۷

ریشه اعداد و توان گویا

بخش ۱

یادآوری توان

اگر عدد a را n بار در خودش ضرب کنیم، حاصل به صورت خلاصه‌ی زیر نوشته می‌شود:

$$\underbrace{a\times a\times\cdots\times a}_{n\ \text{بار}}=a^n \qquad (\text{خوانده می‌شود: } a \text{ به توان } n)$$

برای نمونه؛

$$۳^۴=۳\times۳\times۳\times۳=۸۱ \quad \text{و} \quad ۵^۲=۵\times۵=۲۵$$

بویژه:

همیشه $a^۰=۱$ و $a^۱=a$ است. (استثنائاً عبارت توانی $۰^۰$ بی معنی است.)

مثال: مقادیر زیر را حساب کرده و نتیجه‌ی مشاهدات خود را بیان کنید.

$$(-۳)^۲ \qquad (-۲)^۴ \qquad (-۴)^۳$$

پاسخ

$$(-۳)^۲=(-۳)(-۳)=+۹$$
$$(-۲)^۴=(-۲)(-۲)(-۲)(-۲)=+۱۶$$
$$(-۴)^۳=(-۴)(-۴)(-۴)=-۶۴$$

می‌بینید:

اگر عدد منفی به توان زوج برسد، حاصل مثبت و اگر به توان فرد برسد، حاصل منفی می‌شود.

توجه:

تفاوت عددهای $(-۲)^۴$ و $-۲^۴$ را در نظر داشته باشید. (در دومی، توانِ ۴ فقط برای عدد ۲ است.)

$$(-۲)^۴=(-۲)\times(-۲)\times(-۲)\times(-۲)=۱۶ \quad \text{و} \quad -۲^۴=-۲\times۲\times۲\times۲=-۱۶$$

توان‌رسانی منفی عددها را معرفی می‌کنیم:

توان منفی:

اگر عدد $a\neq۰$ به توان -۱ برسد، حاصل را برابر معکوس آن عدد تعریف می‌کنیم:

$$a^{-۱}=\frac{۱}{a}$$

برای نمونه؛

$$۳^{-۱}=\frac{۱}{۳} \quad \text{و} \quad \left(\frac{۲}{۳}\right)^{-۱}=\frac{۱}{\frac{۲}{۳}}=\frac{۳}{۲} \quad \text{و} \quad ۲^۰+۲^{-۱}=۱+\frac{۱}{۲}=\frac{۳}{۲}$$

حالت کلی:

برای هر عدد طبیعی n قرار می‌دهیم:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^{n} \quad \text{و} \quad a^{-n}=\frac{1}{a^{n}}$$

برای نمونه؛

$$۳^{-۲}=\frac{۱}{۳^{۲}}=\frac{۱}{۹} \quad \text{و} \quad \left(\frac{۳}{۲}\right)^{-۲}=\left(\frac{۲}{۳}\right)^{۲}=\frac{۴}{۹}$$

مثال: مقادیر زیر را محاسبه کنید.

الف) $-۳^{-۴}$ ب) $(-۳)^{-۴}$

پاسخ

الف) باید عدد ۳ به توان ۴− برسد و قرینه شود؛

$$-۳^{-۴}=-\frac{۱}{۳^{۴}}=-\frac{۱}{۸۱}$$

ب) عدد ۳− به توان ۴− می‌رسد؛

$$(-۳)^{-۴}=\frac{۱}{(-۳)^{۴}}=\frac{۱}{۸۱}$$

یادآوری قوانین محاسبات با عددهای توان‌دار:

قاعده‌ی ۱:

وقتی پایه‌ها یکسان باشند:

$$\boxed{\frac{a^m}{a^n}=a^m\div a^n=a^{m-n}} \quad \text{و} \quad \boxed{a^m\times a^n=a^{m+n}}$$

نمونه‌ها:

$$۲^{۳}\div ۲^{-۲}=۲^{۳-(-۲)}=۲^{۵}=۳۲ \quad \text{و} \quad ۸^{۳}\times ۸^{-۵}=۸^{۳-۵}=۸^{-۲}=\frac{۱}{۸^{۲}}=\frac{۱}{۶۴}$$

قاعده‌ی ۲:

وقتی پایه‌ها نابرابر ولی توان‌ها یکسان باشند:

$$\boxed{a^n\div b^n=\frac{a^n}{b^n}=\left(\frac{a}{b}\right)^n} \quad \text{و} \quad \boxed{a^n\times b^n=(a\times b)^n}$$

نمونه‌ها:

- ضرب $۲^{۴}\times ۵^{۴}$ با $(۲\times ۵)^{۴}=۱۰^{۴}$ برابر است.
- عدد $۲۱^{۳}$ را می‌توان به صورت $۲۱^{۳}=(۳\times ۷)^{۳}=۳^{۳}\times ۷^{۳}$ نوشت که هنگام تجزیه‌ی اعداد کاربرد دارد.

- $(۲/۵)^۳ \div (۰/۵)^۳ = \left(\frac{۲/۵}{۰/۵}\right)^۳ = ۵^۳$

مثال: حاصل عبارت‌های زیر را به‌صورت یک عدد توان‌دار بنویسید.

الف) $(\frac{۷}{۳})^۶ \times (\frac{۵}{۶})^۶$

ب) $(۴^۶ + ۴^۶ + ۴^۶ + ۴^۶) \times ۵^۷$

پاسخ

با توجه به دو قاعده‌ی گفته شده می‌توان نوشت:

الف) $(\frac{۷}{۳})^۶ \times (\frac{۵}{۶})^۶ = (\frac{۷}{۳} \times \frac{۵}{۶})^۶ = (\frac{۳۵}{۱۸})^۶$

ب) $(۴^۶ + ۴^۶ + ۴^۶ + ۴^۶) \times ۵^۷ = (۴ \times ۴^۶) \times ۵^۷ = ۴^۷ \times ۵^۷ = (۴ \times ۵)^۷ = ۲۰^۷$

قاعده‌ی ۳:

گاهی عدد توان‌دار خودش به توان می‌رسد:

$\boxed{(a^m)^n = a^{m \times n}}$ (توان‌ها در هم ضرب می‌شود.)

برای نمونه:

$$(۲^۵)^۳ \times (۵^۳)^۵ = ۲^{۵\times۳} \times ۵^{۳\times۵} = ۲^{۱۵} \times ۵^{۱۵} = ۱۰^{۱۵}$$

مثال: (نهایی- خرداد ۱۴۰۱)

حاصل هر مورد را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.

