درس اول: حد بی‌نهایت

بخش‌پذیری: اگر چند جمله‌ای دلخواه $f(x)$ را بر **دو جمله‌ای درجه اول** $(x-a)$ تقسیم کنیم، خارج‌قسمت، چند جمله‌ای مثل $Q(x)$ و باقیمانده عدد ثابت مثل R می‌باشد. در نتیجه:

$$\begin{array}{l|l} f(x) & x-a \\ \cline{2-2} & Q(x) \\ \vdots & \\ \hline R & \end{array}$$

و اگر $f(x)$ را به صورت حاصلضرب عامل‌ها بنویسیم، داریم:

$$f(x)=(x-a)\,Q(x)+R$$

نکته: در تقسیم چند جمله‌ای $f(x)$ بر دو جمله‌ای درجه‌ی اول $(x-a)$، باقی‌مانده‌ی تقسیم برابر $f(a)$ است.

$$f(x)=(x-a)Q(x)+R\xrightarrow{x=a}f(a)=(a-a)Q(a)+R\Rightarrow R=f(a)$$

نتیجه: اگر $f(a)=0$ ، آنگاه $f(x)$ بر $x-a$ بخش‌پذیر است.

مثال: چند جمله‌ای $f(x)=2x^2-5x+1$ را در نظر بگیرید.

الف) آیا $f(x)$ بر $x-3$ بخش‌پذیر است؟ چرا؟

ب) با انجام تقسیم، ادعای خود را ثابت کنید.

پ) $g(x)$ را به صورت حاصلضرب عامل‌ها بنویسید.

مثال: حاصل تقسیم‌های زیر را بیابید.

الف) $3x^2-5x-2 \,\big|\, x-2$

ب) $2x^3+5x^2-3x-10 \,\big|\, x+2$

مثال: چند جمله‌ای $f(x)=2x^3+x^2+1$ را در نظر بگیرید.

الف) آیا $f(x)$ بر $x+1$ بخش‌پذیر است؟ چرا؟

ب) با انجام تقسیم، ادعای خود را ثابت کنید.

پ) $f(x)$ را به صورت حاصلضرب عامل‌ها بنویسید.

مثال: آیا چند جمله‌ای $f(x)=۳x^{۲}-x-۲$ بر $x-۱$ بخش‌پذیر است؟ چرا؟

مثال: مقدار k را طوری بیابید که چند جمله‌ای $f(x)=۳kx^{۴}-(۲k+۱)x^{۲}-۳k-۳۳$ بر $x+۲$ بخش‌پذیر باشد.

حد توابع کسری:

اگر دو تابع f و g در نقطه‌ای به طول a حد داشته باشند و حد آنها در این نقطه به ترتیب m و n باشد به طوری که $n\neq ۰$ آنگاه تابع $\frac{f}{g}$ در a حد دارد و این حد برابر $\frac{m}{n}$ است.

مثال: حاصل حدود زیر را بیابید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۲}\frac{۳x^{۲}+۶x-۴}{۲x+۱}=$

ب) $\lim\limits_{x\to -۱}\frac{۳x^{۳}-۴x+۲}{x^{۲}+۱}=$

حد $\frac{۰}{۰}$:

اگر $f(x)$ و $g(x)$ دو جمله‌ای باشند به طوری که: $f(a)=g(a)=۰$ در این صورت:

مبهم $\leftarrow \lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{۰}{۰}$ در این حالت با توجه به روابط $f(a)=۰$ و $g(a)=۰$ نتیجه می‌گیریم که چند جمله‌ای‌های $f(x)$ و $g(x)$ هر دو بر عامل $(x-a)$ **بخش‌پذیرند**. بنابراین **با تقسیم صورت و مخرج کسر** $\frac{f}{g}$ **بر** $(x-a)$، تابع گویای دیگری حاصل می‌شود که حد آن در نقطه a ، در صورت وجود با حد $\frac{f}{g}$ در a برابر است.

مثال: مقدار حدود زیر را بیابید.

