به نام ایزد مهرگستر

ریاضی(۳) تجربی

فصل اول

تابع

تهیه و تنظیم: دانیال فروغ نیا

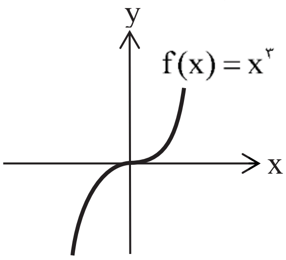
۱۳۹۹ - ۱۴۰۰

خب رسیدن شما به درس ریاضی (۳) رو تبریک می‌گم. اگر خدایی نکرده سال بعد رفتی دانشگاه و زبونم لال تو رشته‌های تجربی قبول شدی بدون دیگه خبری از ریاضیات نخواهد بود. پس قدر این لحظات رو بدون!

تابع چند جمله‌ای: هر تابع که ضابطه آن به فرم $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$ باشد با شروط $a_n \neq 0$ و $a_0,a_1,...,a_n \in \mathbb{R}$ را تابع چند جمله‌ای از درجه n می‌نامیم.

✓ **دو نکته:** ۱- دامنه تمام توابع چندجمله‌ای $\mathbb{R}$ است. ۲- تابع ثابت $f(x)=c$ تابع چندجمله‌ای از درجه صفر، تابع خطی $f(x)=ax+b$ تابع چندجمله‌ای از درجه یک و تابع سهمی $f(x)=ax^2+bx+c$ تابع چندجمله‌ای از درجه دو است.

تابع درجه سوم: هر تابع با ضابطه $a \neq 0$, $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ یک تابع درجه سوم است که در حالت $a=1, \quad b=c=d=0$ یعنی $f(x)=x^3$ نمودار آن به شکل زیر درمی‌آید:



جالبه بدونی این تابع به تابع لُر هم معروفه.

✓ **تذکر:** نمودار تابع $f(x)=x^3$ را به عنوان یک نمودار پایه باید بلد باشید تا بتوانید با قوانین انتقال، نمودارهایی مثل $f(x)=-x^3$ یا $f(x)=(x-2)^3-1$ را رسم کنید.

مروری بر قوانین انتقال: اگر نمودار تابع $y=f(x)$ را داشته باشیم برای رسم:

۱- $(a>0)$ $y=f(x)\pm a$ کافی است نمودار تابع $y=f(x)$ را موافق علامت a به اندازه a واحد در راستای قائم جابجا کنیم. ($a:+a$ واحد میره بالا، $a:-a$ واحد میره پایین)

پس اگر نمودار تابع $y=f(x)$ به اندازه a واحد به بالا (به پایین) منتقل شود، به ضابطه آن $+a$ $(-a)$ اضافه خواهد شد.

۲- $(k>0)$ $y=f(x\pm k)$ کافی است نمودار تابع $y=f(x)$ را مخالف علامت k به اندازه k واحد در راستای افقی جابجا کنیم. ($k:+k$ واحد بره چپ $k:-k$ واحد بره راست)

پس اگر نمودار تابع $y=f(x)$ به اندازه k واحد به راست (به چپ) منتقل شود، در ضابطه آن هرجا x داریم $x-k$ $(x+k)$ را جاگذاری می‌کنیم.

۳- $y=-f(x)$ کافی است نمودار تابع $y=f(x)$ را نسبت به محور xها قرینه کنیم.

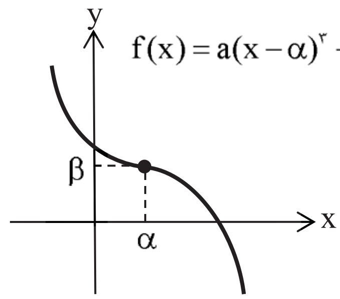
پس اگر نمودار تابع $y=f(x)$ نسبت به محور xها قرینه شود، ضابطه آن $y=-f(x)$ خواهد شد.

۴- $y=f(-x)$ کافی است نمودار تابع $y=f(x)$ را نسبت به محور yها قرینه کنیم.

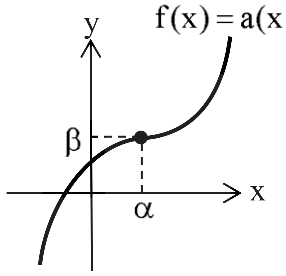
پس اگر نمودار تابع $y=f(x)$ را نسبت به محور yها قرینه کنیم، در ضابطه آن هرجا x داریم $-x$ را جاگذاری می‌کنیم.

✓ **نکته:** اگر ضابطه تابع درجه سوم به فرم $f(x)=a(x-\alpha)^3+\beta$ داده شود، نمودار آن به شکل زیر خواهد شد. به نقش نقطه (α,β) در نمودار تابع دقت کنید:

$f(x)=a(x-\alpha)^3+\beta\ ,a<0$



$f(x)=a(x-\alpha)^3+\beta\ ,a>0$



◂ **مثال:** نمودار هر یک از توابع زیر را به کمک انتقال رسم کنید. (کتاب درسی)

$y=-x^3-2$

$y=(x+2)^3$

$y=-(x+1)^3+1$

◂ **مثال:** نمودار توابع $f(x)=x^3$ و $g(x)=x^2$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنید. آیا برای تمام xهای نامنفی، نمودار f بالای نمودار g است؟ (کتاب درسی)

❖ **تست:** نمودار تابع $f(x)=-3x^2+3x+x^3$ از کدام ناحیه مختصات عبور نمی‌کند؟ (تالیفی)

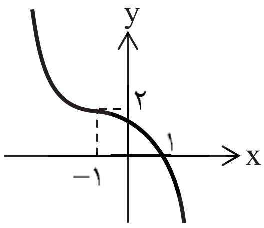
۱) ناحیه اول و سوم　　۲) ناحیه دوم و چهارم　　۳) ناحیه سوم　　۴) ناحیه چهارم

❖ **تست:** تابع درجه سوم f محور طول‌ها را در طول ۳ و ۱ و ۲- و محور عرض‌ها را در عرض ۶ قطع مـی‌کنـد. مقـدار $f(2)$ کدام است؟ (تالیفی)

۱) ۴　　۲) ۲

۳) ۲-　　۴) ۴-

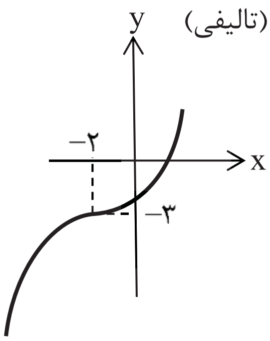
❖ **تست:** نمودار تابع $y=a(x-b)^3+c+3$ به صورت مقابل است. حاصل $a+b+c$ کدام است؟ (تالیفی)



۱) ۰/۲۵-　　۲) ۱/۷۵-

۳) ۲/۲۵-　　۴) ۳-

❖ **تست:** شکل زیر نمودار تابع $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ است. حاصل $\frac{a+b}{c}$ کدام است؟ (تالیفی)

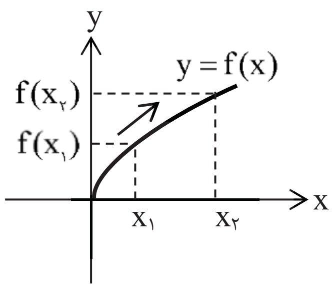


۱) ۱/۸　　۲) ۳/۶

۳) ۴/۵　　۴) ۴/۸

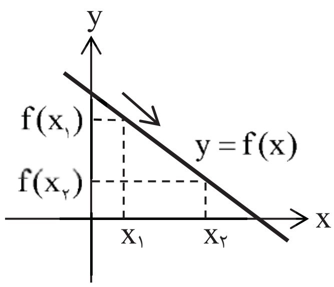
توابع صعودی و توابع نزولی:

تـابع اکیـداً صـعودی: اگـر بـرای هـر دو نقطـه x_1 و x_2 از مجموعـه $A\ (A \subseteq D_f)$ کـه $x_1 < x_2$ داشـته باشـیم $f(x_1) < f(x_2)$ آنگاه f را تابعی اکیدا صعودی می‌نامیم.



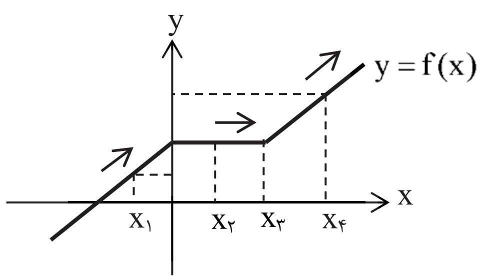
✓ **تذکر:** در این نوع تابع با افزایش x، مقادیر y دائما افزایش می‌یابد.

تابع اکیداً نزولی: اگر برای هر دو نقطه x_1 و x_2 از مجموعه $A\ (A \subseteq D_f)$ که $x_1 < x_2$ داشته باشیم $f(x_1) > f(x_2)$ آنگاه f را تابعی اکیدا نزولی می‌نامیم.



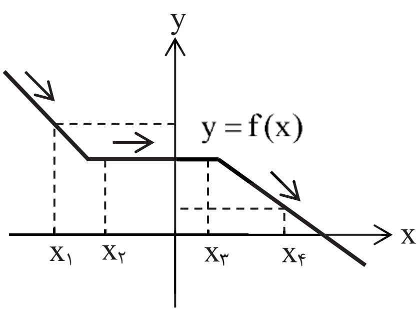
✓ **تذکر:** در این نوع تابع با افزایش x، مقادیر y دائما کاهش پیدا می‌کند.

