آکادمی
ریاضی
مهندس روحانی

تابع

ریاضی ۳ به سبک روحانی

آموزش مهارت حل مسئله

آموزش مفهومی

صفر تا صد هر مبحث

بررسی آزمون های نهایی

مولف : محمد صادق روحانی گَلمِجانی

@kimia-mahan
تلفن تماس : ۰۹۱۲۱۸۵۹۷۸۰

مقدمه مولف

این مجموعه شامل درسنامه‌ای کامل به همراه ۷۰۰ سؤال متنوع و حل شده از سؤالات کتاب درسی و امتحانات نهایی داخل و خارج از کشور به همراه سؤالات مفهومی و تألیفی از متن کتاب درسیه . تمام نکات لازم برای شما ارائه شده . این کتاب با توجه به رویکرد کتاب ریاضی ۳ تدوین شده و سعی کردم کاستی های اونو پوشش بدم . از طرفی نحوه ی نوشتن پاسخ تشریحی ، برای امتحان نهایی هم ارائه شده تا به" اندازه بنویسی و نمره سوال رو کامل بگیری" . سازو کارتدوین کتاب بطوریه که با استفاده از مفاهیم و سؤالات حل شده قادر به حل سؤالات بعدی باشی . ۸ آزمون شبیه سازی شده امتحان نهایی همراه با پاسخنامه کاملاً تشریحی و "توضیح دار " آوردم تا شما سوالات امتحان نهایی رو قبل از برگزاری دیدار کنید .

برای موفقیت در درس ریاضی باید از حل مثال‌ها و تمرین‌های کتاب درسی شروع کنید و به هیچ‌وجه از آن غافل نشوید سؤالات امتحانات نهایی و حتی کنکور به طور مستقیم از تمرین‌ها و مثال‌های کتاب درسی طراحی می‌شن. آفت موفقیت شما حفظ کردن پاسخ تمریناته! تسلط بر مفاهیم مستلزم فهم درست درسه و اکتفا کردن به خواندن حل مسأله کارساز نیست، دقت کنید که حل هر سؤال برای شما کمکیه برای حل سؤالات جدیدتر و درک مفاهیم اساسی ریاضی از طریق حل مسئله .
دقت به موارد زیر موفقیت شما را افزایش میده :

۱- بررسی موضوعات به صورت تشریحی و مفهومی و هم‌چنین توجه به کاربرد مفاهیم و تعاریف در حل مسئله .
۲- یادگیری عمیق موضوعات با حوصله‌ی زیاد و اینکه روش های مختلف حل یه سوال رو یادبگیری.
۳- بررسی نمونه سوالات حل شده و پس از آن حل تمرین (البته به اعتقاد من مثال های حل شده کتاب رو هم باید اول سعی کنیم خودمون حل کنیم) و در صورت نیافتن راه حل رجوع به پاسخ.

خوبه بدونید ارزش ۵۰ تمرین که خودتون حل می کنید به مراتب بیش‌تر از خوندن و حفظ کردن ۱۰۰۰ تمرین حل شده است، چون مهم‌ترین قسمت یادگیری و کاربردی‌ترین آن برای حل مسأله ریاضی مثال‌ها و تمرین‌هایی است که خودتون به حل آن می‌پردازید.

فرآیند یادگیری ریاضی تدریجیه و در صورت عدم تکرار و تداوم از یاد می‌ره ،بنابراین انتظار نداشته باشید در این درس در کوتاه مدت تسلط کامل پیدا کنید بلکه این مهم آهسته و پیوسته با تمرین مطالب آموخته شده اتفاق می افته . تسلط ومهارت در هر درسی نتیجه تلاش مستمر و پیگیریه .

لطف کنید کمی و کاستی این کتاب را از من دریغ نکنید تا مجموعه بهتری ارائه بشه از صبر و حوصله و دقت شما سپاس بی پایان دارم از ودقت نظر تشکر می کنم .

سپاس و عشق ، نثار همسر و فرزندانم که برای تالیف این مختصر وقت بسیاری را از ایشان دریغ داشتم .

کرج فروردین ۱۴۰۲: محمد صادق روحانی گَلمِجانی

جعبه ابزار

۱) $(a+b)^{۲}=a^{۲}+۲ab+b^{۲}$
۲) $(a-b)^{۲}=a^{۲}-۲ab+b^{۲}$
۳) $(a+b)^{۲}+(a-b)^{۲}=۲(a^{۲}+b^{۲})$
۴) $(a+b)^{۲}-(a-b)^{۲}=۴ab$
۵) $a^{۲}+b^{۲}=(a+b)^{۲}-۲ab$
۶) $a^{۲}+b^{۲}=(a-b)^{۲}+۲ab$
۷) $(a+b)(a-b)=a^{۲}-b^{۲}$
۸) $a-b=(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})$
۹) $\forall n\in N \qquad (\sqrt{n+۱}+\sqrt{n})(\sqrt{n+۱}-\sqrt{n})=۱$
۱۰) $(a+b+c)^{۲}=a^{۲}+b^{۲}+c^{۲}+۲(ab+ac+bc)$
۱۱) $(a+b)^{۳}=a^{۳}+۳a^{۲}b+۳ab^{۲}+b^{۳}$
۱۲) $(a-b)^{۳}=a^{۳}-۳a^{۲}b+۳ab^{۲}-b^{۳}$
۱۳) $(a+b)^{۳}=a^{۳}+b^{۳}+۳ab(a+b)$
۱۴) $(a-b)^{۳}=a^{۳}-b^{۳}+۳ab(a-b)$
۱۵) $a^{۳}+b^{۳}=(a+b)(a^{۲}-ab+b^{۲})$
۱۶) $a^{۳}-b^{۳}=(a-b)(a^{۲}+ab+b^{۲})$
۱۷) $a^{۳}+b^{۳}=(a+b)^{۳}-۳ab(a+b)$
۱۸) $a^{۳}-b^{۳}=(a-b)^{۳}+۳ab(a-b)$
۱۹) $a-b=(\sqrt[۳]{a}-\sqrt[۳]{b})(\sqrt[۳]{a^{۲}}+\sqrt[۳]{ab}+\sqrt[۳]{b^{۲}})$
۲۰) $a+b=(\sqrt[۳]{a}+\sqrt[۳]{b})(\sqrt[۳]{a^{۲}}-\sqrt[۳]{ab}+\sqrt[۳]{b^{۲}})$
۲۱) $(x+a)(a+b)=x^{۲}+(a+b)x+ab$

مساحت ها ، حجم ها و محیط های مهم :

دایره : $S=\pi R^{۲} \quad , \quad P=۲\pi R$

کره : $S=۴\pi R^{۲} \quad , \quad V=\frac{۴}{۳}\pi R^{۳}$

استوانه : $S=۲\pi Rh+۲\pi R^{۲} \quad , \quad V=\pi R^{۲}h$

مخروط : مولدمخروط $L^{۲}=R^{۲}+h^{۲} \quad , \quad V=\frac{\pi}{۳}R^{۲}h$

قدر مطلق

۱) $|u|\geq ۰ \quad , \quad |u|=۰ \Rightarrow u=۰$
۲) $|u|=|-u| \Rightarrow |u-v|=|v-u|$
۳) $-|u|\leq u\leq |u|$
۴) $\sqrt[۲n]{u^{۲n}}=|u|$
۵) $|u|=K \xrightarrow{K>۰} u=\pm K$
۶) $|u|=|v| \longrightarrow u=\pm v$
۷) $K>۰ \Rightarrow \begin{cases} |u|\leq K \Leftrightarrow -K\leq u\leq K \\ |u|\geq K \Leftrightarrow u\geq K \ \vee \ u\leq -K \end{cases}$
۸) $\begin{cases} |uv|=|u||v| \\ \left|\frac{u}{v}\right|=\frac{|u|}{|v|} \qquad v\neq ۰ \end{cases}$

فصل اول

تابع

آنچه در این فصل خواهید آموخت:

- تابع: یادآوری و تکمیل
- رسم نمودار تابع
- اعمال جبری روی توابع
- ترکیب توابع
- توابع صعودی و توابع نزولی
- توابع یک به یک و تابع وارون

ابوجعفر (عبدالله) محمد بن موسی خوارزمی،
ریاضیدان، منجم و جغرافیدان ایرانی

ا عمال جبری روی توابع

منظور از اعمال جبری روی توابع همان چهار عمل اصلی جمع و تفریق و ضرب و تقسیم دو تابع است. نکته‌ی مهم آن است که ابتدا باید دامنه‌ی هر دوتابع را تعیین و اشتراک این دو دامنه را محاسبه نمود و اعمال جبری را روی دامنه‌ی اشتراکی انجام دهیم.

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$$
$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$$
$$(f\times g)(x)=f(x)\times g(x)$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}\quad ,g(x)\neq ۰$$

$$D_{f\overset{\pm}{\times}g}=D_f\cap D_g$$
$$D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x\mid g(x)=۰\}$$

نکته

در نمایش توابع به صورت زوج‌های مرتب، وقتی مولفه‌های اول دو زوج از دو تابع یکسان بودن برای اعمال جبری، زوج مرتبی می‌نویسیم و مولفه‌ی اول را قرار داده و برای تعیین مولفه‌ی دوم نگاه می‌کنیم چه عملی باید انجام داد، آن عمل را روی مولفه‌های دوم زوج‌های مرتب انجام می‌دهیم.

۱- دو تابع $f=\{(۱,۳),(-۲,۵),(۰,۷),(۳,-۴)\}$, $g=\{(۱,۴),(۳,۱),(۰,۰)\}$ را در نظر بگیرید. $f\times g$ را به صورت زوج مرتب بنویسید.

☑ پاسخ:

$$D_f\cap D_g=\{۰,۱,۳\}$$

$$f\times g=\{(۱,۳\times ۴),(۰,۷\times ۰),(۳,-۴\times ۱)\}=\{(۱,۱۲),(۰,۰),(۳,-۴)\}$$

۲- با فرض:
$$\begin{cases} f(x)=\{(-۴,۱۳),(-۱,۷),(۰,۵),(۳,-۵)\} \\ g(x)=\{(-۴,-۷),(-۲,-۵),(۰,-۳),(۳,۰),(۵,۲),(۹,۶)\} \end{cases}$$
توابع زیر را حساب کنید.

☑ پاسخ:

$$۱)D_{f+g}=\{-۴,۰,۳\}\quad ,\quad f+g=\{(-۴,۱۳+(-۷)),(۰,۵+(-۳)),(۳,-۵+۰)\}=\{(-۴,۶),(۰,۲),(۳,-۵)\}$$

$$۲)D_{f-g}=\{-۴,۰,۳\}\quad ,\quad f-g=\{(-۴,۱۳-(-۷)),(۰,۵-(-۳)),(۳,-۵-۰)\}=\{(-۴,۲۰),(۰,۸),(۳,-۵)\}$$

$$۳)D_{f\times g}=\{-۴,۰,۳\}\quad ,\quad f\times g=\{(-۴,۱۳\times -۷),(۰,۵\times -۳),(۳,-۵\times ۰)\}=\{(-۴,-۹۱),(۰,-۱۵),(۳,۰)\}$$

$$۴)D_{\frac{f}{g}}=\{-۴,۰\}\quad ,\quad \frac{f}{g}=\left\{\left(-۴,\frac{۱۳}{-۷}\right),\left(۰,\frac{۵}{-۳}\right)\right\}$$

۳- اگر $f=\{(۲,۱),(۳,۵),(۵,۶)\}$ ، $g=\{(۳,۰),(۲,۱)\}$ آنگاه توابع رو به رو را تشکیل دهید . $\frac{۲}{g}$ ، $f-f$ ، $f-۲g$

پاسخ:

$D_{۲g}=D_g$ ، $D_{f-۲g}=D_f\cap D_{۲g}=\{۲,۳\}$ ، $۲g=\{(۳,۰),(۲,۲)\}\Rightarrow$

$$f-۲g=\{(۲,۱-۲),(۳,۵-۰)\}=\{(۲,-۱),(۳,۵)\}$$

$$f-f=\{(۲,۰),(۳,۰),(۵,۰)\}$$
$$D_{f-f}=\{۲,۳,۵\}\quad,\quad R_f=\{۰\}$$

$$\frac{۲}{g}=\left\{(۲,\frac{۲}{۱}),(۳,\frac{۲}{۰})\right\}=\{(۲,۲)\}$$

تعریف نشده

۴- توابع $f(x)=\begin{cases}۱ & x>۰\\ ۰ & x=۰\\ -۱ & x<۰\end{cases}$ ، $g(x)=\begin{cases}x^۳ & x\ge۰\\ ۱ & x<۰\end{cases}$ مفروض‌اند، تابع $f\times g$ را تعیین کنید.

پاسخ:
$$f(x)\times g(x)=\begin{cases}۱\times x^۳=x^۳ & x>۰\\ ۰ & x=۰\\ ۱\times -۱=-۱ & x<۰\end{cases}$$

۵- اگر $f=\{(-۱,۲),(۱,۵),(۳,-۱),(۰,۳)\},g=\{(-۲,۵),(۳,۲),(۴,۶),(۰,۲),(-۱,۰)\}$ باشند، تابع $\frac{f}{g}$ را با اعضاء بنویسید.

پاسخ: تابع $\frac{f}{g}$ در $x=-۱$ قابل تعریف نیست، زیرا مخرج کسر صفر می‌شود: $D_{\frac{f}{g}}=\{۳,۰\}$

$$\frac{f}{g}=\left\{\left(۳,\frac{-۱}{۲}\right),\left(۰,\frac{۳}{۲}\right)\right\}$$

۶- فرض کنید $f(x)=\begin{cases}۲x & x\ge۲\\ x-۱ & x<۲\end{cases}$ ، $g(x)=\begin{cases}۲x-۱ & x\ge۱\\ x+۱ & x<۱\end{cases}$ باشد، ضابطه تابع $y=(f+g)(x)$ را بنویسید.

پاسخ:

$$D_{f+g}=D_f\cap D_g$$

x	۱	۲	
f(x)	x−۱	x−۱	۲x
g(x)	x+۱	۲x−۱	۲x−۱

$$(f+g)(x)=\begin{cases}۲x & x<۱\\ ۳x-۲ & ۱\le x<۲\\ ۴x-۱ & x\ge۲\end{cases}$$

این سوالا رو با توضیحات داده شده میتونی حل کنی.

- اگر $g=\{(۱,۴)\ ,\ (۲,۹)\ ,\ (-۲,۳)\}$, $f=\{(۱,۲)\ ,\ (-۲,۵), (۰,۷)\ ,\ (۳,-۴)\}$ باشد، تابع $\frac{g}{f}+\frac{f}{g}$ را تعیین کنید.

- دو تابع $f(x)=\frac{x+۱}{x-۲}$, $g(x)=\sqrt{x+۴}$ را در نظر بگیرید.

الف) مقدار $(f+g)(۰)$ را به دست آورید.

ب) دامنه $\frac{f}{g}$ را تعیین کنید.

- برای دو تابع $g=\{(-۲,۱۱)\ ,\ (۴,-۲)\ ,\ (۲,۳)\ ,\ (۳,۲)\ ,\ (۱,۰)\}$, $f=\{(۱۱,۷)\ ,\ (-۲,۴)\ ,\ (۳,-۵)\ ,\ (۲,۵)\ ,\ (۱,-۱)\}$ توابع زیر را تعیین کنید.

۱) $f+g$ ۲) $\frac{f}{g}$

اعمال روی توابع

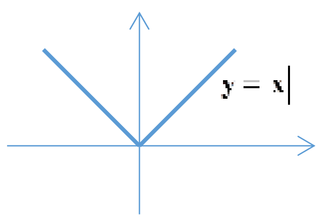
بررسی تابع $g(x)=f(x)+k$ (انتقال عرضی)

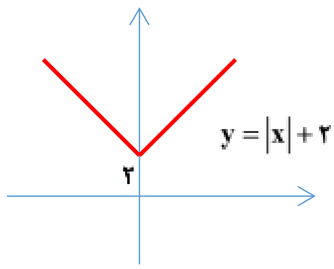
برای رسم نمودار $g(x)=f(x)+k$ نمودار تابع $f(x)$ را k واحد به بالا یا پایین در امتداد محور y انتقال می دهیم .