الف) $\lim\limits_{x \to ۱} \dfrac{x^{۲}-۱}{x^{۲}+x-۲} =$

ب) $\lim\limits_{x \to -۳} \dfrac{x^{۲}-۹}{x^{۲}+۳x} =$

پ) $\lim\limits_{x \to \frac{۱}{۲}} \dfrac{۴x^{۲}-۱}{۲x^{۳}-۱۳x^{۲}+۲۴x-۹} =$

ت) $\lim\limits_{x \to \frac{۱}{۲}} \dfrac{۴x^{۲}-۴x+۱}{۲x^{۲}+x-۱} =$

ث) $\lim\limits_{x \to \frac{۱}{۲}} \dfrac{۲x^{۲}-x}{۴x^{۲}-۱} =$

ج) $\lim\limits_{x \to -۲} \dfrac{۲x^{۳}+۳x^{۲}+۴}{x^{۳}+۸} =$

چ) $\lim\limits_{x \to ۵} \dfrac{x^{۳}-۴x^{۲}-۴x-۵}{x^{۲}-۲۵} =$

ح) $\lim\limits_{x\to -۴} \dfrac{x^{۲}+۳x-۴}{x^{۳}+۴x^{۲}+x+۴}=$

حـــد توابـــع رادیکـــالی $\dfrac{\circ}{\circ}$: اگـــر صـــورت یـــا مخـــرج تـــابع $\dfrac{f}{g}$ شـــامل یـــک عبـــارت رادیکـــالی باشـــد و $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=\circ$. در این حالت برای محاسبه حد $\dfrac{f}{g}$ در نقطه a لازم است ابتدا صورت و مخرج کـسر را **در یک عبارت رادیکالی ضرب کرده تا عامل صفر شونده** $(x-a)$ **از بین رود**. سپس حـد $\dfrac{f}{g}$ را بـه دسـت مـی-آوریم.

مثال: حاصل حدود عبارات زیر را بیابید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۵} \dfrac{۲-\sqrt{x-۱}}{x-۵}=$

ب) $\lim\limits_{x\to ۳} \dfrac{۳-x}{۳-\sqrt{۲x+۳}}=$

پ) $\lim\limits_{x\to ۱} \dfrac{x-\sqrt{۲x-۱}}{x^{۲}-x}=$

ت) $\lim\limits_{x\to ۳} \dfrac{x^{۲}-۹}{۲-\sqrt{x+۱}}=$

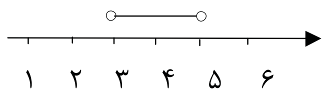
ث) $\lim\limits_{x\to ۱} \dfrac{x-\sqrt{x}}{x^{۲}+x-۲}=$

ج) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{\sqrt[3]{x}+1}{x^2+3x+2} =$

چ) $\lim\limits_{x \to 8} \dfrac{x^2-8x}{\sqrt[3]{x}-2} =$

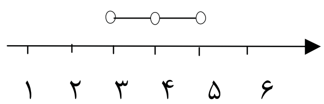
همسایگی: **هر بازه باز** شامل عدد حقیقی x_0 را یک **همسایگی** x_0 می‌نامیم. به عبارتی دیگر اگر $x_0 \in (a,b)$ آنگاه بازه (a,b) یک همسایگی x_0 می‌باشد.

مثال: بازه $(3,5)$ یک همسایگی ۴ است. زیرا $4 \in (3\ ,\ 5)$ اما یک همسایگی ۲ نیست. زیرا : $2 \notin (3\ ,\ 5)$.



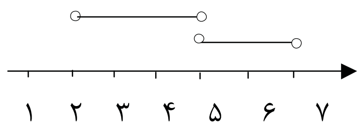
همسایگی مخدوف: اگر بازه (a,b) یک همسایگی عدد حقیقی x_0 باشد، آنگاه مجموعه $(a,b)-\{x_0\}$ یک همسایگی مخدوف x_0 نامیده می‌شود.

مثال: مجموعه $(3,5)-\{4\}$ یک همسایگی مخدوف ۴ می‌باشد.