تابع صعودی: اگر برای هـر دو نقطـه x_1 و x_2 از مجموعـه $A\ (A \subseteq D_f)$ کـه $x_1 < x_2$ داشـته باشـیم $f(x_1) \le f(x_2)$ آنگاه f را تابعی صعودی می‌نامیم.



✓ **تذکر:** در این نوع تابع با افزایش x، مقادیر y یا تغییر نمی‌کند یا افزایش می‌یابد.

تابع نزولی: : اگر برای هر دو نقطه x_1 و x_2 از مجموعه $A\ (A \subseteq D_f)$ که $x_1 < x_2$ داشته باشیم $f(x_1) \ge f(x_2)$ آنگاه f را تابعی صعودی می‌نامیم.



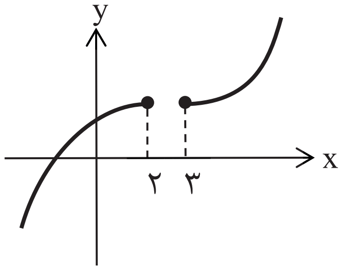
✓ **تذکر:** در این نوع تابع با افزایش x، مقادیر y یا تغییر نمی‌کند یا کاهش می‌یابد.

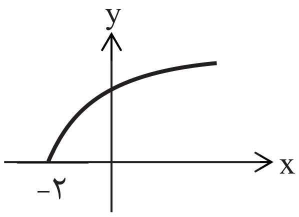
✓ **نکات:**

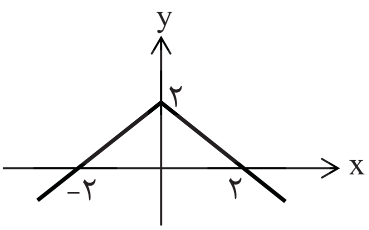
۱- تابع ثابت هم نزولی محسوب می‌شود و هم صعودی. ۲- اگر تابعی در یک بازه اکیدا صعودی یا اکیـدا نزولـی باشـد، بـه آن

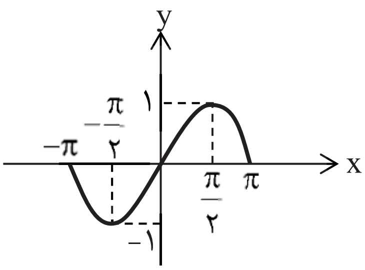
تابع اکیدا یکنوا می‌گوییم اما اگر فقط صعودی یا نزولی باشد، به آن تابع یکنوا می‌گوییم. پس می‌توان گفت هر تابعی که اکیدا یکنوا باشد یکنوا هم هست اما عکس این مطلب برقرار نیست. ۳- اگر تابعی در بخشی از یک بـازه صـعودی و در بخشـی از آن نزولی باشد، در آن بازه غیریکنوا است. ۴- تمام توابع اکیدا یکنوا یک‌به‌یک اند.

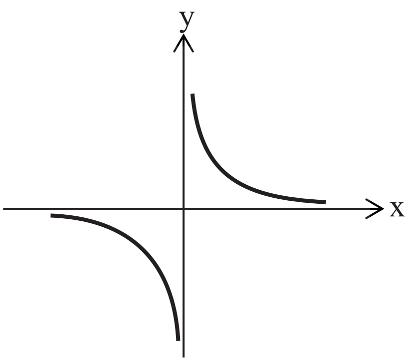
◀ **مثال:** هر کدام از نمودارهای زیر در چه بازه‌هایی اکیدا صعودی و در چه بازه‌هایی اکیداً نزولی‌اند؟ (کتاب درسی)











.

مثال: نمودار توابع زیر را رسم کنید و مشخص نمایید در چه بازه‌هایی صعودی یا نزولی‌اند؟ (کتاب درسی)

$$f(x)=\cos(x-\frac{\pi}{۳}) \qquad D_f=[۰,۲\pi]$$

$$g(x)=x+|x|$$

$$f(x)=\begin{cases}-۲x-۳ & x<-۴\\ ۳ & -۴\le x<۲\\ ۳x-۲ & x\ge ۲\end{cases}$$

$$y=۲^x-۲$$

$$y=-\log x+۲$$

مثال: تابع $y=x^۲|x|$ در بازه $(-\infty,a]$ نزولی است. حداکثر مقدار a را بیابید.

❖ **تست:** اگر تابع $f=\{(1,m),(\sqrt{3},3),(\sqrt{5},|m+1|)\}$ اکیداً صعودی باشد، محدوده تغییرات m کدام است؟ (تالیفی)

۱) $m<-4$ یا $m>2$ ۲) $2<m<3$ ۳) $-4<m<2$ ۴) $(-\infty,-4)\cup(2,3)$

❖ **تست:** تابع $f(x)=(2n-4)x^2+mx+2m+3n$ بر روی $\mathbb{R}$ هم صعودی و هم نزولی است. این تابع محور yها را با کدام عرض قطع می‌کند؟ (تالیفی)

۱) صفر ۲) ۶

۳) ۲ ۴) -۶

❖ **تست:** اگر f تابعی اکیداً نزولی با دامنه $\mathbb{R}$ باشد به‌طوری که $f(3)=0$، دامنه تابع $g(x)=\sqrt[4]{\dfrac{x^2-5x}{-f(x)}}$ چند عدد طبیعی را شامل نمی‌شود؟ (تالیفی)

۱) بی‌شمار ۲) ۵

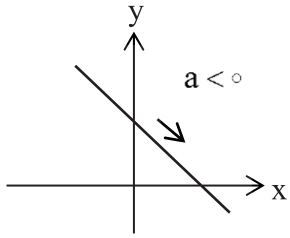
۳) ۴ ۴) ۲

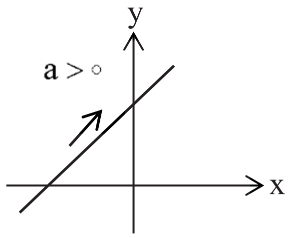
❖ **تست:** تابع f صعودی و از مبدا می‌گذرد. دامنه تابع $g(x)=\sqrt{xf(x)}$ کدام مجموعه است؟ (سراسری ریاضی)

۱) $\{x\in\mathbb{R}\mid x\geq 0\}$ ۲) $\{x\in\mathbb{R}\mid x>0\}$ ۳) $\mathbb{R}$ ۴) دامنه f

بریم سراغ بررسی یکنوایی برخی توابع معروف که نباید برات غریبه باشن:

۱- تابع خطی $f(x)=ax+b$ با شرط $a>0$ در کل دامنه خود اکیدا صعودی و با شرط $a<0$ در کل دامنه خود اکیدا نزولی است. (اگر $a=0$ باشد تابع ثابت می‌شود که هم صعودی است و هم نزولی)





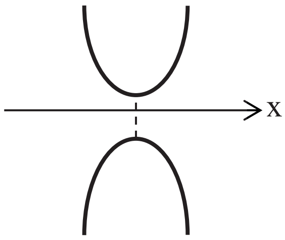
❖ **تست:** اگر تابع $f(x)=(m^2-9)x+m-3$ نزولی باشد، حدود m کدام است؟ (تالیفی)

۱) $|m|>3$　　۲) $|m|\geq 3$

۳) $|m|<3$　　۴) $|m|\leq 3$

۲- تابع درجه دوم $f(x)=ax^2+bx+c$ در کل دامنه‌اش یعنی $\mathbb{R}$ غیریکنواست اما با محدود کردن دامنه آن به دو بخش قبل راس و بعد راس می‌توان تابعی یکنوا تولید کرد.

طول راس $= x_s = \dfrac{-b}{2a}$

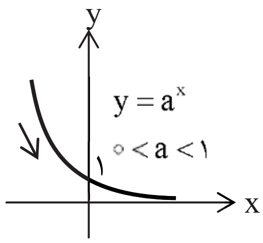


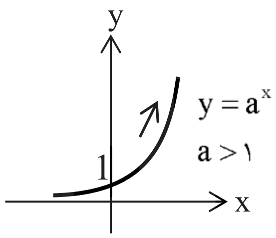
◀ **مثال:** تابع $f(x)=x^2+2x+2$ در چه بازه‌ای صعودی و در چه بازه‌ای نزولی است؟ دامنه آن را طوری محدود کنید که تابعی اکیدا نزولی تولید شود. (تالیفی)

❖ **تست:** تابع $f(x)=2x^2-(\frac{a-11}{a})x+5$ روی دامنه $[3,+\infty)$ اکیدا صعودی است. حدود a کدام است؟ (تالیفی)

۱) $(-1,0)$　　۲) $[-1,0)$　　۳) $(-\infty,-1]\cup(0,+\infty)$　　۴) $(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$

۳- تابع نمایی $f(x)=(a)^x+b$ با شرط $a>۱$ اکیدا صعودی و با شرط $۰<a<۱$ اکیدا نزولی است.



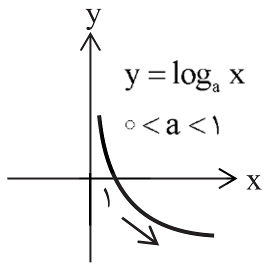


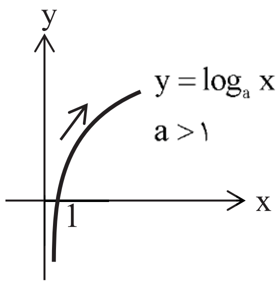
❖ **تست:** اگر تابع $f(x)=(\frac{۳-۵m}{۲})^x+b$ اکیداً نزولی باشد، محدوده m کدام است؟ (تالیفی)

۱) $(\frac{۱}{۵},\frac{۳}{۵})$ ۲) $(۰,\frac{۳}{۵})$

۳) $(۰,۱)$ ۴) $(\frac{-۳}{۵},\frac{-۱}{۵})$

۴- تابع لگاریتمی $f(x)=\log_a x+b$ با شرط $a>۱$ اکیدا صعودی و با شرط $۰<a<۱$ اکیدا نزولی است.