انتقال عرضی ، برد تابع را جابجا می کند یعنی y ها تغییر می کنند ولی روی دامنه یا همان x ها تاثیری ندارد.

۷- تابع $y=|x|+۲$ را بررسی کنید.

☑پاسخ





کلاً تابع $y=|x|$ را ۲ واحد در جهت مثبت محور y ها بالا بردیم . دامنه هیچ تغییری نمی کند ولی برد آن تغییر نموده است .

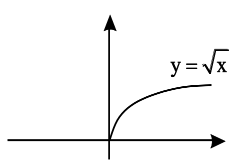
$$۰\le|x| \rightarrow R_{|x|}=[۰,+\infty) \quad\Rightarrow\quad ۲\le|x|+۲ \rightarrow R_{|x|+۲}=[۲,+\infty)$$

۸- به کمک نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\dfrac{۱-x}{۱-\sqrt{x}}$ را رسم کنید.

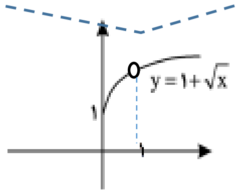
☑پاسخ: برای هر کاری به جز دامنه گرفتن، اول تا جای ممکن تابع را ساده کنید. (ثواب داره !)

$$f(x)=\frac{۱-x}{۱-\sqrt{x}}=\frac{(۱-\sqrt{x})(۱+\sqrt{x})}{۱-\sqrt{x}}=۱+\sqrt{x}$$

اینجا بخاطر دامنه تابع کسری ، تابع حفره داره چون $x=۱$ ریشه مخرج است و تابع در این نقطه تعریف نمیشه



حالا شکل $\sqrt{x}$ رو یه واحد می‌بریم بالا



۹- اگر $f(x)=\{(۱,۲),(-۱,۳),(۰,۰),(۲,۴)\}$ باشد $f(x)-۲$ را تعیین کنید .

☑پاسخ: از تمام y ها ۲ واحد کم می کنیم

$$f(x)-۲=\{(۱,۰),(-۱,۱),(۰,-۲),(۲,۲)\}$$

بررسی تابع $kf(x)$

برای رسم نمودار kf باید عرض هر نقطه‌ی f را در عدد k ضرب کنیم.

$$(kf)(x)=kf(x) \Rightarrow \begin{cases} D_{kf}=D_f \\ R_{kf}=\{ky \mid y\in R_f\} \end{cases}$$

- $k>1$: تابع f در راستای محور y ها با ضریب k کشیده می‌شود.
- $0<k<1$: تابع f در راستای محور y ها با ضریب k فشرده می‌شود.
- $-1<k<0$: تابع ابتدا نسبت به محور x ها آینه‌وار منعکس می‌شود، سپس با ضریب $|k|$ فشرده می‌شود.
- $k=-1$: تابع فقط نسبت به محور x ها آینه‌وار منعکس می‌شود.
- $k<-1$: تابع نسبت به محور x ها منعکس می‌شود، سپس با ضریب $|k|$ کشیده می‌شود.

اگر برد تابع $y=f(x)$ بازه‌ی $[m,n]$ باشد، آن‌گاه با فرض مثبت بودن k برد تابع $y=kf(x)$ بازه‌ی $[km,kn]$ می‌باشد و اگر k منفی باشد، برد تابع $y=kf(x)$ بازه‌ی $[kn,km]$ خواهد بود.

دامنه‌ی توابع $f(x)$, $kf(x)$, $f(x)+k$ یکسان‌اند.

۱۰- اگر $f=\{(2,-1),(0,2),(-1,-3)\}$ مقادیر $3f-1$, $\frac{f}{2}+1$ را تعیین کنید.

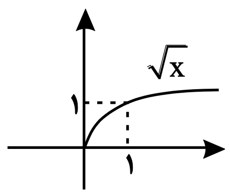
پاسخ

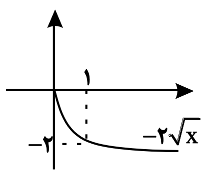
$$3f-1=\{(2,3(-1)-1),(0,3(2)-1),(-1,3(-3)-1)\}=\{(2,-4),(0,5),(-1,-10)\}$$

$$\frac{f}{2}+1=\left\{(2,\frac{-1}{2}+1),(0,\frac{2}{2}+1),(-1,\frac{-3}{2}+1)\right\}=\left\{(2,\frac{1}{2}),(0,2),(-1,\frac{-1}{2})\right\}$$

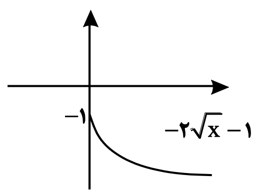
۱۱- ابتدا نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را رسم نموده، سپس با استفاده از آن نمودار تابع $g(x)=-2f(x)-1$ را رسم کنید.(خرداد ۹۲)

پاسخ:





فقط y ها را -2 برابر می کنیم



۱ واحد میره پایین

انتقال های طولی

نکته

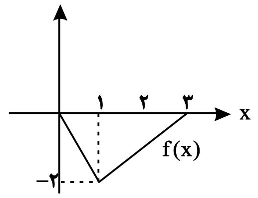
✸ بررسی تابع $y=f(x-a)$ $(a>0)$

برای رسم منحنی آن کافی است نمودار تابع f را a واحد در امتداد مثبت محور x ها انتقال دهیم .

✸ بررسی تابع $y=f(x+a)$ $(a>0)$

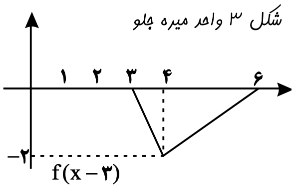
برای رسم منحنی آن کافی است نمودار تابع f را a واحد در امتداد منفی محور x ها انتقال دهیم .

۱۲- در زیر نمودار تابع $y=f(x)$ رسم شده است. با استفاده از انتقال ابتدا نمودار تابع $y=f(x-3)$ را رسم کرده و سپس نمودار تابع $y=-2f(x-3)$ را رسم کنید. (خرداد ۹۱)

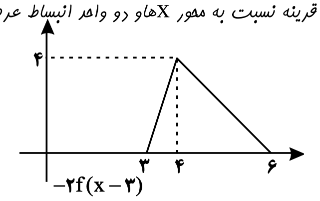


پاسخ:

شکل ۳ واحد میره جلو



شکل قرینه نسبت به محور xها دو واحد انبساط عرضی دارد.



۱۳- نمودار تابع با ضابطه $f(x)=\sqrt{x}$ را در امتداد محور x ها ۱۲ واحد در جهت مثبت و سپس در امتداد محور y ها ۲ واحد در جهت مثبت انتقال می دهیم فاصله نقطه برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f از مبداء مختصات کدام است ؟ (سراسری ۹۹ داخل کشور)

۱) $4\sqrt{15}$ ۲) $6\sqrt{7}$ ۳) $4\sqrt{17}$ ۴) $6\sqrt{10}$

پاسخ:

$$f(x)=\sqrt{x} \Rightarrow g(x)=\sqrt{x-12}+2 \Rightarrow g(x)=f(x) \Rightarrow \sqrt{x-12}+2=\sqrt{x} \Rightarrow x-12=x+4-4\sqrt{x}$$

$$\sqrt{x}=4 \Rightarrow x=16 \Rightarrow A\Big|_{4}^{16} \Rightarrow |OA|=\sqrt{256+16}=4\sqrt{17}$$

۱۴- نمودار تابع با ضابطه $f(x)=\sqrt{x-1}$ را در امتداد محور x ها ۷ واحد در جهت مثبت و سپس در امتداد محور y ها ۴ واحد در جهت مثبت انتقال می دهیم فاصله نقطه برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع $g(x)=\sqrt{x}$ از مبداء مختصات کدام است ؟

۱) $4\sqrt{10}$ ۲) $3\sqrt{10}$ ۳) $3\sqrt{17}$ ۴) قابل تعیین نیست

پاسخ: گزینه ۲

هفت واحد به راست ۴ واحد بالا

$$\sqrt{x-1-7}+4=\sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{x-8}=\sqrt{x}-4 \Rightarrow x-8=x-8\sqrt{x}+16 \Rightarrow 8\sqrt{x}=24 \Rightarrow \sqrt{x}=3 \Rightarrow x=9$$

$$M(9\,,\,3) \Rightarrow OM=\sqrt{9^2+3^2}=\sqrt{9(9+1)}=3\sqrt{10}$$

$x=9$ جواب معادله بالا نیست چون در معادله اصلی صدق نمی کند و این دو منحنی با یکدیگر نقطه تقاطعی ندارند .

فشردگی و کشیدگی طولی توابع

بررسی تابع $g(x)=f(kx)$: در این توابع دامنه تغییر می‌کند، اما برد هیچ‌گونه تغییری نمی‌کند.

$$D_f=[a,b] \Rightarrow a\le kx\le b \Rightarrow \begin{cases} \text{if } k>0 \Rightarrow \frac{a}{k}\le x\le \frac{b}{k} \\ \text{if } k<0 \Rightarrow \frac{a}{k}\ge x\ge \frac{b}{k}\end{cases} \Rightarrow D_g=\left\{\frac{x}{k}\,\middle|\, x\in D_f\right\}$$

$$\begin{cases} g(x)=f(kx) \\ |k|<1 \quad \text{کشیدگی} \\ |k|>1 \quad \text{فشردگی}\end{cases}$$

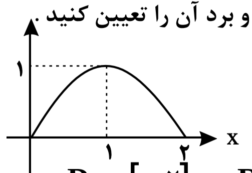
نکته

✹ برای رسم $f(ax+b)$ ابتدا انتقال عدد ثابت b را انجام می دهیم . سپس تغییرات مربوط به ضریب x را روی شکل اعمال می کنیم .

برای رسم نمودار $f(ax)$ اگر $(0<a<1)$ باشد نمودار تابع $f(x)$ را در راستای محور x ها با ضریب $\frac{1}{a}$ منبسط می کنیم . طول ها $\frac{1}{a}$ برابر می شوند .

اگر $(a>1)$ نمودار تابع $f(x)$ در راستای محور x ها با ضریب $\frac{1}{a}$ منقبض می شود . طول ها $\frac{1}{a}$ برابر می شوند .

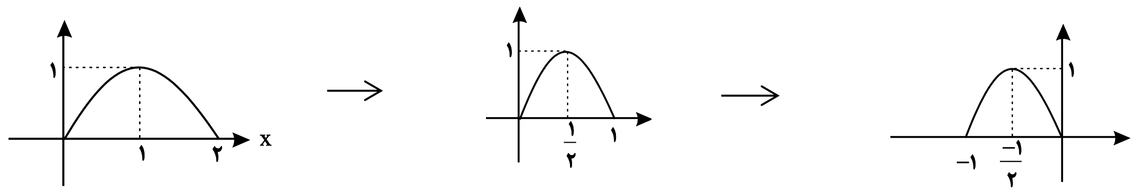
۱۵- نمودار تابع معین $y=f(x)$ در شکل روبه‌رو داده شده است. نمودار تابع $g(x)=f(-2x)$ را رسم کنید، سپس دامنه و برد آن را تعیین کنید.



☑ پاسخ:

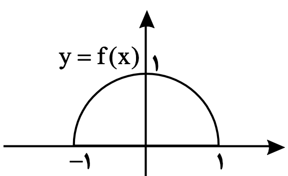
در تابع f ، x باید   حالا باید $-2x$ تو دامنه f باشه   طرفین نامساوی رو بر -2 تقسیم میکنیم

$$D_f=[0,2]\ ,\ R_f=[0,1] \Rightarrow f(x) \Rightarrow 0\le x\le 2 \Rightarrow f(-2x) \Rightarrow 0\le -2x\le 2 \Rightarrow -1\le x\le 0$$



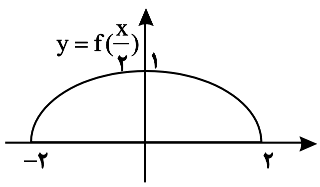
$D_g=[-1,0]$, $R_g=[0,1]$ فشردگی طولی به خاطر ضریب ۲ واحدی x داخل پرانتز   تقارن طولی به خاطر منفی داخل پرانتز

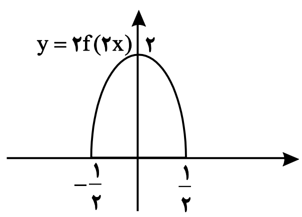
۱۶ - نمودار $f(x)$ شکل مقابل است. نمودار توابع $f\left(\frac{x}{2}\right)$, $g(x)=2f(2x)$ را رسم کنید.



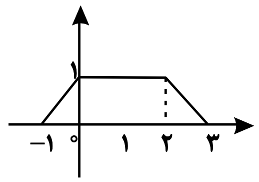
☑ پاسخ:

کشیدگی طولی به خاطر ضریب $\frac{1}{2}$ واحدی x فشردگی طولی به خاطر ضریب دو واحدی x و کشیدگی عرضی به خاطر ضریب دو واحدی f



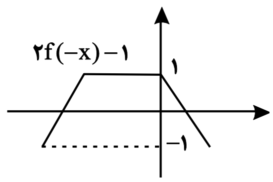


۱۷-اگر نمودار $y=f(x)$ شکل روبه‌رو باشد، نمودار تابع $g(x)=2f(-x)-1$ را رسم کنید و دامنه و برد $g(x)$ را به دست آورید.

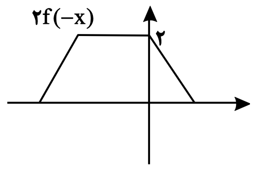


پاسخ:

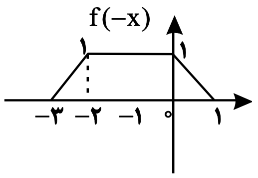
یک واحد ببر پایین



y ها رو دو برابر کن (کشیدگی عرضی)



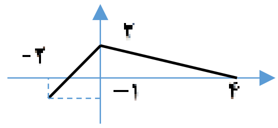
یعنی x های دامنه را قرینه کن.

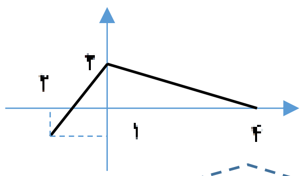


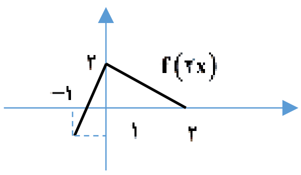
$D_f=[-1,3]$, $D_g=[-3,1]$, $0\le f(x)\le 1$ $0\le f(-x)\le 1 \Rightarrow 0\le 2f(-x)\le 2 \Rightarrow -1\le 2f(-x)-1\le 1$

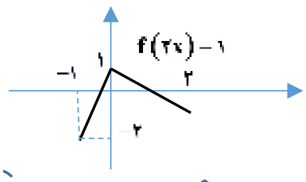
۱۸- نمودار تابع $f(x)$ شکل مقابل است . نمودار تابع $g(x)=f(2x)-1$ را با توجه به آن رسم کنید و دامنه وبرد آن را تعیین نمایید .

پاسخ:





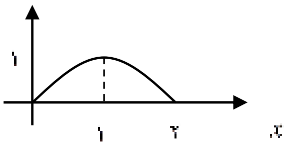


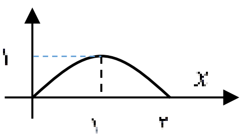


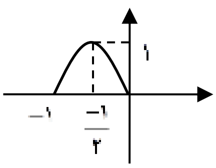
چون ضریب x ، ۲ است تمام x های روی شکل رو در $\frac{1}{2}$ ضرب می کنیم شکل منقبض میشه ولی بردش تغییر نمیکنه

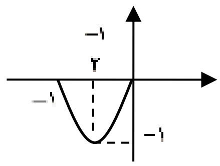
حالا کل شکل رو ۱ واحد میاریم پایین

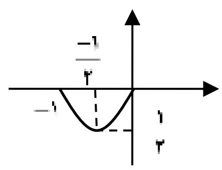
۱۹- نمودار تابع معین $y=f(x)$ در شکل رو به رو داده شده ا ست نمودار تابع $y=-\frac{1}{2}f(-2x)+\frac{1}{2}$ را رسم کنید و مراحل راتوضیح دهید .