الف) $(۱۵^۶)^{\frac{۱}{۲}}$ ب) $۱۱^{\frac{۲}{۵}} \times ۶^{\frac{۲}{۵}}$ پ) $۴^{\frac{۲}{۳}} \div ۴^{\frac{۱}{۳}}$

پاسخ

الف) $(۱۵^۶)^{\frac{۱}{۲}} = ۱۵^{۶\times\frac{۱}{۲}} = ۱۵^۳$

ب) $۱۱^{\frac{۲}{۵}} \times ۶^{\frac{۲}{۵}} = (۱۱ \times ۶)^{\frac{۲}{۵}} = ۶۶^{\frac{۲}{۵}}$

پ) $۴^{\frac{۲}{۳}} \div ۴^{\frac{۱}{۳}} = ۴^{\frac{۲}{۳}-\frac{۱}{۳}} = ۴^{\frac{۱}{۳}}$

مثال: (نهایی- خرداد ۱۴۰۰)

حاصل هر مورد را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.

الف) $(\frac{a^{\frac{۱}{۲}}}{a^{\frac{۱}{۴}}})^۴$ ب) $۵^{\frac{۱}{۳}} \times ۵^{-\frac{۱}{۳}}$

پاسخ

الف)

$$(\frac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}}})^4=\frac{(a^{\frac{1}{2}})^4}{(a^{\frac{1}{4}})^4}=\frac{a^{\frac{1}{2}\times 4}}{a^{\frac{1}{4}\times 4}}=\frac{a^2}{a}=a^{2-1}=a^1=a$$

ب) $5^{\frac{1}{3}}\times 5^{-\frac{1}{3}}=5^{\frac{1}{3}-\frac{1}{3}}=5^0=1$

توجه کنید:

قاعده‌ی زیر در حل معادلات کاربرد فراوانی دارد:

$$a^r=a^s \Rightarrow r=s$$

پس، در حل معادله‌ای که مجهول در توان قرار دارد:

- ابتدا با استفاده از سه قاعده‌ی قبل، پایه‌ها را یکسان کرده و سپس
- قاعده‌ی بالا را بکار می‌بریم.

مثال: (نهایی- خرداد ۱۴۰۱)

در تساوی $8^x\times 8^3=8^{10}$ مقدار x را تعیین کنید.

پاسخ

به آسانی می‌توان نوشت:

$$8^{x+3}=8^{10} \rightarrow x+3=10 \Rightarrow x=10-3=7$$

مثال: در معادله‌ی زیر مقدار x را تعیین کنید.

$$3^{3x-2}\times 9^{5-2x}=\frac{1}{81}$$

پاسخ

پایه‌ها را یکسان می‌سازیم:

$$3^{3x-2}\times(3^2)^{5-2x}=\frac{1}{3^4} \rightarrow 3^{3x-2}\times 3^{10-4x}=3^{-4} \rightarrow 3^{-x+8}=3^{-4}$$

اکنون نکته‌ی قبل را به کار می‌بریم:

$$-x+8=-4 \Rightarrow x=12$$

مثال: اگر یک چهارم عدد 8^{2m-3} برابر ۱۶ باشد، مقدار m را بیابید.

پاسخ

طبق شرایط گفته شده، معادله‌ای تشکیل داده و آن را حل می‌کنیم:

$$\frac{۱}{۴}\times ۸^{۲m-۳}=۱۶ \to \frac{۱}{۲^{۲}}\times (۲^{۳})^{۲m-۳}=۲^{۴} \to ۲^{-۲}\times ۲^{۶m-۹}=۲^{۴} \to ۲^{۶m-۱۱}=۲^{۴}$$

در نتیجه:

$$۶m-۱۱=۴ \to ۶m=۱۵ \Rightarrow m=\frac{۱۵}{۶}=\frac{۵}{۲}$$

------------✧------------

مثال: (نهایی- خرداد ۱۴۰۰)

در هر تساوی مقدار x را بیابید.

الف) $(۵^{x})^{۶}=\frac{۱}{۵^{۲}}$

ب) $۸^{۴}\times ۹^{x}=۷۲^{۴}$

پاسخ

الف) مشابه موارد قبلی:

$$(۵^{x})^{۶}=\frac{۱}{۵^{۲}} \to ۵^{۶x}=۵^{-۲} \to ۶x=-۲ \Rightarrow x=\frac{-۲}{۶}=-\frac{۱}{۳}$$

ب) می‌توان نوشت:

$$۸^{۴}\times ۹^{x}=۷۲^{۴} \to ۹^{x}=\frac{۷۲^{۴}}{۸^{۴}}=(\frac{۷۲}{۸})^{۴}=۹^{۴} \Rightarrow x=۴$$

------------✧------------

بخش ۲
ریشه‌گیری

در این بخش، مفهوم ریشه و رادیکال را به صورت دقیق معرفی کرده، تشابه، تفاوت و برخی خواص آن‌ها را می‌بینیم.

عدد ۴ را در نظر بگیرید؛ عددهای ۲ و ۲− دارای خاصیت زیر هستند:

$$۲^۲ = ۴ \quad \text{و} \quad (-۲)^۲ = ۴$$

یعنی مجذور هر کدام برابر ۴ است. گوئیم ۲ و ۲− ریشه‌های دوم عدد ۴ هستند.

در کل:

ریشه‌ی دوم:

اگر a و b دو عدد باشند به طوری‌که $b^۲ = a$، آنگاه عدد b را یک «**ریشه‌ی دوم**» عدد a می‌نامند.

نمونه‌ی دیگر؛ چون:

$$۵^۲ = ۲۵ \quad \text{و} \quad (-۵)^۲ = ۲۵$$

بنابراین، عددهای ۵ و ۵− هر دو ریشه‌ی دوم عدد ۲۵ هستند.

مانند بالا:

هر عدد مثبت a همیشه دو ریشه‌ی دوم دارد که قرینه‌ی یکدیگر هستند.

بعلاوه:

ریشه‌ی مثبت را با $\sqrt[۲]{a}$ (برای سادگی با $\sqrt{a}$) نشان می‌دهند. بنابراین:

$$\sqrt{۴} = ۲ \quad \text{و} \quad \sqrt{۲۵} = ۵$$

نتیجه:

هر عدد مثبت a، دو ریشه‌ی دوم دارد که $\sqrt{a}$ و $-\sqrt{a}$ هستند.