❖ **تست:** تابع $f(x)=\log_{\frac{k-۱}{k+۱}}(x+۲)+۵$ اکیدا صعودی است. حدود k کدام می‌تواند باشد؟ (تالیفی)

۱) $k>۱$ ۲) $-۱<k<۱$

۳) $-۳<k<-۱$ ۴) $-۳<k<۰$

۵- در توابع چند ضابطه‌ای باید نمودارش رسم شود و سپس روی آن بحث کنیم.

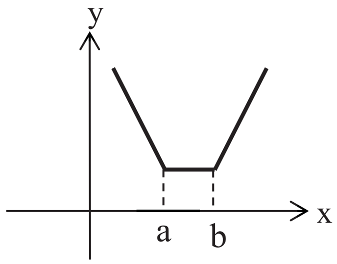
❖ **تست:** اگر تابع $f(x)=\begin{cases}-x-۱ & x<-۴\\ m+۳ & -۲\le x\le ۲\\ -۲x & x>۲\end{cases}$ در $\mathbb{R}$ نزولی باشد، m چند مقدار صحیح می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۷ ۲) ۸

۳) ۳ ۴) ۶

۶- در توابع شامل قدر مطلق باید با حذف قدر مطلق و رسم نمودار آن را بررسی کنیم اما دو حالت خاص زیر بیشتر مورد توجه هستند:

الف) تابع $f(x)=|x-a|+|x-b|$ با شرط $a<b$ به شکل زیر است که به آن تابع گلدانی نیز می‌گویند. (a و b ریشه داخل قدرمطلق اند)



$x\in(-\infty,a)\leftarrow$ اکیداً نزولی

$x\in(a,b)\leftarrow$ هم صعودی و هم نزولی (تابع ثابت)

$x\in(b,+\infty)\leftarrow$ اکیداً صعودی

❖ **تست:** تابع $f(x)=|x+۲|+|x-۱|$ در کدام بازه اکیدا نزولی است؟ (تجربی داخل- ۹۸)

۱) $(-\infty,-۲)$ ۲) $(-\infty,۱)$

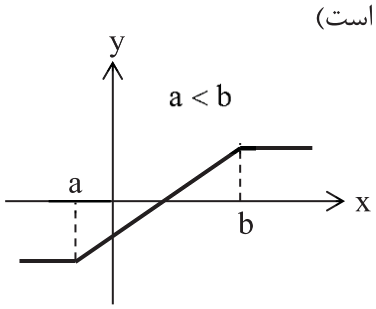
۳) $(-۲,۱)$ ۴) $(۱,+\infty)$

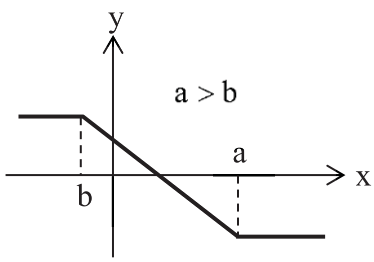
❖ **تست:** در بازه‌ای که تابع $f(x)=|x-۲|+|x-۳|$ اکیداً نزولی است نمودار آن با نمودار تابع $g(x)=۲x^۲-x-۱۰$ در چند نقطه مشترک‌اند؟ (تجربی داخل- ۹۷)

۱) ۱   ۲) ۲

۳) ۳   ۴) فاقد نقطه مشترک

ب) تابع $f(x)=|x-a|-|x-b|$ با شرط $a\le b$ بر روی $\mathbb{R}$ صعودی و در (a,b) اکیدا صعودی و با شرط $a\ge b$ بر روی $\mathbb{R}$ نزولی و در (b,a) اکیدا نزولی است. (در حالت $a=b$ تابع ثابت داریم) این تابع به تابع آبشاری یا سرسره‌ای معروف است. (a ریشه قدرمطلق با ضریب مثبت و b ریشه قدرمطلق با ضریب منفی است)





❖ **تست:** تابع $f(x)=|x+1|-|x-2|$ در کدام بازه اکیدا صعودی است؟ (تجربی خارج- ۹۸)

۱) $(-\infty,2)$　　۲) $(-1,+\infty)$

۳) $(-1,2)$　　۴) $(2,+\infty)$

❖ **تست:** اگر تابع $f(x)=|x-m|-|x+2m-3|$ بر روی $\mathbb{R}$ صعودی باشد، مجموعه مقادیر m شامل چند عدد طبیعی است؟ (تالیفی)

۱) ۲　　۲) ۱

۳) صفر　　۴) بی‌شمار

۷- توابع مثلثاتی سینوسی و کسینوسی در دامنه خود غیریکنوا اند ولی می‌شود با محدود کردن دامنه‌شان تابعی اکیدا یکنوا تولید کرد.

❖ **تست:** تابع $y=\cos(\frac{\pi}{2}-x)$ در بازه $[\frac{\pi}{2},a]$ اکیدا نزولی است. حداکثر مقدار a کدام است؟ (تالیفی)

۱) π　　۲) $\frac{3\pi}{2}$

۳) $\frac{\pi}{3}$　　۴) $\frac{2\pi}{3}$

۸- تابع هموگرافیک $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ را فعلا با رسم نمودار آن تحلیل می‌کنیم تا در فصل ۵ روش جبری ارائه شود.

❖ **تست:** تابع $f(x)=\frac{2x+3}{x+1}$ در بازه $(a,+\infty)$ اکیدا نزولی است. کمترین مقدار a کدام است؟ (تالیفی)

۱) ۲-　　۲) ۱-

۳) ۱　　۴) ۲

استفاده از توابع صعودی و نزولی در حل نامعادلات: می‌دانیم در توابع صعودی جهت نامساوی حفظ می‌شود ولی در توابع نزولی جهت نامساوی عوض می‌شود:

$$f(x_1) \le f(x_2) \xrightarrow{\text{نزولی}} x_1 \ge x_2 \qquad f(x_1) \le f(x_2) \xrightarrow{\text{صعودی}} x_1 \le x_2$$

و

$$f(x_1) < f(x_2) \xrightarrow{\text{نزولی}} x_1 > x_2 \qquad f(x_1) < f(x_2) \xrightarrow{\text{صعودی}} x_1 < x_2$$

از این نکته در حل برخی نامعادلات به خصوص نامعادلات نمایی و لگاریتمی می‌توان استفاده کرد.

❖ **تست:** اگر f تابعی اکیداً صعودی باشد و داشته باشیم $f(-2m^2+5) > f(3m)$، مجموعه مقادیر m به صورت (a,b) درمی‌آید. $a+b$ کدام است؟ (تالیفی)

۱) ۱/۵-
۲) ۱/۵
۳) ۲/۵-
۴) ۲/۵

❖ **تست:** اگر دامنه تابع $f(x)=\sqrt{(\frac{1}{2})^{x^2-3x}-4}$ به صورت $a<x<b$ بیان شود، بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟ (تالیفی)

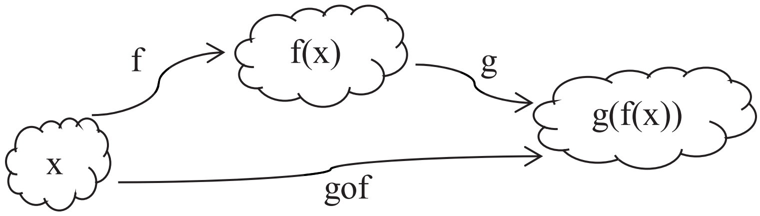
۱) ۱
۲) ۱/۵
۳) ۳
۴) ۵

❖ **تست:** مجموعه جواب نامعادله $\log_{0/2}(x^2+3x)+\log_{0/2}(\frac{1}{x})<0$ کدام است؟ (تالیفی)

۱) $(-2,0)$
۲) $(0,+\infty)$
۳) $(-\infty,-3)\cup(0,+\infty)$
۴) $\mathbb{R}-(2,3)$

ترکیب توابع: اگر f و g دو تابع باشند به‌طوری که برد تابع f و دامنه تابع g اشتراک ناتهی داشته باشند، تابع $g(f(x))$ را با نماد $(gof)(x)$ نمایش می‌دهیم و تابع gof را تابع مرکب می‌نامیم:

$$(gof)(x)=g(f(x))$$



تعیین دامنه تابع مرکب: دامنه تابع مرکب gof مجموعه x هایی است که:

۱- x دردامنه f قرار داشته باشد.

۲- $f(x)$ در دامنه g قرار داشته باشد.

به زبان ریاضی یعنی:

$$D_{gof}=\{x \mid \underset{\text{اشتراک}}{\underbrace{x\in D_f , f(x)\in D_g}}\}$$

✓ **تذکر:** برای تعیین دامنه تابع مرکب هرگز نیازی به تشکیل تابع نیست و باید از تعریف برویم.

◀ **مثال:** اگر $f(x)=\sqrt{x-۴}$ و $g(x)=\frac{۱}{x^۲-۱}$ باشند، دامنه تابع gof را با استفاده از تعریف به‌دست آورید.

(نهایی خرداد- ۹۸ و مشابه تمرین کتاب درسی)

❖ **تست:** اگر $f(x)=\sqrt{۳-x}$ و $g(x)=\log_۲(x^۲+۲x)$ باشند، دامنه تابع fog کدام است؟ (تجربی داخل- ۹۴)

۱) $[-۴,۲]$		۲) $[-۲,۰]$		۳) $[-۴,-۱]\cup(۱,۲]$		۴) $[-۴,-۲)\cup(۰,۲]$

بریم سراغ نکات ترکیب توابع و انواع تیپ‌های مسائل آن:

۱- اگر ضابطه توابع f و g را داشته باشیم، برای تشکیل تابع مرکب $(fog)(x)=f(g(x))$ کافی است در ضابطه f هر جا x داریم به جای آن ضابطه $g(x)$ را قرار دهیم.