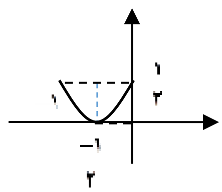












$y=f(x)$ $y=f(-2x)$ $y=-f(-2x)$ $y=\frac{-1}{2}f(-2x)$ $y=\frac{-1}{2}f(-2x)+\frac{1}{2}$

نکته

✸اگر نقطه A روی نمودار تابع $f(x)$ باشد نقطه نظیر آن روی تابع $g(x)=f(ax+b)$ برابراست با :

$$\text{if } A(x_\circ,y_\circ)\in f(x) \qquad A'\left|\begin{matrix}\dfrac{x_\circ-b}{a}\\ y_\circ\end{matrix}\right. \qquad \in g(x)=f(ax+b)$$

$$\text{if } A(x_\circ,y_\circ)\in f(x) \qquad A'\left|\begin{matrix}\dfrac{x_\circ-b}{a}\\ ky_\circ\pm k'\end{matrix}\right. \qquad \in g(x)=kf(ax+b)\pm k'$$

۲۰-اگر $g(x)=۲f\left(۱-\frac{x}{۲}\right)$ و نقطه $A(۲,۲)$ روی نمودار g باشد ، نقطه متناظر A روی نمودار f کدام است ؟

۱) $(-۲,۱)$ ۲) $(-۲,۴)$ ۳) $(\circ,۱)$ ۴) $(\circ,۴)$

☑پاسخ:

$$g(x)=۲f\left(۱-\frac{x}{۲}\right)=۲f\left(\frac{-x}{۲}+۱\right)\xrightarrow{A(۲,۲)\in g} g(۲)=۲f(-۱+۱)=۲ \Rightarrow f(\circ)=۱ \Rightarrow B(\circ,۱)\in f$$

۲۱-اگر دامنه تابع $g(x)=۱-f(۱-۳x)$ بازه ی $(-۲,۴]$ باشد ، دامنه تابع $y=f(x)$ کدام است ؟

۱) $(-۱۱,۷]$ ۲) $[-۱۱,۷)$ ۳) $[-۱,۱)$ ۴) $(-۱,۱]$

☑پاسخ:

$$y=۱-f(۱-۳x)=-f(-۳x+۱)+۱$$

$$-۲<x\le ۴ \Rightarrow -۱۲\le -۳x<۶ \Rightarrow -۱۱\le ۱-۳x<۷ \Rightarrow D_g=[-۱۱,۷)$$

۲۲-اگر دامنه تابع $y=f(۲x-۱)+۳$ به صورت $[-۲,۶]$ باشد ، آن گاه دامنه تابع $g(x)=۳f(۴x-۲)-۳$ کدام است ؟

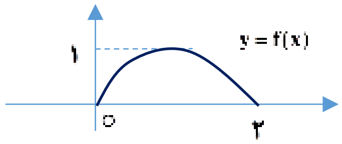
۱) $[-۱,۳]$ ۲) $\left[\frac{-۳}{۴},\frac{۱۳}{۴}\right]$ ۳) $\left[\frac{۳}{۸},\frac{۱۱}{۸}\right]$ ۴) $[-۳,۱]$

☑پاسخ:

$$[-۲,۶] \Rightarrow -۲\le x\le ۶ \Rightarrow -۴\le ۲x\le ۱۲ \Rightarrow -۵\le ۲x-۱\le ۱۱ \Rightarrow D_f=[-۵,۱۱]$$

$$-۵\le ۴x-۲\le ۱۱ \Rightarrow -۳\le ۴x\le ۱۳ \Rightarrow \frac{-۳}{۴}\le x\le \frac{۱۳}{۴} \Rightarrow D_g=\left[\frac{-۳}{۴},\frac{۱۳}{۴}\right]$$

۲۳- اگر نمودار تابع f به شکل زیر باشد دامنه تابع $g(x)=\frac{f(1-x)}{f(x)}$ را تعیین کنید .



☑پاسخ:

$$D_f=[0,2] \Rightarrow 0\le 1-x\le 2 \Rightarrow -1\le -x\le 1 \Rightarrow -1\le x\le 1$$

$$D_g=D_{f(1-x)}\cap D_f-\{x|\ f(x)=0\}=[-1,1]\cap[0,2]-\{0,2\}=(0,1]$$

۲۴- دامنه تابع با ضابطه ی $g(x)=f(x-5)\times f\left(\frac{x}{3}\right)-f(2x)$ اگر $D_f=[-4,6)$ باشد ، کدام ا ست ؟

۱) $(-12,18)$ ۲) $[1,11)$ ۳) $[1,3)$ ۴) $[-12,18)$

پاسخ : گزینه ۳

$$D_f=[-4,6) \Rightarrow -4\le x<6 \Rightarrow -4\le x-5<6 \Rightarrow 1\le x<11 \quad \boxed{1}$$

$$-4\le x<6 \Rightarrow -4\le \frac{x}{3}<6 \Rightarrow -12\le x<18 \quad \boxed{2} \quad , \quad -4\le 2x<6 \Rightarrow -2\le x<3 \quad \boxed{3}$$

$$\boxed{1}\cap\boxed{2}\cap\boxed{3}=[1,3)$$

۲۵- نمودار تابع با ضابطه $f(x)=x^2-2x\ ;\ (x>1)$ مفروض است قرینه نمودار آن نسبت به محور x ها را ، ۱۶ واحد در امتداد محور y ها در جهت مثبت انتقال می دهیم فاصله نقطه برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f از مبداء مختصات کدام است ؟ (سراسری ۹۹ خارج کشور)

۱) $4\sqrt{5}$ ۲) $6\sqrt{2}$ ۳) $5\sqrt{2}$ ۴) $2\sqrt{5}$

☑پاسخ:

$$f(x)=x^2-2x \Rightarrow g(x)=x^2+2x+16 \Rightarrow g=f \Rightarrow x^2+2x+16=x^2-2x \Rightarrow x=4$$

$$\Rightarrow A\Big|_{8}^{4} \Rightarrow |OA|=\sqrt{16+64}=4\sqrt{5}$$

نکته

برد توابع $f(x+k)$ ، $f(kx)$ ، $f(x)$ یکسان‌اند.

مراحل رسم تابع $g(x)=mf(ax+b)+n$

$$y=f(x) \quad \Rightarrow \quad g(x)=\underset{3}{m}\,\underset{2}{f}(\underset{1}{ax+b})+\underset{4}{n}$$

1. اول انتقال طولی با توجه به علامت b به اندازه $|b|$ واحد
2. دوم انبساط یا انقباض طولی ، تقسیم تمام طول های بر $|a|$ و اگر a منفی باشد نمودار را نسبت به محور y ها قرینه می کنیم .
3. سوم انبساط و انقباض عرضی تمام y ها را در $|m|$ ضرب می کنیم و اگر m منفی باشد نمودار را نسبت به محور x ها قرینه می کنیم .
4. چهارم انتقال عرضی به اندازه n واحد به سمت بالا یا پایین

✓ اعمال ۱ و ۲ هیچ تاثیری بر y ها و برد تابع نخواهد داشت .

✓ اعمال ۳ و ۴ هیچ تاثیری بر x ها و دامنه تابع نخواهد داشت .

می دانیم هر تابع به صورت $f(x)=ax^n+bx^{n-1}+....+px+q$ که در آن $a,b,.....,p,q$ اعداد حقیقی و n یک عدد صحیح نامنفی است و $a\neq 0$ یک تابع چند جمله ای از درجه n می نامند .

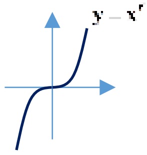
این توابع چند جمله ای خطی اند : $y=x^3-2x^2+6x-1$ ، $y=1-3x$ ، $y=5$

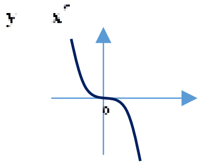
اما توابع $y=x|x|$, $y=\sqrt[3]{x}$, $y=x^{-3}+2x$, $y=\dfrac{x^4}{x}$ چند جمله ای خطی نیستند.

تابع درجه ۳

صورت کلی این توابع به صورت روبروست . $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

چند جمله ای خطی از مرتبه ۳ که در اون a,b,c,d ضرائب معلومند . و ساده ترین صورت آن هم به شکل : $f(x)=x^3$

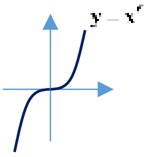


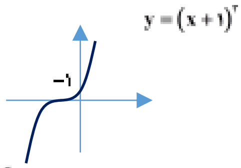


قرینه نسبت به محور x ها

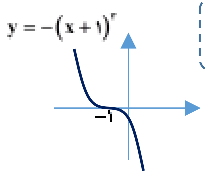
$$f(x)=x^3 \quad , A\neq 0 \quad \Rightarrow \quad g(x)=A(x-x_0)^3+C$$

نقطه $x=x_0$ طول مرکز تقارن تابع است در نتیجه $W(x_0,C)$ نقطه تقارن تابع است.

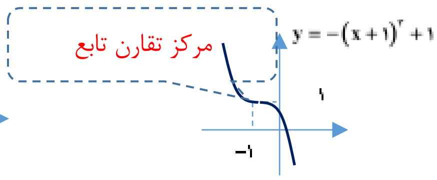




انتقال ۱ واحدی نمودار $y=x^3$ به سمت راست

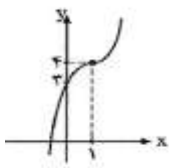


قرینه نسبت به محور x ها



انتقال ۱ واحدی نمودار در امتداد محور y ها

۲۶- نمودار تابع $f(x)=b(x-a)^3+c$ به صورت مقابل است مقادیر c, b,a را به دست آورید .

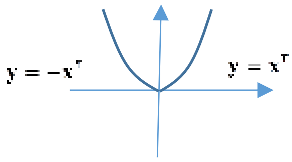


☑پاسخ:

با توجه به نمودار تابع $y=x^3$ باید عبارت درجه ۳ در $x=1$ صفر شود و مختصات نقاط معلوم تابع باید در آن صدق کند .

$$(x-a)^3_{|x=1}=(1-a)^3=0 \quad \Rightarrow \quad a=1 \quad \Rightarrow \begin{cases} f(1)=b(1-1)+c=4 \quad \Rightarrow c=4 \\ f(0)=b(0-1)+c=3 \quad \Rightarrow -b+4=3 \quad \Rightarrow b=1 \end{cases}$$

۲۷- تابع $y=x^{2}|x|$ را رسم کنید .

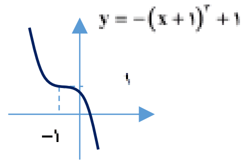


$$y=x^{2}|x|=\begin{cases}-x^{3} & x<0\\ x^{3} & x\geq 0\end{cases}$$

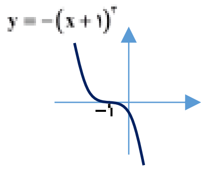
۲۸- نمودار توابع زیر را رسم کنید .

الف) $y=-(x+1)^{3}+1$ ب) $y=(2x-1)^{3}-1$ پ) $y=(-x+2)^{3}+1$ ت) $y=(-\frac{x}{2}+1)^{3}$

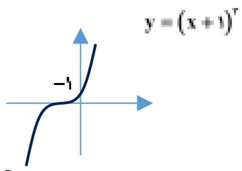
☑پاسخ:



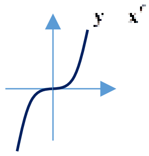
انتقال ۱ واحدی نمودار در امتداد محور y ها

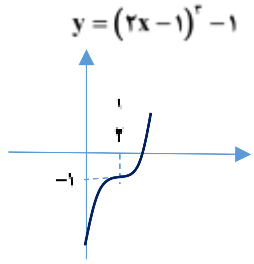


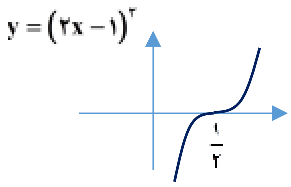
قرینه نسبت به محور x ها



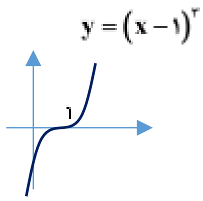
انتقال ۱ واحدی نمودار $y=x^{3}$ به سمت راست

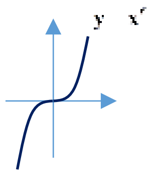






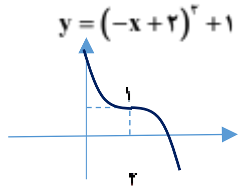
انقباض طولی ، طول ها را تقسیم بر ۲ می کنیم

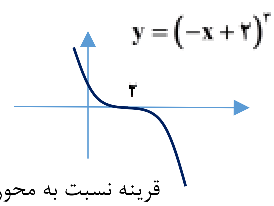




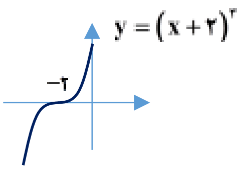
انتقال ۱ واحدی نمودار در امتداد محور y ها به پایین

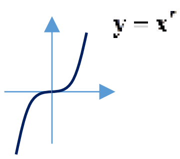
انتقال ۱ واحدی نمودار $y=x^{3}$ به سمت راست





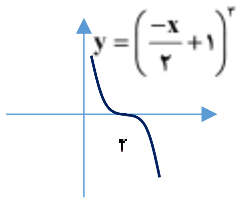
قرینه نسبت به محور y ها

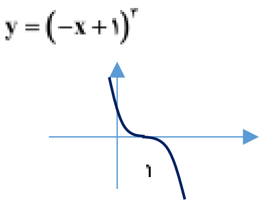




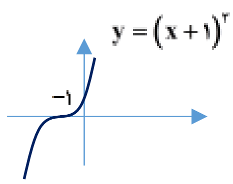
به بالاانتقال ۱ واحدی نمودار در امتداد محور y ها

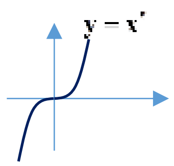
انتقال ۱ واحدی نمودار $y=x^{3}$ به سمت چپ





قرینه نسبت به محور y ها





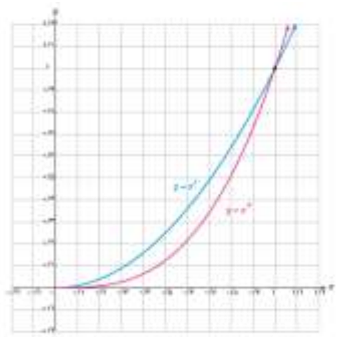
انبساط ۲ واحدی و ضرب طول ها در ۲

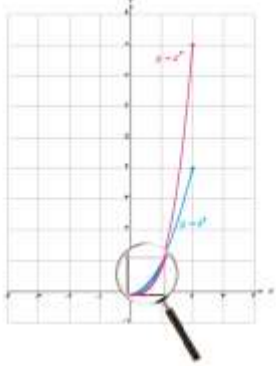
انتقال ۱ واحدی نمودار $y=x^{3}$ به سمت چپ

۲۹- نمودار تابع $f(x)=x^{3}$ در بازه $(-\infty,a)$ بالای نمودار تابع $g(x)=x^{2}$ قرار ندارد بیشترین مقدار a کدام است ؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) هر مقدار دلخواه ۴) ۱-

☑پاسخ:





تابع درجه ۳ در بازه $(-\infty,1]$ پایین تر از تابع درجه ۲ است .

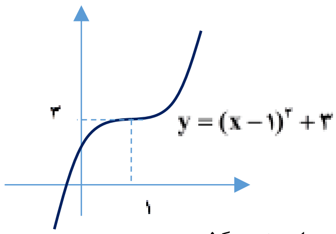
$x^{3}\le x^{2} \quad\Rightarrow\quad \forall x\in(-\infty,1]$ در نتیجه $a=1$ درست است .