مثال: عدد $\frac{۱۶}{۴۹}$ دارای دو ریشه‌ی دوم $\frac{۴}{۷}$ و $-\frac{۴}{۷}$ است. چون:

$$(\frac{۴}{۷})^۲ = \frac{۴^۲}{۷^۲} = \frac{۱۶}{۴۹} \quad \text{و} \quad (-\frac{۴}{۷})^۲ = \frac{۴^۲}{۷^۲} = \frac{۱۶}{۴۹}$$

بنابراین می‌نویسیم:

$$\sqrt{\frac{۱۶}{۴۹}} = \frac{۴}{۷}$$

مثال: به موارد زیر پاسخ دهید:

الف) آیا عدد -۲۵ ریشه‌ی دوم داشته و $\sqrt{-۲۵}$ مقدار دارد؟ نتیجه را بیان کنید.

ب) مقدار $\sqrt{۰}$ چقدر است و عدد صفر چند ریشه‌ی دوم دارد؟

پاسخ

الف) اگر عدد b ریشه‌ی دوم -۲۵ باشد، باید:

$$b^۲=-۲۵$$

اما عدد به توان ۲ هیچ‌گاه منفی نمی‌شود، پس b وجود نداشته و $\sqrt{-۲۵}$ معنی ندارد.

(**نتیجه:** عددهای منفی ریشه‌ی دوم ندارند.)

ب) اگر $b^۲=۰$ باشد، فقط $b=۰$ قابل قبول است و بنابراین:

عدد صفر فقط یک ریشه‌ی دوم داشته و بعلاوه $\sqrt{۰}=۰$ است.

ریشه‌های سوم اعداد را می‌توان به طور مشابه معرفی نمود:

ریشه‌ی سوم:

اگر عددی به توان ۳ برسد و برابر a شود، به آن ریشه‌ی سوم a گویند؛ $b^۳=a$.

عدد b را به صورت $\sqrt[۳]{a}$ نشان می‌دهیم.

برای نمونه؛

- عدد ۴ یک ریشه‌ی سوم ۶۴ است، زیرا: $۴^۳=۶۴$.
- عدد -۳ یک ریشه‌ی سوم -۲۷ است، زیرا: $(-۳)^۳=-۲۷$.

و بنابراین:

$$\sqrt[۳]{۶۴}=۴ \quad \text{و} \quad \sqrt[۳]{-۲۷}=-۳$$

می‌بینید که:

هر عدد منفی یا مثبت a، فقط یک ریشه‌ی سوم دارد که همان $\sqrt[۳]{a}$ است.

مثال: به موارد زیر پاسخ دهید:

الف) عدد ۶۴ چند ریشه‌ی دوم دارد؟ چند ریشه‌ی سوم دارد؟

ب) عدد -۶۴ چند ریشه‌ی دوم و سوم دارد؟

پاسخ

الف) چون $۸^۲=۶۴$ و $(-۸)^۲=۶۴$، عدد ۶۴ دو ریشه‌ی دوم ۸ و -۸ را دارد. از سوی دیگر، تنها عددی که توان سوم آن برابر ۶۴ باشد، عدد ۴ است: $۴^۳=۶۴$؛ پس ۶۴ فقط یک ریشه‌ی سوم دارد.

ب) در مورد -64 توجه داشته باشید که چون این عدد منفی است، توان دوم هیچ عددی با آن برابر نیست و لذا -64 ریشه‌ی دوم ندارد. با این حال، واضح است که $(-4)^3 = -64$ و بنابراین تنها ریشه‌ی سوم آن -4 است.

یادآوری: (قدرمطلق)

- قدرمطلق هر عدد مثبت برابر خود آن عدد است:

$$x > 0 \Rightarrow |x| = x$$

برای نمونه،

$$|12-9| = |3| = 3 \quad \text{و} \quad |7| = 7$$

- قدرمطلق هر عدد منفی برابر قرینه‌ی آن عدد است:

$$x < 0 \Rightarrow |x| = -x$$

برای نمونه،

$$|7-9| = |-2| = -(-2) = 2 \quad \text{و} \quad |-5| = -(-5) = 5$$

- قدرمطلق عدد صفر، همان صفر است:

$$|0| = 0$$

توجه کنید:

اشتباهاتی مانند $|1-\sqrt{2}| = 1+\sqrt{2}$ یا $|x-2| = x+2$ را انجام ندهید؛ باید ببینید داخل قدرمطلق در کل مثبت یا منفی است و سپس طبق تعریف بالا، خود آن عبارت یا قرینه‌اش را از قدرمطلق خارج کنید.

مثال: قدرمطلق عدد $2-\sqrt{5}$ را بیابید.

پاسخ

چون $\sqrt{5} \cong 2/2$ از عدد 2 بزرگ‌تر است، پس $2-\sqrt{5}$ عددی منفی خواهد بود و بنابراین:

$$|2-\sqrt{5}| = -(2-\sqrt{5}) = \sqrt{5}-2$$

نکته:

تفاوت دو عبارت $(\sqrt{a})^2$ و $\sqrt{a^2}$ را در نظر داشته باشید:

- در عبارت $(\sqrt{a})^2$ مقدار a نمی‌تواند منفی باشد. برای $a > 0$ رادیکال و توان 2 با هم حذف می‌شوند؛ یعنی:

$$(\sqrt{a})^2 = a$$

نمونه‌ها:

$$(\sqrt{5})^2 = 5 \quad \text{و} \quad (\sqrt{11/2})^2 = 11/2 \quad \text{و} \quad (\sqrt{-5})^2 \ \text{بی‌معنی}$$

❖ در عبارت $\sqrt{a^{۲}}$، عدد a می‌تواند هر عددی (مثبت یا منفی) باشد؛ چون در هر صورت $a^{۲}$ منفی نمی‌شود. بنابراین عبارت $\sqrt{a^{۲}}$ بامعنی بوده، ولی رابطه‌ی زیر نادرست است:

$$\sqrt{a^{۲}}=a$$

زیرا سمت چپ مثبت، ولی سمت راست می‌تواند منفی هم باشد. بنابراین، هنگام ساده کردن باید قدرمطلق به‌کار ببرید:

$$\sqrt{a^{۲}}=|a|$$

نمونه‌ها:

$$\sqrt{۵^{۲}}=|۵|=۵ \quad \text{و} \quad \sqrt{(-۶)^{۲}}=|-۶|=۶$$

❖ ولی در مورد $\sqrt[۳]{\ }$ در هر دو حالت به قدرمطلق نیازی نیست:

$$(\sqrt[۳]{a})^{۳}=a \quad \text{و} \quad \sqrt[۳]{a^{۳}}=a$$

مثال: هر مورد را حساب کرده یا ساده کنید.