◂ **مثال:** اگر $f(x)=\sqrt{۳-۲x}$ و $g(x)=\frac{۶}{۳x-۵}$ باشند، ضابطه توابع fog و gof را بیابید. (کتاب درسی)

◂ **مثال:** الناز می‌خواهد از فروشگاه یک لپ‌تاپ با قیمت بیش از دومیلیون تومان خریداری کند. این فروشگاه در ماه رمضان مسابقه‌ای برگزار کرده و به برندگان خود کارت تخفیف ۲۰ درصدی داده است و الناز در این مسابقه برنده شده است. هم چنین این فروشگاه روزهای پنج‌شنبه به مشتریان خود در خریدهای بیش از یک و نیم میلیون تومان، ۲۰۰ هزارتومان تخفیف نقدی می‌دهد. با استفاده از تابع مرکب تعیین کنید کدام یک از حالت‌های الف یا ب به نفع الناز است؟ (کتاب درسی)

الف) اول کارت تخفیف ۲۰ درصدی و بعد تخفیف نقدی را استفاده کند.

ب) اول تخفیف نقدی را استفاده کند و بعد کارت تخفیف را ارائه دهد.

◂ **مثال:** اگر $f(x)=۳x^{۲}+x-۱$ و $g(x)=۱-۲x$ باشند، معادله $(gof)(x)=-۵$ را حل کنید. (کتاب درسی)

✓ **نکته:** اگر توابع f و g در قالب مجموعه زوج مرتب‌ها داده شوند ابتدا دامنه تابع مرکب را تعیین کرده سپس تابع را تشکیل می‌دهیم.

◀ **مثال:** اگر $f=\{(۷,۸),(۵,۳),(۹,۸),(۱۱,۴)\}$ و $g=\{(۵,۷),(۳,۵),(۷,۹),(۹,۱۱)\}$ باشند، توابع fog و gof را به‌دست آورید. (کتاب درسی)

❖ **تست:** توابع $f=\{(۲,۱),(۳,۲),(۴,۵),(۱,۷)\}$ و $g=\{(۱,۲),(۳,۱),(a,۳),(b,۱)\}$ مفروض‌اند. اگر $(۴,۲)\in fog$ و $(۴,۱)\in gof$ باشند، دوتایی (a,b) کدام است؟ (ریاضی داخل- ۹۰)

۱) $(۳,۴)$　　۲) $(۴,۳)$

۳) $(۴,۵)$　　۴) $(۵,۴)$

❖ **تست:** اگرخروجی ماشین شکل زیر برای ورودی ۲ برابر ۵- باشد، A کدام است؟ (ریاضی خارج- ۸۶)

$$\boxed{\text{ورودی}} \rightarrow \boxed{۲x+A} \rightarrow \boxed{\sqrt{x}-۲x-۴} \rightarrow \boxed{\text{خروجی}}$$

۱) $-\frac{۱۵}{۴}$　　۲) -۳

۳) ۳　　۴) $\frac{۱۵}{۴}$

❖ **تست:** اگر $f(x)=\frac{۲x+۳}{۲-x}$ و $g(x)=\frac{۱-۳x}{x+۲}$ باشند، ضابطه تابع $g(f(x))$ کدام است؟ (تجربی داخل- ۹۶)

۱) x　　۲) $-x$

۳) $-x-۱$　　۴) $x+۱$

❖ **تست:** اگر $f(x)=۲-|x-۲|$، ضابطه تابع $f(f(x))$ کدام است؟ (ریاضی خارج- ۹۰)

۱) x ۲) $۴-x$

۳) $f(x)$ ۴) $۲-f(x)$

❖ **تست:** اگر $f(x)=\frac{۲x-۱}{x+۲}$ و $g(x)=x+۴$ باشند، جواب معادله $(gof)(x)=(fog)(x)$ کدام است؟ (تجربی خارج- ۹۷)

۱) ۷- و ۱- ۲) ۷- و ۱

۳) ۷ و ۱- ۴) ۷ و ۱

❖ **تست:** اگر $f(x)=x^{۲}+x-۲$ و $g(x)=\frac{۱}{۲}(x-۳)$ باشند، مجموعه طول نقاطی از منحنی تابع fog که زیر محور xها قرار می‌گیرند برابر کدام بازه است؟ (تجربی خارج- ۹۱)

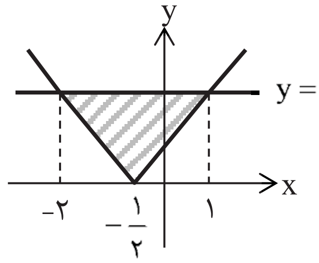
۱) $(-۵,۱)$ ۲) $(-۱,۵)$

۳) $(-۲,۱)$ ۴) $(۱,۵)$

❖ **تست:** اگر $f(x)=x^{۲}+x$ و $g(x)=\sqrt{۴x+۱}$ باشند، مساحت ناحیه محدود به نمودار تابع gof و خط $y=۳$ کدام است؟ (تجربی داخل- ۹۵)

۱) ۳ ۲) ۴

۳) ۴/۵ ۴) ۶



❖ **تست:** در تابع $f(x)=\lfloor x\rfloor+\lfloor -x\rfloor+\sqrt{\sin(\pi x)-۱}$ مقدار $f(-\frac{۱}{۲}f(x))$ کدام است؟ (تجربی خارج- ۸۹)

۱) ۱-　　　۲) ۱

۳) صفر　　　۴) تعریف نشده

❖ **تست:** اگر $g(x)=۱-۲x$ و $f(x)=ax-۱$، به ازای کدام مقدار a دو تابع f و fog روی محور x متقاطع اند؟ (تالیفی)

۱) ۳-　　　۲) ۲-

۳) ۲　　　۴) ۳

۲- اگر ضابطه $f(x)$ و $f(g(x))$ در دسترس باشند و بخواهیم ضابطه $g(x)$ را به‌دست آوریم باید در ضابطه $f(x)$ به جـای x، $g(x)$ قرار دهیم و معادله را بر حسب $g(x)$ حل کنیم.

◀ **مثال:** اگر $f(x)=۳x-۴$ و $f(g(x))=۳x^۲-۶x+۱۴$ باشند، ضابطه $g(x)$ را به‌دست آورید. (کتاب درسی)

◀ **مثال:** اگر $g(x)=\frac{x+۳}{x-۲}$ و $g(f(x))=\frac{x^۲+۲}{x^۲-۳}$ باشند، ضابطه $g(x)$ را بیابید. (تالیفی)

❖ **تست:** اگر $f(x)=x^۲-x-۲$ و $f(g(x))=x^۲+x-۲$ باشند، آنگاه $(f+g)(x)$ کدام می‌تواند باشد؟ (تجربی خارج- ۹۰)

۱) $x^۲-۱$　　　۲) $x^۲+۱$

۳) $x^۲-۲x$　　　۴) $x^۲+۲x$

❖ **تست:** اگر $f(x)=2x^2+4$ و $f(g(x))=4x^2+6x$ باشند، مقدار $g(-2)$ کدام است؟ (تجربی خارج – ۸۴)

۱) صفر ۲) ۲

۳) ۱- ۴) ۲-

۳- اگر ضابطه $f(g(x))$ در دسترس باشد و بخواهیم مقدار $f(a)$ را حساب کنیم، ابتدا معادله $g(x)=a$ را حل می‌کنیم سپس جواب به‌دست آمده را در ضابطه $f(g(x))$ قرار می‌دهیم.

❖ **تست:** اگر $f(4x^2+4x+3)=\dfrac{\sqrt{-8x}}{|2x|}$ باشد، مقدار $f(2)$ کدام است؟ (تالیفی)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱

۳) ۲ ۴) ۴

❖ **تست:** اگر $f(\frac{1}{x})=\sqrt{\dfrac{2x-1}{x^2}}$ و $g(x)=2\cos^2 x$ باشند، مقدار $(fog)(\frac{\pi}{3})$ کدام است؟ (سراسری ریاضی)

۱) صفر ۲) $\frac{1}{2}$

۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۴) ۲

❖ **تست:** تابع با ضابطه $g(x)=x-\sqrt{x}$ مفروض است. اگر نمودار تابع f محورxها را در دو نقطه به طول‌های ۶ و $-\frac{1}{4}$ قطع کند، نمودار تابع fog محور xها را با کدام طول قطع می‌کند؟ (ریاضی خارج -۹۴)

۱) $4,\frac{1}{9}$ ۲) $9,\frac{1}{4}$

۳) $\frac{1}{4},4$ ۴) $9,4$

تبدیل نمودار توابع: در این بخش روی انبساط و انقباض نمودار تابع $y=f(x)$ بحث می‌کنیم. به عبارتی یاد مـی‌گیـریم بـا داشتن نمودار تابع $f(x)$ چگونه نمودار توابع $kf(x)$ یا $f(ax)$ و در حالت کلی $kf(ax+b)+c$ را رسم کنیم.

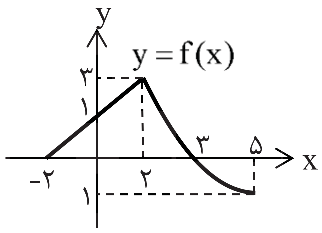
۱- برای رسم نمودار تابع $kf(x)$:

الف) اگر $k>0$ باشد، نمودار تابع $kf(x)$ از k برابر کردن اعضای برد (yهای) نمودار تابع $f(x)$ به‌دست می‌آید.