اینو هم بخاطر بسپار $\forall x\in(0,1) \;\Rightarrow\; 0<x^{n}<x^{n-1}<.....<x^{3}<x^{2}<x<\sqrt{x}<\sqrt[3]{x}<....<\sqrt[n]{x}<1$

۳۰- نمودار تابع $g(x)=x^{3}-3(x^{2}-x)+2$ از کدام ناحیه دستگاه مختصات نمی گذرد ؟

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

☑ پاسخ:



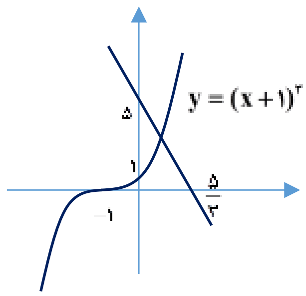
$$g(x)=x^{3}-3(x^{2}-x)+2=x^{3}-3x^{2}+3x-1+3=(x-1)^{3}+3$$

از ناحیه چهارم نمی گذرد .

۳۱- نمودار تابع $f(x)=(x+1)^{3}$ خط به معادله $y=-3x+5$ را در کدام ناحیه مختصات قطع می کند ؟

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

☑پاسخ: با توجه به شکل در ناحیه اول یکدیگر را قطع می کنند . اگر بخواهیم از راه حل معادله به دست آوریم کاری دشوار است .



$$(x+1)^{3}=-3x+5 \quad\Rightarrow\quad x^{3}+3x^{2}+3x+1=-3x+5$$

$$x^{3}+3x^{2}+6x-4=0$$

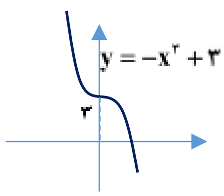
۳۲- اگر دامنه تابع $f(x)=-x^{3}+3$ بازه $[-2,1]$ و برد آن $[a,b]$ باشد ، حاصل $b-a$ کدام است ؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

☑پاسخ: تابع f یک تابع نزولی است پس داریم :

$$R_f=\left[f(1),f(-2)\right]=[2,11]=[a,b]$$

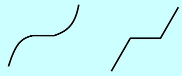
$$b-a=9$$



توابع صعودی و توابع نزولی

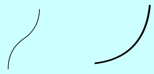
تابع صعودی: تابع $y=f\left(x\right)$ را صعودی می‌نامند هرگاه با بزرگ شدن مقدار متغیر x، مقدار تابع یعنی y نیز بزرگ شود و یا ثابت بماند.

$$\forall\ x_1,x_2\in D_f:\ x_1<x_2\ \Rightarrow\ f\left(x_1\right)\le f\left(x_2\right)$$



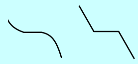
تابع $y=f\left(x\right)$ را صعودی اکید می‌نامند هرگاه با بزرگ شدن مقدار متغیر x، مقدار تابع یعنی y نیز بزرگ شود.

$$\forall x_1,x_2\in D_f:\ x_1<x_2\ \Rightarrow\ f\left(x_1\right)<f\left(x_2\right)$$



تابع نزولی: تابع $y=f\left(x\right)$ را نزولی می‌نامند، هرگاه با بزرگ شدن مقدار متغیر x، مقدار تابع یعنی y کاهش یابد و یا ثابت بماند.

$$\forall\ x_1,x_2\in D_f:\ x_1<x_2\Rightarrow f\left(x_1\right)\ge f\left(x_2\right)$$



تابع $y=f\left(x\right)$ را نزولی اکید می‌نامند، هرگاه با بزرگ شدن مقدار متغیر x ، مقدار تابع یعنی y نیز کاهش یابد.

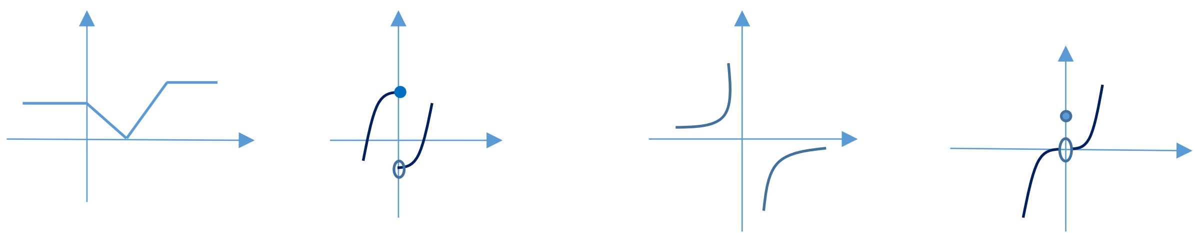
$$\forall\ x_1,x_2\in D_f:\ x_1<x_2\Rightarrow f\left(x_1\right)>f\left(x_2\right)$$

یادت باشه

روند یکنوایی روی شکل رو از چپ به راست بررسی کنید یعنی باید ببینید با بزرگ شدن x ها ، y ها بزرگ میشن یا کوچیک میشن یا ثابت می مانند

اگر تابع $y=f(x)$ در یک بازه I تابعی صعودی (نزولی) باشد ، آنگاه آن را یکنوا می نامیم .

اگر تابع $y=f(x)$ صعودی یا نزولی نباشد آنگاه f را تابعی غیر یکنوا می نامیم .



تمام این توابع در دامنه خود غیر یکنوا هستند

نکته

۱. در هر بازه که تابع ثابت باشه، هم می‌توان گفت صعودیه و هم نزولی چون در تعریف هر دو صدق می‌کنه.
۲. هر تابعی که در دامنه‌اش صعودی اکید (یا نزولی اکید) باشد، یک به یک و در نتیجه وارون پذیر است. ولی ممکن تابعی یک به یک باشه ولی یکنوا نباشه مثل تابع : $y=\frac{1}{x}$

روش حل مسئله

۱) اول از $x_1<x_2$ متعلق به دامنه تابع شروع کنید و سعی نمایید $f(x_1)$ و $f(x_2)$ بسازید.
۲) دقت کنید کدام نامساوی برقرار است $f(x_1)\le f(x_2)$ یا $f(x_1)\ge f(x_2)$ اولی یعنی صعودی بودن تابع و دومی یعنی نزولی بودن آن

۳۳- نشان دهید تابع $f:(0,+\infty)\to R$ با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ نزولی اکید است.

☑پاسخ:

$$0<x_1<x_2 \Rightarrow 0<(x_1)^2<(x_2)^2 \Rightarrow 1+(x_1)^2<1+(x_2)^2 \Rightarrow \frac{1}{1+(x_1)^2}>\frac{1}{1+(x_2)^2} \Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$$

۳۴- صعودی یا نزولی بودن تابع $f(x)=\sqrt{2x-4}$ را روی دامنه‌اش بررسی کنید.

☑پاسخ:

$$f(x)=\sqrt{2x-4} \Rightarrow 2x-4\ge 0 \Rightarrow x\ge 2 \Rightarrow D_f=[2,+\infty)$$

$$x_1<x_2 \Rightarrow 2x_1<2x_2 \Rightarrow 2x_1-4<2x_2-4 \Rightarrow \sqrt{2x_1-4}<\sqrt{2x_2-4} \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$$

تابع در دامنه‌اش صعودی است.

۳۵- با استفاده از ضابطه‌ی، صعودی یا نزولی بودن تابع : $f(x)=-2(x+1)^3-1$ را بررسی کنید.

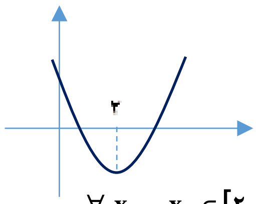
☑پاسخ:

$$x_1<x_2 \Rightarrow 2(x_1+1)^3<2(x_2+1)^3 \Rightarrow -2(x_1+1)^3-1>-2(x_2+1)^3-1 \Rightarrow f(x_1)>f(x_2) \Rightarrow$$

بنابراین تابع نزولی است.

۳۶- در تابع با ضابطه ی $f(x)=x^2-4x+1$ دامنه تابع را به گونه ای محدود کنید که تابع اکیداً صعودی باشد .

☑پاسخ:



راس این سهمی $x=\frac{-b}{2a}=\frac{4}{2}=2$ و چون $a=1>0$ دهنه سهمی رو به بالاست و از $x=2$ به بعد تابع صعودی است .

اینم اثباتش

$\forall\, x_1\ ,\ x_2\in[2,+\infty)$ $\qquad x_1<x_2\ \Rightarrow\ f(x_1)<f(x_2)$ باید نشون بدیم

چون x ها بزرگتر از ۲ اند داریم

$$x_1<x_2\ \Rightarrow\ (x_1-2)<(x_2-2)\ \Rightarrow\ (x_1-2)^2<(x_2-2)^2\ \Rightarrow\ (x_1-2)^2-3<(x_2-2)^2-3$$

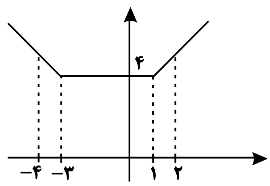
$$x_1^2-4x_1+1<x_2^2-4x_2+1\ \Rightarrow\ f(x_1)<f(x_2)$$

۱) نمودار تابع را رسم کنید.

۲) برای هر بازه به صورت مجزا صعودی یا نزولی بودن را بررسی کنید.

۳۷- با رسم نمودار تابع $y=|x-1|+|x+3|$ مشخص کنید تابع در چه بازه ای صعودی و در چه بازه ای نزولی است؟ (شهریور ۹۳)

☑پاسخ:



$$f(x)=\begin{cases}-2x-2 & x<-3\\ 4 & -3\le x\le 1\\ 2x+2 & x>1\end{cases}$$

$$y=|x+3|+|x-1|\Rightarrow\begin{cases}x=-3 & \text{ریشه قدر مطلق اول}\\ x=1 & \text{ریشه قدر مطلق دوم}\end{cases}$$

x	-۴	-۳	۱	۲
y	۶	۴	۴	۶

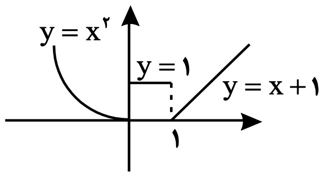
$\forall x\in(1,+\infty)$ صعودی $\qquad \forall x\in(-3,1]$ ثابت $\qquad \forall x\in(-\infty,-3)$ نزولی

۳۸- ابتدا نمودار تابع زیر را رسم کنید، سپس بازه‌هایی را که در آن تابع صعودی اکید، نزولی اکید یا ثابت است را مشخص کنید. (شهریور ۹۲)

$$f(x)=\begin{cases}x^2 & x<0\\ 1 & 0\le x\le 1\\ x-1 & x>1\end{cases}$$

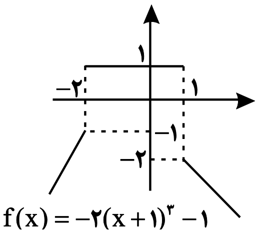
☑پاسخ:

تابع در بازه‌ی $(-\infty,0)$ اکیداً نزولی است در بازه‌ی $[0,1]$ ثابت و در بازه‌ی $(1,+\infty)$ اکیداً صعودی است.



۳۹- تابع $f(x)=\begin{cases} x+1 & x<-2 \\ 1 & -2<x<1 \\ -2x & x>1 \end{cases}$ را رسم کنید و بازه‌هایی که در آن تابع صعودی، نزولی یا ثابت است را مشخص کنید. (خرداد ۹۰)

☑پاسخ: تابع در بازه‌ی $(-\infty,-2)$ صعودی است و در بازه‌ی $(-2,1)$ ثابت و در بازه‌ی $(1,+\infty)$ نزولی است.

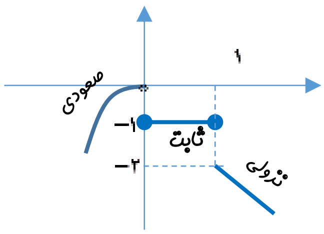


$f(x)=-2(x+1)^3-1$

۴۰- نمودار تابع زیر را رسم ، سپس بازه‌هایی را که در آن تابع صعودی واکید، نزولی اکید یا ثابت است را مشخص کنید.

$$f(x)=\begin{cases} -x^2 & x<0 \\ -1 & 0\le x\le 1 \\ -3x+1 & x>1 \end{cases}$$

☑پاسخ: در بازه ی $(-\infty,0)$ صعودیه . در بازه $[0,1]$ ثابته و در بازه ی $(1,+\infty)$ نزولیه .



۴۱- تابع f در $\mathbb{R}$ صعودی است و $f(3x-1)<f(2-x)$ حدود x را تعیین کنید .

☑پاسخ: گفته تابع f صعودیه پس باید :

$$f\nearrow \Rightarrow \text{if}\ \ x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)\le f(x_2) \Rightarrow f(3x-1)\le f(2-x) \Rightarrow 3x-1\le 2-x \Rightarrow x\le \frac{3}{4}$$

۴۲- حدود m را طوری تعیین کنید که تابع $f(x)=(m-6)x^2-x$ در بازه ی $[2,+\infty)$ صعودی باشد .

☑پاسخ: برای اینکه تابع تو بازه $[2,+\infty)$ صعودی باشه باید :

$$f(x)=(m-6)x^2-x \Rightarrow a=m-6>0\ \boxed{1}\ ,\ \frac{-b}{2a}=\frac{1}{2(m-6)}\le 2\ \boxed{2} \Rightarrow m>6\cap m\ge \frac{25}{4} \Rightarrow m\ge \frac{25}{4}$$

۴۳- تابع f اکیداً نزولی است اگر $f(3a-1)<f(a+1)$ باشد ، آنگاه حدود a کدام است ؟

۱) $a\ge 2$ ۲) $a\ge 1$ ۳) $a>1$ ۴) $a>2$

☑پاسخ:

$$f\downarrow \Rightarrow x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$$

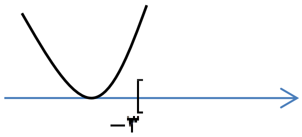
$$f(3a-1)<f(a+1) \Rightarrow \underset{\text{باید}}{a+1<3a-1} \Rightarrow a>1$$

۴۴- اگر تابع $f(x)=x^2-(m+2)x+7$ در بازه $[-3,+\infty)$ اکیداً صعودی باشد ، حدود m کدام است ؟

۱) $m\ge 8$ ۲) $m\le -8$ ۳) $m\le 8$ ۴) $m\ge -8$

پاسخ : گزینه ۲

$$f(x)=x^2-(m+2)x+3 \quad\Rightarrow\quad x=\underbrace{\frac{m+2}{2}}_{\text{طول راس سهمی}}\le -3 \quad\Rightarrow\quad m+2\le -6 \quad\Rightarrow\quad m\le -8$$



۴۵- تابع $f(x)=\begin{cases} mx-3 & x\le 2 \\ 2x^3+3 & x>2 \end{cases}$ اکیداً صعودی است محدوده m کدام است ؟

۱) $1<m<8$ ۲) $0<m\le 4$ ۳) $0<m\le 8$ ۴) $m>0$

پاسخ : گزینه ۳

$$f(x)=\begin{cases} mx-3 & x\le 2 \\ 2x^3+3 & x>2 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \underbrace{m>0}_{\text{خود نیم خط باید صعودی باشه}} \ \boxed{1},\quad f_1(2)\le f_2(2) \quad\Rightarrow\quad m(2)-3\le 2(2)^3-3 \quad\Rightarrow\quad m\le 8 \ \boxed{2}$$

$$\boxed{1}\cap\boxed{2} \quad\Rightarrow\quad 0<m\le 8$$

۴۶- تابع f اکیداً نزولی است اگر $f(4a-2)<f(3a+1)$ باشد ، آنگاه حدود a کدام است ؟

۱) $a>3$ ۲) $a\ge 1$ ۳) $a>1$ ۴) $a\ge 3$

پاسخ : گزینه ۱

چون گفته تابع f اکیداً نزولیه پس باید :

$$f(4a-2)<f(3a+1) \quad\Rightarrow\quad 3a+1<4a-2 \quad\Rightarrow\quad a>3$$

۴۷- اگر تابع پیوسته $y=f(x)$ با دامنه $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی باشد و داشته باشیم $f(3)=0$ آن گاه دامنه $g(x)=\sqrt[4]{(x-3)^2 f(2-x)}$ کدام است ؟