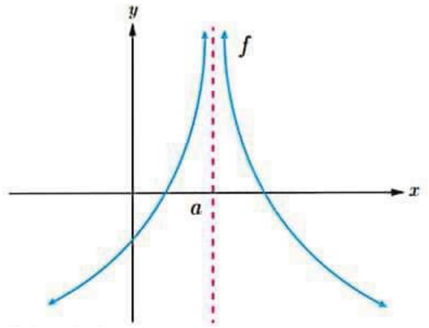
همسایگی چپ و راست: اگر r عددی مثبت باشد، آنگاه بازه $(x_0\ ,\ x_0+r)$ را یک همسایگی راست x_0 و بازه $(x_0-r\ ,x_0)$ را یک همسایگی چپ x_0 می‌نامیم.

مثال: بازه $(5\ ,\ 7)$ یک همسایگی راست عدد ۵ و بازه $(2\ ,\ 5)$ یک همسایگی چپ ۵ می‌باشد.

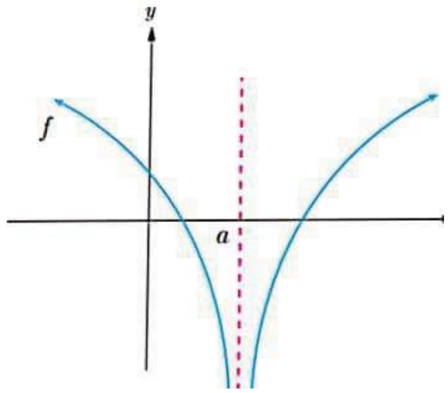


حدود نامتناهی:

تعریف: فرض کنیم تابع f در یک **همسایگی مخذوف a** تعریف شده باشد، رابطه $\lim_{x\to a} f(x)=+\infty$ به این معناست که می‌توان **مقدارهای** $f(x)$ **را از هر عدد مثبت دلخواه بزرگ‌تر کرد**، مشروط بر آنکه x ، **به قدر کافی به a نزدیک اختیار شود.**

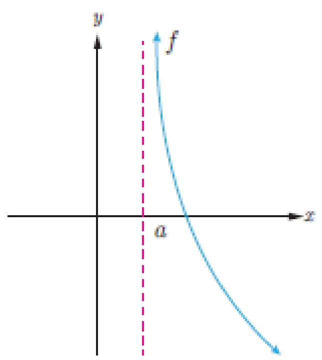


تعریف: فرض می‌کنیم تابع f در یک **همسایگی محذوف a** تعریف شده باشد، رابطه $\lim_{x\to a} f(x)=-\infty$ به این معناست که می‌توان **مقدارهای** $f(x)$ **را از هر منفی دلخواهی کوچک‌تر کرد**، مشروط بر آنکه x ، **به قدر کافی به a نزدیک اختیار شود.**

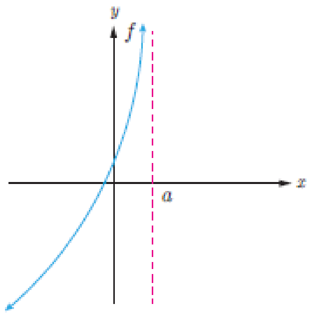


حدود یک طرفه نا متناهی:

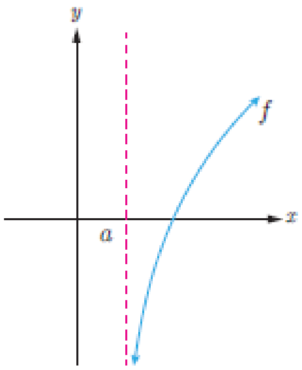
تعریف: فرض می‌کنیم تابع f در یک **همسایگی راست** از a تعریف شده باشد، رابطه $\lim_{x\to a^+} f(x)=+\infty$ به این معناست که می‌توان **مقادیر** $f(x)$ **را از هر عدد مثبت دلخواه بزرگ‌تر کرد**، مشروط بر آنکه x ، با **مقادیر بزرگ‌تر از a به قدر کافی به a نزدیک اختیار شود.**



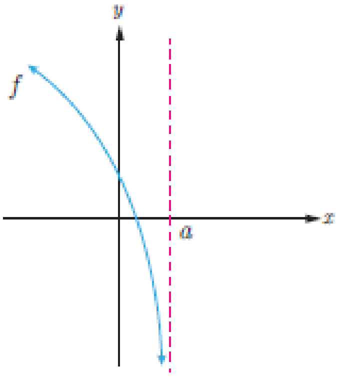
تعریف: فرض می‌کنیم f در یک **همسایگی چپ** از a تعریف شده باشد، رابطه $\lim_{x\to a^-} f(x)=+\infty$ به این معناست که می‌توان **مقادیر** $f(x)$ **را از هر عدد مثبت دلخواه بزرگ‌تر کرد،** مشروط بر آنکه x ، با **مقادیر کوچک‌تر از a به قدر کافی به a نزدیک اختیار شود.**