◂ **مثال:** نمودار تابع $y=\sin x$ را در بازه $[-\pi,\pi]$ رسم کرده سپس از روی آن نمودار توابـع $y=\frac{1}{2}\sin x$ و $y=3\sin x$ را رسم کنید. (کتاب درسی)

ب) اگر $k<0$ باشد ابتدا نمودار تابع $f(x)$ نسبت به محور xها قرینه می‌شود سپس اعضای برد (yهای) نمـودار تـابع $f(x)$، $|k|$ برابر می‌شوند.

◂ **مثال:** اگر شکل مقابل نمودار تابع $y=f(x)$ باشد، نمودار توابع $y=-2f(x)$ و $y=-\frac{1}{3}f(x)$ را رسم کنید. (تالیفی)

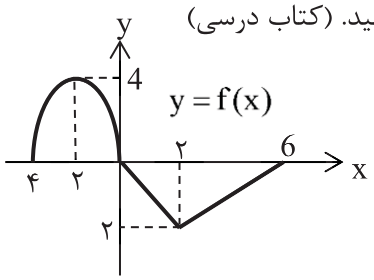


✓ **نکته:** اگر $0<|k|<1$ باشد، نمودار با ضریب $|k|$ فشرده می‌شود که می‌گـوییم انقبـاض عمـودی یافتـه اسـت و اگـر $|k|>1$ باشد، نمودار با ضریب $|k|$ کشیده می‌شود که می‌گوییم انبساط عمودی یافته است.

۲- برای رسم نمودار تابع $f(ax)$:

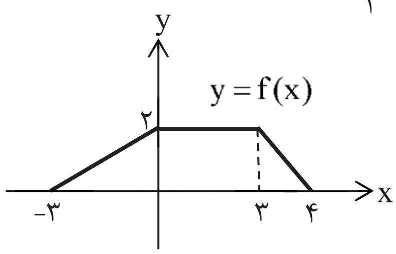
الف) اگر $a>0$ باشد نمودار تابع $f(ax)$ از $\frac{1}{a}$ برابر کردن اعضای دامنه (xهای) نمودار تابع $f(x)$ به‌دست می‌آید.

◄ **مثال:** نمودار تابع f در شکل زیر آمده است. نمودار توابع $f(2x)$ و $f(\frac{1}{2}x)$ را رسم کنید. (کتاب درسی)



ب) اگر $a<0$ باشد ابتدا نمودار تابع $f(x)$ را نسبت به محور yها قرینه می‌کنیم سپس اعضای دامنه (xهای) نمودار تابع $f(x)$، $\frac{1}{|a|}$ برابر می‌شوند.

◄ **مثال:** اگر نمودار تابع $y=f(x)$ به شکل زیر باشد، نمودار توابع $y=f(-3x)$ و $y=f(-\frac{2}{3}x)$ را رسم کنید. (تالیفی)

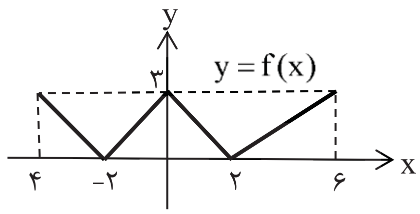


✓ **نکته:** اگر $0<|a|<1$ باشد، نمودار با ضریب $\frac{1}{|a|}$ فشرده می‌شود که می‌گوییم انقباض عمودی یافته است و اگر $|a|>1$ باشد، نمودار با ضریب $\frac{1}{|a|}$ کشیده می‌شود که می‌گوییم انبساط عمودی یافته است.

✓ **نکته:** دامنه تابع $y=kf(x)$ با دامنه تابع $y=f(x)$ برابر است ولی برد آن می‌تواند متفاوت باشد و برد تابع $y=f(ax)$ با برد تابع $y=f(x)$ برابر است ولی دامنه آن می‌تواند متفاوت باشد.

۳- برای رسم نمودار تابع $y=f(ax+b)$ از روی نمودار تابع $f(x)$ ابتدا آن را به صورت $f(a(x+\frac{b}{a}))$ نوشته سپس طول نقاط را $\frac{1}{a}$ برابر می‌کنیم. در نهایت به اندازه $\frac{b}{a}$ آن را در راستای محور xها مخالف علامت $\frac{b}{a}$ انتقال می‌دهیم.

◀ **مثال:** اگر نمودار تابع $y=f(x)$ در زیر آمده باشد، نمودار تابع $y=f(-2x+4)$ را رسم کنید. (تالیفی)



۴- برای رسم نمودار تابع $|f(x)|$ ابتدا نمودار تابع $f(x)$ را رسم کرده سپس آن قسمت از نمودار که زیر محور xها قرار دارد نسبت به محور x قرینه شده و به بالای محور x منتقل می‌شود.

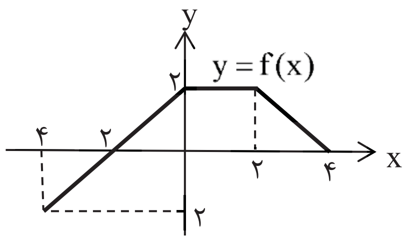
◀ **مثال:** نمودار توابع $y=|x^2-1|$ ، $y=|\log_2 x|$ و $y=\frac{1}{|x|}$ را رسم کنید. (کتاب درسی و تالیفی)

تا اینجا که رسیدیم نکات تبدیل نمودار توابع تموم شد. تو نکته حیاتی زیر یه جمع‌بندی برای این مباحث اومده. دقت کن:

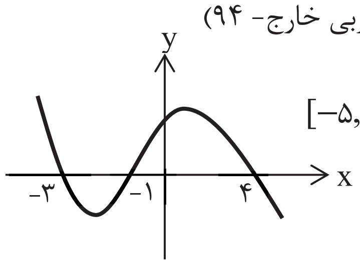
✓ **نکته مهم! (خاتم الترسیمات):** برای رسم نمودار تابع $y=kf(ax+b)+c$ از روی نمودار تابع $y=f(x)$:

۱- طول نقاط $\frac{1}{a}$ برابر می‌شود. ۲- نمودار به اندازه $\frac{b}{a}$، مخالف علامت، در راستای محور x انتقال می‌یابد. ۳- عرض نقاط k برابر می‌شود. ۴- نمودار به اندازه c واحد، موافق علامت، در راستای محور y منتقل می‌شود.

◄ **مثال:** با استفاده از نمودار تابع f، نمودار توابع $y=\frac{1}{2}f(4x)$، $y=-f(-x)+2$ و $y=2f(x-1)-3$ و $y=-3f(-2x-2)+3$ را رسم کنید. (کتاب درسی و مشابه نهایی خرداد و دی- ۹۸)



❖ **تست:** شکل زیر نمودار تابع $y=f(x-۲)$ است. دامنه تابع $\sqrt{xf(x)}$ کدام است؟ (تجربی خارج- ۹۴)



۱) $[-۱,۱]\cup[۰,۶]$　۲) $[-۳,۱]\cup[۰,۲]$　۳) $[-۵,-۳]\cup[-۱,۲]$　۴) $[-۵,-۳]\cup[۰,۲]$

❖ **تست:** قرینه نمودار $f(x)=\sqrt{x}$ را نسبت به محور yها تعیین کرده، سپس ۲ واحد به طرف xهای مثبت انتقال می‌دهیم. نمودار حاصل نیمساز ناحیه اول و سوم را با کدام طول قطع می‌کند؟ (تجربی خارج- ۹۷ و مشابه داخل- ۹۳)

۱) ۲-　　۲) ۰/۵

۳) ۱　　۴) ۱/۵

❖ **تست:** نمودار تابع $y=-x^۲+۲x+۵$ را ۳ واحد به طرف x های مثبت و سپس ۲ واحد به طرف y های منفی انتقال می‌هیم. نمودار جدید در کدام بازه بالای نیمساز ربع اول است؟ (ریاضی داخل و مشابه خارج- ۹۸)

۱) $(۳,۴)$　　۲) $(۲,۵)$

۳) $(۳,۵)$　　۴) $(۲,۶)$

❖ **تست:** مساحت ناحیه محدود به نمودار تابع $f(x)=|۲x-۱|$ و محور xها و دو خط $x=۱$ و $x=-۱$ کدام است؟

(تجربی داخل- ۹۰)

۱) $\frac{۳}{۲}$　　۲) ۲

۳) $\frac{۵}{۲}$　　۴) ۳

✓ **چند نکته:** اگر دامنه تابع $y=f(x)$ را داشته باشیم و بخواهیم دامنه تابع $y=kf(ax+b)+c$ را به‌دست آوریم کافی است عبارت $ax+b$ را درون بازه دامنه تابع $y=f(x)$ قرار داده و از حل این نامعادله و یافتن حدود x، دامنه تابع $y=kf(ax+b)+c$ را بیابیم.

اگر دامنه تابع $y=kf(ax+b)+c$ را داشته باشیم و بخواهیم دامنه تابع $y=f(x)$ را به‌دست آوریم کافی است دامنه داده شده را a برابر کرده و با عدد b جمع کنیم.

اگر برد تابع $y=f(x)$ را داشته باشیم و بخواهیم برد تابع $y=kf(ax+b)+c$ را به‌دست آوریم کافی است بازه برد $f(x)$ را در k ضرب کرده سپس با c جمع کنیم.

اگر برد تابع $y=kf(ax+b)+c$ را داشته باشیم و بخواهیم برد تابع $f(x)$ را بیابیم کافی است عبارت $kf(x)+c$ را درون بازه برد داده شده قرار داده و از حل این نامعادله و یافتن حدود $f(x)$، برد تابع $f(x)$ را بیابیم.