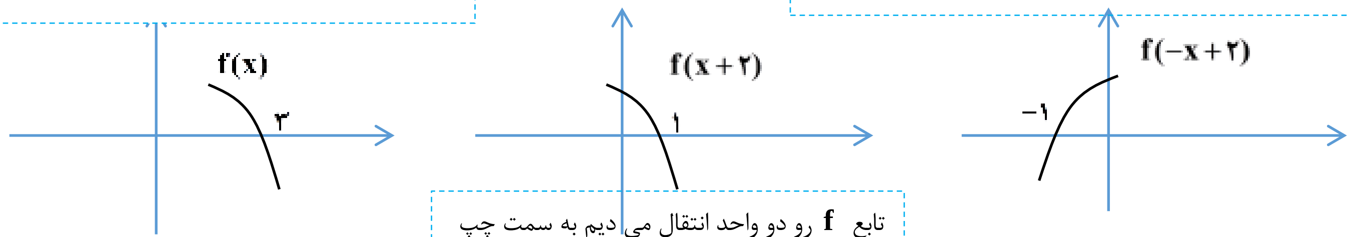
۱) $(-1,+\infty)$ ۲) $[3,+\infty)$ ۳) $(3,+\infty)$ ۴) $[-1,+\infty)$

پاسخ:☑

$$g(x)=\sqrt[4]{(x-3)^2 f(2-x)} \quad\overset{\text{باید}}{\Rightarrow}(x-3)^2 f(2-x)\ge 0 \quad\Rightarrow\quad \xrightarrow[\text{همیشه}]{(x-3)^2\ge 0} \quad f(-x+2)\ge 0 \quad \text{باید}$$

تابع $f(x)$ می تونه یه تابع به شکل زیر باشه

تابع $f(x+2)$ رو نسبت به محور y ها قرینه می کنیم



تابع f رو دو واحد انتقال می دیم به سمت چپ

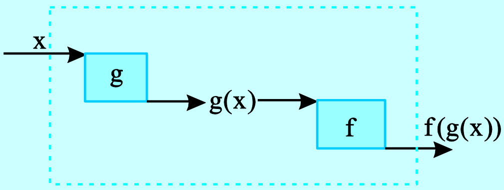
بنابراین از $x=-1$ به بعد داریم : $f(-x+2)\ge 0$ در نتیجه جواب میشه گزینه ۴

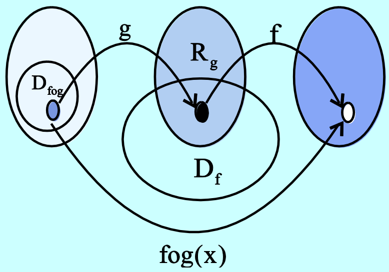
ترکیب توابع

اگر $A \xrightarrow{f} B$, $C \xrightarrow{g} D$ آن‌گاه $C \xrightarrow{fog} B$ به شکل زیر تعریف می‌شود.

$$\begin{cases} y = fog(x) = f(g(x)) \\ D_{fog} = \{x \in D_g : g(x) \in D_f\} \end{cases}$$

اگر برد $g(x)$ اشتراکی با دامنه‌ی تابع $f(x)$ نداشته باشد $f(g(x))$ قابل تشکیل نیست. حال اگر $R_g \cap D_f \neq \phi$ آن‌گاه با جای‌گزینی $g(x)$ به جای x در ضابطه‌ی $f(x)$، تابع fog تشکیل می‌شود.





۴۸- اگر $f=\{(-۱,۱),(۱,۲),(۲,۳),(۴,۵)\}$, $g=\{(-۱,۰),(۱,۲),(۲,۴),(۵,۳)\}$ دو تابع باشند: (شهریور ۹۵)

تابع **fog** را به صورت زوج مرتب بنویسید.

☑پاسخ

$$\left|\begin{array}{l} -۱ \xrightarrow{g} ۰ \xrightarrow{f} \times \\ ۱ \xrightarrow{g} ۲ \xrightarrow{f} ۳ \Rightarrow (۱,۳) \in fog \\ ۲ \xrightarrow{g} ۴ \xrightarrow{f} ۵ \Rightarrow (۲,۵) \in fog \\ ۵ \xrightarrow{g} ۳ \xrightarrow{f} \times \end{array}\right. \Rightarrow fog = \{(۱,۳),(۲,۵)\}$$

۴۹-اگر $g=\left\{(۲,\sqrt{۲}),(-۱,۲),\left(\frac{۱}{۴},۳\right),\left(۱,\frac{۳}{۲}\right)\right\}$, $f=\left\{(۰,۲),(۱,-۱),\left(۳,\frac{-۱}{۴}\right),(-۲,۳),(-۱,۰)\right\}$ باشند، تابع **gof** را بدست آورید.

☑پاسخ:

$$۰ \xrightarrow{f} ۲ \xrightarrow{g} \sqrt{۲} \Rightarrow (۰,\sqrt{۲}) \in gof$$

$$۱ \xrightarrow{f} -۱ \xrightarrow{g} ۲ \Rightarrow (۱,۲) \in gof$$

$$۳ \xrightarrow{f} \frac{-۱}{۴} \xrightarrow{g} \times$$

$$gof = \{(۰,\sqrt{۲}), (۱,۲)\}$$

$$-۲ \xrightarrow{f} ۳ \xrightarrow{g} \times$$

اینا به جایی نمیرن

$$-۱ \xrightarrow{f} ۰ \xrightarrow{g} \times$$

۵۰- اگر $f(x)=\sqrt{x-۳}$, $g=\{(۰,۴),(۳,۲),(۵,۶)\}$ دو تابع باشند. (خرداد ۹۱)

الف) تابع **fog** را به صورت زوج های مرتب بنویسید. ب) دامنه‌ی تابع $\frac{f}{g}$ را بنویسید.

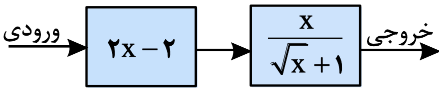
☑پاسخ:

$$\begin{cases} ۰ \xrightarrow{g} ۴ \xrightarrow{f=\sqrt{x-۳}} ۱ \Rightarrow (۰,۱) \\ ۳ \xrightarrow{g} ۲ \xrightarrow{f=\sqrt{x-۳}} \sqrt{۲-۳} \\ ۵ \xrightarrow{g} ۶ \xrightarrow{f=\sqrt{x-۳}} \sqrt{۳} \Rightarrow (۵,\sqrt{۳}) \end{cases} \Rightarrow fog = \{(۰,۱),(۵,\sqrt{۳})\}$$

تعریف نشده

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = ۰\} \Rightarrow D_{\frac{f}{g}} = \{۳,۵\}$$

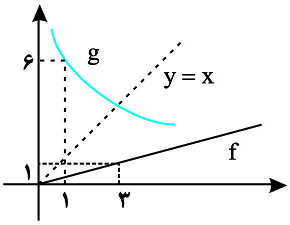
۵۱- اگر خروجی از ماشین شکل مقابل $\frac{۴}{۳}$ باشد، مقدار ورودی کدام است؟



☑پاسخ:

$$\frac{x}{\sqrt{x}+۱}=\frac{۴}{۳} \Rightarrow x=۴ \Rightarrow ۲x-۲=۴ \Rightarrow ۲x=۶ \Rightarrow x=۳$$

۵۲- شکل مقابل نمودارهای توابع f,g است و f تابعی خطی می‌باشد، $gof(۳)+fog(۱)$ کدام است؟



☑پاسخ:

$$f(g(۱))=f(۶)=\frac{۱}{۳}(۶)=۲$$

$$g(f(۳))=g(۱)=۶$$

$$gof(۳)+fog(۱)=۶+۲=۸$$

$$f(x)=\frac{۱}{۳}x \Rightarrow$$

تابع f خطی ، و با شیب $\frac{۱}{۳}$ و گذرا از مبدأ است.
بنابراین معادله آن به این صورت می‌باشد.

۵۳- اگر $g(x)=۳x^۲+x-۱$ ، $f(x)=۱-۲x$ باشند جواب معادله $fog=-۵$ را به دست آورید .

☑پاسخ:

$$f(x)=۱-۲x\ ,\ \ g(x)=۳x^۲+x-۱ \Rightarrow fog(x)=۱-۲(۳x^۲+x-۱)=-۶x^۲-۲x+۳=-۵$$

$$-۶x^۲-۲x+۳=-۵ \Rightarrow ۶x^۲+۲x-۸=۰ \Rightarrow x=۱\ ,\ \ x=\frac{-۸}{۶}=\frac{-۴}{۳}$$

نکته

تعداد زیادی از سوالات ترکیب دو تابع مربوط به تعیین دامنه ترکیب دو تابع بدون تشکیل ضابطه و از راه تعریف است. دقت کن :

$$D_{fog}=\{x\in D_g : g(x)\in D_f\}$$

$$D_{gof}=\{x\in D_f : f(x)\in D_g\}$$

$$D_{fof}=\{x\in D_f : f(x)\in D_f\}$$

روش حل مسئله

۱) ابتدا دامنه دو تابع را به دست آورید.

۲) فرمول دامنه ترکیب رو با توجه به یکی از سه مورد بالا بنویسید.

۳) با استفاده از فرمول و محدودیت های هر دامنه، دامنه ترکیب را حساب کنید.

۵۴- توابع $f(x)=\sqrt{x-1}$, $g(x)=\frac{1}{x}$ مفروض‌اند.

الف) بدون تشکیل ضابطه‌ی fog دامنه را تعیین کنید.

ب) در صورت وجود، ضابطه‌ی gof را بنویسید.

☑پاسخ:

الف) $D_{fog}=\left\{x\in D_g=R-\{0\}\,\middle|\,g(x)\in D_f=[1,+\infty)\right\}=\left\{x\middle|x\in R-\{0\}\,,\,\frac{1}{x}\geq 1\right\}=\left\{x\middle|x\in R-\{0\}\,,\,x\leq 1\right\}=(-\infty,1]-\{0\}$

ب) $gof=g\left(\sqrt{x-1}\right)=\frac{1}{\sqrt{x-1}}$

یعنی در تابع g بجای x ، ضابطه $f(x)$ رو قرار بده

۵۵- اگر $f(x)=\sqrt{x+|x|}$, $g(x)=\frac{1}{x^2-4x}$ باشد دامنه‌ی تابع gof کدام است؟

☑پاسخ:

$$f(x)=x+|x|=\begin{cases}\sqrt{2x} & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}\Rightarrow\quad x+|x|\geq 0\Rightarrow D_f=R\ ,\qquad D_g=R-\{0,4\}$$

می‌دانیم:

$$\forall x\in(-\infty,0]\ \Rightarrow\ \sqrt{x+|x|}=0\ ,\quad \sqrt{x+|x|}=4\ \Rightarrow\ \sqrt{2x}=4\ \Rightarrow\ 2x=16\ \Rightarrow\ x=8$$

در نتیجه:

$$D_{gof}=\left\{x\mid x\in R\quad \ni\quad \sqrt{x+|x|}\neq 0,4\right\}=(0,+\infty)-\{8\}$$

۵۶- اگر $f(x)=\frac{1}{x-1}$, $g(x)=\sqrt{x-3}$ دو تابع باشند. (خرداد ۹۲)

الف) مقدار $3(f-g)(4)$ را به دست آورید.

ب) دامنه تابع fog را بیابید.

☑پاسخ:

الف) $3(f-g)(4)=3\left(\frac{1}{4-1}-\sqrt{4-3}\right)=-2$

ب) $D_f=R-\{1\}\ ,\ D_g=[3,+\infty)\ \Rightarrow\ D_{fog}=\left\{x\mid x\in D_g\ ,\ g(x)\in D_f\right\}=\left\{x\mid x\in[3,+\infty)\ ,\ \sqrt{x-3}\neq 1\right\}=[3,+\infty)-\{4\}$

۵۷- اگر $g(x)=\frac{1}{x-3}$, $f(x)=3x-2$ باشد، آن‌گاه حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید. (خرداد ۹۰)

الف) $(3f+2g)(4)$

ب) D_{fog}

☑پاسخ:

الف) $3f=3(3x-2)=9x-6\ ,\ 2g=\frac{2}{x-3}\ \Rightarrow\ 3f+2g=(9x-6)+\left(\frac{2}{x-3}\right)\Rightarrow(3f+2g)(4)=32$

ب) $D_{fog}=\left\{x\in D_g=R-\{3\}\,\middle|\,\frac{1}{x-3}\in D_f=R\right\}=R-\{3\}$

۵۸- توابع $f(x)=\sqrt{\frac{۳x-۲}{۱-x}}$, $g(x)=۲x$ مفروض‌اند. دامنه تابع $fog(x)$ را محاسبه کنید. (خرداد ۹۳- خارج کشور)

☑پاسخ: $D_g=R$, $D_f=\left[\frac{۲}{۳},۱\right)$,

x		$\frac{۲}{۳}$		۱	
$\frac{۳x-۲}{۱-x}$	$-$	$\bullet$	$+$	$\vdots$	$-$

$$D_{fog}=\left\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\right\}=\left\{x\in R \mid ۲x\in\left[\frac{۲}{۳},۱\right)\right\}=\left\{x\in R\mid \frac{۲}{۳}\le ۲x<۱\right\}=\left\{x\in R \mid \frac{۱}{۳}\le x<\frac{۱}{۲}\right\}=\left[\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۲}\right)$$

۵۹- اگر $f=\{(۱,۲),(۳,۴),(۰,۱)\}$, $g=\{(۱,۵),(۰,۰),(-۲,۱),(۳,۳)\}$ آنگاه :

الف) تابع fog را تعیین کنید. ب) دامنه gof را به دست آورید.

☑پاسخ:

الف) $\begin{cases} ۱\xrightarrow{g}۵\xrightarrow{f}\times \\ ۰\xrightarrow{g}۰\xrightarrow{f}۱ \\ -۲\xrightarrow{g}۱\xrightarrow{f}۲ \\ ۳\xrightarrow{g}۳\xrightarrow{f}۴ \end{cases} \Rightarrow fog=\{(۰,۱),(-۲,۲),(۳,۴)\}$

ب) $\begin{cases} ۱\xrightarrow{f}۲\xrightarrow{g}\times \\ ۳\xrightarrow{f}۴\xrightarrow{g}\times \\ ۰\xrightarrow{f}۱\xrightarrow{g}۵ \end{cases} \Rightarrow D_{gof}=\{۰\}$

۶۰- توابع $f(x)=۲\sqrt{x-۵}$, $g(x)=\frac{x-۷}{x-۲}$ مفروضند. بدون تشکیل ضابطه دامنه تعریف fog را به دست آورید.

