آکادمی
ریاضی
مهندس روحانی

ریاضی ۳ به سبک روحانی

آموزش مهارت حل مسئله

آموزش مفهومی

صفر تا صد هر مبحث

بررسی آزمون های نهایی

بسم الله الرحمن الرحیم

مقدمه مولف

این مجموعه شامل درسنامه‌ای کامل به همراه ۷۰۰ سؤال متنوع و حل شده از سؤالات کتاب درسی و امتحانات نهایی داخل و خارج از کشور به همراه سؤالات مفهومی و تألیفی از متن کتاب درسیه . تمام نکات لازم برای شما ارائه شده . این کتاب با توجه به رویکرد کتاب ریاضی ۳ تدوین شده و سعی کردم کاستی های اونو پوشش بدم . از طرفی نحوه ی نوشتن پاسخ تشریحی ، برای امتحان نهایی هم ارائه شده تا به" اندازه بنویسی و نمره سوال رو کامل بگیری" . سازو کارتدوین کتاب بطوریه که با استفاده از مفاهیم و سؤالات حل شده قادر به حل سؤالات بعدی باشی . ۸ آزمون شبیه سازی شده امتحان نهایی همراه با پاسخنامه کاملاً تشریحی و "توضیح دار " آوردم تا شما سوالات امتحان نهایی رو قبل از برگزاری دیدار کنید .

برای موفقیت در درس ریاضی باید از حل مثال‌ها و تمرین‌های کتاب درسی شروع کنید و به هیچ‌وجه از آن غافل نشوید سؤالات امتحانات نهایی و حتی کنکور به طور مستقیم از تمرین‌ها و مثال‌های کتاب درسی طراحی می‌شن. آفت موفقیت شما حفظ کردن پاسخ تمریناته! تسلط بر مفاهیم مستلزم فهم درست درسه و اکتفا کردن به خواندن حل مسأله کارساز نیست، دقت کنید که حل هر سؤال برای شما کمکیه برای حل سؤالات جدیدتر و درک مفاهیم اساسی ریاضی از طریق حل مسئله .
دقت به موارد زیر موفقیت شما را افزایش میده :

۱- بررسی موضوعات به صورت تشریحی و مفهومی و هم‌چنین توجه به کاربرد مفاهیم و تعاریف در حل مسئله .
۲- یادگیری عمیق موضوعات با حوصله‌ی زیاد و اینکه روش های مختلف حل یه سوال رو یادبگیری.
۳- بررسی نمونه سوالات حل شده و پس از آن حل تمرین (البته به اعتقاد من مثال های حل شده کتاب رو هم باید اول سعی کنیم خودمون حل کنیم) و در صورت نیافتن راه حل رجوع به پاسخ.

خوبه بدونید ارزش ۵۰ تمرین که خودتون حل می کنید به مراتب بیش‌تر از خوندن و حفظ کردن ۱۰۰۰ تمرین حل شده است، چون مهم‌ترین قسمت یادگیری و کاربردی‌ترین آن برای حل مسأله ریاضی مثال‌ها و تمرین‌هایی است که خودتون به حل آن می‌پردازید.
فرآیند یادگیری ریاضی تدریجیه و در صورت عدم تکرار و تداوم از یاد می‌ره ،بنابراین انتظار نداشته باشید در این درس در کوتاه مدت تسلط کامل پیدا کنید بلکه این مهم آهسته و پیوسته با تمرین مطالب آموخته شده اتفاق می افته . تسلط ومهارت در هر درسی نتیجه تلاش مستمر و پیگیریه .

لطف کنید کمی و کاستی این کتاب را از من دریغ نکنید تا مجموعه بهتری ارائه بشه از صبر و حوصله و دقت شما سپاس بی پایان دارم از ودقت نظر تشکر می کنم .

سپاس و عشق ، نثار همسر و فرزندانم که برای تالیف این مختصر وقت بسیاری را از ایشان دریغ داشتم .

کرج فروردین ۱۴۰۲: محمد صادق روحانی گَلمِجانی

جعبه ابزار

باید بدونی

x	۰	۳۰	۴۵	۶۰	۹۰	۱۸۰	۲۷۰	۳۶۰
sin x	$\frac{۰}{۲}$	$\frac{\sqrt{۱}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۴}}{۲}$	۰	-۱	۰
cos x	$\frac{\sqrt{۴}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۱}}{۲}$	$\frac{۰}{۲}$	-۱	۰	۱
tan x	۰	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$	∞	۰	∞	۰
cot x	∞	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۰	∞	۰	∞

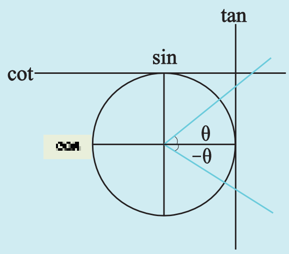
x°	۰	۳۰	۴۵	۶۰	۹۰	۱۸۰	۲۷۰	۳۶۰
θ^R	۰	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۲}$	π	$\frac{۳\pi}{۲}$	۲π
x°	۴۵۰	۵۴۰	۶۳۰	۷۲۰	۸۱۰	۹۰۰	۹۹۰	۱۰۸۰
θ^R	$\frac{۵\pi}{۲}$	۳π	$\frac{۷\pi}{۲}$	۴π	$\frac{۹\pi}{۲}$	۵π	$\frac{۱۱\pi}{۲}$	۶π

تبدیل درجه به رادیان و برعکس

$$\alpha^\circ \times \frac{\pi}{۱۸۰} = \theta^R$$

$$\theta^R \times \frac{۱۸۰}{\pi} = \alpha^\circ$$

نسبت‌های مثلثاتی زوایای قرینه:



$$\begin{cases} \sin(-\theta) = -\sin\theta \\ \cos(-\theta) = \cos\theta \\ \tan(-\theta) = -\tan\theta \\ \cot(-\theta) = -\cot\theta \end{cases}$$

در روایت اومده که کسینوس منفیو میخوره و بقیه نسبت‌های مثلثاتی منفیو میندازن پشت.

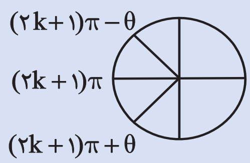
نکته

اگر مجموع دو کمان برابر $\frac{\pi}{۲}$ باشد آن‌گاه دو کمان متمم و اگر مجموع‌شان π باشد مکمل یکدیگرند.

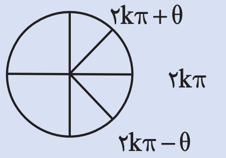
$$a+b=\frac{\pi}{۲} \Rightarrow \begin{cases} \sin a = \cos b \\ \cos a = \sin b \\ \tan a = \cot b \\ \cot a = \tan b \end{cases}$$

$$a+b=\pi \Rightarrow \begin{cases} \sin a - \sin b = ۰ \\ \cos a + \cos b = ۰ \\ \tan a + \tan b = ۰ \\ \cot a + \cot b = ۰ \end{cases}$$

اگر زاویه θ با مضارب زوج π یعنی ($۲k\pi$) یا فرد π یعنی $\pi(۲k+۱)$ جمع یا کم شود نسبت‌های مثلثاتی این زوایا تغییر نمی‌کند، فقط ممکن است تغییر علامت داشته باشیم، آن را نیز با استفاده از قاعده هستک رعایت می‌کنیم.



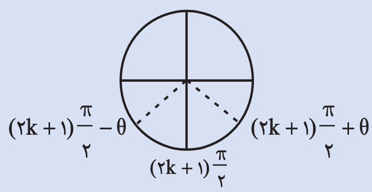
$$\sin(۲k\pi\pm\theta)=\langle\pm\rangle\sin\theta$$
$$\cos(۲k\pi\pm\theta)=\left\langle\begin{smallmatrix}+\\+\end{smallmatrix}\right\rangle\cos\theta$$
$$\tan(۲k\pi\pm\theta)=\langle\pm\rangle\tan\theta$$
$$\cot(۲k\pi\pm\theta)=\langle\pm\rangle\cot\theta$$



$$\sin((۲k+۱)\pi\pm\theta)=\langle\mp\rangle\sin\theta$$
$$\cos((۲k+۱)\pi\pm\theta)=\left\langle\begin{smallmatrix}-\\-\end{smallmatrix}\right\rangle\cos\theta$$
$$\tan((۲k+۱)\pi\pm\theta)=\langle\pm\rangle\tan\theta$$
$$\cot((۲k+۱)\pi\pm\theta)=\langle\pm\rangle\cot\theta$$

$$\sin(k\pi+\theta)=(-۱)^k\sin\theta \quad , \quad \cos(k\pi+\theta)=(-۱)^k\cos\theta$$

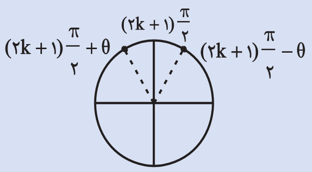
اگر زاویه‌ی θ با مضارب فرد $\frac{\pi}{۲}$ یعنی $(۲k+۱)\frac{\pi}{۲}$ جمع یا کم شود، نسبت‌های مثلثاتی این زوایا تغییر جنسیت می‌دهند. به طوری‌که $\tan\leftrightarrow\cot$, $\sin\leftrightarrow\cos$ و ممکن است تغییر علامت نیز داشته باشیم که آن را با توجه به ناحیه‌ای که کمان در آن قرار دارد محاسبه می‌کنیم.