❖ **تست:** اگر دامنه و برد تابع $f(x)$ به ترتیب $D_f=[-۱,۳]\cup[۵,+\infty)$ و $R_f=(-\infty,۳]$ باشند، دامنه و برد تابع $g(x)=-۳f(۲x-۱)+۳$ در کدام گزینه آمده است؟ (تالیفی)

۱) $D_g=[-۶,+\infty)$ و $R_g=[۰,۲]\cup[۳,+\infty)$　　۲) $D_g=[۱,۳]$ و $R_g=[-۲,+\infty)$

۳) $D_g=[۰,۲]\cup[۳,+\infty)$ و $R_g=[-۶,+\infty)$　　۴) $D_g=[۱,۲]$ و $R_g=(-\infty,+۲]$

❖ **تست:** اگر نقطه $(-۲,۵)$ روی نمودار تابع $y=-۵f(۲x+۳)+۲$ قرار داشته باشد، نقطه متناظر آن روی نمودار تابع $y=f(x)$ نقطه (a,b) خواهد بود. حاصل $a+b$ کدام است؟ (تالیفی)

۱) ۳/۶-　　۲) ۱/۶-

۳) ۱/۶　　۴) ۳/۶

تابع وارون: اگر f یک تابع یک به یک باشد آنگاه وارون‌پذیر است و وارون آن از عوض کردن جای اعضای برد و دامنه با هم به‌دست می‌آید. وارون تابع f را با f^{-1} نشان می‌دهیم که نباید با $\frac{1}{f}$ اشتباه گرفته شود!

شرط لازم و کافی برای وارون‌پذیر بودن تابع f یک‌به‌یک بودن آن است.

مرور نکات تابع یک‌به‌یک:

تابعی یک به یک است که به هر عنصر در برد دقیقاً یک عنصر از دامنه نظیر شود.

الف) یک تابع در قالب زوج‌های مرتب زمانی یک به یک است که همه مولفه‌های دوم (yها) متمایز باشند و اگر یکسان شدند باید x متناظرشان نیز یکسان باشد.

ب) یک تابع در قالب نمودار ون زمانی یک به یک است که به هر عنصر مجموعه دوم حداکثر یک پیکان وارد شده باشد. (یا بی‌پیکان یا یک پیکان)

ج) یک تابع در قالب نمودار مختصاتی زمانی یک به یک است که هر خط موازی محور xها رسم کنیم نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند. (قطع نکند یا در یک نقطه قطع کند)

✓ **نکات تابع وارون:**

۱- اگر نقطه (a,b) متعلق به تابع وارون‌پذیر f باشد $((a,b)\in f)$ آنگاه نقطه (b,a) متعلق به f^{-1} خواهد بود. $((b,a)\in f^{-1})$

اگر تابع f در قالب مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب داده شود، f^{-1} از جابه‌جا کردن مؤلفه‌های اول و دوم زوج مرتب‌ها به‌دست می‌آید. اگر هم تابع f در قالب نمودار ون داده شود، با تغییر جهت پیکان‌ها f^{-1} به‌دست می‌آید.

◄ **مثال:** اگر $f=\{(۱,۲),(۲,۵),(۰,۳),(۴,-۱)\}$ و $g=\{(۲,۳),(-۱,۴),(۴,۱),(۳,۰)\}$ تابع gof^{-1} را به‌دست آورید.

(تجربی داخل- ۸۵ و مشابه ریاضی خارج- ۹۰)

❖ **تست:** به ازای کدام مقدار a، نمودار وارون تابع $f(x)=\frac{۱-۲x}{۳x+۴}$ از نقطه $(a+۴, a)$ می‌گذرد؟ (تالیفی)

۱) $-۱, -۵$ ۲) $-۱, ۲$

۳) $۱, ۲$ ۴) $۱, ۵$

❖ **تست:** دو تابع $f=\{(۲,۵),(۶,۳),(۳,۷),(۴,۱),(۱,۹)\}$ و $g(x)=\frac{x}{x-۱}$ مفروض‌اند. اگر $f^{-۱}(g(۲a))=۶$ باشد، a کدام است؟ (تجربی داخل- ۹۶ و مشابه ریاضی داخل و خارج- ۹۳)

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$

۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۵}{۲}$

❖ **تست:** اگر $f=\{(۱,۲),(۲,۵),(۳,۴),(۴,۶)\}$ و $g=\{(۲,۳),(۴,۲),(۵,۶),(۳,۱)\}$ باشند، تابع $\frac{g}{gof^{-۱}}$ کدام است؟ (ریاضی داخل- ۹۸)

۱) $\{(۴,۲),(۵,۲)\}$ ۲) $\{(۴,۲),(۳,۵)\}$ ۳) $\{(۵,۲),(۲,۴)\}$ ۴) $\{(۳,۵),(۲,۴)\}$

❖ **تست:** نمودار تابع با ضابطه $f(x)=A(۲)^{Bx}$ و خط به معادله $۴y=۵x$ در دو نقطه به طول‌های ۲ و ۴ متقاطع‌اند. مقدار $f^{-۱}(۱۰)$ کدام است؟ (ریاضی خارج و مشابه داخل – ۹۵)

۱) ۳ ۲) ۵

۳) ۶ ۴) ۸

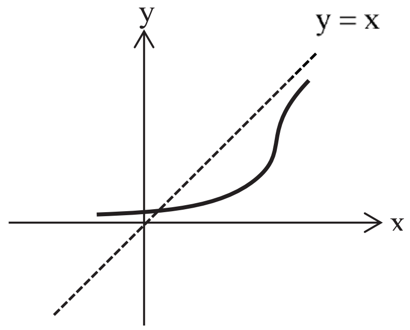
❖ **تست:** اگر $g(x)=f(x)+\sqrt{f(x)}$ و $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{۲x}$ باشند، حاصل $g^{-1}(۶)$ کدام است؟ (ریاضی خارج و مشابه داخل – ۸۹)

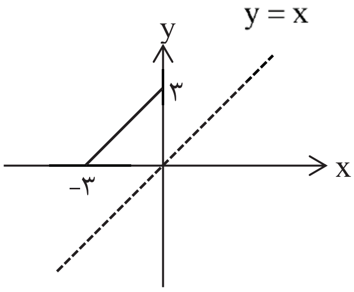
۱) ۱　　　۲) ۲

۳) ۳　　　۴) ۴

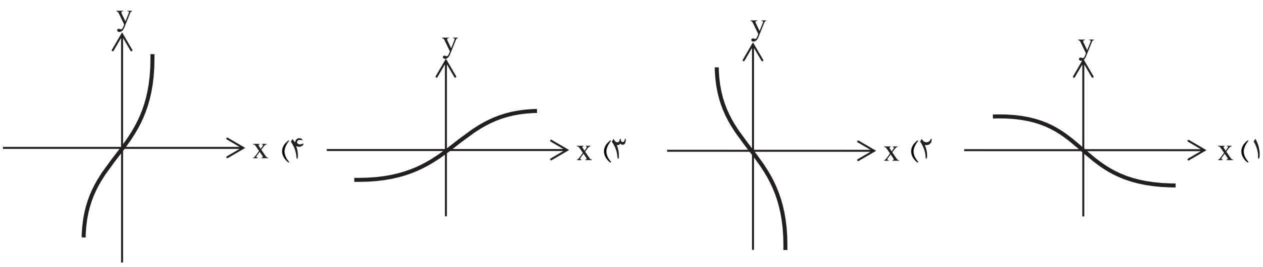
۲– اگر نمودار تابع وارون‌پذیر f را داشته باشیم، برای رسم نمودار تابع f^{-1} از روی نمودار تابع f کافی است نمودار تابع f را نسبت به خط $y=x$ (نیمساز ربع اول و سوم) قرینه کنیم تا نمودار تابع f^{-1} به‌دست آید.

◂ **مثال:** در هر یک از نمودارهای زیر نمودار تابع f داده شده است. نمودار تابع f^{-1} را از روی آن رسم کنید.





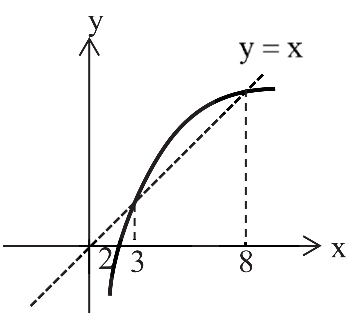
❖ **تست:** اگر $f(x)=x|x|$ باشد، نمودار تابع $y=f^{-1}(x)$ کدام است؟ (تجربی داخل – ۹۵ و مشابه سراسری ریاضی)



❖ **تست:** شکل روبرو نمودار تابع $y=f(x)$ و نیمساز ناحیه اول و سوم است. دامنه تابع با ضابطه $y=\sqrt{x-f^{-1}(x)}$ کدام است؟ (تجربی داخل- ۹۴)

۱) $(۰,۲]$　　　۲) $[۲,۳]$

۳) $[۲,۸]$　　　۴) $[۳,۸]$



۳- اگر ضابطه تابع وارون‌پذیر f در دست باشد برای یافتن ضابطه $f^{-1}(x)$ ابتدا x را برحسب y به‌دست آورده سپس جای x و y را عوض می‌کنیم.