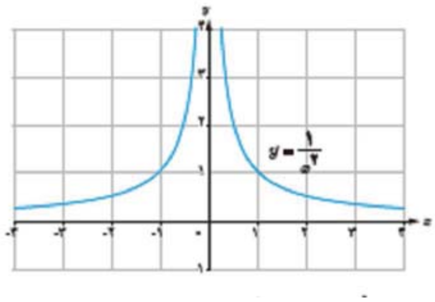
تعریف: فرض می‌کنیم f در یک **همسایگی راست** از a تعریف شده باشد، رابطه $\lim_{x\to a^+} f(x)=-\infty$ به این معناست که می‌توان **مقادیر** $f(x)$ **را از هر عدد منفی دلخواه کوچک‌تر کرد،** مشروط بر آنکه x ، با **مقادیر بزرگ‌تر از a به قدر کافی به a نزدیک اختیار شود.**



تعریف: فرض می‌کنیم f در یک **همسایگی چپ** از a تعریف شده باشد، رابطه $\lim_{x\to a^-} f(x)=-\infty$ به این معناست که می‌توان **مقادیر** $f(x)$ **را از هر عدد منفی دلخواه کوچک‌تر کرد،** مشروط بر آنکه x ، با **مقادیر کوچک‌تر از a به قدر کافی به a نزدیک اختیار شود.**

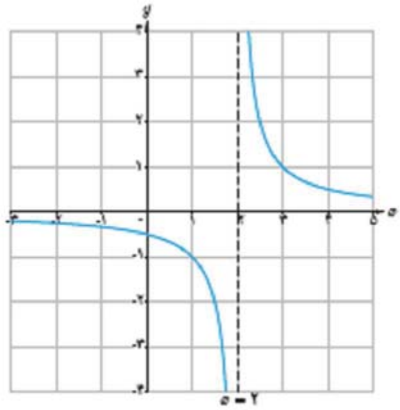


مثال: حاصل حدود عبارات زیر را بیابید.



الف) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} =$

ب) $\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{1}{x-2} =$



پ) $\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{1}{x-2} =$

ت) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \frac{[x]-3}{|2x-1|} =$

ث) $\lim\limits_{x\to 5^-} \frac{2x}{x-5} =$

ج) $\lim\limits_{x\to 5^+} \frac{2x}{x-5} =$

چ) $\lim\limits_{x\to 0} -\frac{1}{x^2} =$

ح) $\lim\limits_{x \to -\frac{۱}{۳}} \dfrac{[x]}{|۳x+۱|} =$

خ) $\lim\limits_{x \to ۰^-} \dfrac{x+۱}{\sin^{۲} x} =$

د) $\lim\limits_{x \to ۳} \dfrac{۲}{|x-۳|} =$

ذ) $\lim\limits_{x \to ۰} \dfrac{۱}{|x|} =$

ر) $\lim\limits_{x \to \bar{۰}} \dfrac{۱}{x} =$

ز) $\lim\limits_{x \to -۶} \dfrac{-۹}{(x+۶)^{۲}} =$

ژ) $\lim\limits_{x \to -\frac{۱}{۲}} \dfrac{۴x+۱}{(۲x+۱)^{۲}} =$

س) $\lim\limits_{x \to ۳^+} \dfrac{۱-۵x}{x^{۲}-۹} =$

ش) $\lim\limits_{x \to (-۲)^-} \dfrac{-۳x}{x^{۲}-۴} =$

ص) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{۲}^+} \dfrac{۱}{\cos x} =$

ض) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{۲}^-} \dfrac{۱}{\cos x} =$