الف) $\sqrt[۳]{-\frac{۲۷}{۱۰۰۰}}$

ب) $\sqrt{(۱-\frac{۱}{۳})^{۲}-(\frac{۳}{۲})^{-۱}}$

پ) مقادیر $\sqrt{a^{۲}}+\sqrt{b^{۲}}$ و $\sqrt{a^{۲}b^{۲}}$. ($b>۰$ و $a<۰$)

پاسخ

الف) مانند نمونه‌های قبل:

$$\sqrt[۳]{-\frac{۲۷}{۱۰۰۰}}=-\sqrt[۳]{(\frac{۳}{۱۰})^{۳}}=-\frac{۳}{۱۰}$$

ب)

$$\sqrt{(۱-\frac{۱}{۳})^{۲}-(\frac{۳}{۲})^{-۱}}=۱-\frac{۱}{۳}-\frac{۲}{۳}=\frac{۳-۱-۲}{۳}=\frac{۰}{۳}=۰$$

پ) با توجه به یادآوری بالا و مثبت یا منفی بودن عددها:

$$\sqrt{a^{۲}}+\sqrt{b^{۲}}=|a|+|b|=-a+b \quad \text{و} \quad \sqrt{a^{۲}b^{۲}}=\sqrt{(ab)^{۲}}=|\underbrace{ab}_{<۰}|=-ab$$

مثال: اگر $a<۰$ باشد، عبارت زیر را ساده کنید.

$$۳\sqrt{a^{۲}}-a$$

پاسخ

مشابه نمونه‌های بالا:

$$۳\sqrt{a^{۲}}-a=۳|a|-a=۳(-a)-a=-۴a$$

مثال: حاصل عبارت $\sqrt{(۲-\sqrt{۵})^۲}-|\sqrt{۵}-۱|$ را حساب کنید.

پاسخ

چون $\sqrt{۵}\cong ۲/۲$ است، $۲-\sqrt{۵}$ عددی منفی و $\sqrt{۵}-۱$ عددی مثبت است و بنابراین:

$$\sqrt{(۲-\sqrt{۵})^۲}-|\sqrt{۵}-۱|=|۲-\sqrt{۵}|-|\sqrt{۵}-۱|$$
$$=-(۲-\sqrt{۵})-(\sqrt{۵}-۱)=-۲+\sqrt{۵}-\sqrt{۵}+۱=-۱$$

معرفی ریشه‌های مراتب بالاتر اعداد:

ریشه‌ی nاُم:

n را عددی طبیعی بگیرید؛ اگر داشته باشیم:

$$b^n=a$$

آنگاه b را یک ریشه‌ی nاُم عدد a گویند.

نمونه‌های زیر را ببینید:

- چون $۳^۴=۸۱$ و $(-۳)^۴=۸۱$ است، هر دو عدد ۳ و -۳ ریشه‌ی چهارم عدد ۸۱ هستند.
- فقط یک عدد داریم که به توان پنج برسد و -۳۲ شود:

$$(-۲)^۵=-۳۲$$

یعنی: عدد -۳۲ فقط یک ریشه‌ی پنجم -۲ را دارد.

ریشه‌ی مرتبه‌ی فرد:

اگر n فرد باشد، هر عددی دقیقاً یک ریشه‌ی nاُم دارد که آن را با استفاده از $\sqrt[n]{\ }$ نشان می‌دهیم:

$$b^n=a \Rightarrow b=\sqrt[n]{a}$$

برای نمونه:

$$(-۳)^۵=-۲۴۳ \Rightarrow \sqrt[۵]{-۲۴۳}=-۳$$

ریشه‌ی مرتبه‌ی زوج:

اگر n زوج باشد، عددهای منفی ریشه‌ی nاُم ندارند.

بعلاوه:

هر عدد مثبت دارای دو ریشه‌ی nاُم است که همیشه قرینه‌ی یکدیگر هستند، برای نمونه:

$$b^۴=۱۶ \Rightarrow b=\pm۲$$

مشابه ریشه‌ی دوم، ریشه‌ی مثبت را توسط $\sqrt[n]{\ }$ نشان می‌دهیم:

$$\sqrt[۴]{۱۶}=۲$$

بخش ۳
توان‌های گویا

عددهای مثبت را می‌توان به توان عددهای گویا هم رساند:

حالت ساده:

برای هر عدد مثبت a قرار می‌دهیم:

$$a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$$

نمونه‌هایی ببینید:

$$۲۵^{\frac{۱}{۲}}=\sqrt{۲۵}=۵ \quad و \quad ۶۴^{\frac{۱}{۳}}=\sqrt[۳]{۶۴}=۴$$

توجه کنید:

برای عددهای منفی توان $\frac{۱}{n}$ تعریف نمی‌شود و در نتیجه $(-۶۴)^{\frac{۱}{۳}}$ بی معنی، ولی تساوی $\sqrt[۳]{-۶۴}=-۴$ برقرار است.

توان گویا در حالت کلی:

حالت کلی:

اگر a عددی مثبت و m و n طبیعی باشند، قرار می‌دهیم:

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$$

یعنی:

برای تبدیل $a^{\frac{m}{n}}$ به رادیکال، مخرج کسر در فرجه و صورت کسر در توان a جای می‌گیرد.

برای نمونه؛

$$۱۰۰^{\frac{۱}{۲}}=\sqrt{۱۰۰}=۱۰ \quad و \quad ۴^{\frac{۳}{۲}}=\sqrt[۲]{۴^۳}=\sqrt{۶۴}=۸$$

مثال: (نهایی- خرداد ۱۴۰۱)

عبارت توان‌دار را به صورت رادیکالی و عبارت رادیکالی را به صورت توان‌دار بنویسید:

الف) $\sqrt[۵]{۱۲^{۱۳}}$ ب) $(۰/۲۴)^{\frac{۲}{۷}}$

پاسخ

به آسانی می‌نویسیم:

الف) $۱۲^{\frac{۱۳}{۵}}$ **ب)** $(۰/۲۴)^{\frac{۲}{۷}} = \sqrt[۷]{(۰/۲۴)^۲}$

قوانین توان‌ها:

برای پایه‌های مثبت، قوانین آشنای قبلی برای توان‌های گویا هم درست هستند:

$$a^r \times a^s = a^{r+s} \quad \text{و} \quad a^r \times b^r = (a\times b)^r \quad \text{و} \quad (a^r)^s = a^{r\times s}$$

$$a^r \div a^s = a^{r-s} \quad \text{و} \quad a^r \div b^r = (\frac{a}{b})^r$$

مثال: (نهایی- خرداد ۱۳۹۸)

حاصل عبارت‌های زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید. (m و n اعداد حقیقی مثبت‌اند.)