$(۲k+۱)\frac{\pi}{۲}$

$k=$ زوج

$$\sin\left((۲k+۱)\frac{\pi}{۲}\pm\theta\right)=\left\langle\begin{smallmatrix}+\\+\end{smallmatrix}\right\rangle\cos\theta$$
$$\cos\left((۲k+۱)\frac{\pi}{۲}\pm\theta\right)=\left\langle\begin{smallmatrix}-\\+\end{smallmatrix}\right\rangle\sin\theta$$
$$\tan\left((۲k+۱)\frac{\pi}{۲}\pm\theta\right)=\left\langle\begin{smallmatrix}-\\+\end{smallmatrix}\right\rangle\cot\theta$$
$$\cot\left((۲k+۱)\frac{\pi}{۲}\pm\theta\right)=\left\langle\begin{smallmatrix}-\\+\end{smallmatrix}\right\rangle\tan\theta$$



$(۲k+۱)\frac{\pi}{۲}$

$k=$ فرد

$$\sin\left((۲k+۱)\frac{\pi}{۲}\pm\theta\right)=\left\langle\begin{smallmatrix}-\\-\end{smallmatrix}\right\rangle\cos\theta$$
$$\cos\left((۲k+۱)\frac{\pi}{۲}\pm\theta\right)=\left\langle\begin{smallmatrix}+\\-\end{smallmatrix}\right\rangle\sin\theta$$
$$\tan\left((۲k+۱)\frac{\pi}{۲}\pm\theta\right)=\left\langle\begin{smallmatrix}-\\+\end{smallmatrix}\right\rangle\cot\theta$$
$$\cot\left((۲k+۱)\frac{\pi}{۲}\pm\theta\right)=\left\langle\begin{smallmatrix}-\\+\end{smallmatrix}\right\rangle\tan\theta$$

$$\frac{۳\pi}{۲}=(۲(۱)+۱)\frac{\pi}{۲} \Rightarrow \cos(\frac{۳\pi}{۲}+x)=\sin x$$
$$\frac{۱۱\pi}{۲}=(۲(۵)+۱)\frac{\pi}{۲} \Rightarrow \cot(\frac{۱۱\pi}{۲}-x)=\tan x$$

فرد

$$\frac{۷\pi}{۲}=(۲(۳)+۱)\frac{\pi}{۲} \Rightarrow \sin(\frac{۷\pi}{۲}+x)=-\cos x$$
$$\frac{۹\pi}{۲}=(۲(۴)+۱)\frac{\pi}{۲} \Rightarrow \tan(\frac{۹\pi}{۲}-x)=\cot x$$

زوج

نکته

۱) در کمان نسبت‌های مثلثاتی می‌توان به جای مضارب زوج π یعنی $(2k\pi)$ همواره صفر قرار داد و به جای مضارب فرد π یعنی $((2k+1)\pi)$ همواره π قرار داد و به جای مضارب فرد $\frac{\pi}{2}$ یعنی $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ اگر در آن k زوج باشد $\frac{\pi}{2}$ و اگر k فرد باشد $(\frac{3\pi}{2})$ قرار دارد.

۲) در محاسبه نسبت‌های مثلثاتی که دارای کمان $k\pi$ می‌باشد فقط علامت نسبت مثلثاتی با توجه به ناحیه‌ای که کمان در آن قرار دارد محاسبه می‌کنیم.

۳) اما در مورد نسبت‌های مثلثاتی که دارای کمان $(2k\pi+1)\frac{\pi}{2}$ باشد نسبت مثلثاتی تغییر جنسیت می‌دهد و علامت با توجه به کمان و نسبت مثلثاتی اولیه محاسبه می‌گردد.

۱) حاصل عبارت $\frac{\operatorname{Sin}250^\circ+\operatorname{Sin}700^\circ}{\operatorname{Cos}560^\circ-\operatorname{Cos}110^\circ}$، با فرض $\tan 20^\circ=0/4$، کدام است؟(خارج-۹۴)

۱) $-\frac{3}{4}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{7}{3}$ ۴) $\frac{5}{8}$

☑ پاسخ گزینه‌ی (۳) صحیح است.

$$\frac{\sin 250^\circ+\sin 700^\circ}{\cos 60^\circ-\cos 110^\circ}=\frac{\sin(270-20)+\sin(720-20)}{\cos(540+20)-\cos(90+20)}=\frac{-\cos 20^\circ-\sin 20^\circ}{-\cos 20^\circ+\sin 20^\circ}\xrightarrow[\cos 20^\circ]{\text{ین تقسیم بر}}$$

$$\frac{-1-\tan 20^\circ}{1+\tan 20^\circ}\xrightarrow[\tan 20^\circ=0/4]{\text{طبق فرض}}\frac{-1-0/4}{1+0/4}=\frac{-1/4}{-0/6}=\frac{7}{3}$$

۲) حاصل عبارت $\frac{\cos 285^\circ-\sin 255^\circ}{\sin 525^\circ-\sin 105^\circ}$، با فرض $\tan 15^\circ=0/28$ کدام است؟(داخل-۹۴)

۱) $-\frac{16}{9}$ ۲) $-\frac{9}{16}$ ۳) $\frac{9}{16}$ ۴) $\frac{16}{9}$

☑ پاسخ -گزینه ۱

$$\frac{\cos 285-\sin 255}{\sin 525-\sin 105}=\frac{\cos(270+15)-\sin(270-15)}{\sin(540-15)-\sin(90+15)}=\frac{\sin 15+\cos 15}{\sin 15-\cos 15}$$

$$=\frac{\tan 15+1}{\tan 15-1}=\frac{0/28+1}{0/28-1}=\frac{1/28}{-0/72}=-\frac{128}{72}=-\frac{16}{9}$$

فصل ۲ مثلثات

فرمول‌های بسط‌های مثلثاتی

$$۱)\ \sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$$

$$۲)\ \cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$

$$۳)\ \tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{۱-\tan\alpha\tan\beta}\quad ,\quad \tan\alpha(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{۱+\tan\alpha\tan\beta}$$

$$۴)\ \tan(\frac{\pi}{۴}+\alpha)=\frac{۱+\tan\alpha}{۱-\tan\alpha}\quad ,\ \tan(\frac{\pi}{۴}-\alpha)=\frac{۱-\tan\alpha}{۱+\tan\alpha}$$

فرمول‌های بسط ۲a و فرمول‌های طلایی

$$۱)\ \sin۲\alpha=۲\sin\alpha\cos\alpha\ \Rightarrow \sin\alpha=۲\sin\frac{\alpha}{۲}\cos\frac{\alpha}{۲}$$

$$۲)\ \begin{cases}\cos۲\alpha=\cos^۲\alpha-\sin^۲\alpha=(\cos\alpha-\sin\alpha)(\cos\alpha+\sin\alpha)\\ \cos۲\alpha=۲\cos^۲\alpha-۱\ \Rightarrow\ ۱+\cos۲\alpha\ \Rightarrow۲\cos^۲\alpha\ \Rightarrow\ ۱+\cos\alpha=۲\cos^۲\frac{\alpha}{۲}\\ \cos۲\alpha=۱-۲\sin^۲\alpha\ \Rightarrow\ ۱-\cos۲\alpha=۲\sin^۲\alpha\ \Rightarrow\ ۱-\cos\alpha=۲\sin^۲\frac{\alpha}{۲}\end{cases}$$

$$۷)\ (\sin\alpha\pm\cos\alpha)^۲=۱\pm۲\sin\alpha\cos\alpha=۱\pm\sin۲\alpha$$

۳) نشان دهید برای هر زاویه α داریم: $\cos^۲\alpha=\frac{۱+\cos۲\alpha}{۲}$ (شهریور ۹۴)

پاسخ:

$$\cos۲\alpha=\cos^۲\alpha-\sin^۲\alpha=\cos^۲\alpha-(۱-\cos^۲\alpha)=۲\cos^۲\alpha-۱\ \Rightarrow\ \cos۲\alpha+۱=۲\cos^۲\alpha\ \Rightarrow\ \cos^۲\alpha=\frac{۱+\cos۲\alpha}{۲}$$

۴) در صورتی که $\sin\alpha=\frac{۳}{۵}$ و زاویه α حاده باشد مقدار عددی $\cos۲\alpha$ را محاسبه کنید. (خرداد ۹۴ - خارج کشور)

پاسخ:

$$\cos۲\alpha=۱-۲\sin^۲\alpha\ \Rightarrow\ \cos۲\alpha=۱-۲\left(\frac{۳}{۵}\right)^۲=\frac{۷}{۲۵}$$

۵) خلاصه شده‌ی عبارت $\tan۲۰(۱+\cos۴۰)$ را به دست آورید.