✓ **تذکر:** با توجه به نکات گفته شده برای تابع وارون می‌توان گفت اگر D_f و R_f به ترتیب دامنه و برد تابع وارون‌پذیر f باشند برای دامنه و برد تابع $f^{-1}(x)$ داریم: $D_{f^{-1}}=R_f \quad , \quad R_{f^{-1}}=D_f$

◄ **مثال:** وارون توابع زیر را به‌دست آورید. (کتاب درسی و تالیفی)

$f(x)=۳x-۴$

$h(x)=۱+\sqrt{x-۲}$ (مشابه تجربی خارج- ۹۲)

$k(x)=\frac{۲x+۳}{x-۱}$

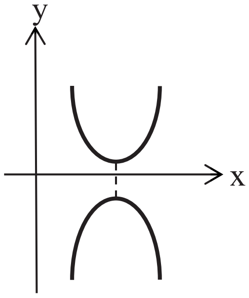
$y=\log_۳(۲x-۳)-۲$

◄ **مثال:** رابطه بین درجه سانتی‌گراد و فارنهایت که برای اندازه‌گیری دما استفاده می‌شوند به صورت $f(x)=\frac{۹}{۵}x+۳۲$ است که در آن x میزان درجه سانتی‌گراد و $f(x)$ میزان درجه فارنهایت است. $f^{-1}(x)$ را به‌دست آورده و توضیح دهید چه چیزی را نشان می‌دهد؟ (کتاب درسی)

✓ **نکته:** برخی توابع در کل دامنه خود یک‌به‌یک و در نتیجه وارون‌پذیر نیستند اما می‌توان با محدود کردن دامنه آن‌ها تابعی یک‌به‌یک و در نتیجه وارون‌پذیر تولید کرد.

توابع درجه دوم به فرم $f(x)=ax^2+bx+c$ و قدر مطلقی به فرم $f(x)=|ax+b|+c$ در این دسته از توابع قرار دارند.

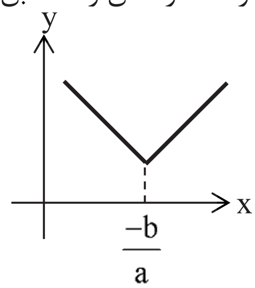
الف) تابع درجه دوم $f(x)=ax^2+bx+c$ را می‌توان به دو بخش قبل رأس و بعد رأس تفکیک کرد تا تابعی وارون‌پذیر تولید شود. برای یافتن وارون اینگونه توابع از مربع کامل کردن استفاده می‌کنیم.



طول راس $= x_s = \dfrac{-b}{2a} \rightarrow \quad D_f = (-\infty, \dfrac{-b}{2a}]$ یا $D_f = [\dfrac{-b}{2a}, +\infty) \rightarrow$ وارون‌پذیر

◀ **مثال:** با محدود کردن دامنه تابع $f(x)=x^2-4x+5$ یک تابع یک‌به‌یک به‌دست آورده و وارون آن را محاسبه کنید. دامنه و برد f و f^{-1} را نیز بیابید و نمودار آن‌ها را رسم کنید. (کتاب درسی و مشابه نهایی دی- ۹۸)

ب) تابع قدر مطلقی $f(x)=|ax+b|+c$ را می‌توان به دو بخش قبل ریشه عبارت داخل قدرمطلق و بعد ریشه عبارت داخل قدرمطلق تفکیک کرد تا تابعی وارون‌پذیر تولید شود. برای یافتن وارون اینگونه توابع با توجه به بازه، قدرمطلق را مطابق علامت عبارت درون آن حذف می‌کنیم و سپس وارون عبارت حاصل را می‌یابیم.



وارون‌پذیر $\rightarrow D_f=(-\infty,\frac{-b}{a}]$ یا $D_f=[\frac{-b}{a},+\infty) \rightarrow$

◀ **مثال**: با محدود کردن دامنه تابع $g(x)=|۲x-۴|+۱$ تابعی یک‌به‌یک تولید کرده و وارون آن را به‌دست آورید. (تالیفی)

❖ **تست**: قرینه خط به معادله $۳y-۲x=۴$ را نسبت به خط $y=x$ خط d می‌نامیم. عرض از مبدأ خط d کدام است؟

(تجربی داخل – ۹۷)

۱) ۲-		۲) ۱-

۳) ۱		۴) ۲

❖ **تست**: اگر $x\geq ۱$, $f(x)=x^۲-۲x-۳$ باشد، نمودارهای دو تابع $f^{-۱}$ و $g(x)=\frac{x-۹}{۲}$ با کدام طول متقاطع اند؟

(تجربی داخل- ۹۸)

۱) ۱۲		۲) ۱۵

۳) ۱۸		۴) ۲۱

❖ **تست:** ضابطه وارون تابع $y=\begin{cases}\sqrt{x} & x\geq 0\\ -\sqrt{-x} & x<0\end{cases}$ کدام است؟ (تجربی داخل- ۹۶ و خارج- ۹۱)

۱) $y=x|x|\ ,\ x\in\mathbb{R}$ ۲) $y=x^2\ ,\ x<0$ ۳) $y=\pm x^2\ ,\ x\in\mathbb{R}$ ۴) $y=\pm x|x|\ ,\ x\in\mathbb{R}$

❖ **تست:** اگر $f(x)=\frac{1}{2}(x+\sqrt{x^2+4})$ باشد، حاصل $f^{-1}(x)+f^{-1}(\frac{1}{x})$ کدام است؟ (ریاضی داخل- ۹۵)

۱) $2x$ ۲) $\frac{2}{x}$

۳) x^2-1 ۴) صفر

❖ **تست:** تابع $f(x)=|2x-6|-|x+1|$ در یک بازه صعودی است. ضابطه معکوس آن در این بازه کدام است؟

(تجربی خارج و مشابه داخل- ۹۴)

۱) $-x+7\ ,\ x>8$ ۲) $\frac{1}{3}x+2\ ,\ x>3$

۳) $x+7\ ,\ x>-4$ ۴) $\frac{1}{2}x-1\ ,\ -4<x<8$

❖ **تست:** اگر دو خط به معادلات $ay+bx=8$ و $2x-3y=b$، نسبت به نیمساز ربع اول متقارن باشند، $a+b$ کدام است؟ (ریاضی خارج – ۹۳)

۱) ± 3 ۲) ± 2

۳) $2,-3$ ۴) $-2,3$

✓ **نکته تستی:** اگر تابع درجه دوم به فرم $f(x)=ax^2+bx+c$ بخواهد در یک بازه یک‌به‌یک یا وارون‌پذیر باشد باید طول رأس آن در خارج یا روی دو انتهای بازه مذکور قرار گیرد.

❖ **تست:** حدود m کدام باشد تا تابع $f(x)=x^2-2mx+m$ در بازه $(1,4]$ وارون‌پذیر شود؟ (تالیفی)

۱) $[4,+\infty)$ ۲) $(-\infty,4]$

۳) $[1,4]$ ۴) $(-\infty,1]\cup[4,+\infty)$

✓ **نکته تستی:** اگر یک تابع قدرمطلقی $f(x)=|ax+b|+c$ بخواهد در یک بازه یک‌به‌یک یا وارون‌پذیر باشد باید ریشه عبارت داخل قدرمطلق در خارج یا روی دو انتهای بازه مذکور قرار گیرد.

❖ **تست:** به ازای کدام مجموعه مقادیر a، تابع $f(x)=|ax-a-3|$ در بازه $(-\infty,2)$ وارون‌پذیر می‌شود؟ (تالیفی)

۱) $(0,3]$ ۲) $[0,3)$

۳) $[0,3]$ ۴) $(0,3)$

✓ **نکته تستی:** وارون تابع هموگرافیک $(c\neq 0)$ $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ برابر $f^{-1}(x)=\dfrac{-dx+b}{cx-a}$ است. بنابراین اگر $a=-d$ باشد، f و f^{-1} بر هم منطبق می‌شوند.

❖ **تست:** اگر $f(x)=\dfrac{ax+5}{2x+b}$ و $f^{-1}(x)=\dfrac{3x+5}{2x-2}$ باشند، حاصل ab کدام است؟ (تالیفی)

۱) ۶ ۲) ۶-

۳) ۳- ۴) ۲

❖ **تست:** مقدار m کدام باشد تا تابع $f(x)=\dfrac{mx+3}{2x+m^2}$ بر وارون خود منطبق شود؟ (تالیفی)

۱) صفر ۲) ۱-

۳) $0,-1$ ۴) $0,1$

۴- نقطه یا نقاط برخورد تابع وارون‌پذیر f با خط $y=x$ در صورت وجود نقاط برخورد تابع f^{-1} با خط $y=x$ نیز هست.

بنابراین برخی یا همه نقاط برخورد دو تابع f و f^{-1} از حل معادله $f(x)=x$ یا $f^{-1}(x)=x$ به‌دست می‌آید.

✓ **دو نکته:** ۱- اگر تابع f یا f^{-1} اکیداً صعودی باشد تنها حل معادله $f(x)=x$ یا $f^{-1}(x)=x$ کفایت می‌کند اما اگر f یا f^{-1} اکیداً نزولی باشد باید معادله $f(x)=-x$ یا $f^{-1}(x)=-x$ را نیز حل کنیم.

۲- از این روش زمانی استفاده می‌کنیم که حل معادله $f^{-1}(x)=f(x)$ سخت باشد یا هر دو ضابطه $f(x)$ و $f^{-1}(x)$ در دسترس نباشند.

❖ **تست:** اگر $f(x)=x^{3}-3x \quad , \quad x\geq 1$، نمودارهای دو تابع f و f^{-1} با کدام طول متقاطع‌اند؟ (ریاضی خارج – ۸۸)

۱) $\sqrt{2}$ ۲) ۲

۳) ۴ ۴) غیرمتقاطع

❖ **تست:** نمودار تابع $f(x)=\frac{x+4}{x-2}$ با دامنه $\mathbb{R}-\{2\}$ وارون خود را با کدام طول قطع می‌کند؟ (تجربی خارج - ۹۶)

۱) $-1, -4$ ۲) $-1, 4$

۳) $1, -4$ ۴) $1, 4$

✓ **نکته تستی:** نمودار تابع خطی f در صورتی با نمودار وارون خود تلاقی ندارد که موازی خط $y=x$ باشد. به عبارتی باید ضابطه آن به فرم $f(x)=x+b$ درآید.