☑پاسخ:

$f=۲\sqrt{x-۵} \Rightarrow x-۵\ge ۰ \Rightarrow D_f=[۵,+\infty)$, $D_g=R-\{۲\}$

x	$\frac{۳}{۴}$	۲	
$\frac{-۴x+۳}{x-۲}$	$-$ ۰	$+$ ت ن	$-$

$$D_{fog}=\left\{x \,\middle|\, x\in D_g=R-\{۲\} \text{ و } \frac{x-۷}{x-۲}\ge ۵ \Rightarrow \frac{-۴x+۳}{x-۲}\ge ۰\right\}=\left[\frac{۳}{۴},۲\right)$$

۶۱- تابع $f(x)=\sqrt{۴-۲x}$ و $g(x)=\log^{x^۲-۲۱x}$ مفروضند . دامنه تابع fog کدام است ؟

۱) $[-۴,۰)\cup(۲۱,۲۵]$ ۲) $(۲۱,۲۵]$ ۳) $[-۴,۰)$ ۴) $R-[-۴,۰)\cup(۲۱,۲۵]$

پاسخ : گزینه ۱

$$f(x)=\sqrt{۴-۲x} \Rightarrow ۴-۲x\ge ۰ \Rightarrow x\le ۲ \Rightarrow D_f=(-\infty,۲]$$

$$g(x)=\log^{x^۲-۲۱x} \Rightarrow x^۲-۲۱x=x(x-۲۱)>۰ \Rightarrow (-\infty,۰)\cup(۲۱,+\infty) \quad \boxed{۱}$$

$$D_{fog}=\left\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\right\}=\left\{x\in(-\infty,۰)\cup(۲۱,+\infty) \mid \log^{x^۲-۲۱x}\le ۲\right\}$$

$$\log^{x^۲-۲۱x}\le ۲ \Rightarrow x^۲-۲۱x\le ۱۰^۲ \Rightarrow x^۲-۲۱x-۱۰۰=(x+۴)(x-۲۵)\le ۰ \Rightarrow -۴\le x\le ۲۵ \quad \boxed{۲}$$

$$\boxed{۱}\cap\boxed{۲}=[-۴,۰)\cup(۲۱,۲۵]$$

روش حل مسئله

۱) اگر $f(x),\ f(g(x))$ داده شود و $g(x)$ را بخواهند کافی است در ضابطه‌ی f به جای x ها g قرار می‌دهیم و با $f(g(x))$ داده شده مساوی قرار می‌دهیم و g را به دست می‌آوریم.

۲) اگر $f(g(x))$ و $g(x)$ را بدهند و $f(x)$ را از ما بخواهند ابتدا با تغییر متغیر $g(x)=t$ و یافتن x برحسب t و انجام تغییرات و جایگذاری x برمبنای t، $f(t)$ را محاسبه نموده و عملا $f(x)$ حاصل می‌شود.

۶۲- اگر $f(x)=x^2-x-12$, $f(g(x))=x^2-7x$ تابع $g(x)$ را به دست آورید ؟

☑پاسخ:

$$1)\ f(g(x))=g^2-g-12=x^2-7x \Rightarrow g^2-g=x^2-7x+12 \longrightarrow g^2-g+\frac{1}{4}=x^2-7x+\frac{49}{4}$$

$$(g-\frac{1}{2})^2=(x-\frac{7}{2})^2 \Rightarrow \begin{cases} g=-x+4 \\ g=x-3 \end{cases}$$

$$2)\ f(g(x))=g^2-g-12=x^2-7x \Rightarrow g^2-g-(x^2-7x+12)=0$$

$$(g+(x-4))(g-(x-3))=0 \Rightarrow \begin{cases} g=-x+4 \\ g=x-3 \end{cases}$$

۶۳- اگر $g(x)=2x+1$, $fog(x)=8x^2+6x+5$ باشند . تابع $f(x)$ برابر کدام است ؟ (خارج کشور ۹۵)

۱) $2x^2+3x+1$ ۲) $2x^2+3x+1$ ۳) $2x^2-x+4$ ۴) $2x^2+x+3$

☑پاسخ:

$$X=2x+1 \Rightarrow x=\frac{X-1}{2} \Rightarrow f(g(x))=f(X)=8\left(\frac{X-1}{2}\right)^2+6\left(\frac{X-1}{2}\right)+5=2X^2-X+4$$

۶۴- اگر $f(x)=x+a$ و $g(x)=ax^2+bx+c$ باشد، a , b , c را طوری تعیین کنید که داشته باشیم: $(fog)(x)=x^2-3x+4$

☑ پاسخ:

$$f(g(x))=ax^2+bx+c+a=x^2-3x+4 \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-3 \\ c+a=4 \Rightarrow c=3 \end{cases}$$

یعنی در تابع f هر جا x داریم به جاش ضابطه ی g رو میگذاریم

روش حل مسئله

برای حل معادلات به صورت $f(g(x)) = m$ بهترین روش این است که ابتدا معادله $f(x) = m$ را حل کنیم سپس $g(x)$ را مساوی ریشه های اول قرار دهیم .

برای محاسبه برد $f(g(x))$ ابتدا برد تابع داخلی را محاسبه کرده و مجموعه حاصل می شود دامنه تابع $f(x)$ البته ممکن است همه آن در دامنه f نباشد در نهایت با توجه به آن برد تابع f را برای مقادیر ممکن بدست می آوریم

۶۵- اگر $f(x) = x+\sqrt{x}$ ، $g=\{(۱,۲),(۵,۴),(۶,۵),(۲,۳)\}$ ، $g(f(a)) = ۵$ باشد عدد a کدام است ؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

☑پاسخ:

$$g(f(a)) = ۵ \xrightarrow{g(۶)=۵} \Rightarrow f(a) = ۶ = a+\sqrt{a} \Rightarrow a = ۴$$

۶۶- دو تابع $f(x) = [x]+[-x]$ ، $g(x) = x^۲+x-۲$ مفروض اند . اگر $g(f(x)) = -۲$ آن گاه مجموعه مقادیر x کدام است ؟

۱) $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ ۲) $\mathbb{Z}$ ۳) $\mathbb{R}$ ۴) $\varnothing$

☑پاسخ:

$$f(x) = [x]+[-x] = \begin{cases} ۰ & x\in\mathbb{Z} \\ -۱ & x\notin\mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow g(f(x)) \overset{?}{=} -۲ \quad \begin{cases} x\in\mathbb{Z} & f(x) = ۰ \Rightarrow g(۰) = -۲ \\ x\notin\mathbb{Z} & f(x) = -۱ \Rightarrow g(-۱) = -۲ \end{cases}$$

بنابراین برای هر $x\in\mathbb{R}$ این معادله برقرار است و گزینه ۳ درست است .

۶۷- اگر $f(x) = \sqrt{۱-x^۲}$ ، $g(x) = x^۲+۱$ آن گاه معادله $gof(x) = x^۲+۳x$ چند جواب دارد ؟

۱) صفر ۲) یک ۳) دو ۴) سه

☑پاسخ:

$$gof(x) = g(\sqrt{۱-x^۲}) = (\sqrt{۱-x^۲})^۲+۱ \overset{?}{=} x^۲+۳x \Rightarrow ۲x^۲+۳x-۲ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{۱}{۲} \\ x = -۲ \end{cases}$$

$x = -۲$ قابل قبول نیست چون در دامنه معادله صدق نمی کند و زیر رادیکال را منفی می کند .

۶۸- اگر $g(x)=|x+3|-3$ باشد. ضابطه تابع $gog(x)$ کدام است؟

۱) x　　۲) $-x$　　۳) $g(x)$　　۴) $3-g(x)$

پاسخ : گزینه ۳

$$g(x)=|x+3|-3 \quad \Rightarrow \quad g(g(x))=\big||x+3|-3+3\big|-3=|x+3|-3=g(x)$$

۶۹- اگر $f(2-|x|)=\sqrt{x^2-9}$ دامنه تابع f کدام است ؟

۱) $(-1,5)$　　۲) $(-\infty,-1]\cup[5,+\infty)$　　۳) $[5,+\infty)$　　۴) $(-\infty,-1]$

پاسخ : گزینه ۴

$$f(2-|x|)=\sqrt{x^2-9} \quad \Rightarrow \quad 2-|x|=X \quad \Rightarrow \quad 2-X=|x| \quad \Rightarrow \quad f(X)=\sqrt{(2-X)^2-9}=\sqrt{X^2-4X-5}$$

$$X^2-4X-5=(X+1)(X-5)\geq 0 \quad \Rightarrow \quad X\leq -1 \ \vee \ X\geq 5 \ \boxed{1} \quad , \quad 2-X=|x|\geq 0 \quad \Rightarrow \quad X\leq 2 \ \boxed{2}$$

$$\boxed{1}\cap\boxed{2} \quad \Rightarrow \quad D_f=(-\infty\ ,\ -1]$$

۷۰- اگر $f(-x)+f(3)=6x+2$ باشد ، $f(2x)$ کدام است ؟

۱) $12x-10$　　۲) $-12x+10$　　۳) $-12x-10$　　۴) $12x+10$

پاسخ : گزینه ۲

$$f(-x)+f(3)=6x+2 \xrightarrow{x=-3} f(3)+f(3)=-18+2 \Rightarrow f(3)=-8 \Rightarrow f(-x)=6x+2+8=6x+10$$

$$f(-x)=6x+10 \xrightarrow{x\to -2x} f(2x)=-12x+10$$

تعریف تابع یک به یک

تابع $f(x)$ یک‌به‌یک است، هرگاه برای هر دو عضو متمایز از دامنه‌ی x_1, x_2 مقادیر تابع به ازای این نقاط یعنی $f(x_1), f(x_2)$ نیز متمایز باشند.

$$\forall x_1, x_2 \in D_f: \ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$
$$\forall x_1, x_2 \in D_f: \ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

توابع چند ضابطه‌ای اگر دو شرط زیر را داشته باشند، یک به یک‌اند.

۱) هر ضابطه در دامنه‌ی خود یک به‌یک باشد.

۲) اشتراک بردها تهی باشد.

نکته

۱) نمودار تابع یک به یک: اگر خطی افقی نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند، آن‌گاه تابع یک به یک است.

۲) تمام چند جمله‌ای‌های درجه‌ی زوج یک به یک نیستند.

۳) اگر یک تابع اکیداً نزولی یا اکیداً صعودی باشد یک به یک است. (عکس این مطلب همواره درست نیست)

۷۱- ثابت کنید تابع $f(x) = \frac{x+1}{x}$ یک به یک است.

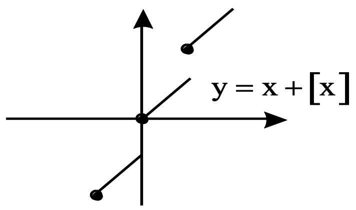
☑ پاسخ: تابع یک به یک است.

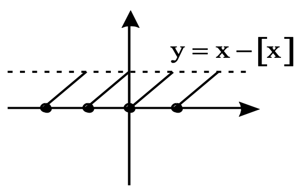
$$f(x_1) = f(x_2) \quad \Rightarrow \quad \frac{x_1+1}{x_1} = \frac{x_2+1}{x_2} \Rightarrow x_1x_2 + x_2 = x_1x_2 + x_1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2$$

۷۲- دو تابع $f(x) = x + [x]$ ، $g(x) = x - [x]$ از نظر یک به یک بودن چگونه‌اند؟

۱) هر دو یک به یک‌اند.
۲) هر دو یک به یک نیستند.
۳) f یک به یک و g یک به یک نیست.
۴) g یک به یک و f یک به یک نیست.

☑ پاسخ: گزینه‌ی ۳ درست است؛ هیچ خط افقی نمودار تابع f را بیش از یک نقطه قطع نمی‌کند ولی نمودار g را هر خط افقی $0 \le y = k < 1$ در بی‌شمار نقطه قطع می‌کند.





۷۳- ثابت کنید تابع $f(x) = x^2 - 6x + 5$ برای $x > 3$ یک به یک است.

☑ پاسخ:

$$f(x_1) = f(x_2) \ \Rightarrow \ x_1 = x_2$$

۴ واحد به طرفین اضافه کردیم تا مربع کامل شوند.

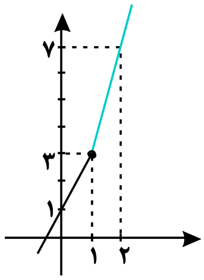
$$x_1^2 - 6x_1 + 5 = x_2^2 - 6x_2 + 5 \ \Rightarrow \ x_1^2 - 6x_1 + 9 = x_2^2 - 6x_2 + 9 \Rightarrow (x_1 - 3)^2 = (x_2 - 3)^2$$

مطابق فرض $x \ge 3$ است. در نتیجه داخل قدرمطلق‌ها مثبت است پس خودشان بیرون میان

$$\Rightarrow |x_1 - 3| = |x_2 - 3| \quad \Rightarrow \quad \Rightarrow \ x_1 - 3 = x_2 - 3 \Rightarrow x_1 = x_2$$

۷۴- با رسم نمودار تابع $y=3x+|x-1|$ مشخص کنید تابع یک به یک است یا خیر؟

پاسخ:



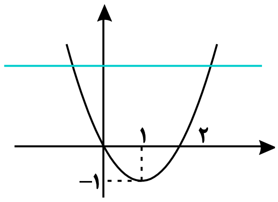
$$f(x)=\begin{cases}4x-1 & x\geq 1\\ 2x+1 & x<1\end{cases}$$

با توجه به شکل تابع یک به یک است، چون هیچ خط افقی آن را در دو نقطه قطع نمی‌کند.

۷۵- با رسم تابع $y=x^2-2x$ یک به یک بودن آن را تعیین کنید.

پاسخ:

با توجه به اینکه خطوط افقی $y=k>-1$ منحنی تابع را در بیش از یک نقطه قطع می‌کند تابع یک به یک نیست.

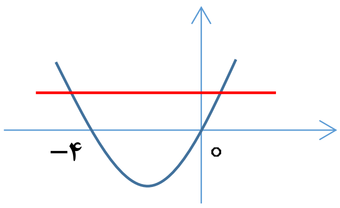


۷۶- آیا تابع $f(x)=x^2+4x$ یک به یک است؟ برای پاسخ خود دلیل بیاورید.

(خرداد ۹۳)

پاسخ:

یک به یک نیست چون : $\begin{cases}x=0\\ x=-4\end{cases} \Leftarrow x(x+4)=0 \Leftarrow x^2+4x=0$ یعنی ۲ نقطه با عرض یکسان صفر داریم و اگر نمودار آن را هم رسم کنیم و از محک خط افقی استفاده کنیم می بینیم یک به یک نیست .



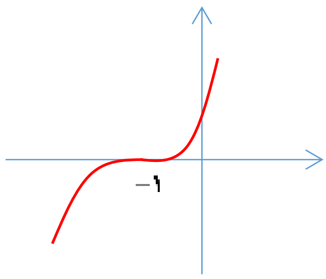
۷۷- ثابت کنید تابع : $y=x^3+3x^2+3x+1$ یک به یک است.

پاسخ:

$$y=x^3+3x^2+3x+1=(x+1)^3 \Rightarrow f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow (x_1+1)^3=(x_2+1)^3 \Rightarrow \sqrt[3]{(x_1+1)^3}=\sqrt[3]{(x_2+1)^3}$$

$$x_1+1=x_2+1 \Rightarrow x_1=x_2$$

اینم شکلش



۷۸- اگر تابع $f(x)=(m-۱)|x|+۵x$ یک به یک باشد حدود m کدام است ؟

۱) $(-\infty,-۴)$ ۲) $(-\infty,-۴)\cup(۶,+\infty)$ ۳) $(۰,۶)$ ۴) $(-۴,۶)$

پاسخ : گزینه ۴

اول تابع را به فرم دو ضابطه ای می نویسیم حالا باید هر دو نیم خط شیب هاشون هم علامت باشد .