پاسخ:

$$\tan۲۰(۱+\cos۴۰)=\frac{\sin۲۰}{\cos۲۰}(۲\cos^۲۲۰)=۲\sin۲۰\cos۲۰=\sin۴۰=\cos۵۰$$

۶) خلاصه شده‌ی عبارت $\sin(\frac{\pi}{۲}+a)\sin(\pi+a)-\sin(\pi-a)\cos a$ را بنویسید.

پاسخ:

$$\sin(\frac{\pi}{۲}+a)\sin(\pi+a)-\sin(\pi-a)\cos a=\cos a(-\sin a)-\sin a\cos a=-۲\sin a\cos a=-\sin۲a$$

۷) نشان دهید برای هر زاویه‌ی α داریم: $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$ (نهایی)

پاسخ:

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$$

۸) سینوس زاویه‌ی $22/5^\circ$ را حساب کنید. (نهایی)

پاسخ:

زاویه $22/5^\circ$ درجه نسبت‌های مثلثاتیش رایج نیست ولی به کمک زاویه 45° می تونیم اونا رو به دست بیاریم

$$1-\cos 2x = 2\sin^2 x \rightarrow \sin x = \sqrt{\frac{1-\cos 2x}{2}} \Rightarrow \sin 22/5 = \sqrt{\frac{1-\cos 45}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}$$

۹) با توجه به این‌که $\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ ، حاصل $\sin 7/5^\circ$ را بیابید.

پاسخ: خب یه خورده سفته ولی

$$\cos 15^\circ = \sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \sin^2 7/5^\circ = \frac{1-\cos 15^\circ}{2} = \frac{1-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}{2} \Rightarrow \sin 7/5^\circ = \sqrt{\frac{4-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{8}}$$

۱۰) اگر $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ و $\cos x = \frac{-\sqrt{5}}{3}$ مقادیر $\sin 2x$, $\cos 2x$ را بیابید .

پاسخ:

$$\cos x = \frac{-\sqrt{5}}{3} \Rightarrow \sin x = \sqrt{1-\frac{5}{9}} = \frac{4}{9} = \frac{2}{3}$$

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x = 2\times\frac{-\sqrt{5}}{3}\times\frac{2}{3} = \frac{-4\sqrt{5}}{9}$$

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 2\times\frac{5}{9} - 1 = \frac{1}{9}$$

۱۱) اگر $\sin 37^\circ = 0/6$ باشد آن گاه $\sin 16^\circ$ را به دست بیاورید .

پاسخ: می دانیم :

$$\sin x = \cos(90-x) \quad , \quad \cos 2x = 1-2\sin^2 x$$

$$\sin 16^\circ = \cos(90-16) = \cos 74 = \cos 2(37) = 1-2\sin^2 37 = 1-2\times(0/6)^2 = 1-2\times 0/36 = 0/28$$

۱۲) اگر $\sin\alpha - \cos\alpha = \frac{1}{2}$ باشد، مقدار $\cos(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha)$ کدام است؟(داخل-۹۵)

۱) $-\frac{3}{4}$ ۲) $-\frac{3}{8}$ ۳) $\frac{3}{8}$ ۴) $\frac{3}{4}$

پاسخ: - گزینه۱

$$\cos(\frac{2\pi}{3} - 2\alpha) = -\sin(2\alpha) \quad , \quad \sin\alpha - \cos\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow (\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin^2\alpha + \cos^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{4} \Rightarrow 1 - \sin 2\alpha = \frac{1}{4} \Rightarrow -\sin 2\alpha = -\frac{3}{4}$$

۱۳) اگر $\cos^4 x - \sin^4 x = \frac{1}{6}$، مقدار $\cos 4x$ کدام است؟

۱) $-\frac{17}{18}$ ۲) $-\frac{8}{9}$ ۳) $-\frac{5}{6}$ ۴) $-\frac{7}{9}$

☑پاسخ: گزینه ۱

$$\cos^4 x - \sin^4 x = \frac{1}{6} \Rightarrow (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) = \frac{1}{6} \Rightarrow (\cos 2x)(1) = \frac{1}{6}$$

$$\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1 = 2(\frac{1}{6})^2 - 1 = -\frac{17}{18}$$

۱۴) ساده شده ی عبارت $A = \frac{\tan 40^\circ}{1-\tan^2 40^\circ} \times \frac{\sin 20^\circ}{1+\cos 20^\circ}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{2}$

☑پاسخ: گزینه ۴

$$A = \frac{\tan 40}{1-\tan^2 40} \times \frac{\sin 20}{1+\cos 20} = \frac{1}{2}\tan 80 \times \frac{2\sin 10\cos 10}{2\cos^2 10} = \frac{1}{2}\tan 80 \times \frac{\sin 10}{\cos 10} = \frac{1}{2}\tan 80 \times \tan 10$$

$$\xrightarrow{10+80=90} \quad \frac{1}{2}\tan 80 \times \cot 80 = \frac{1}{2}$$

۱۵) مقدار عددی عبارت $\sqrt{2+\sqrt{2}}(\sin\frac{\pi}{8})$ کدام است؟

۱) $\frac{2-\sqrt{2}}{4}$ ۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

☑پاسخ گزینه‌ی (۲) صحیح است.

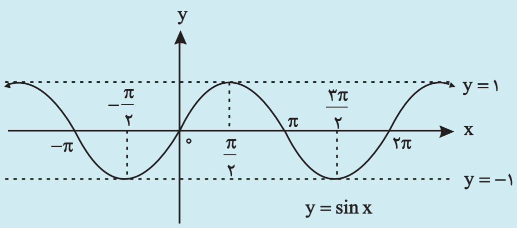
$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha \xrightarrow{\alpha=\frac{\pi}{8}} \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 - 2\sin^2\frac{\pi}{8} \Rightarrow -2\sin^2\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 = \frac{\sqrt{2}-2}{2} \Rightarrow \sin^2\frac{\pi}{8} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

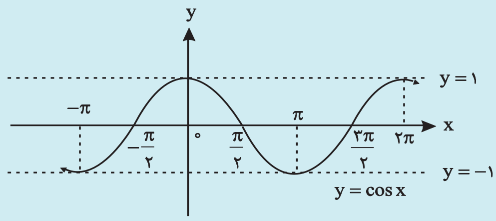
$$\xrightarrow{\sin\frac{\pi}{8} > 0} \quad \sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

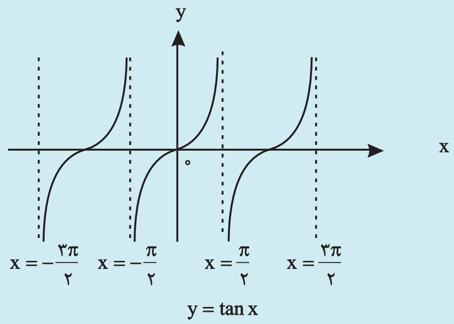
حال با جایگذاری مقدار $\sin\frac{\pi}{8}$ داریم:

$$\sqrt{2+\sqrt{2}}\sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{2+\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} = \frac{\sqrt{2^2 - \sqrt{2}^2}}{2} = \frac{\sqrt{4-2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

نمودار توابع مثلثاتی ساده:





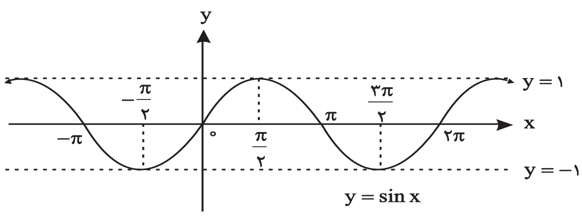


دوره تناوب

تابع با ضابطه ی $y=f(x)$ با دامنه D_f را در دامنه اش متناوب می گویند ، هرگاه عدد حقیقی و ناصفر T وجود داشته باشد به طوری که در دو شرط زیر صدق کند .

$$1)\ \forall x\in D_f \quad (x\pm T)\in D_f \quad , \quad 2)\ \forall x\in D_f \qquad f(x\pm T)=f(x)$$

این یعنی اینکه شکل تابع در فاصله های T واحدی تکراریه ، مثل تابع سینوس که در فاصله های 2π واحدی تکرار میشه



در تابع های متناوب چون نمودار تابع در فاصله های معینی تکرار می شود در نتیجه تمام نقاط نمودار تابع که ویژگی مشخصی دارند در فاصله ها تکرار می شوند مثلا ماکسیمم و مینیمم های و نقاط برخورد منحنی با محور طول ها .

در شکل بالا $x=\frac{\pi}{2}$ طول ماکسیمم تابع است و چون دوره تناوب تابع 2π است طول نقاط ماکسیمم مینیمم این تابع به صورت $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$ می باشد . از طرفی $x=\frac{3\pi}{2}$ طول مینیمم تابع است و چون دوره تناوب تابع 2π است طول نقاط مینیمم این تابع به صورت $x=2k\pi+\frac{3\pi}{2}$ می باشد .