❖ **تست:** تابع خطی f با وارون خود برخوردی ندارد. اگر $f^{-1}(x)=f(5)+2x+4$ باشد، مقدار $f(\frac{2}{3})$ کدام است؟ (تالیفی)

۱) ۴ ۲) ۴-

۳) $\frac{16}{3}$ ۴) $-\frac{16}{3}$

۵- ترکیب هر تابع وارون‌پذیر با وارونش تابع همانی می‌شود. به زبان ریاضی داریم:

$$(fof^{-1})(x)=x\ ,\ x\in D_{f^{-1}}=R_f \qquad (f^{-1}of)(x)=x\ ,\ x\in D_f=R_{f^{-1}}$$

پس برای اینکه اثبات کنیم دو تابع f و g وارون یکدیگر اند کافی است نشان دهیم:

$$(fog)(x)=x \quad \text{یا} \quad (gof)(x)=x$$

◂ **مثال:** نشان دهید توابع f و g داده شده در زیر وارون یکدیگراند. (کتاب درسی)

$$f=\{(۴,۱),(۳,۲),(۵,۳)\} \quad \text{و} \quad g=\{(۱,۴),(۲,۳),(۳,۵)\}$$

$$f(x)=-\sqrt{-۸+x} \qquad \text{و} \qquad g(x)=۸+x^۲\ ,\ x\le ۰$$

❖ **تست:** اگر f تابعی یک‌به‌یک بوده و $fof^{-1}=\{(۲,a),(b,۳),(c,۴c)\}$ باشد، حاصل $(a+b)^c$ کدام است؟ (تالیفی)

۱) صفر　　۲) ۱

۳) ۵　　۴) ۶

❖ **تست:** اگر f تابعی وارون‌پذیر بوده و $(f^{-1}of)(x)=\dfrac{ax+۲b+c}{(b-۲)x+۳}$ باشد، حاصل $a+b+c$ کدام است؟ (تالیفی)

۱) ۱　　۲) ۲

۳) ۳　　۴) ۴

۶- اگر f و g توابع وارون‌پذیر باشند داریم: $(fog)^{-1}(x)=(g^{-1}of^{-1})(x)$

◂ **مثال:** اگر $f(x)=\frac{۱}{۸}x-۳$ و $g(x)=x^{۳}$، مقدار $(g^{-1}of^{-1})(۵)$ و $(f^{-1}of^{-1})(۶)$ را به‌دست آورید.

(کتاب درسی و نهایی شهریور- ۹۸)

❖ **تست:** اگر $f(x)=\frac{۲}{۵}x-۴$ و $g(x)=x^{۳}+x$ باشند، مقدار $(g^{-1}of^{-1})(۸)$ کدام است؟ (تجربی خارج- ۹۸)

۱) ۱/۵ ۲) ۲

۳) ۲/۵ ۴) ۳

❖ **تست:** اگر $f=\{(۱,۲),(۲,۳),(۴,۵),(۳,۴)\}$ و $g=\{(۲,۱),(۳,۲),(۴,۵),(۵,۴)\}$، تابع $g^{-1}of^{-1}$ کدام است؟ (ریاضی خارج- ۹۰)

۱) $\{(۴,۴),(۱,۱),(۳,۴)\}$ ۲) $\{(۳,۳),(۵,۵),(۴,۳)\}$ ۳) $\{(۲,۲),(۱,۱),(۴,۴)\}$ ۴) $\{(۲,۲),(۳,۳),(۵,۵)\}$

❖ **تست:** دو تابع $f=\{(۵,۲),(۷,۳),(۱,۴),(۳,۶),(۹,۱)\}$ و $g(x)=\sqrt{۵x+۹}$ مفروض‌اند. اگر $(g^{-1}of^{-1})(a)=۸$ باشد، a کدام است؟ (تجربی خارج- ۹۶)

۱) ۲ ۲) ۳

۳) ۶ ۴) ۷

❖ تست‌های کنکور ۹۹ مرتبط با این فصل ❖

❖ **تست:** قرینه نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را نسبت به محور yها تعیین کرده سپس منحنی حاصل را ۴ واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم. منحنی اخیر و منحنی اصلی نسبت به کدام خط متقارن هستند؟ (ریاضی داخل- ۹۹)

۱) $x=۱$ ۲) $x=۱/۵$

۳) $x=۲$ ۴) $x=۲/۵$

❖ **تست:** اگر $f(x)=x+\sqrt{x}$ و $g(x)=\frac{۹x+۶}{۱-x}$ باشند، مقدار $(g^{-۱}of^{-۱})(۲۰)$ کدام است؟ (ریاضی داخل- ۹۹)

۱) $\frac{۲}{۵}$ ۲) $\frac{۳}{۵}$

۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

❖ **تست:** ابتدا قرینه نمودار تابع $f(x)=(x-۱)^۲$ را نسبت به مبدا مختصات رسم کرده، سپس منحنی حاصل را ۴ واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم. طول نقاط تلاقی منحنی اخیر با منحنی اصلی کدام است؟ (ریاضی خارج- ۹۹)

۱) $۰,۲$ ۲) $-۱,۱$

۳) $-۱,۲$ ۴) $-۲,۱$

❖ **تست:** با فرض $x\geq ۲$, $f(x)=x^۲-۴x+۹$ و $g(x)=\frac{۳-x}{۲}$، حاصل $(f^{-۱}og^{-۱})(-۹)$ کدام است؟ (ریاضی خارج- ۹۹)

۱) ۳ ۲) ۴

۳) ۵ ۴) ۶

❖ **تست:** نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را در امتداد محور xها ۱۲ واحد در جهت مثبت و سپس در امتداد محور yها ۲ واحد در جهت مثبت انتقال می‌دهیم. فاصله نقطه برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f از مبدا مختصات کدام است؟

(تجربی داخل- ۹۹)

۱) $۴\sqrt{۱۵}$　　۲) $۶\sqrt{۷}$

۳) $۴\sqrt{۱۷}$　　۴) $۶\sqrt{۱۰}$

❖ **تست:** اگر $g(x)$ وارون تابع $f(x)=x+\sqrt{x}$ باشد، مقدار $g(۶)+g(۱۲)$ کدام است؟ (تجربی داخل- ۹۹)

۱) ۱۰　　۲) ۱۱

۳) ۱۳　　۴) ۱۴

❖ **تست:** فرض کنید در دامنه $[۰,+\infty)$، تابع $f(x)=\dfrac{۲^x+(\frac{۱}{۲})^x}{۲}$ مفروض باشد. $f^{-۱}(۲)$ کدام است؟ (تجربی داخل- ۹۹)

۱) $\log_۲(۲-\sqrt{۳})$　　۲) $\log_۲(\sqrt{۳}-۱)$　　۳) $\log_۲(۱+\sqrt{۳})$　　۴) $\log_۲(۲+\sqrt{۳})$

❖ **تست:** تابع f با ضابطه $f(x)=x-\dfrac{۲}{x}$ در دامنه $D_f=(-\infty,۰)$ را در نظر بگیرید. نمودار تابع $f^{-۱}$ نیمساز ناحیه چهارم را با کدام طول قطع می‌کند؟ (تجربی داخل- ۹۹)

۱) $\frac{۳}{۴}$　　۲) ۱

۳) $\frac{۳}{۲}$　　۴) ۲

❖ **تست:** نمودار تابع $f(x)=x^{۲}-۲x \quad , \quad x>۱$ مفروض است. قرینه نمودار آن نسبت به محور xها را ۱۶ واحد در امتداد محور yها در جهت مثبت انتقال می‌دهیم. فاصله نقطه برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f از مبدا مختصات کدام است؟

(تجربی خارج- ۹۹)

۱) $۴\sqrt{۵}$ ۲) $۶\sqrt{۲}$

۳) $۵\sqrt{۲}$ ۴) $۲\sqrt{۵}$

❖ **تست:** فرض کنید $g(x)$ وارون تابع $f(x)=x+۲\sqrt{x}$ باشد. حاصل $g(۳)+g(۱۵)$ کدام است؟ (تجربی خارج- ۹۹)

۱) ۱۲ ۲) ۱۱

۳) ۱۰ ۴) ۸

❖ **تست:** تابع با ضابطه $f(x)=\dfrac{۲^{x}-(\frac{۱}{۲})^{x}}{۲}$ را در نظر بگیرید. $f^{-۱}(۲)$ کدام است؟ (تجربی خارج- ۹۹)

۱) $\log_{۲}(-۱+\sqrt{۵})$ ۲) $\log_{۲}(۱+\sqrt{۵})$ ۳) $\log_{۲}(۲+\sqrt{۵})$ ۴) $\log_{۲}(۳+\sqrt{۵})$

❖ **تست:** تابع f با ضابطه $f(x)=x-\dfrac{۱}{۲x}$ بر دامنه $D_f=(۰,+\infty)$ مفروض است. نمودار تابع $f^{-۱}$ نیمساز ناحیه دوم را با کدام طول قطع می‌کند؟ (تجربی خارج- ۹۹)

۱) $-\dfrac{۳}{۲}$ ۲) $-\dfrac{۳}{۴}$

۳) -۱ ۴) $-\dfrac{۱}{۲}$