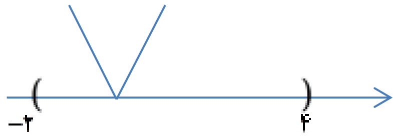
$$f(x)=(m-۱)|x|+۵x=\begin{cases}(m+۴)x & x\geq ۰\\(۶-m)x & x\leq ۰\end{cases}\Rightarrow (m+۴)(۶-m)>۰ \Rightarrow -۴<m<۶$$

۷۹- تابع $f(x)=|۳x+۴k|$ در بازه $(-۲,۴)$ یک به یک است حدود k کدام است ؟

۱) $\left[-۳,\frac{۳}{۲}\right]$ ۲) $\left(-۳,\frac{۳}{۲}\right)$ ۳) $\mathbb{R}-\left[-۳,\frac{۳}{۲}\right]$ ۴) $\mathbb{R}-\left(-۳,\frac{۳}{۲}\right)$

پاسخ : گزینه ۴

باید نوک قدر مطلق در این بازه نباشد چون در آن صورت یک به یک نیست پس :



$$f(x)=|۳x+۴k| \Rightarrow ۳x+۴k=۰ \Rightarrow x=\frac{-۴k}{۳} \Rightarrow \begin{cases}\frac{-۴k}{۳}\leq -۲ & \Rightarrow k\geq \frac{۳}{۲}\\ \frac{-۴k}{۳}\geq ۴ & \Rightarrow k\leq -۳\end{cases}$$

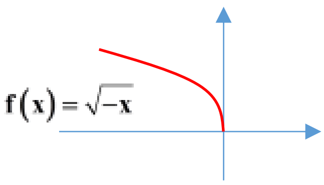
طول نوک قدر مطلق

۸۰- کدام تابع زیر اکیداً نزولی است ؟

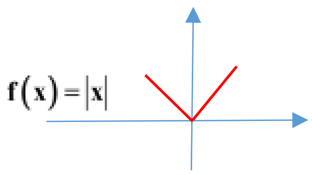
۱) $f(x)=|x|$ ۲) $f(x)=x|x|$ ۳) $f(x)=x+|x|$ ۴) $f(x)=\sqrt{-x}$

☑پاسخ:

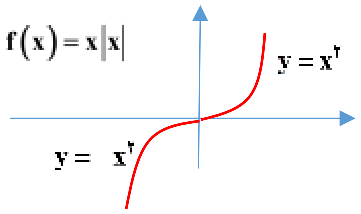
گزینه چهار تابعی نزولی است



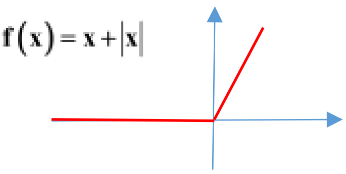
سایر گزینه ها



غیر یکنوا ست



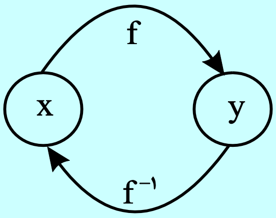
اکیداً صعودیه



صعودیه ولی اکید نیست

تابع وارون

اگر f تابعی یک به یک باشد، معکوس‌پذیر و معکوس تابع f به صورت زیر است.



$$f^{-1}=\{(y,x)|(x,y)\in f\}$$

$$D_{f^{-1}}=R_f \qquad D_f=R_{f^{-1}}$$

$$\forall x\in D_{f^{-1}} \quad f\left(f^{-1}(x)\right)=x \qquad \forall x\in D_f \quad f^{-1}\left(f(x)\right)=x$$

ترکیب هر تابع با تابع معکوس خود حتماً تابع همانی است. و اگر $f(a)=b$ آن‌گاه $f^{-1}(b)=a$

نکته

۱) نمودار توابع f^{-1},f نسبت به خط $y=x$ متقارن‌اند.

۲) نمودار f^{-1},f در صورت تقاطع عموماً یکدیگر را روی خط $y=x$ قطع می‌کنند. (نه همیشه)

۳) ممکن است نمودار f^{-1},f بر هم منطبق باشند، مانند: $y=\frac{۱}{x}$ و یا یکدیگر را قطع نکنند، مانند:

$$f^{-1}(x)=\log_{۲}^{x} \quad , \quad f(x)=۲^x$$

روش حل

۱) ابتدا ثابت کنید تابع یک به یک است. (قسمت خسته‌ی کار) این طوری:

$$\forall x_۱,x_۲\in D_f:\ f(x_۱)=f(x_۲)\ \Rightarrow\ x_۱=x_۲$$

کمتر سوال میاد ، بیشتر می خواد که ضابطه تابع معکوس رو مستقیم به دست بیارید

۲) تابع را بر حسب x بنویسید یعنی از ضابطه‌ی داده شده x رو بر حسب y تنها کنید. (قسمت سخت کار)

۳) درنهایت تابع حاصل را به صورت $y=f^{-1}(x)$ بنویسید.

۸۱- معکوس توابع زیر کدام است؟

۱) $y=ax+b$　　　۲) $f(x)=x^۳+۳x^۲+۳x$

پاسخ:

$$۱)\quad y=ax+b \Rightarrow ax=y-b \Rightarrow x=\frac{y-b}{a} \Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{x-b}{a}$$

$$۲)\quad f(x)=x^۳+۳x^۲+۳x \Rightarrow y=x^۳+۳x^۲+۳x+۱-۱=(x+۱)^۳-۱ \Rightarrow y+۱=(x+۱)^۳ \Rightarrow \sqrt[۳]{y+۱}=x+۱$$

$$x=\sqrt[۳]{y+۱}-۱ \Rightarrow f^{-۱}(x)=\sqrt[۳]{x+۱}-۱$$

مکعب کامل می‌کنیم

۸۲- در توابع زیر مقادیر خواسته شده را به دست آورید.

پاسخ:

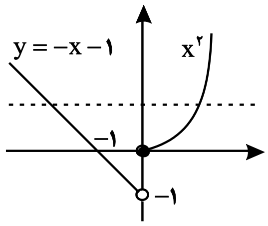
$$f(x)=\frac{۳x+۱}{x-۱} \Rightarrow f^{-۱}(۷)=? \Rightarrow \frac{۳x+۱}{x-۱}=۷ \Rightarrow ۷x-۷=۳x+۱ \Rightarrow ۴x=۸ \Rightarrow x=۲ \Rightarrow f^{-۱}(۷)=۲$$

$$f(x)=x^۲-۲x\ ,\ x\le ۲ \Rightarrow f^{-۱}(۵)=? \Rightarrow x^۲-۲x=۵ \Rightarrow x^۲-۲x-۵=۰ \Rightarrow x=\frac{۲\pm\sqrt{۲۴}}{۲}=\begin{cases}۱+\sqrt{۶} & \text{ق}\\ ۱-\sqrt{۶} & \text{ق}\end{cases}$$

۸۳- به کمک رسم نمودار ثابت کنید تابع زیر وارون پذیر نیست. (نهایی)

$$f(x)=\begin{cases} x^۲ & x\ge ۰ \\ -x-۱ & x<۰ \end{cases}$$

☑پاسخ: مطابق شکل خطوط افقی $y=k\ge ۰$ منحنی تابع را در بیش از یک نقطه قطع می‌کند. بنابراین تابع یک به یک نیست پس معکوس پذیر هم نخواهد شد.



۸۴- تحقیق کنید آیا دو تابع $f(x)=\frac{۱}{x}+۳$, $g(x)=\frac{۱}{x-۳}$ وارون یکدیگرند؟ (نهایی)

☑پاسخ: اولاً تابع $f(x)$ یک به یک است چون

$$f(x_۱)=f(x_۲)\Rightarrow x_۱=x_۲ \quad \to \quad \frac{۱}{x_۱}+۳=\frac{۱}{x_۲}+۳\Rightarrow \frac{۱}{x_۱}=\frac{۱}{x_۲}\quad\Rightarrow x_۱=x_۲$$

حال معکوس آن را به دست می‌آوریم.

$$y=\frac{۱}{x}+۳\Rightarrow \frac{۱}{x}=y-۳\Rightarrow x=\frac{۱}{y-۳}\Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{۱}{x-۳}=g(x)$$

نکته

در توابع‌ای با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ (توابع هموگرافیک) تابع معکوس برابر است با : $f^{-۱}(x)=\frac{-dx+b}{cx-a}$

۸۵- وارون پذیری تابع $y=\frac{۲x+۱}{x-۱}$ را بررسی کنید و در صورت امکان ضابطه‌ی تابع وارون را به دست آورید. (نهایی)

☑پاسخ:

$$f(x_۱)=f(x_۲)\Rightarrow \frac{۲x_۱+۱}{x_۱-۱}=\frac{۲x_۲+۱}{x_۲-۱}\Rightarrow (۲x_۱+۱)(x_۲-۱)=(۲x_۲+۱)(x_۱-۱)$$

$$\Rightarrow ۲x_۱x_۲-۲x_۱+x_۲-۱=۲x_۲x_۱-۲x_۲+x_۱-۱\Rightarrow x_۱=x_۲$$

$$y=\frac{۲x+۱}{x-۱}\Rightarrow yx-y=۲x+۱\Rightarrow yx-۲x=y+۱\Rightarrow x=\frac{y+۱}{y-۲}\Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{x+۱}{x-۲}$$

روش تستی :

$$y=\frac{۲x+۱}{x-۱}\Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{۱x+۱}{x-۲}$$

۸۶- نشان دهید تابع $f(x)=۱+\sqrt[۳]{x-۵}$ وارون پذیر است، سپس وارون آن را بنویسید.

☑پاسخ: اول باید نشان دهیم تابع وارون‌پذیر است، یعنی باید نشان دهیم تابع یک به یک است.

$$f(x_۱)=f(x_۲)\Rightarrow x_۱=x_۲:\ ۱+\sqrt[۳]{x_۱-۵}=۱+\sqrt[۳]{x_۲-۵}\Rightarrow \sqrt[۳]{x_۱-۵}=\sqrt[۳]{x_۲-۵}\Rightarrow x_۱-۵=x_۲-۵\Rightarrow x_۱=x_۲$$

$$y=۱+\sqrt[۳]{x-۵}\Rightarrow y-۱=\sqrt[۳]{x-۵}\Rightarrow (y-۱)^۳=(x-۵)\Rightarrow x=(y-۱)^۳+۵\Rightarrow f^{-۱}(x)=(x-۱)^۳+۵$$

۸۷- ثابت کنید تابع $x \ge ۲$, $f(x)=(x-۲)^۲$ وارون‌پذیر است، سپس ضابطه‌ی وارون آن را بنویسید. (نهایی)

☑پاسخ:

اثبات معکوس پذیری

$$f(x_۱)=f(x_۲) \Rightarrow (x_۱-۲)^۲=(x_۲-۲)^۲ \longrightarrow |x_۱-۲|=|x_۲-۲| \xrightarrow{x\ge ۲} x_۱=x_۲$$

$$y=(x-۲)^۲ \Rightarrow \sqrt{y}=\sqrt{(x-۲)^۲} \Rightarrow \sqrt{y}=|x-۲| \xrightarrow{x\ge ۲} \sqrt{y}=x-۲ \quad x=\sqrt{y}+۲ \Rightarrow f^{-۱}(x)=\sqrt{x}+۲$$

۸۸- وارون پذیری تابع زیر را بررسی کنید و در صورت وارون‌پذیری تابع، ضابطه‌ی وارون آن را به دست آورید. (نهایی)

$f(x)=\sqrt{x+۳}-۵$

☑پاسخ:

$$f(x_۱)=f(x_۲) \Rightarrow x_۱=x_۲ \longrightarrow \sqrt{x_۱+۳}-۵=\sqrt{x_۲+۳}-۵ \Rightarrow x_۱+۳=x_۲+۳ \Rightarrow x_۱=x_۲$$

$$y=\sqrt{x+۳}-۵ \Rightarrow y+۵=\sqrt{x+۳} \Rightarrow (x+۳)=(y+۵)^۲ \Rightarrow x=(y+۵)^۲-۳ \Rightarrow f^{-۱}(x)=(x+۵)^۲-۳$$

۸۹- اگر $f(a)=۳ax-۵$ و نقطه‌ی $(۴,۳)$ روی نمودار تابع $f^{-۱}$ باشد، اولاً مقدار a را به دست آورید. ثانیاً ضابطه‌ی تابع وارون f را تعیین کنید.

☑پاسخ:

$$(۴,۳)\in f^{-۱} \Rightarrow (۴,۳)\in f \Rightarrow f(۳)=۳a(۳)-۵=۴ \Rightarrow ۹a=۹ \Rightarrow a=۱$$

$$f(x)=۳x-۵ \Rightarrow y=۳x-۵ \Rightarrow y+۵=۳x \Rightarrow x=\frac{y+۵}{۳} \Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{x+۵}{۳}$$

۹۰- وارون تابع : $\begin{cases} f:(-\infty,۱] \to R \\ f(x)=x^۲-۲x+۳ \end{cases}$ کدام است ؟

۱) $y=۱-\sqrt{x-۲}$, $x\ge ۲$　　۲) $y=۱+\sqrt{x-۲}$, $x\ge ۲$

۳) $y=۱+\sqrt{۲-x}$, $x\le ۱$　　۴) $y=۱-\sqrt{۲-x}$, $x\le ۱$

☑پاسخ:

مربع کامل می‌کنیم

$$y=x^۲-۲x+۳ \quad ۲ \Rightarrow (x-۱)^۲=y-۲ \Rightarrow |x-۱|=y-۲ \xrightarrow{x\le ۱} x-۱=-\sqrt{y-۲}$$

$$x=۱-\sqrt{y-۲} \Rightarrow f^{-۱}(x)=۱-\sqrt{x-۲} \quad , \quad x\ge ۲$$

۹۱- اگر وارون تابع $f(x)=b+\sqrt{x+۲}$ تابع $(x\ge ۳)$ $f^{-۱}(x)=x^۲+ax+c$ باشد حاصل $\frac{c+۲}{a+b}$ کدام است ؟

۱) ۳　　۲) $\frac{-۷}{۳}$　　۳) $\frac{۷}{۳}$　　۴) -۳

☑پاسخ:

$$f(x)=b+\sqrt{x+۲} \Rightarrow x+۲\ge ۰ \Rightarrow x\ge -۲ \Rightarrow D_f=[-۲,+\infty) \Rightarrow R_f=D_{f^{-۱}}=[۳,+\infty)$$

$$f(-۲)=b+\sqrt{-۲+۲}=۳ \Rightarrow b=۳ \Rightarrow f(x)=۳+\sqrt{x+۲}$$

$$y=۳+\sqrt{x+۲} \Rightarrow y-۳=\sqrt{x+۲} \Rightarrow y^۲-۶y+۹=x+۲ \Rightarrow x=y^۲-۶y+۷ \Rightarrow f^{-۱}=x^۲-۶x+۷$$

$$a=-۶ \;,\; b=۳ \;,\; c=۷ \Rightarrow \frac{c+۲}{a+b}=\frac{۷+۲}{-۶+۳}=-۳$$

۹۲- ثابت کنید تابع $x \geq 2$ ، $f(x)=(x-2)^2$ وارون‌پذیر است، سپس ضابطه‌ی وارون آن را بنویسید. (نهایی)

☑پاسخ:

اثبات معکوس پذیری

$$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow (x_1-2)^2=(x_2-2)^2 \longrightarrow |x_1-2|=|x_2-2| \xrightarrow{x\geq 2} x_1=x_2$$

$$y=(x-2)^2 \Rightarrow \sqrt{y}=\sqrt{(x-2)^2} \Rightarrow \sqrt{y}=|x-2| \xrightarrow{x\geq 2} \sqrt{y}=x-2 \quad x=\sqrt{y}+2 \Rightarrow f^{-1}(x)=\sqrt{x}+2$$

۹۳- وارون پذیری تابع زیر را بررسی کنید و در صورت وارون‌پذیری تابع، ضابطه‌ی وارون آن را به دست آورید. (نهایی)

$$f(x)=\sqrt{x+3}-5$$

☑پاسخ:

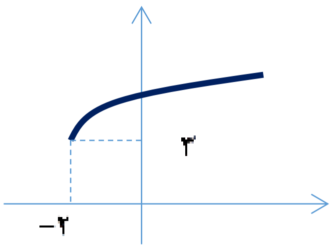
$$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1=x_2 \longrightarrow \sqrt{x_1+3}-5=\sqrt{x_2+3}-5 \Rightarrow x_1+3=x_2+3 \Rightarrow x_1=x_2$$

$$y=\sqrt{x+3}-5 \Rightarrow y+5=\sqrt{x+3} \Rightarrow (x+3)=(y+5)^2 \Rightarrow x=(y+5)^2-3 \Rightarrow f^{-1}(x)=(x+5)^2-3$$

۹۴ - شکل مقابل نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x+a}+b$ است و $\begin{cases} g(x)=x^2-6x+10 \\ \forall x\in(-\infty,3] \end{cases}$ آنگاه $g^{-1}(f^{-1}(b+a))$ کدام است ؟

۱) ۲   ۲) ۴

۳) ۶   ۴) ۸



☑پاسخ:

چون دامنه تابع از $x=-2$ شروع شده

$$f(x)=\sqrt{x+a}+b \Rightarrow x+a\geq 0 \Rightarrow x\geq -a=-2 \Rightarrow a=2$$

$$f(x)=\sqrt{x+2}+b \Rightarrow f(-2)=\sqrt{0}+b=3 \Rightarrow b=3 \Rightarrow f(x)=\sqrt{x+2}+3$$

$$f^{-1}(a+b)=f^{-1}(5) \Rightarrow \sqrt{x+2}+3=5 \Rightarrow \sqrt{x+2}=2 \Rightarrow x+2=4 \Rightarrow x=2 \Rightarrow f^{-1}(5)=2$$

$$g^{-1}of^{-1}(a+b)=g^{-1}(2) \Rightarrow x^2-6x+10=2 \Rightarrow (x-2)(x-4)=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow g^{-1}of^{-1}(a+b)=2$$

۹۵- تابع وارون $y=x^3$ ، تابع .... است. (نهایی)

☑پاسخ:

$$y=x^3 \Rightarrow \sqrt[3]{y}=\sqrt[3]{x^3} \Rightarrow x=\sqrt[3]{y} \Rightarrow y=f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}$$

۹۶- در ماشین زیر ضابطه تابع g را تعیین کنید.

$$x \longrightarrow \boxed{x^3+1} \longrightarrow \boxed{g} \longrightarrow x$$

☑پاسخ:

$$g(x)=f^{-1}$$

$$f(x)=x^3+1 \Rightarrow y=x^3+1 \Rightarrow y-1=x^3 \Rightarrow \sqrt[3]{y-1}=x \Rightarrow f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x-1}$$

۹۷- وارون تابع $f(x)=x^3+3x^2+3x$ را تعیین کنید ؟

☑پاسخ:

$$f(x)=x^3+3x^2+3x \quad \Rightarrow \quad y=\underbrace{x^3+3x^2+3x+1}_{\text{مکعب کامل می‌کنیم}}-1=(x+1)^3-1 \Rightarrow (x+1)^3=y+1 \Rightarrow$$

$$x=\sqrt[3]{y+1}-1 \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x+1}-1$$

۹۸- نشان دهید تابع $f(x)=1+\sqrt[3]{x-5}$ وارون پذیر است، سپس وارون آن را بنویسید.