الف) $(m^{\frac{۳}{۴}} n^{\frac{۱}{۲}})^۲ (m^۲ n^۳)^{\frac{۱}{۲}}$ ب) $۸^{\frac{۲}{۷}} \times (\frac{۳}{۲})^{\frac{۲}{۷}}$

پاسخ

الف) توجه کنید که با رعایت ترتیب محاسبات:

ابتدا باید توان‌رسانی کرده و سپس ضرب‌ها انجام شوند.

$$(m^{\frac{۳}{۴}\times ۲} n^{\frac{۱}{۲}\times ۲})(m^{۲\times\frac{۱}{۲}} n^{۳\times\frac{۱}{۲}}) = m^{\frac{۳}{۲}} n^۱ \times m^۱ n^{\frac{۳}{۲}} = m^{\frac{۳}{۲}+۱} n^{۱+\frac{۳}{۲}} = m^{\frac{۵}{۲}} n^{\frac{۵}{۲}} = (mn)^{\frac{۵}{۲}}$$

ب) چون توان‌ها یکسان است:

$$۸^{\frac{۲}{۷}} \times (\frac{۳}{۲})^{\frac{۲}{۷}} = (۸\times\frac{۳}{۲})^{\frac{۲}{۷}} = (۴\times۳)^{\frac{۲}{۷}} = ۱۲^{\frac{۲}{۷}}$$

مثال: (نهایی- دی ۱۳۹۸)

حاصل عبارت‌های زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید. (m و n اعداد حقیقی مثبت‌اند.)

الف) $(m^۴ n^۳)^۲ (m^{\frac{۱}{۲}} n^{\frac{۱}{۶}})^۶$ ب) $۲۱^{\frac{۲}{۳}} \times (\frac{۳}{۷})^{\frac{۲}{۳}}$

پاسخ

مشابه مورد قبل:

الف)

$$(m^{۴\times۲} n^{۳\times۲})(m^{\frac{۱}{۲}\times۶} n^{\frac{۱}{۶}\times۶}) = m^۸ n^۶ \times m^۳ n^۱ = m^{۸+۳} n^{۶+۱} = m^{۱۱} n^۷$$

ب)

$$۲۱^{\frac{۲}{۳}} \times (\frac{۳}{۷})^{\frac{۲}{۳}} = (۲۱\times\frac{۳}{۷})^{\frac{۲}{۳}} = (۳\times۳)^{\frac{۲}{۳}} = (۳^۲)^{\frac{۲}{۳}} = ۳^{\frac{۴}{۳}}$$

ویژه آمادگی کنکور

در بخش پایانی، مطالب لازم جهت آمادگی کامل برای شرکت در آزمون‌ها و کنکور سراسری آورده می‌شوند.

اگر در حال مطالعه برای تسلط بر کتاب و شرکت
در امتحان مدرسه یا امتحان نهایی هستید، می‌توانید فعلاً از خواندن این بخش صرف‌نظر کنید!

حاصل $8^{-\frac{1}{3}} \times 4^{0/12} \times 2^{0/76}$ کدام است؟ (کنکور ۱۳۹۸)

❶ 1 ❷ $\frac{1}{4}$ ❸ 2 ❹ $\frac{1}{2}$

گزینه ۱

به آسانی می‌توان نوشت:

$$2^{0/76}\times(2^2)^{0/12}\times(2^3)^{-\frac{1}{3}}=2^{0/76}\times 2^{0/24}\times 2^{-1}=2^{0/76+0/24-1}=2^0=1$$

مجموع ریشه‌ی سوم عدد $0/001a^6$ و ریشه‌ی چهارم عدد $0/0016$ برابر ۱ است. مقدار مثبت a کدام است؟

❶ $\sqrt{2}$ ❷ $2\sqrt{2}$ ❸ 2 ❹ 4

گزینه ۲

طبق شرایط گفته شده می‌نویسیم:

$$\sqrt[3]{0/001a^6}+\sqrt[4]{0/0016}=1 \rightarrow \sqrt[3]{(0/1a^2)^3}+\sqrt[4]{(0/2)^4}=1 \rightarrow 0/1a^2+0/2=1$$

$$\rightarrow \frac{1}{10}a^2=1-\frac{2}{10}=\frac{8}{10} \rightarrow a^2=\frac{\frac{8}{10}}{\frac{1}{10}}=8$$

چون مقدار مثبت a خواسته شده:

$$a^2=8 \Rightarrow a=\sqrt{8}=\sqrt{4\times 2}=2\sqrt{2}$$

توان‌های معروف:

در ذهن داشتن موارد زیر، کار کردن با توان‌ها و رادیکال‌ها را سرعت می‌بخشد:

(البته اجباری به حفظ کردن نیست!)

❖ **توان‌های ۲ :**

$$2^{10}=1024\,,\ 2^9=512\,,\ 2^8=256\,,\ 2^7=128\,,\ 2^6=64\,,\ 2^5=32\,,\ 2^4=16\,,\ 2^3=8\,,\ 2^2=4$$

نمونه‌هایی از کاربرد:

$$\sqrt{256}=\sqrt{2^8}=2^{\frac{8}{2}}=2^4=16 \quad \text{و} \quad \sqrt[5]{1024}=\sqrt[5]{2^{10}}=2^{\frac{10}{5}}=2^2=4$$