ط) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}^-} \tan x =$

ظ) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}^+} \tan x =$

ک) $\lim\limits_{x\to ۴^+} \frac{۴-[x]}{x-۴} =$

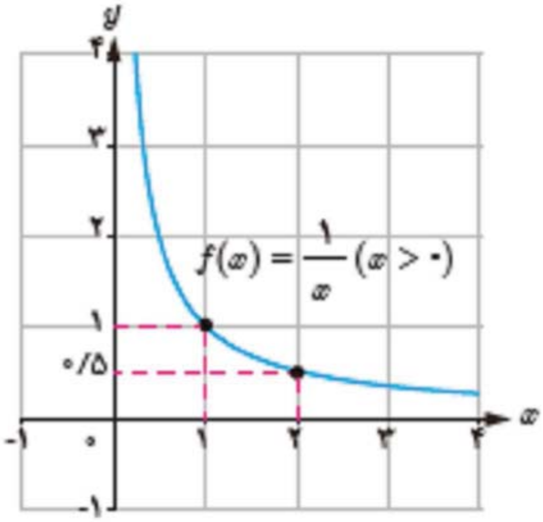
گ) $\lim\limits_{x\to ۴^-} \frac{[x]-۴}{x-۴} =$

ف) $\lim\limits_{x\to ۳^-} \frac{[x]-۳}{x-۳} =$

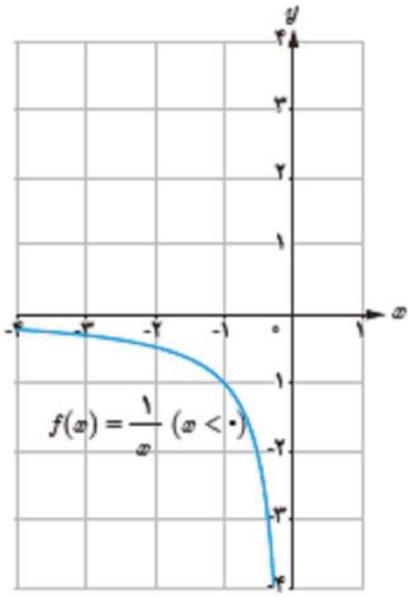
درس دوم: حد در بی‌نهایت

تعریف: اگر تابع f در بازه‌ای مثل $(a,+\infty)$ تعریف شده باشد، رابطه $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$ به ایـن معناسـت کـه مـی‌تـوان $f(x)$ **را به هر مقدار دلخواه می‌توان به L نزدیک کرد**، مشروط بر آنکه x ، **به قدر کافی بزرگ اختیار شود.**

مثال: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{۱}{x} =$

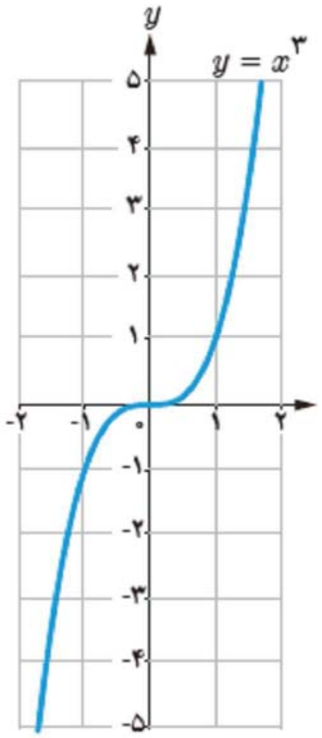


تعریف: اگر تابع f در بازه‌ای مثل $(-\infty\ ,\ b)$ تعریف شده باشد، رابطه $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L$ به این معناست کـه $f(x)$ **را به هر مقدار دلخواه می‌توان به L نزدیک کرد**، مشروط بر آنکه x ، **به قدر کافی کوچک و منفی اختیار شود.**

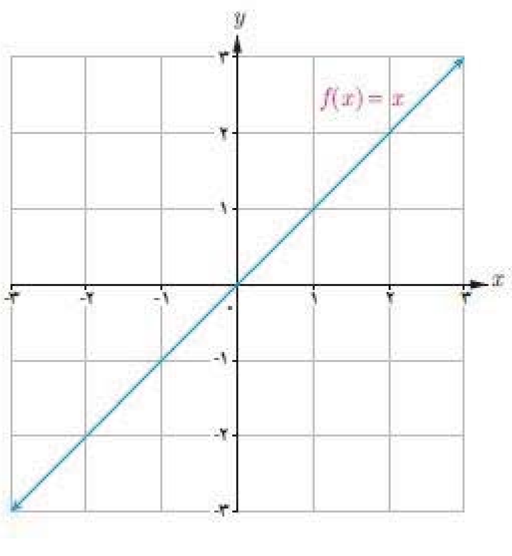


حد نامتناهی در بی نهایت:

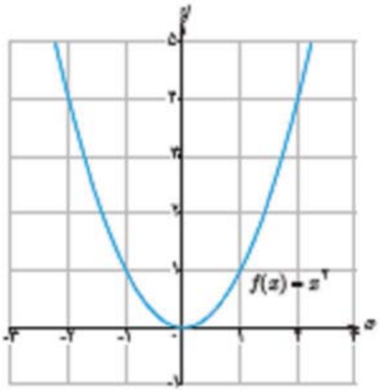
تعریف: فرض کنیم تابع f در بازه‌ای مثل $(a,+\infty)$ تعریف شده باشد، رابطه $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ به این معناست که مقدارهای $f(x)$ **را می‌توان از هر عدد مثبت دلخواهی بزرگ‌تر کرد،** مشروط بر آنکه x ، **به قدر کافی بزرگ اختیار شود.**



تعریف: فرض کنیم تابع f در بازه‌ای مثل $(-\infty,b)$ تعریف شده باشد، رابطه $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ به این معناست که مقدارهای $f(x)$ **را می‌توان از هر عدد منفی دلخواهی کوچک‌تر کرد،** مشروط بر آنکه x ، **به قدر کافی کوچک و منفی اختیار شود.**

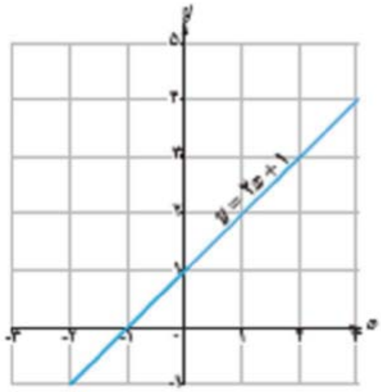


مثال: با توجه به نمودار هر تابع طرف دوم تساوی‌ها را بنویسید.



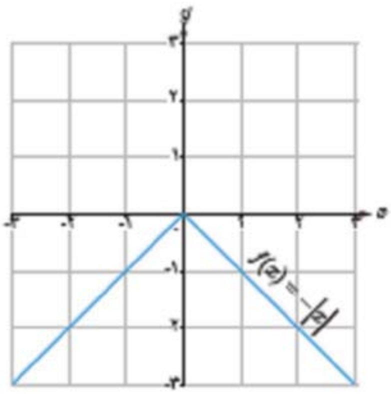
الف) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^{۲} = \ldots$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^{۲} = \ldots$



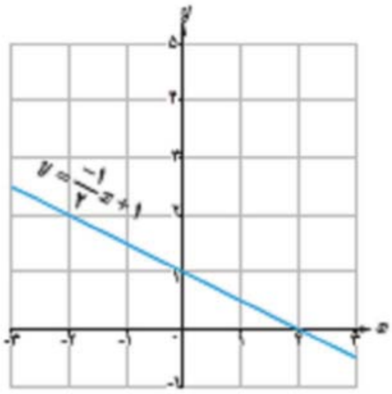
ب) $\lim\limits_{x\to-\infty} (۲x+۱) = \ldots$

$\lim\limits_{x\to+\infty} (۲x+۱) = \ldots$



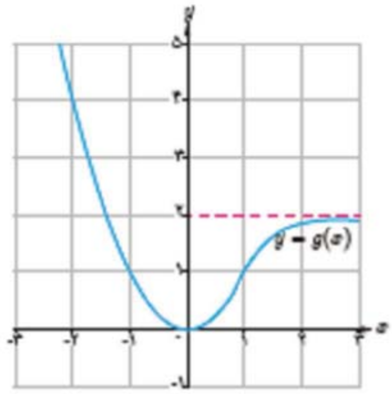
ت) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ldots$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ldots$