محل برخورد تابع با محور طول ها ....3π , 2π , π , 0 می باشد که به صورت $x=2k\pi$, $x=2k\pi+\pi$ نشان می دهیم اما می توان آن را به صورت $x=k\pi$ هم نشان داد .

در توابع $y=a\sin bx$, $y=a\cos bx$ ، دوره تناوب تابع $T=\frac{2\pi}{|b|}$ است . بنابراین در بازه $[0, \frac{2\pi}{|b|}]$ یک شکل کامل از تابع رسم می شود .

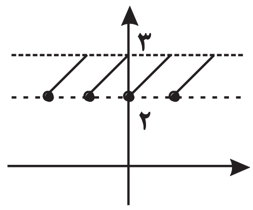
۱۶) تابع $y = x - \lfloor x-۲ \rfloor$ مفروض است.

الف) نمودار تابع را رسم کنید. ب) حدود y را بیابید. پ) نشان دهید تابع متناوب است.

پاسخ:

$۱) y = x - [x-۲] = x - [x] + ۲$

وقتی این تابع را ساده کنیم به فرم تابع قارقاسکی که دو واحد به سمت بالا در امتداد محور y ها رفته می‌شود.



$۲) \circ \le x - [x] < ۱ \quad \Rightarrow \quad ۲ \le x - [x] + ۲ < ۳ \quad \Rightarrow \quad ۲ \le y < ۳$ حدود تابع

$۳) f(x) = x - [x] + ۲ \quad \Rightarrow \quad T = \frac{۱}{|۱|} = ۱$ دوره تناوب تابع

هر عدد صحیح به جای T بگذاریم این تساوی $f(x+T) = x + T - [x+T] + ۲ = x - [x] + ۲$ برقرار است اما کمترین مقدار مثبت آن $T = ۱$ خواهد بود .

دوره تناوب اصلی تابع : اگر T دوره تناوب تابع f باشد آن گاه $\forall n \in Z - \{\circ\}$ ، nT نیز دوره تناوب تابع ا ست یعنی دوره تناوب تابع مجموعه ای بی شمار ا ست ، حال اگر این مجموعه دارای کوچک ترین عضو مثبت باشد آن را دوره ی تناوب اصلی می نامند .

$$\forall n \in Z - \{\circ\} \quad \Rightarrow \quad f(x+nT) = f(x)$$

دوره تناوب های مهم:

$$\begin{cases} f(x) = \sin^{۲n-۱}(ax+b) \\ f(x) = \cos^{۲n-۱}(ax+b) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{۲\pi}{|a|}$$

$$\begin{cases} f(x) = \sin^{۲n}(ax+b) \\ f(x) = \cos^{۲n}(ax+b) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{\pi}{|a|}$$

۱۷) دوره تناوب کدام تابع بیشتر است ؟

۱) $y = \sin ۴x$ ۲) $y = \cos \pi x$ ۳) $y = \cos \frac{x}{۲}$ ۴) $y = \sin(۳x+۴)$

پاسخ: گزینه ۳ درست است زیرا .

$$\sin ۴x \quad \Rightarrow \quad T = \frac{۲\pi}{۴} = \frac{\pi}{۲}$$

$$\cos \pi x \quad \Rightarrow \quad T = \frac{۲\pi}{\pi} = ۲$$

$$\cos \frac{x}{۲} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{۲\pi}{\frac{۱}{۲}} = ۴\pi$$

$$\sin(۳x+۴) \quad \Rightarrow \quad T = \frac{۲\pi}{۳}$$

نکته

۱) هرگاه تابعی به صورت مجموع یا تفاضل چند تابع مثلثاتی ساده بود برای تعیین دوره تناوب اصلی تابع، ابتدا تناوب هر یک از توابع را حساب کرده سپس کوچک‌ترین مضرب مشترک آن‌ها را به دست می‌آوریم.

۲) هرگاه تابع به صورت حاصل ضرب دو یا چند تابع مثلثاتی ساده باشد. ابتدا آن را به مجموع تبدیل کرده سپس دوره تناوب آن‌ها را تعیین می‌کنیم.

۱۸) دوره تناوب تابع $y=\sin^2\left(\frac{3x}{4}\right)+\cos^3\left(\frac{2x}{3}\right)$ را تعیین کنید.

☑ پاسخ:

$$y=\sin^2\frac{3x}{4} \Rightarrow T_1=\frac{\pi}{\frac{3}{4}}=\frac{4\pi}{3} \quad , \quad y=\cos^3\frac{2x}{3} \Rightarrow T_2=\frac{2\pi}{\frac{2}{3}}=3\pi \xrightarrow{\text{ک م م}} T=12\pi$$

۱۹) جای خالی را با عدد مناسب پر کنید .

دوره تناوب تابع $y=3\cos(-\frac{\pi}{4}x+\frac{\pi}{3})-1$ برابر .... است .

دوره تناوب تابع $y=8\sin(\frac{x+1}{3})$ برابر .... است .

☑ پاسخ:

$$y=3\cos(-\frac{\pi}{4}x+\frac{\pi}{3})-1 \quad \Rightarrow \quad T=\frac{2\pi}{\left|\frac{-\pi}{4}\right|}=8$$

$$y=8\sin(\frac{x+1}{3}) \quad \Rightarrow \quad T=\frac{2\pi}{\left|\frac{1}{3}\right|}=6\pi$$

۲۰) دوره تناوب تابع : $y=(\cos^2 3x-\sin^2 3x)\sin 6x$ چه عددی است ؟

☑ پاسخ:

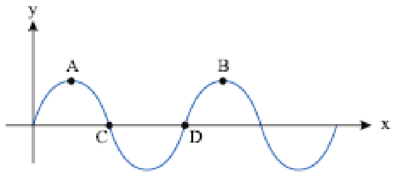
$$y=(\cos^2 3x-\sin^2 3x)\sin 6x \quad \Rightarrow \quad y=\cos 6x\sin 6x=\frac{1}{2}\sin 12x \quad \Rightarrow \quad T=\frac{2\pi}{12}=\frac{\pi}{6}$$

$\cos^2 u-\sin^2 u=\cos 2u$

$2\sin u\cos u=\sin 2u$

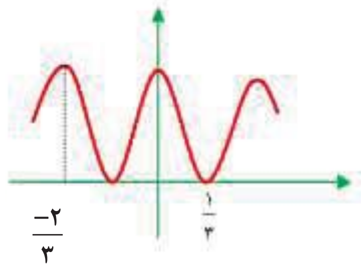
✓ فاصله بین ، طول دو نقطه ی ماکزیمم (مینیمم) متوالی برابر دوره ی تناوب تابع است .

✓ فاصله ی بین ، طول نقاط ماکزیمم و مینیمم متوالی نصف دوره تناوب تابع است .



۲۱) دوره تناوب تابع سینوسی مقابل کدام است ؟

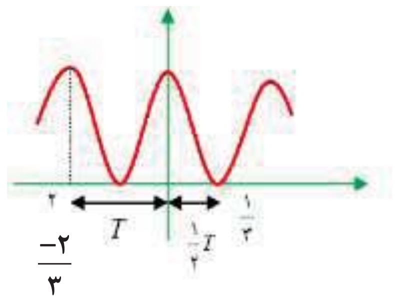
☑پاسخ:



مطابق شکل در بازه $\left[\frac{-۲}{۳},\frac{۱}{۳}\right]$ یک و نیم دور تابع رسم شده است .

چون فاصله ۲ ماکزیمم متوالی می شود یک دور تناوب و از یک ماکزیمم تا مینیمم بعدی

هم می شود نیم دوره تناوب در نتیجه داریم : $\frac{۱}{۳}-(\frac{-۲}{۳})=۱=\frac{۳}{۲}T \quad \Rightarrow \quad T=\frac{۲}{۳}$

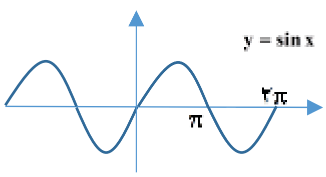


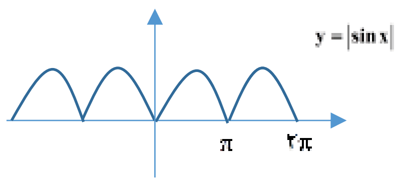
۲۲) اگر $f(x)=\sin x$ باشد ، آنگاه دوره تناوب تابع $g(x)=|f(x)|$ چند برابر دوره تناوب تابع $f(x)$ است ؟

☑پاسخ:

برای رسم نمودار تابع $g(x)=|f(x)|$ از روی نمودار $f(x)=\sin x$ قسمت های پایین محور x ها را در نمودار f نسبت به محور x ها قرینه می کنیم . در نتیجه عملاً دوره تناوب تابع حاصل نصف دوره تناوب تابع f است .