❖ **توان‌های ۳ :**

$$3^2=9\,,\ 3^3=27\,,\ 3^4=81\,,\ 3^5=243$$

نمونه‌ای از کاربرد:

$$\sqrt[5]{243}=\sqrt[5]{3^5}=3$$

❖ **توان‌های ۵ :**

$$5^2=25\,,\ 5^3=125\,,\ 5^4=625$$

نمونه‌ای از کاربرد:

$$\sqrt{625}=\sqrt{5^4}=5^{\frac{4}{2}}=5^2=25$$

❖ **سایر موارد:**

- $10^2=100\,,\ 10^3=1000\,,\ 10^4=10000\,,\ \ldots$ **(توان‌های عدد ۱۰)**
- $(0/1)^2=0/01\,,\ (0/1)^3=0/001\,,\ (0/1)^4=0/0001\,,\ \ldots$ **(توان‌های عدد ۰/۱)**
- $4^2=16\,,\ 4^3=64\,,\ 6^2=36\,,\ 6^3=216\,,\ 7^2=49\,,\ 7^3=343$ **(چند توان ۴ و ۶ و ۷)**
- $11^2=121\,,\ 12^2=144\,,\ 13^2=169\,,\ 15^2=225\,,\ 25^2=625$ **(چند مجذور کامل)**

عدد $(\frac{1}{27})^{-5}$ را به صورت 3^n نوشته‌ایم. مقدار n کدام است؟

❶ ۵ ❷ ۱۵ ❸ -15 ❹ ۱۰

گزینه ۲

کافی است یک تساوی با پایه‌های یکسان داشته باشیم:

$$(\frac{1}{27})^{-5}=3^n \rightarrow (\frac{1}{3^3})^{-5}=3^n \rightarrow (3^{-3})^{-5}=3^n \rightarrow 3^{15}=3^n \Rightarrow n=15$$

توجه کنید:

در فرجه‌ی فرد، می‌توان علامت منفی را از زیر رادیکال خارج نمود؛ مانند: $\sqrt[3]{-8}=-\sqrt[3]{8}=-2$

ساده شده‌ی عبارت $\sqrt{-125\sqrt[3]{-125}}$ کدام است؟

❶ ۲۵ ❷ ۱۲۵ ❸ -125 ❹ بی‌معنی

گزینه ۱

داریم: $\sqrt[3]{-125}=-\sqrt[3]{5^3}=-5$ است و در نتیجه:

$$\sqrt{-125\sqrt[3]{-125}}=\sqrt{-5^3(-5)}=\sqrt{5^4}=5^{\frac{4}{2}}=5^2=25$$

حاصل عبارت $125^{\frac{4}{5}}\div 25^{\frac{3}{2}}$ کدام است؟

1. $5^{\frac{2}{5}}$
2. $5^{-\frac{3}{5}}$
3. $5^{\frac{1}{5}}$
4. $5^{-\frac{2}{5}}$

گزینه ۲

با تبدیل پایه‌ها به عدد یکسان، تقسیم انجام می‌شود:

$$(5^3)^{\frac{4}{5}}\div(5^2)^{\frac{3}{2}}=5^{\frac{12}{5}}\div 5^3=5^{\frac{12}{5}-3}=5^{\frac{12-15}{5}}=5^{-\frac{3}{5}}$$

حاصل عبارت $(m^{-\frac{3}{4}}\times n^{\frac{1}{2}})^3(m^4n^{-2})^{\frac{1}{2}}$ کدام است؟

1. $m^{-\frac{1}{4}}\times n^{\frac{2}{3}}$
2. $m^{-\frac{1}{6}}\times n^{\frac{1}{2}}$
3. $m^{-\frac{1}{6}}\times n^{\frac{2}{3}}$
4. $m^{-\frac{1}{4}}\times n^{\frac{1}{2}}$

گزینه ۴

طبق قوانین توان‌ها:

$$m^{-\frac{3}{4}\times 3}n^{\frac{1}{2}\times 3}\times m^{4\times\frac{1}{2}}n^{-2\times\frac{1}{2}}=m^{-\frac{9}{4}}n^{\frac{3}{2}}\times m^2n^{-1}=m^{-\frac{9}{4}+2}\times n^{\frac{3}{2}-1}=m^{-\frac{1}{4}}\times n^{\frac{1}{2}}$$

مقدار عبارت $3^{\frac{1}{4}}\times 3^{\frac{1}{8}}\times 3^{\frac{1}{16}}\times\cdots\times 3^{\frac{1}{256}}$ کدام است؟ (کنکور ۱۴۰۰)

1. $3^{\frac{127}{256}}$
2. $3^{\frac{127}{512}}$
3. $3^{\frac{63}{256}}$
4. $3^{\frac{255}{512}}$

گزینه ۱

باید جمع $\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{256}$ حساب شود. دنباله هندسی است و داریم: $a=\frac{1}{4}$ و $r=\frac{1}{2}=\frac{32}{64}$. مقدار n نیاز است:

$$a_n=\frac{1}{256}\rightarrow\frac{1}{4}\times(\frac{1}{2})^{n-1}=\frac{1}{256}\rightarrow(\frac{1}{2})^{n-1}=\frac{\frac{1}{256}}{\frac{1}{4}}=\frac{1}{64}\rightarrow n-1=6\Rightarrow n=7$$

بنابراین:

$$S_7=a\times\frac{1-r^7}{1-r}=\frac{1}{4}\times\frac{1-(\frac{1}{2})^7}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}\times\frac{1-\frac{1}{128}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}\times\frac{\frac{128-1}{128}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}\times\frac{2\times 127}{128}=\frac{127}{256}$$

در نتیجه جواب برابر است با:

$$3^{\frac{127}{256}}$$

نکته ۱

حذف رادیکال با توان:

❖ اگر n فرد باشد، مانند رادیکال با فرجه سه همیشه داریم:

$$(\sqrt[n]{a})^n = a \quad \text{و} \quad \sqrt[n]{a^n} = a$$

❖ اگر n زوج باشد، مانند رادیکال با فرجه دو:

تساوی $(\sqrt[n]{a})^n = a$ برقرار بوده ولی $\sqrt[n]{a^n} = |a|$ است.