☑پاسخ: اول باید نشان دهیم تابع وارون‌پذیر است، یعنی باید نشان دهیم تابع یک به یک است.

$$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1=x_2:\ 1+\sqrt[3]{x_1-5}=1+\sqrt[3]{x_2-5} \Rightarrow \sqrt[3]{x_1-5}=\sqrt[3]{x_2-5} \Rightarrow x_1-5=x_2-5 \Rightarrow x_1=x_2$$

$$y=1+\sqrt[3]{x-5} \Rightarrow y-1=\sqrt[3]{x-5} \Rightarrow (y-1)^3=(x-5) \Rightarrow x=(y-1)^3+5 \Rightarrow f^{-1}(x)=(x-1)^3+5$$

۹۹- وارون تابع $f(x)=x^3-6x^2+12x$ کدام است ؟

۱) $\sqrt[3]{x-8}-2$　　۲) $\sqrt[3]{x-2}+8$　　۳) $\sqrt[3]{x-8}+2$　　۴) $\sqrt[3]{x+2}-8$

☑پاسخ:

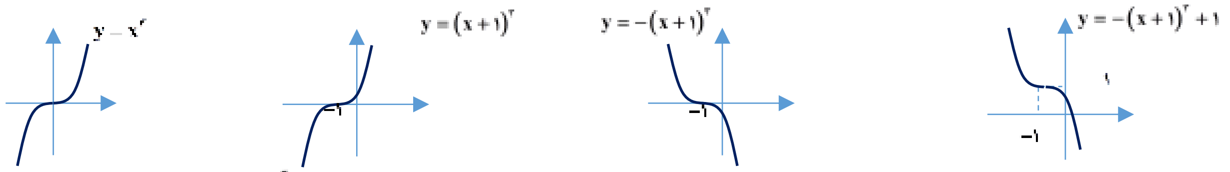
$$f(x)=x^3-6x^2+12x \Rightarrow y=\underbrace{x^3-6x^2+12x-8}_{\text{مکعب کامل می‌کنیم}}+8=(x-2)^3+8 \Rightarrow y-8=(x-2)^3 \Rightarrow x-2=\sqrt[3]{y-8} \Rightarrow$$

$$x=2+\sqrt[3]{y-8} \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(x)=2+\sqrt[3]{x-8}$$

۱۰۰- تابع $f(x)=-(x+1)^3+1$ را در نظر بگیرید و موارد زیر را کاملاً توضیح داده و انجام دهید .

الف) نمودار $f(x)$ را به کمک $y=x^3$ رسم کنید . مراحل را توضیح دهید .

ب) نشان دهید $f(x)$ وارون پذیر است و ضابطه ی $f^{-1}(x)$ را به دست آورید .



انتقال ۱ واحدی نمودار $y=x^3$ به سمت راست　　قرینه نسبت به محور x ها　　انتقال ۱ واحدی نمودار در امتداد محور y ها

$$f(x_1)=f(x_2) \to x_1=x_2 \Rightarrow -(x_1+1)^3+1=-(x_2+1)^3+1 \to (x_1+1)^3=(x_2+1)^3 \Rightarrow x_1+1=x_2+1$$

$$x_1=x_2$$

$$y=-(x+1)^3+1 \to (x+1)^3=(1-y) \longrightarrow x+1=\sqrt[3]{1-y} \to x=\sqrt[3]{1-y}-1 \to f^{-1}(x)=\sqrt[3]{1-x}-1$$

۱۰۱- در توابع زیر مقادیر خواسته شده را به دست آورید.

☑پاسخ:

$$f(x)=\frac{۳x+۱}{x-۱} \Rightarrow f^{-۱}(۷)=? \quad \Rightarrow \quad \frac{۳x+۱}{x-۱}=۷ \Rightarrow ۷x-۷=۳x+۱ \Rightarrow ۴x=۸ \Rightarrow x=۲ \Rightarrow f^{-۱}(۷)=۲$$

$$f(x)=x^۲-۲x \;,\; x\le ۲ \Rightarrow f^{-۱}(۵)=? \Rightarrow x^۲-۲x=۵ \Rightarrow x^۲-۲x-۵=۰ \Rightarrow x=\frac{۲\pm\sqrt{۲۴}}{۲}=\begin{cases}۱+\sqrt{۶} & \text{ق}\\ ۱-\sqrt{۶} & \text{ق}\end{cases}$$

۱۰۲- تحقیق کنید آیا دو تابع $f(x)=\frac{۱}{x}+۳$, $g(x)=\frac{۱}{x-۳}$ وارون یکدیگرند؟ (نهایی)

☑پاسخ: اولاً تابع $f(x)$ یک به یک است چون

$$f(x_۱)=f(x_۲) \Rightarrow x_۱=x_۲ \to \frac{۱}{x_۱}+۳=\frac{۱}{x_۲}+۳ \Rightarrow \frac{۱}{x_۱}=\frac{۱}{x_۲} \Rightarrow x_۱=x_۲$$

حال معکوس آن را به دست می‌آوریم.

$$y=\frac{۱}{x}+۳ \Rightarrow \frac{۱}{x}=y-۳ \Rightarrow x=\frac{۱}{y-۳} \Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{۱}{x-۳}=g(x)$$

نکته

۱) $(fog)^{-۱}=g^{-۱}of^{-۱}$

۲) در توابع‌ای با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ (توابع هموگرافیک) اگر $a+d=0$ باشد، آن‌گاه تابع و تابع معکوس با هم برابرند. یعنی : $f(x)=f^{-۱}(x)$

۱۰۳- اگر $f(x)=۴x-۳$, $g(x)=x+۲$ تابع $(gof)^{-۱}$ را حساب کنید. (شهریور ۹۰)

☑پاسخ:

$$y=۴x-۳ \Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{x+۳}{۴} \quad , \quad y=x+۲ \Rightarrow g^{-۱}(x)=x-۲$$

$$(gof)^{-۱}=f^{-۱}og^{-۱}=f^{-۱}\left(g^{-۱}(x)\right)=\frac{x-۲+۳}{۴}=\frac{x+۱}{۴}$$

۱۰۴- اگر $f(x)=۱+\sqrt{x}$, $g(x)=x^۲$, $x>۰$ آن‌گاه ضابطه‌ی $g^{-۱}of^{-۱}$ کدام است؟

☑پاسخ:

$$y=۱+\sqrt{x} \Rightarrow f^{-۱}(x)=(x-۱)^۲ \quad , \quad y=x^۲ \Rightarrow g^{-۱}(x)=\sqrt{x}$$

$$g^{-۱}of^{-۱}=\sqrt{(x-۱)^۲}=|x-۱|$$

۱۰۵- تابع وارون $y=x^۳$، تابع .... است. (دی ماه ۹۰)

☑پاسخ:

$$y=f^{-۱}(x)=\sqrt[۳]{x}$$

۱۰۶- در ماشین زیر ضابطه تابع g را تعیین کنید.

$$x \longrightarrow \boxed{x^۳+۱} \longrightarrow \boxed{g} \longrightarrow x$$

☑ پاسخ:

$$g(x)=f^{-۱}$$

$$f(x)=x^۳+۱ \Rightarrow y=x^۳+۱ \Rightarrow y-۱=x^۳ \Rightarrow \sqrt[۳]{y-۱}=x \Rightarrow f^{-۱}(x)=\sqrt[۳]{x-۱}$$

۱۰۷- جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

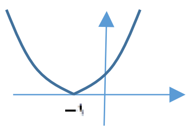
الف)تابع $y=(x+۱)^۲|x+۱|$ در بازه $(-\infty , a]$ نزولی است.حداکثرمقدار a ....است.

ب) باقی مانده ی تقسیم چند جمله ای $f(x)=-۲x^۲-۴x+۸$ بر $x+۳$ برابر است با ....

ج) اگر $k>۱$ باشد نمودار $y=kf(x)$ از .... نمودار $y=f(x)$ حاصل می شود .

☑پاسخ:

الف) ۱-



$$y=(x+۱)^۲|x+۱|=\begin{cases}(x+۱)^۳ & x\geq -۱\\ -(x+۱)^۳ & x<-۱\end{cases}$$

ب) ۲ چون

$$f(x)=-۲x^۲-۴x+۸ \quad\Rightarrow\quad R=f(-۳)=-۲(۹)-۴(-۳)+۸=۲$$

ج) انبساط عرضی یا کشش عرضی : چون k بزرگتر از ۱ و پشت f است انبساط عرضی داریم .

۱۰۸- جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید .

الف) تابع $f(x)=\log_{۰/۵}۲^x$ صعودی ....

ب) برای رسم تابع $f(kx)$ کافی است طول نقاط نمودار تابع $f(x)$ را در .... ضرب کنیم .

☑پاسخ:

الف) نیست ، چون : $y=f(x)=\log_{۰/۵}۲^x=\log_{\frac{۱}{۲}}۲^x=-\log_۲ ۲^x=-x$ خطی با شیب منفی است

ب) $\frac{۱}{k}$

۱۰۹- درستی یا نادرستی عبارت های زیر را تعیین کنید ؟

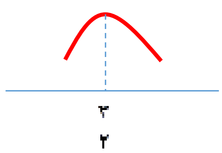
الف) تابع $f(x)=-x^۲+۳x$ روی بازه ی $(-\infty,۳]$ اکیداً صعودی است .

ب) تابع $y=x^۲-۱$ روی بازه ی $[۰,۱]$ بالاتر از تابع $y=x^۳-۱$ قرار دارد .

ج) باقیمانده ی تقسیم $f(x)=۲x^۵-۳x^۳-۲x+۴$ بر $x+۱$ برابر صفر است.

☑پاسخ:

الف) نادرست چون راس سهمی $x=\frac{-b}{۲a}=\frac{۳}{۲}$ و قبل از اون تابع صعودیه



ب) درست چون : $x^۳<x^۲ \quad\Leftarrow\quad \text{if}\ \ x\in(۰,۱)$

ج) نادرست چون : $f(-۱)=۷\neq ۰$

۱۱۰- جاهای خالی را پر کنید.

الف) تابعی که فقط صعودی یا فقط نزولی باشد را تابع .... می‌گویند.

ب)برای رسم تابع $f(kx)$ کافی است طول نقاط نمودار تابع $f(x)$ را در .... ضرب می کنیم .

ج) وارون تابع: $f(x)=(x-1)^2 \ , \ x\le 1$ تابع .... می باشد .

$1)\ f^{-1}(x)=\sqrt{x}+1$ $\qquad$ $2)\ f^{-1}(x)=-\sqrt{x}+1$

☑پاسخ:

الف)یکنوا $\qquad$ ب) $\frac{1}{k}$

ج) گزینه ۲ $\qquad y=(x-1)^2 \ , \ x\le 1 \qquad \sqrt{y}=|x-1| \Rightarrow \sqrt{y}=-x+1 \Rightarrow x=-\sqrt{y}+1 \Rightarrow f^{-1}(x)=-\sqrt{x}+1$

۱۱۱- جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید .

الف) نمودار تابع $y=x^3+6x^2+12x+8$ را می توان با .... واحد انتقال نمودار $y=x^3$ به سمت .... رسم کرد .

ب) برای آن که تابع $f(x)=mx+n$ در تمام دامنه اش هم صعودی و هم نزولی باشد مقدار m باید برابر .... باشد .

☑پاسخ:

الف) ۲ – به سمت چپ : $\qquad y=x^3 \Rightarrow y=(x+2)^3=x^3+6x^2+12x+8$

ب) صفر : $\qquad$ خطی افقی می شود که در تعریف صعودی و نزولی صدق می کند $\qquad y=mx+n \xrightarrow{m=0} y=n$

۱۱۲- اگر $f(x)=2^x+2^{-x} \ ; \ x\le 0$ باشد، ضابطه $f^{-1}(x)$ برابر کدام است؟

۱) $-1+\log_2(x+\sqrt{x^2-4})$ $\qquad$ ۲) $-1+\log_2(x-\sqrt{x^2-4})$ $\qquad$ ۳) $\log_2(x+\sqrt{x^2-4})$ $\qquad$ ۴) $\log_2(x-\sqrt{x^2-4})$

☑ پاسخ: گزینه ۲ صحیح است.با فرض $2^x=A$ یک معادله درجه دوم ساده حاصل می شود : $\qquad y=A+\frac{1}{A} \ ; \quad A<1$

$$A^2-Ay+1=0 \Rightarrow A=\frac{y\pm\sqrt{y^2-4}}{2} \xrightarrow[A<1]{x\le 0} 2^x=\frac{y-\sqrt{y^2-4}}{2}$$

$$2^{x+1}=y-\sqrt{y^2-4} \Rightarrow x+1=\log_2(y-\sqrt{y^2-4})$$

پس ضابطه تابع معکوس برابر است با : $\qquad f^{-1}(x)=-1+\log_2(x-\sqrt{x^2-4})$

۱۱۳- اگر $f(x)=x^2-4x+5 \ ; \ x>2$ باشد،ضابطه $f^{-1}(4x+1)$ کدام است ؟

۱) $2(1+\sqrt{x})$ $\qquad$ ۲) $2(1-\sqrt{x})$ $\qquad$ ۳) $2+\sqrt{2x+4}$ $\qquad$ ۴) $2-\sqrt{2x+4}$

☑پاسخ: گزینه ۱ صحیح است.معکوس تابع را تعیین می کنیم.

$$y=x^2-4x+5$$

$$x^2-4x+5-y=0 \Rightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{16-4(5-y)}}{2} \xrightarrow{x>2} x=2+\sqrt{y-1} \Rightarrow f^{-1}(x)=2+\sqrt{x-1}$$

پس : $\qquad f^{-1}(4x+1)=2+\sqrt{4x}=2(1+\sqrt{x})$

ریاضیات به سبک روحانی