$$\frac{T_g}{T_f}=\frac{\pi}{۲\pi}=\frac{۱}{۲}$$





۲۳) در کدام تابع از گزینه های زیر در بازه $[\frac{-۱}{۲},\frac{۱}{۲}]$ یک شکل کامل از تابع رسم می شود ؟

۱) $y=\cos \pi x$ ۲) $y=\cos ۲\pi x$ ۳) $y=\cos x$ ۴) $y=\cos ۲x$

☑پاسخ:

دوره تناوب تابع مورد نظر برابر با طول بازه $[\frac{-۱}{۲},\frac{۱}{۲}]$ یعنی $T=\frac{۱}{۲}-(-\frac{۱}{۲})=۱$ است و فقط در تابع گزینه ۲ داریم :

$$y=\cos ۲\pi x \quad \Rightarrow \quad T=\frac{۲\pi}{|b|}=\frac{۲\pi}{۲\pi}=۱$$

رسم نمودار های مثلثاتی

روش حل مسئله

۱) درتوابع : $f(x)=a\sin bx+c$, $f(x)=a\cos bx+c$ مقدار ماکزیمم تابع $|a|+c$ و مقدار مینیمم آن $-|a|+c$

و دوره تناوب $\frac{۲\pi}{|b|}$ خواهد بود . و یادت باشه : $c=\frac{y_{max}+y_{min}}{۲}$, $|a|=\frac{y_{max}-y_{min}}{۲}$

۲) یعنی با داشتن ضابطه ی توابع فوق ماکسیمم و مینیمم و دوره تناوب تابع تعیین می شود وبا داشتن مقادیر ماکسیمم و مینیمم و دوره تناوب می توان ضابطه ی تابع را تعیین کرد .

یادت باشه :

الف) در تابع $y=a\sin x$ خواهیم داشت . $y_{Max}=|a|$, $y_{Min}=-|a|$ که در مبداء مختصات صعودی است اگر $a>۰$ باشد و اگر $a<۰$ تابع نزولی عبور می کند.

ب) اما تابع $y=a\sin bx$ دارای دوره تناوب $T=\frac{۲\pi}{|b|}$ است و $y_{Max}=|a|$, $y_{Min}=-|a|$

پ) در تابع $y=\sin(bx+c)$ همان نمودار $y=\sin bx$ را داریم که به اندازه $\frac{c}{b}$ به سمت چپ یا راست انتقال دارد .

۲۴) ضابطه تابع به فرم $y=a\sin bx+c$ را بنویسید که دوره تناوب آن π ، مقدار ماکزیمم آن ۴ و مقدار مینیمم آن -۲ باشد .

☑پاسخ:

$$T=\pi=\frac{۲\pi}{|b|} \Rightarrow |b|=۲ \qquad |a|=\frac{y_{max}-y_{min}}{۲}=\frac{۴-(-۲)}{۲}=۳ \qquad c=\frac{y_{max}+y_{min}}{۲}=\frac{۴-۲}{۲}=۲$$

$$y=۳\sin ۲x+۲$$

۲۵)ضابطه تابع به فرم $y=a\sin bx+c$ یا $y=a\cos bx+c$ را بنویسید که دوره تناوب ماکسیمم و مینیمم آن برابر مقادیر زیر باشد

☑پاسخ:

$$T=\frac{۳}{۲}\ ,\ \min=-۸\ ,\ \max=-۲$$

$$T=\frac{۲\pi}{|b|}=\frac{۳}{۲} \Rightarrow |b|=\frac{۴\pi}{۳} \Rightarrow b=\pm\frac{۴\pi}{۳}$$

$$|a|=\frac{-۲-(-۸)}{۲}=۳ \Rightarrow a=\pm۳ \quad , \quad c=\frac{-۲+(-۸)}{۲}=-۵$$

$$y=۳\sin(\frac{۴\pi}{۳}x)-۵ \quad , \quad y=۳\cos(\frac{۴\pi}{۳}x)-۵$$

۲۶) ولتاژ یک دستگاه لوازم خانگی بر حسب کسینوس نسبت به زمان دارای فرکانس یا دوره تناوب $\frac{۱}{۸۰}$ است و تغییرات ولتاژ در بازه $[-۱۲۰ , ۱۲۰]$ است معادله ولتاژ این دستگاه را بنویسید .

☑پاسخ:

$$v(t)=a\cos(bt)+c$$

$$\frac{۲\pi}{b}=\frac{۱}{۸۰} \Rightarrow b=۱۶۰\pi \quad , \quad a=\frac{۱۲۰-(-۱۲۰)}{۲}=۱۲۰ \quad , \quad c=\frac{۱۲۰-۱۲۰}{۲}=۰ \Rightarrow v(t)=۱۲۰\cos ۱۶۰\pi t$$

۲۷) دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y=\sqrt{۵}-\pi\cos\frac{۱}{۲}x$ را محاسبه کنید . (شهریور ۹۹)

☑ پاسخ:

$$y=a\cos bx+c \quad , \quad y=a\sin bx+c \Rightarrow y_{max}=|a|+c \quad , \quad y_{min}=-|a|+c$$

$$y_{max}=\sqrt{۵}+\pi \quad , \quad y_{min}=\sqrt{۵}-\pi \quad , \quad T=\frac{۲\pi}{\frac{۱}{۲}}=۴\pi$$

۲۸) معادله یک تابع سینوسی $y=a\sin bx+c$ را بنویسید که برد آن $[-۴,۴]$ و دوره تناوب اصلی آن ۲ است ؟ (خرداد ۱۴۰۱)

☑ پاسخ:

$$T=۲=\frac{۲\pi}{|b|} \Rightarrow |b|=\pi \Rightarrow b=\pm\pi$$

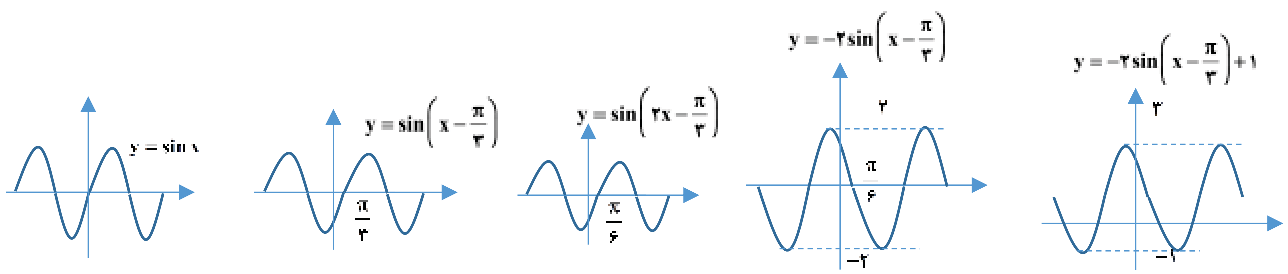
$$|a|=\frac{y_{max}-y_{min}}{۲}=\frac{۴-(-۴)}{۲}=۴ \Rightarrow y=\pm ۴\sin(\pm\pi x)$$

$$c=\frac{y_{max}+y_{min}}{۲}=\frac{۴+(-۴)}{۲}=۰$$

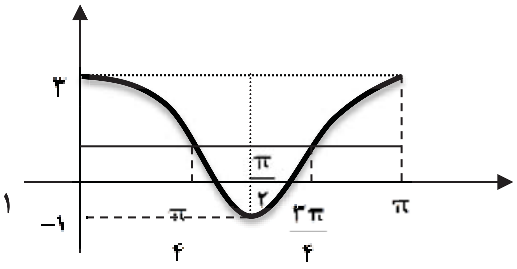
۲۹) دوره تناوب ، بیشترین و کمترین مقدار تابع $y=۳-۲\sin\frac{\pi}{۲}x$ را مشخص کنید . اگر دوره تناوب تابع T باشد نمودارآن را در بازه $[۰ , T]$ رسم کنید .