اگر $a < ۰$ باشد، حاصل $-\sqrt[۴]{۸۱a^۴} - \sqrt[۳]{-۶۴a^۳} + \sqrt{۲۵a^۲}$ کدام است؟

❶ $۲a$ ❷ $-۴a$ ❸ $۴a$ ❹ $-۲a$

گزینه ۱

با توجه به منفی بودن عدد a می‌نویسیم:

$$-\sqrt[۴]{(۳a)^۴} - \sqrt[۳]{(-۴a)^۳} + \sqrt{(۵a)^۲} = -|۳a| - (-۴a) + |۵a|$$
$$= -(-۳a) + ۴a - ۵a = ۲a$$

اگر a و b منفی و n زوج باشد، حاصل عبارت $\sqrt[n]{a^n} \times \sqrt[n]{(\frac{b}{a})^{۲n}} \times \sqrt[۲n]{(ab)^{۲n}}$ کدام است؟

❶ $b^۳$ ❷ $-ab^۳$ ❸ $\frac{b^۳}{a}$ ❹ $-b^۳$

گزینه ۴

توجه کنید که $\frac{b}{a}$ و ab مثبت هستند. طبق خواص گفته شده:

$$|a| \times \sqrt[n]{((\frac{b}{a})^۲)^n} \times |ab| = (-a) \times |(\frac{b}{a})^۲| \times (ab) = -a \times \frac{b^۲}{a^۲} \times ab = -b^۳$$

اگر $x < ۰ < y$ باشد، حاصل عبارت $|x|\sqrt{y^۲} + y\sqrt{x^۲} - \sqrt{x^۲y^۲}$ کدام است؟

❶ x ❷ $-xy$ ❸ $-۲xy$ ❹ y

گزینه ۲

چون x منفی است: $|x| = -x$، چون y مثبت است: $|y| = y$ و چون xy منفی است: $|xy| = -xy$. بنابراین:

$$|x|\sqrt{y^2}+y\sqrt{x^2}-\underbrace{\sqrt{x^2y^2}}_{=\sqrt{(xy)^2}}=|x||y|+y|x|-|xy|=(-x)y+y(-x)-(-xy)$$
$$=-xy-xy+xy=-xy$$

نکته ۲

ساده کردن رادیکال:

❖ در عبارت $\sqrt[n]{a^m}$، اگر m بر n بخش‌پذیر باشد، تبدیل به توان، رادیکال را ساده می‌کند. مانند:

$$\sqrt[5]{1024}=\sqrt[5]{2^{10}}=2^{\frac{10}{5}}=2$$

❖ اگر m بر n بخش‌پذیر نباشد، توان را به نزدیک‌ترین مضرب فرجه تبدیل می‌کنیم. مانند:

$$\sqrt[3]{128}=\sqrt[3]{2^7}=\sqrt[3]{2^6\times 2}=2^{\frac{6}{3}}\times\sqrt[3]{2}=2^2\times\sqrt[3]{2}=4\sqrt[3]{2}$$

مثال: حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف) $\sqrt[3]{-27b^6}$ ب) $\sqrt[3]{64a^3b^6c^9}$

پاسخ

با توجه به نکته‌ی بالا و مفهوم ریشه می‌نویسیم:

الف) $\sqrt[3]{-27b^6}=\sqrt[3]{-3^3b^6}=-3b^{\frac{6}{3}}=-3b^2$

ب) $\sqrt[3]{64a^3b^6c^9}=\sqrt[3]{4^3a^3b^6c^9}=4ab^{\frac{6}{3}}c^{\frac{9}{3}}=4ab^2c^3$

حاصل‌ضرب ریشه‌ی پنجم عدد 8^6 و ریشه‌ی دوم غیر مثبت عدد 4^8 کدام است؟

❶ $-2\sqrt[5]{12}$ ❷ $-2\sqrt[5]{8}$ ❸ $-2^{12}\times\sqrt[5]{12}$ ❹ $-2^{11}\times\sqrt[5]{8}$

گزینه ۴

مقدار اول $\sqrt[5]{8^6}$ و مقدار دوم $-\sqrt{4^8}$ است. پس:

$$-\sqrt{4^8}\times\sqrt[5]{8^6}=-4^{\frac{8}{2}}\times\sqrt[5]{(2^3)^6}=-(2^2)^4\times\sqrt[5]{2^{18}}=-2^8\times\sqrt[5]{2^{15}\times 2^3}=-2^8\times 2^{\frac{15}{5}}\sqrt[5]{2^3}$$
$$=-2^8\times 2^3\sqrt[5]{8}=-2^{11}\times\sqrt[5]{8}$$

توجه کنید:

بسیاری مواقع می‌توان به جای ساده کردن رادیکال، با تبدیل رادیکال به عدد توان‌دار، محاسبات را ساده‌تر انجام داد.

حاصل $2^{-\frac{1}{3}}(\sqrt[3]{16})(\frac{1}{4})^{-0/5}$ کدام است؟ (کنکور خارج ۱۳۹۸)

❶ ۱ ❷ $\sqrt{2}$ ❸ ۲ ❹ ۴

گزینه ۴

مشابه موارد قبلی تا این‌جا:

$$2^{-\frac{1}{3}}\times(\sqrt[3]{2^4})\times(\frac{1}{2^2})^{-0/5}=2^{-\frac{1}{3}}\times2^{\frac{4}{3}}\times(2^{-2})^{-0/5}=2^{-\frac{1}{3}}\times2^{\frac{4}{3}}\times2^1=2^{-\frac{1}{3}+\frac{4}{3}+1}=2^{1+1}=2^2=4$$

اگر $a>0$ باشد، عبارت $\left(\frac{\sqrt{a^3}}{\sqrt[4]{a^2}}\right)^{\frac{3}{5}}$ برابر کدام است؟

❶ a ❷ $\sqrt{a}$ ❸ $\sqrt[5]{a^3}$ ❹ $\sqrt[3]{a^5}$

گزینه ۳

$$\left(\frac{a^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{2}{4}}}\right)^{\frac{3}{5}}=(a^{\frac{3}{2}-\frac{2}{4}})^{\frac{3}{5}}=(a^1)^{\frac{3}{5}}=a^{\frac{3}{5}}=\sqrt[5]{a^3}$$

حاصل عبارت $(\sqrt[3]{2^7})^2(\sqrt[6]{2^7})^2+2^{-0/6}\times(\frac{1}{4})^{0/2}$ کدام است؟

❶ ۱۲۸/۵ ❷ ۱۲۷/۵ ❸ ۶۳/۵ ❹ ۶۴/۵

گزینه ۱

تبدیل رادیکال‌ها به توانی و سپس کاربرد قوانین توان‌ها:

$$(2^{\frac{7}{3}})^2(2^{\frac{7}{6}})^2+2^{-0/6}\times(\frac{1}{2^2})^{0/2}=2^{\frac{14}{3}}\times2^{\frac{7}{3}}+2^{-0/6}\times(2^{-2})^{0/2}=2^{\frac{14+7}{3}}+2^{-0/6}\times2^{-0/4}$$

$$=2^{\frac{21}{3}}+2^{-0/6-0/4}=2^7+2^{-1}=128+\frac{1}{2}=128/5$$

اگر $A=\sqrt[5]{4\sqrt[3]{16}}\,(\frac{1}{2})^{-\frac{4}{3}}$ باشد، حاصل $(2A)^{-\frac{1}{3}}$ کدام است؟ (ریاضی ۱۳۹۸)