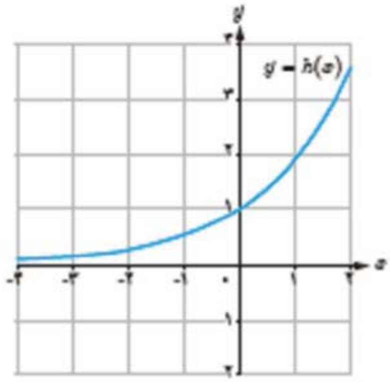
ت) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{-۱}{۲}x+۱\right) = \ldots$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{-۱}{۲}x+۱\right) = \ldots$



ث) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \ldots$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \ldots$



ج) $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = \ldots$

$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \ldots$

نکته: اگر n عددی طبیعی باشد، داریم:

الف) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{۱}{x^n} = ۰$　　　　ب) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{۱}{x^n} = ۰$

نکته: فرض کنیم $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = n$ و $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x) = n$ ، در این صورت :

الف) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x)\pm g(x)) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) \pm \lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x) = n\pm m$

ب) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x)\ g(x)) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) \,.\, \lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x) = nm$

پ) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)}{\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x)} = \frac{n}{m}$　,　$m \neq ۰$

نکته: فرض کنیم n عددی طبیعی و a یک عدد حقیقی غیرصفر باشد.

الف) $\lim\limits_{x\to+\infty} ax^n = \begin{cases} +\infty & a>0 \\ -\infty & a<0 \end{cases}$

ب) $\lim\limits_{x\to-\infty} ax^n = \begin{cases} +\infty & \text{n زوج و a مثبت} \\ -\infty & \text{n زوج و a منفی} \\ -\infty & \text{n فرد و a مثبت} \\ +\infty & \text{n فرد و a منفی} \end{cases}$

نکته: فرض کنیم f یک تابع چند جمله‌ای از درجه n به صورت $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + ... + k$ باشد، n عددی طبیعی و a یک عدد حقیقی غیر صفر است. در این صورت:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} (ax^n + bx^{n-1} + ... + k) = \lim_{x\to\pm\infty} ax^n$$

(حد تابع f وقتی $x \to \pm\infty$ برابر است با حد جمله‌ای که بیشترین توان را دارد.)

مثال: حدود عبارت‌های زیر را بیابید.

الف) $\lim\limits_{x\to+\infty} (2x - 3 + 5x^2) =$

ب) $\lim\limits_{x\to-\infty} (-2x^3 + 4x^2 - 5x + 9) =$

پ) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-12x^5 + 7x^3 - 2x - 9}{3x^2 - 8x + 1} =$

ت) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^3 - 5x + 4}{7x^3 - 11x^2 - 6x} =$

ث) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{5x + 4}{x^3 + x - 8} =$

ج) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-4x^7 + 5x^2}{2x^3 + 9} =$

چ) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{x} =$

ح) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{7x^2 - 4x + 1}{3x^2 + 5x - 6} =$

خ) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x + 2}{x - 1} =$

د) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{۱-۵t^{۲}}{t^{۲}+۳t}=$

ذ) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{۱}{۲-۳x}=$

ر) $\lim\limits_{x\to-\infty} (۹+\frac{۷}{x^{۳}})=$

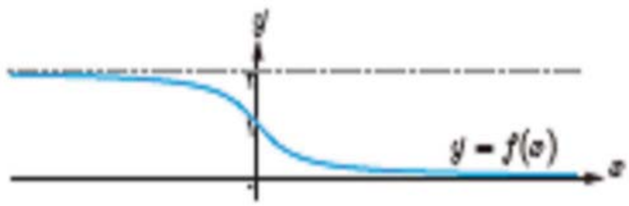
ز) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{۳+\frac{۱}{x^{۲}}}{\frac{۴}{x}-۵}=$

ژ) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{۲x+۱}{۴}=$

س) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{۲x^{۵}-۶x^{۳}-x}{x^{۲}-۵x+۱}=$

مثال: با توجه به نمودار توابع، حدود خواسته شده را بنویسید.