☑ پاسخ:

$$T=\frac{۲\pi}{\frac{\pi}{۲}} \Rightarrow T=۴ \quad , \quad y_{max}=۳+۲=۵ \quad , \quad y_{min}=۳-۲=۱$$



۳۰) تابع مثلثاتی مربوط به نمودار مقابل را بنویسید (موج کسینوسی)



پاسخ:

✍) معادله تابع کسینوسی است پس به صورت $f(x)=a\cos(bx)+c$ خواهد بود . از طرفی مطابق شکل :

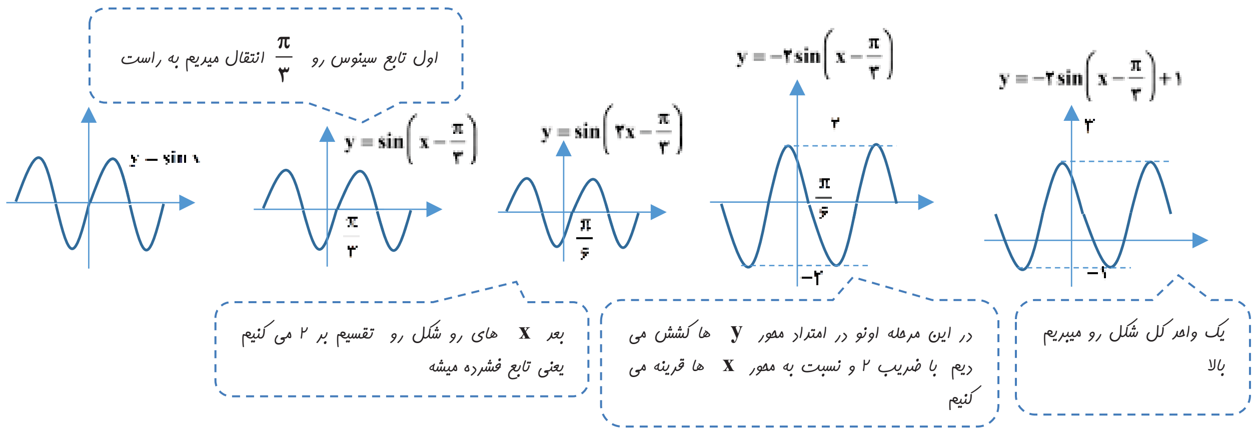
$$\begin{cases} \min(f)=-1=-|a|+c \\ \max(f)=3=|a|+c \end{cases}$$

بنابراین $|a|=2$, $c=1$ و با توجه به شکل $a=2$ است چون موج کسینوسی از بالا شروع شده است .

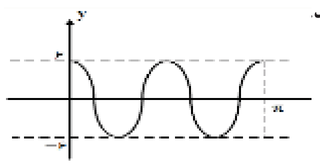
از طرفی : $f(x)=2\cos 2x+1 \quad \Leftarrow \quad b=2 \quad \Leftarrow \quad \pi=\frac{2\pi}{b} \quad \Leftarrow \quad T=\pi$

۳۱) نمودار تابع $y=-2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+1$ را رسم کنید .

پاسخ:



۳۲) شکل مقابل نمودار $y=a\cos bx$ است. مقادیر b, a را تعیین کنید و مقدار تابع در $x=\frac{7\pi}{12}$ به دست آورید.



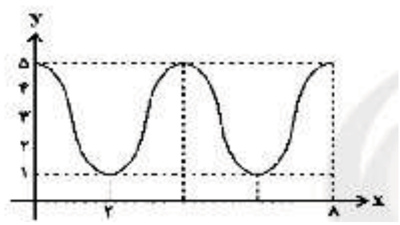
پاسخ: در بازه $[0,\pi]$ شکل منفی دو بار تکرار شده است پس دوره تناوب $T=\frac{\pi}{2}=\frac{2\pi}{|b|}$ است در نتیجه $b=4$

وتغییرات تابع در بازه $[-6,6]$ است و چون روند تابع در مبداء نزولی است پس $a=6$ است و معادله منفی به صورت $y=6\cos 4x$ خواهد بود .

در نتیجه :

$$f\left(\frac{7\pi}{12}\right)=6\cos\left(4\times\frac{7\pi}{12}\right)=6\cos\frac{7\pi}{3}=6\cos\frac{\pi}{3}=6\left(\frac{1}{2}\right)=3$$

۳۳) نمودار تابع $y=a\cos b\pi x+3$ مطابق شکل روبروست.حاصل $a+b$ کدام است؟

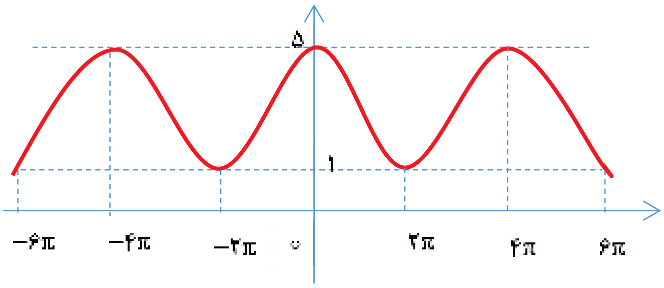


پاسخ: در نقطه‌ی $x=0$ داریم : $f(0)=a\cos b\pi(0)+3=a+3=5 \quad \Rightarrow \quad a=2$

طبق نمودار فاصله‌ی $x=0$ تا $x=2$ ، برابر نصف دوره‌ی تناوب تابع موردنظر است:

$$2-0=\frac{T}{2} \Rightarrow T=4 \quad \Rightarrow \quad \frac{2\pi}{|b\pi|}=4 \quad \Rightarrow b=\pm\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a+b=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2} \\ a+b=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2} \end{cases}$$

۳۴) نمودار زیر مربوط به تابعی با ضابطه $y = a\cos bx + c$ است . با توجه به نمودار ، ضابطه آن را تعیین کنید . (خرداد ۱۴۰۰)



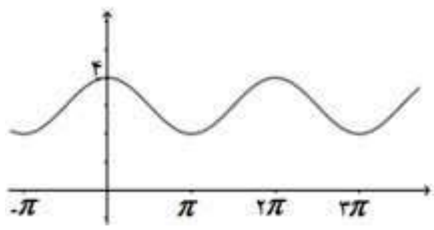
☑پاسخ:

چون تابع در مبداء ماکزیمم داره

$$c = \frac{y_{max} + y_{min}}{۲} = \frac{۵+۱}{۲} = ۳ \quad , \quad |a| = \frac{y_{max} - y_{min}}{۲} = \frac{۵-۱}{۲} = ۲ \xrightarrow{a>۰} a = ۲$$

$$T = ۴\pi = \frac{۲\pi}{|b|} \Rightarrow b = \pm\frac{۱}{۲} \Rightarrow y = ۲\cos\left(\pm\frac{۱}{۲}x\right) + ۳$$

۳۵)نمودار تابع $f(x) = a + \cos bx$ به صورت زیر است . حاصل $a+b$ را به دست آورید . $(b > ۰)$ (حسابان دی ماه ۱۴۰۱)



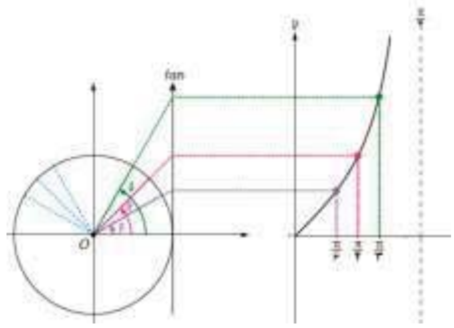
☑پاسخ:

$$T = ۲\pi \Rightarrow ۲\pi = \frac{۲\pi}{|b|} \Rightarrow b = \pm ۱$$

$$\Rightarrow a + b \overset{b>۰}{=} ۴$$

$$y_{max} = ۴ = ۱ + a \Rightarrow a = ۳$$

تابع تانژانت



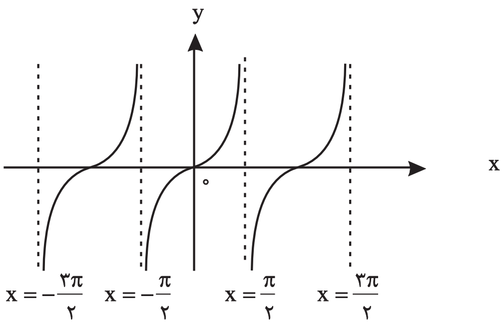
$$f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

تابع تانژانت یک تابع کسری است بنابراین داریم :

$$\cos x = ۰ = \cos(۲k+۱)\frac{\pi}{۲} \quad \Rightarrow \quad D_f = R - \left\{(۲k+۱)\frac{\pi}{۲}\right\} \quad k \in \mathbb{Z}$$

ولی برد آن مجموعه اعداد حقیقی است : $R_f = \mathbb{R}$

این تابع متناوب و دارای دوره تناوب $T = \pi$ است چون: $\tan(\pi + x) = \tan x$



$y = \tan x$

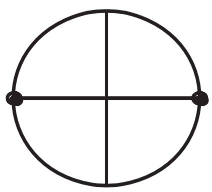
از طرفی در بازه ای که تعریف شده و مجانب قائم نداشته باشد ،اکیداً یکنوا صعودی است .

۳۶) دامنه‌ی تابع $f(x) = \tan\left(x + \frac{\pi}{۳}\right)$ را به دست آورید. (نهایی)

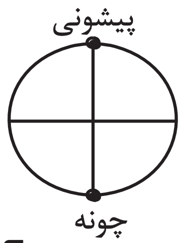
پاسخ:

$$\tan\left(x + \frac{\pi}{۳}\right) = \frac{\sin\left(x + \frac{\pi}{۳}\right)}{\cos\left(x + \frac{\pi}{۳}\right)} \Rightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{۳}\right) \overset{?}{=} ۰ = \cos\left(k\pi + \frac{\pi}{۲}\right) \Rightarrow D_f = R - \left\{x : \ x = k\pi + \frac{\pi}{۲} - \frac{\pi}{۳}\right\}$$

۲تا گوش ها



زوایایی که سینوس‌هاشون صفره $= k\pi$



زوایایی که کسینوس‌هاشون صفره $= k\pi + \frac{\pi}{۲}$

۳۷) کدام یک از جملات زیر درست و کدام یک نادرست است

الف) تابع تانژانت در دامنه اش نزولی است . نادرست است . تابع تانژانت در دامنه اش غیر یکنواست

ب) در هیچ بازه ای تابع تانژانت نزولی نیست . درست است .