❶ ۰/۲۵ ❷ ۰/۵ ❸ ۰/۷۵ ❹ ۱

گزینه ۲

می‌توانیم بنویسیم:

$$A=\sqrt[5]{4}\sqrt[15]{16}(2)^{\frac{4}{3}}=2^{\frac{2}{5}}\times 2^{\frac{4}{15}}\times 2^{\frac{4}{3}}=2^{\frac{6+4+20}{15}}=2^{\frac{30}{15}}=2^{2}=4$$

در نتیجه:

$$(2A)^{-\frac{1}{3}}=(8)^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{8^{\frac{1}{3}}}=\frac{1}{\sqrt[3]{8}}=\frac{1}{2}=0/5$$

تذکر مهم:

در تبدیل عبارت $\sqrt[n]{a^m}$ به صورت توان گویا، مقدار a باید الزاماً مثبت باشد. پس:

تساوی: $\sqrt[3]{(-2)^4}=(-2)^{\frac{4}{3}}$ نادرست است، ولی عبارت شبیه آن: $\sqrt[3]{(-2)^4}=\sqrt[3]{2^4}=2^{\frac{4}{3}}$ درست می‌باشد.

کدام تساوی نادرست است؟

❶ $\sqrt[4]{4^3}=2^{\frac{2}{3}}$ ❷ $\sqrt[8]{4^6}=2^{\frac{3}{2}}$ ❸ $\sqrt[8]{(-4)^3}=2^{\frac{3}{4}}$ ❹ $\sqrt[8]{(-2)^6}=2^{\frac{3}{4}}$

گزینه ۴

باید هر مورد را بررسی کنیم:

- $\sqrt[4]{4^3}=4^{\frac{3}{4}}=(2^2)^{\frac{3}{4}}=2^{\frac{6}{4}}=2^{\frac{3}{2}}$ **نادرست**
- $\sqrt[8]{4^6}=4^{\frac{6}{8}}=4^{\frac{3}{4}}$ **نادرست (همان گزینه‌ی قبل است.)**
- $\sqrt[8]{(-4)^3}=2^{\frac{3}{4}}$ **نادرست (رادیکال بی معنی؛ عدد زیر رادیکال منفی است.)**
- $\sqrt[8]{(-2)^6}=\sqrt[8]{2^6}=2^{\frac{6}{8}}=2^{\frac{3}{4}}$ **(درست)**

کدام مورد درست است؟

❶ $\sqrt[3]{(-2)^5}=-2^{\frac{5}{3}}$ ❷ $\sqrt[3]{(-2)^5}=(-2)^{\frac{5}{3}}$

❸ $\sqrt[3]{(-2)^4}=-2^{\frac{4}{3}}$ ❹ $\sqrt[3]{(-2)^4}=(-2)^{\frac{4}{3}}$

گزینه ۱

به آسانی در گزینه‌ی اول می‌توانیم بنویسیم:

$$\sqrt[3]{(-2)^5}=\sqrt[3]{-2^5}=-\sqrt[3]{2^5}=-2^{\frac{5}{3}}$$

نکته ۳

ساده کردن عبارت رادیکالی:

باید رادیکال‌های مشابه؛

«یعنی رادیکال‌هایی که فرجه و عدد زیر رادیکال آن‌ها یکسان است.»

را با هم جمع یا تفریق کرد. مانند:

$$6\sqrt{3}-2\sqrt{3}=4\sqrt{3} \qquad \text{و} \qquad -4\sqrt[5]{8}+3\sqrt[5]{8}=-\sqrt[5]{8}$$

بعلاوه:

اگر رادیکال‌ها متشابه نباشند، عبارت ساده نمی‌شود. مانند:

$$6\sqrt{3}-2\sqrt[4]{3} \qquad \text{یا} \qquad 3\sqrt{5}+4\sqrt{2}$$

توجه کنید:

ممکن است رادیکال‌ها متشابه نباشند، ولی پس از ساده کردن هر رادیکال، تشابه ایجاد شده و عبارت ساده شود.

مثال: حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$2\sqrt[3]{54}-4\sqrt{3}-\sqrt[3]{16}+2\sqrt{12}$$

پاسخ

هر رادیکال را تا حد ممکن ساده می‌نویسیم؛

$$2\sqrt[3]{54}=2\sqrt[3]{27\times 2}=2\times 3\sqrt[3]{2}=6\sqrt[3]{2} \quad \text{و} \quad \sqrt[3]{16}=\sqrt[3]{8\times 2}=2\sqrt[3]{2} \quad \text{و} \quad 2\sqrt{12}=2\sqrt{4\times 3}=2\times 2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$$

در نتیجه؛

$$6\sqrt[3]{2}-4\sqrt{3}-2\sqrt[3]{2}+4\sqrt{3}=4\sqrt[3]{2}$$

حاصل عبارت $\sqrt[3]{3}\times\sqrt[3]{72}+\sqrt{3}\,(\sqrt{96}-\sqrt{12})-\sqrt{162}$ کدام است؟ (کنکور ۱۴۰۱)

1. $\sqrt{2}$
2. $\sqrt{3}$
3. $\sqrt{6}$
4. $\sqrt{18}$

گزینه ۴

مشابه بالا، هر قسمت را تا حد ممکن ساده می‌کنیم؛

$$\sqrt[3]{3}\times\sqrt[3]{72}=\sqrt[3]{3}\times\sqrt[3]{8\times 9}=\sqrt[3]{3}\times 2\sqrt[3]{9}=2\sqrt[3]{27}=2\times 3=6$$

$$\sqrt{3}\,(\sqrt{96}-\sqrt{12})=\sqrt{3}\,(\sqrt{16\times 6}-\sqrt{4\times 3})=\sqrt{3}\,(4\sqrt{6}-2\sqrt{3})=4\sqrt{18}-2\sqrt{9}=4\underbrace{\sqrt{18}}_{=3\sqrt{2}}-6=12\sqrt{2}-6$$

$$\sqrt{162}=\sqrt{81\times 2}=9\sqrt{2}$$

جایگذاری در عبارت داده شده؛

$$6+12\sqrt{2}-6-9\sqrt{2}=3\sqrt{2}$$ ($3\sqrt{2}$ همان $\sqrt{18}$ است.)