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{۱}{۴}x^۲-\frac{۳}{۲}x}{\frac{۱}{۴}x^۲}=۱$$

۶۸) حاصل $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^۲+\sqrt{x^۴+x^۲+۳}}{۳x^۲+۲x+۵}$ چقدر است؟

۱) $+\infty$ ۲) ۰ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{-۳}{۲}$

☑پاسخ

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^۲+\sqrt{x^۴+x^۲+۳}}{۳x^۲+۲x+۵}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^۲+x^۲}{۳x^۲}=\frac{۲}{۳}$$

۶۹) حاصل $\lim\limits_{x\to۳^-}\frac{[x]-۳}{x^۲-۹}$ کدام است ؟

۱) صفر ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) $-\infty$ ۴) $+\infty$

☑پاسخ

$$\lim_{x\to۳^-}\frac{[x]-۳}{x^۲-۹}=\lim_{x\to۳^-}\frac{[۳^-]-۳}{x^۲-۹}=\lim_{x\to۳^-}\frac{۲-۳}{x^۲-۹}=\frac{-۱}{۰^-}=+\infty$$

۷۰) در تابع $f(x)=\begin{cases}\sqrt{۱-x^۲} & x>۰\\ -\sqrt{۱+x^۲} & x\le ۰\end{cases}$ حاصل $\lim\limits_{x\to ۰^-} f\left(x^۲-x^۴\right)$ کدام است ؟

۱) -۱ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) موجود نیست

☑پاسخ

$$\lim_{x\to ۰^-} f\left(x^۲-x^۴\right)=\lim_{x\to ۰^-} f\left(x^۲\right)=f(۰^+)=\lim_{x\to ۰^+}\sqrt{۱-x^۲}=۱$$

۷۱) حاصل $\lim\limits_{x\to -۲}\dfrac{\sqrt{x+۳}-۱}{\sqrt[۳]{۴x}+۲}$ کدام است ؟

۱) $\dfrac{۳}{۲}$ ۲) ۱ ۳) $\dfrac{۵}{۲}$ ۴) $\dfrac{۷}{۲}$

☑پاسخ

$$\lim_{x\to -۲}\frac{\sqrt{x+۳}-۱}{\sqrt[۳]{۴x}+۲}=\xrightarrow{hop}\lim_{x\to -۲}\frac{\dfrac{۱}{۲\sqrt{x+۳}}}{\dfrac{۴}{۳\sqrt[۳]{(۴x)^۲}}}=\frac{\dfrac{۱}{۲}}{\dfrac{۱}{۳}}=\frac{۳}{۲}$$

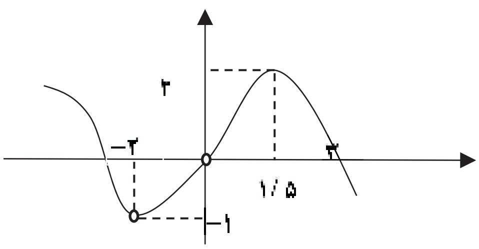
۷۲) حاصل $\lim\limits_{x\to ۰^+}\tan\dfrac{\pi}{x-۲}$ کدام است ؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) $-\infty$ ۴) $+\infty$

☑پاسخ

$$\lim_{x\to ۰^+}\tan\frac{\pi}{x-۲}=\tan\left(\frac{-\pi}{۲}\right)^-=+\infty$$

۷۳) شکل مقابل، نمودار تابع $f(x)$ است، حاصل $\lim\limits_{x\to \frac{۳}{۲}}\dfrac{f(x)}{x}+\lim\limits_{x\to ۱^+}\dfrac{f(۳x)}{x}$ کدام است؟



۱) ۴ ۲) صفر

۳) $\dfrac{۸}{۳}$ ۴) $\dfrac{۴}{۳}$

☑پاسخ

$$\lim_{x\to ۱^+}\frac{f(۳x)}{x}+\lim_{x\to \frac{۳}{۲}}\frac{f(x)}{x}=۰+\frac{۲}{\frac{۳}{۲}}=\frac{۴}{۳}$$

۷۴) حاصل $\lim\limits_{x\to +\infty}[x]+[-x]$ کدام است ؟

۱) صفر ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) حد ندارد

☑پاسخ

$$[x]+[-x]=\begin{cases}۰ & x\in\mathbb{Z}\\ -۱ & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}\quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to +\infty}[x]+[-x]=\begin{cases}\lim\limits_{x\to +\infty}[x]+[-x]=۰\\ \lim\limits_{x\to +\infty}[x]+[-x]=-۱\end{cases}$$

۷۵) اگر $\lim\limits_{x\to -۵}\dfrac{x+۳}{x^۲+ax+b}=-\infty$ حاصل $a+b$ کدام است ؟

۱) ۲۰ ۲) ۲۵ ۳) ۴۰ ۴) ۳۵

☑پاسخ

$$\lim_{x\to -۵}\frac{x+۳}{x^۲+ax+b}=-\infty\quad\Rightarrow\quad (x+۵)^۲=x^۲+۱۰x+۲۵\quad\Rightarrow\quad a=۱۰\ ,\ b=۲۵\quad\Rightarrow\quad a+b=۳۵$$

ریاضیات به سبک روحانی