پ) می توان بازه ای یافت که تابع تانژانت در آن غیر صعودی باشد . درست است . مثلاً بازه $[\circ,\pi]$

ت) تابع تانژانت در هر بازه ای که در آن تعریف شده باشد ، صعودی است . درست است .

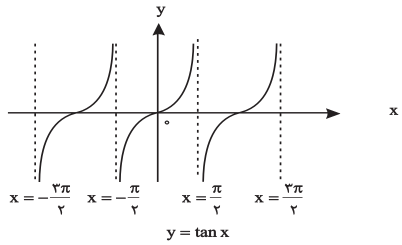
۳۸) اگر $\frac{\pi}{۴}<x<\frac{۳\pi}{۴}$ ، $\tan x=\frac{۱}{۲m-۳}$ باشد ، حدود m کدام است ؟

۱) $(-۲,-۱)$ ۲) $(-۱,۲)$ ۳) $(۱,۲)$ ۴) $(-۲,۱)$

پاسخ:

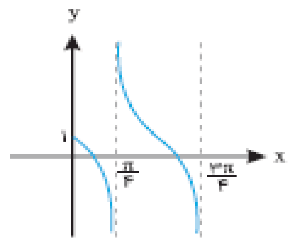
$$\frac{\pi}{۴}<x<\frac{۳\pi}{۴}\Rightarrow\left|\tan x=\frac{۱}{۲m-۳}\right|>۱\ ,\left|\frac{۱}{۲m-۳}\right|>۱\Rightarrow|۲m-۳|<۱\Rightarrow-۱<۲m-۳<۱$$

$$۲<۲m<۴\Rightarrow ۱<m<۲$$



۳۹) شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $y=m+\tan kx$ است ، حاصل $m+k$ کدام است ؟

۱) ۳ ۲) ۳- ۳) ۱ ۴) ۱-



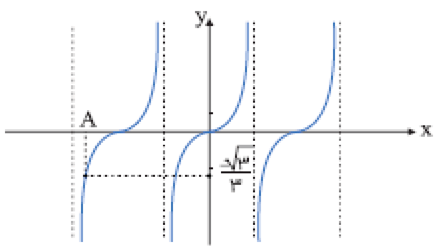
پاسخ:

$$f(x)=m+\tan kx\Rightarrow f(\circ)=m=۱\Rightarrow f(x)=۱+\tan kx$$

$$T=\frac{۳\pi}{۴}-\frac{\pi}{۴}=\frac{\pi}{۲}\Rightarrow\frac{\pi}{|k|}=\frac{\pi}{۲}\Rightarrow|k|=۲\Rightarrow k=\pm۲$$

و چون روند تابع نزولی است باید $k=-۲$ باشد .

۴۰) شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $y=\tan x$ است طول نقطه A کدام است ؟



۱) $\frac{-۷\pi}{۶}$ ۲) $\frac{-۴\pi}{۳}$ ۳) $\frac{-۲\pi}{۳}$ ۴) $\frac{-۵\pi}{۶}$

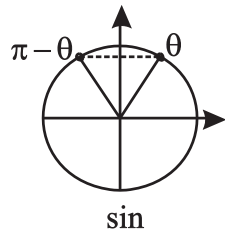
پاسخ:

می دانیم دوره تناوب تابع تانژانت $T=\pi$ بنابراین π تا π همه چیز تکرار می شود . $\tan x=\frac{-\sqrt{۳}}{۳}=\tan\frac{-\pi}{۶}$ پس دومین نقطه می شود : $A=-\pi-\frac{\pi}{۶}=\frac{-۷\pi}{۶}$

معادلات مثلثاتی

منظور از حل معادله‌ی مثلثاتی یافتن تمام کمان‌هایی است که در معادله صدق می‌کنند. هر معادله‌ی مثلثاتی در صورت داشتن جواب به یکی از معادلات زیر تبدیل می‌شود. به حل و بسط هر یک می‌پردازیم.

۱) $\sin x = m = \sin\theta$ ۲) $\cos x = m = \cos\theta$

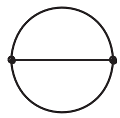


معادلات سینوسی $\sin x = m = \sin\theta$ $(-1 \le m \le 1)$

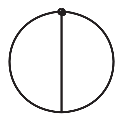
جواب های اولیه
$$\begin{cases} \theta \\ \pi - \theta \end{cases}$$

جواب‌های عمومی $k \in \mathbb{Z}$
$$\begin{cases} x = 2k\pi + \theta \\ x = 2k\pi + \pi - \theta \end{cases}$$

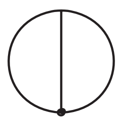
حالت های خاص



$\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi$

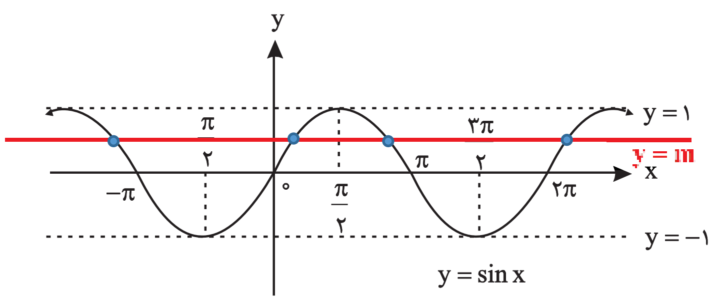


$\sin x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$



$\sin x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$

به لحاظ شکلی یعنی محل برخورد نمودار تابع با خطوط افقی : $y = m$



۴۱) معادله $۲\sin x-۱=۰$ را حل و جواب های اولیه و جواب های کلی آن را تعیین کنید .

پاسخ:

$$۲\sin x-۱=۰ \Rightarrow \sin x=\frac{۱}{۲}=\sin\frac{\pi}{۶} \Rightarrow \begin{cases} x=۲k\pi+\frac{\pi}{۶} \\ x=۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۶} \end{cases}$$

۴۲) معادله مثلثاتی $۲\sin x-\sqrt{۳}=۰$ را حل کنید .

پاسخ:

$$۲\sin x-\sqrt{۳}=۰ \Rightarrow \sin x=\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\sin\frac{\pi}{۳} \Rightarrow \begin{cases} x=۲k\pi+\frac{\pi}{۳} \\ x=۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۳} \end{cases}$$

۴۳) معادله ی $\mathrm{Sin}۲x=\mathrm{Sin}x$ را حل کنید. (خرداد ۱۴۰۱)

پاسخ:

$$\begin{cases} ۲x=۲k\pi+x & \Rightarrow \quad x=۲k\pi \\ ۲x=۲k\pi+\pi-x & \Rightarrow \quad ۳x=(۲k+۱)\pi \quad \Rightarrow \quad x=\frac{(۲k+۱)\pi}{۳} \end{cases}$$

۴۴) معادله $۲\sin^۲ x-\sin x=۰$ را حل کرده جواب‌هایی که در بازه $[۰,۲\pi]$ هستند را تعیین کنید.

پاسخ:

$$\sin x(۲\sin x-۱)=۰$$

$$\begin{cases} \sin x=۰ & \Rightarrow x=k\pi \\ ۲\sin x-۱=۰ & \Rightarrow \sin x=\frac{۱}{۲}=\sin\frac{\pi}{۶} \Rightarrow \begin{cases} x=۲k\pi+\frac{\pi}{۶} \\ x=۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۶} \end{cases} \end{cases}$$

۴۵) معادله مثلثاتی $۲\sin ۲x-\sqrt{۲}=۰$ را حل کنید .

پاسخ:

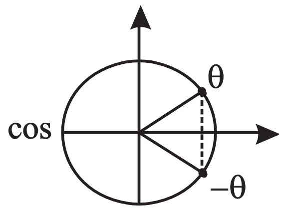
$$۲\sin ۲x-\sqrt{۲}=۰ \Rightarrow \sin ۲x=\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\sin\frac{\pi}{۴} \Rightarrow \begin{cases} ۲x=۲k\pi+\frac{\pi}{۴} & \Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۸} \\ ۲x=۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۴} & \Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۲}-\frac{\pi}{۸} \end{cases}$$

۴۶) معادله $\sin ۳x=-\sin ۲x$ را حل کنید .