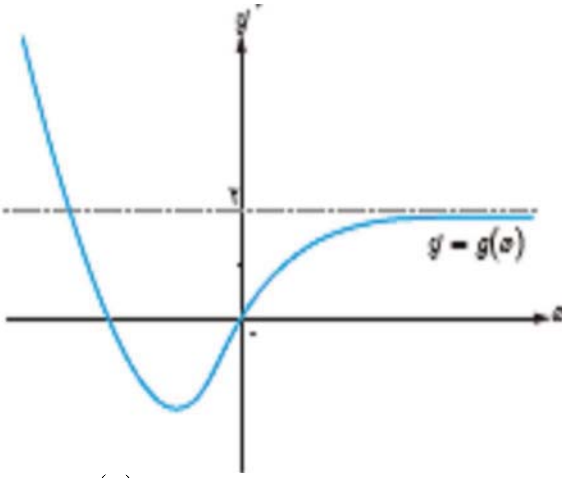
الف)



$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=...$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=...$

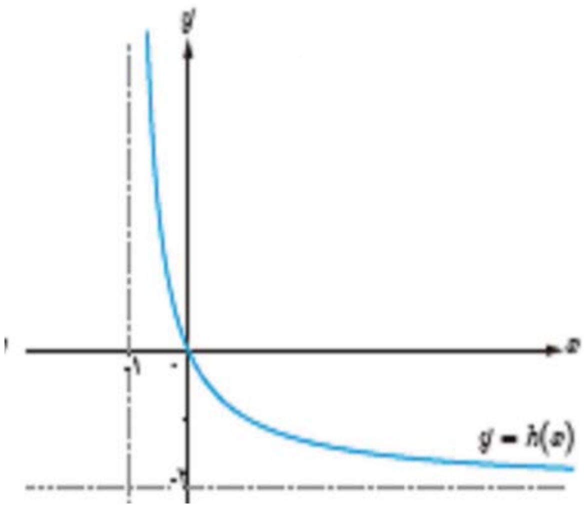
ب)



$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \ldots$

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \ldots$

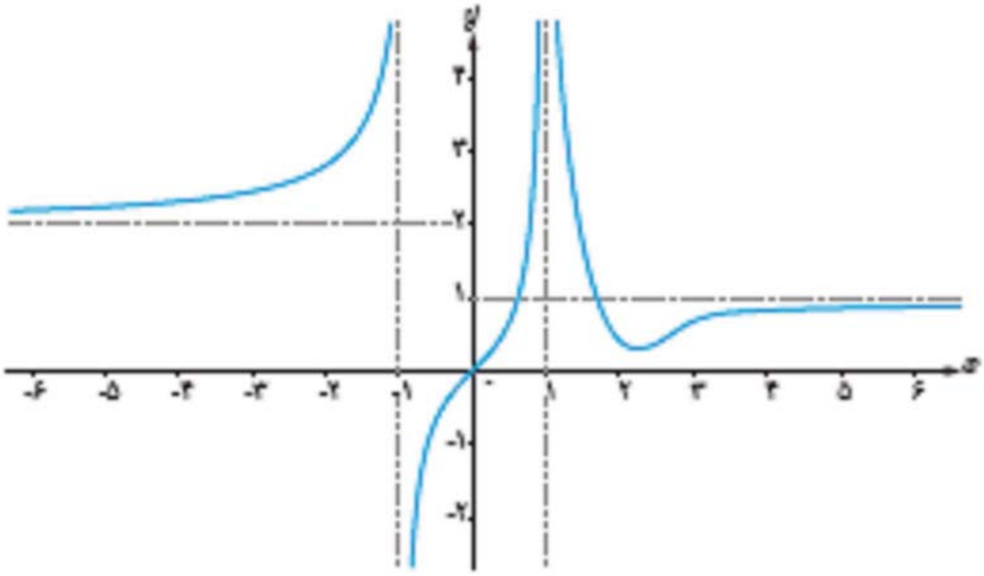
ج)



$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \ldots$

$\lim_{x\to(-۱)^{+}} h(x) = \ldots$

مثال: نمودار تابع به شکل مقابل است، حدود خواسته شده را بنویسید:



الف) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$

ب) $\lim\limits_{x\to (-۱)^-} f(x)$

پ) $\lim\limits_{x\to (-۱)^+} f(x)$

ت) $\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)$

ث) $\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)$

ج) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$