پاسخ:

$$\sin ۳x=-\sin ۲x=\sin(-۲x) \Rightarrow \begin{cases} ۳x=۲k\pi+(-۲x) & \Rightarrow x=\frac{۲k\pi}{۵} \\ ۳x=۲k\pi+\pi-(-۲x) & \Rightarrow x=۲k\pi+\pi \end{cases}$$

معادلات کسینوسی

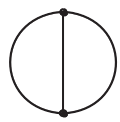


$\cos x = m = \cos\theta \qquad -1 \le m \le 1$

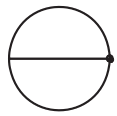
جواب های اولیه
$$\begin{cases} x = \theta \\ x = -\theta \end{cases}$$

جواب های عمومی
$$\begin{cases} x = 2k\pi - \theta \\ x = 2k\pi + \theta \end{cases}$$

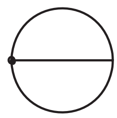
حالات خاص



$$\cos x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$$



$$\cos x = 1 \quad \Rightarrow \quad x = 2k\pi$$



$$\cos x = -1 \quad \Rightarrow \quad x = (2k+1)\pi$$

۴۷) معادله مثلثاتی $2\cos^2 x - 1 = 0$ را حل کنید .

☑پاسخ:

$$2\cos^2 x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos^2 x = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4} & \Rightarrow \quad x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4} \\ \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{3\pi}{4} & \Rightarrow \quad x = 2k\pi \pm \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

۴۸) معادله $\cos 3x - \cos x = 0$ را حل کنید .

☑پاسخ:

$$\cos 3x - \cos x = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos 3x = \cos x \quad \Rightarrow \quad 3x = 2k\pi \pm x \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{k\pi}{2} \end{cases}$$

۴۹) معادله‌ی $\cos 2x - 3\cos x + 2 = 0$ را حل کنید.

☑پاسخ:

۲ شده رو تا ۱

$$1+\cos 2x - 3\cos x + 1 = 0 \Rightarrow 2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \left| \begin{array}{l} \cos x = 1 \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

$$\cos x = 1 = \cos 2k\pi \Rightarrow x = 2k\pi \quad , \quad \cos x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

۵۰) معادله $\sin 2x - \sqrt{3}\cos x = 0$ را حل کنید.

☑پاسخ:

$$2\sin x\cos x - \sqrt{3}\cos x = 0 \Rightarrow \cos x(2\sin x - \sqrt{3}) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ 2\sin x - \sqrt{3} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos x = 0 & \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3} & \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{3} \end{cases} \end{cases}$$

۵۱) معادله $\sin^2 x = \cos^2 x + 1$ را حل کنید.

☑پاسخ:

$$1 - \cos^2 x = \cos^2 x + 1 \Rightarrow 2\cos^2 x = 0 \Rightarrow \cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

۵۲) معادله ی $2\sin^2 x = 3\cos x$ را حل کنید .

☑پاسخ:

$$2\sin^2 x = 3\cos x \Rightarrow 2\left(1 - \cos^2 x\right) = 3\cos x \Rightarrow 2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{-3 \pm 5}{4} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \\ \cos x = -2 \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

$$\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

۵۳) معادله $\cos 2x + \cos\frac{x}{2} = 0$ را حل کنید .

☑پاسخ:

$$\cos 2x + \cos\frac{x}{2} = 0 \Rightarrow \cos 2x = -\cos\frac{x}{2} = \cos\left(\pi - \frac{x}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \left(\pi - \frac{x}{2}\right) \\ 2x = 2k\pi - \left(\pi - \frac{x}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{(2k+1)2\pi}{5} \\ x = \frac{(2k-1)2\pi}{3} \end{cases}$$

۵۴) معادله مثلثاتی $\cos 2x - \sin x + 1 = 1$ را حل کنید. (دی ماه ۱۴۰۰)

پاسخ:

$$\cos 2x - \sin x + 1 = 1 \quad \Rightarrow \quad 1 + \cos 2x - \sin x = 1$$

$$1 + \cos 2x = 2\cos^2 x = 2(1 - \sin^2 x) \quad \Rightarrow \quad 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \quad \begin{cases} \sin x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \dfrac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - \dfrac{\pi}{6} \end{cases} \\ \sin x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi - \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

۵۵) معادله مثلثاتی $\sin x \cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$ را حل کنید. (خرداد ۱۴۰۰)

پاسخ:

$$\sin x \cos x = \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow 2\sin x \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \dfrac{\pi}{3} \\ 2x = 2k\pi + \pi - \dfrac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = k\pi + \dfrac{\pi}{6} \\ x = k\pi + \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{6} = k\pi + \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$$

۵۶) معادله مثلثاتی $\cos 2x - \cos x + 1 = 0$ را در بازه $0 \le x \le \pi$ حل کنید. (حسابان دی ماه ۱۴۰۱)

پاسخ:

$$1 + \cos 2x - \cos x = 2\cos^2 x - \cos x = \cos x(2\cos x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2} \\ \cos x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$$

۵۷) جواب کلی معادله ی مثلثاتی $\tan x(\cot x + \cos^2 x) = \dfrac{5}{4}$، کدام است؟

۱) $k\pi - \dfrac{\pi}{12}$ ۲) $k\pi + \dfrac{\pi}{12}$ ۳) $k\pi \pm \dfrac{\pi}{3}$ ۴) $k\pi + \dfrac{\pi}{4} \pm \dfrac{\pi}{6}$

پاسخ: گزینه ۴ صحیح است.

$$\tan x(\cot x + \cos^2 x) = 1 + \tan x \cos^2 x = \frac{5}{4} \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin 2x = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$$

$$\begin{cases} 2x = 2k\pi + \dfrac{\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi + \dfrac{\pi}{12} \\ 2x = 2k\pi + \pi - \dfrac{\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi + \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{12} = k\pi + \dfrac{5\pi}{12} \end{cases} \Rightarrow k\pi + \frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{6}$$

۵۸) جواب کلی معادله $\cos^{۲}x-\sin^{۲}x=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ، کدام است؟

۱) $k\pi+\frac{\pi}{۸}$ ۲) $k\pi\pm\frac{\pi}{۲}$ ۳) $۲k\pi\pm\frac{\pi}{۸}$ ۴) $k\pi\pm\frac{۳\pi}{۴}$

☑پاسخ: گزینه ۱ صحیح است.می دانیم $\cos^{۲}x-\sin^{۲}x=\cos ۲x$ پس داریم:

$$\cos^{۲}x-\sin^{۲}x=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\quad\Rightarrow\quad\cos ۲x=\cos\frac{\pi}{۴}\quad\Rightarrow\quad ۲x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۴}\quad\Rightarrow\quad x=k\pi\pm\frac{\pi}{۸}$$

۵۹) جواب کلی معادله مثلثاتی $\frac{\text{Sin}\,۳x}{\text{Cos}\left(\frac{۳\pi}{۲}+x\right)}=۱$ ، به کدام صورت است؟ (خارج-۹۳)

۱) $k\pi+\frac{\pi}{۴}$ ۲) $۲K\pi\pm\frac{\pi}{۴}$ ۳) $۲K\pi\pm\frac{۳\pi}{۴}$ ۴) $\frac{K\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴}$

☑پاسخ: پاسخ گزینه‌ی ۴ صحیح است.

$$\frac{\sin ۳x}{\cos(\frac{۳\pi}{۲}+x)}=۱\quad\Rightarrow\quad\frac{\sin ۳x}{\sin x}=۱\xrightarrow{\sin x\neq ۰\ \Rightarrow\ x\neq k\pi}\sin ۳x=\sin x\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}۳x=۲k\pi+x\\ ۳x=۲k\pi+\pi-x\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=k\pi\\ x=\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴}\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\sin x\neq ۰\quad\Rightarrow\quad x\neq k\pi\quad\xrightarrow{\text{اشتراک}}\quad x=\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴}\quad(k\in\mathbb{Z})$$

۶۰) جواب کلی معادله مثلثاتی $۳+\cot x(\tan x-۵\sin x)=۲\cos^{۲}(\frac{\pi}{۲}+x)$ ، کدام است ؟

۱) $۲k\pi\pm\frac{۲\pi}{۳}$ ۲) $۲k\pi\pm\frac{\pi}{۳}$ ۳) $۲k\pi\pm\frac{\pi}{۶}$ ۴) $۲k\pi\pm\frac{۵\pi}{۶}$

☑پاسخ: گزینه ۲ صحیح است. معادله مثلثاتی خلاصه می شود.

$$۳+\cot x(\tan x-۵\sin x)=۲\cos^{۲}(\frac{\pi}{۲}+x)\quad\Rightarrow\quad ۳+\cot x\tan x-۵\cot x\sin x=۴-۵\cos x=۲\sin^{۲}x$$

$$۴-۵\cos x=۲-۲\cos^{۲}x\quad\Rightarrow\quad ۲\cos^{۲}x-۵\cos x+۲=۰\quad\Rightarrow\quad\cos x=\frac{۱}{۲}=\cos\frac{\pi}{۳}\quad\Rightarrow\quad x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۳}$$

مولف ومدرس : محمد صادق روحانی گَلمِجانی