



RIAZISARA

www.riazisara.ir سایت ویژه ریاضیات

**درسنامه ها و جزوه های ریاضی
سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور
نمونه سوالات امتحانات ریاضی
نرم افزارهای ریاضیات**

و...

[@riazisara](https://t.me/riazisara)

ریاضی سرا در تلگرام:



<https://t.me/riazisara>

[@riazisara.ir](https://www.instagram.com/riazisara.ir)

ریاضی سرا در اینستاگرام:



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

همه‌هنگی کلاس خصوصی آنلاین ریاضی ۰۹۲۲۰۶۳۳۰۶۲

ریاضی و آمار ۳

دوازدهم انسانی

درسنامه و نمونه سوالات امتحانی

تنظیم: رضایی

فهرست

فصل ۱ – آمار و احتمال ۱

درس ۱: شمارش ۱

درس ۲: احتمال ۱۲

درس ۳: چرخه آمار در حل مسائل ۲۶

فصل ۲ – الگوهای خطی ۳۳

درس ۱: مدل سازی و دنباله ۳۳

درس ۲: دنباله‌های حسابی ۳۷

فصل ۳ – الگوهای غیر خطی ۴۳

درس ۱: دنباله هندسی ۴۳

درس ۲: ریشه n ام و توان گویا ۵۱

درس ۳: تابع نمایی ۵۷

فصل ۱: آمار و احتمال

درس ۱: شمارش

اصل جمع: اگر کاری را بتوان به دو روش انجام داد، به طوری که در روش اول m انتخاب و در روش دوم n انتخاب وجود داشته باشد، برای انجام کار مورد نظر، $m + n$ روش وجود دارد. (توجه کنید که در نهایت قرار است کار مورد نظر فقط با یکی از شیوه‌ها انجام شود نه هر دو روش). (اصل جمع به بیش از دو عمل نیز قابل تعمیم است).

به عبارت دیگر، اگر اختیار داشته باشیم که کار اول یا کار دوم را انجام دهیم، از اصل جمع استفاده می‌کنیم.



۱. دانش آموزی ۴ کتاب رمان و ۳ کتاب علمی دارد، اگر قرار باشد یک کتاب از بین آن‌ها انتخاب کرده و به دوستش هدیه بدهد، چند انتخاب می‌تواند داشته باشد؟

۲. به چند طریق می‌توان از بین ۴ خودکار با چهار رنگ مختلف و ۵ مداد با پنج رنگ مختلف و ۳ روان نویس با رنگ‌های مختلف، فقط یک خودکار یا یک مداد یا یک روان نویس انتخاب کرد؟

اصل ضرب: اگر انجام کاری شامل دو مرحله باشد، به طوری که برای انجام مرحله‌ی اول m انتخاب و برای هر کدام از این m روش، مرحله‌ی دوم را بتوان به n روش انجام داد، در کل کار مورد نظر با $m \times n$ روش قابل انجام است. (توجه کنید که هر دو مرحله باید انجام شود). (اصل جمع به بیش از دو عمل نیز قابل تعمیم است).

به عبارت دیگر، اگر مجبور باشیم که کار اول یا کار دوم را انجام دهیم، از اصل ضرب استفاده می‌کنیم.

۳. از بین ۳ نوع سوپ، ۵ نوع ساندویچ و ۲ نوع نوشابه، چند ناهار مختلف که شامل یک نوع سوپ، یک نوع ساندویچ و یک نوع نوشابه باشد می‌توان انتخاب کرد؟

۴. شخصی ۴ پیراهن، ۳ شلوار و ۲ جفت کفش دارد؛ به چند شکل متفاوت می‌تواند هر سه‌ی آن‌ها را باهم بپوشد؟

۵. در یک آزمون چهار گزینه‌ای با ۳ سوال، چند راه ممکن برای پاسخ‌گویی به سوالات وجود دارد در صورتی که به تمام سوالات پاسخ داده شود؟

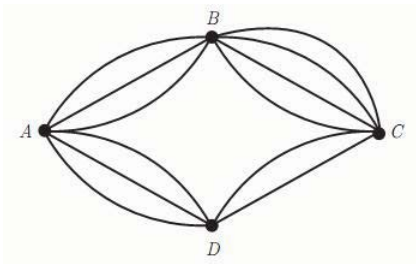
۶. به چند طریق می‌توان به ۵ سوال ۲ گزینه‌ای پاسخ داد به طوری که هیچ سوالی بی پاسخ نماند؟

۷. مطابق شکل زیر، میان چهار شهر A ، B ، C و D راههایی وجود دارد؛ مشخص کنید که به چند طریق می‌توان:

الف) از شهر A به شهر C و از طریق شهر B سفر کرد؟

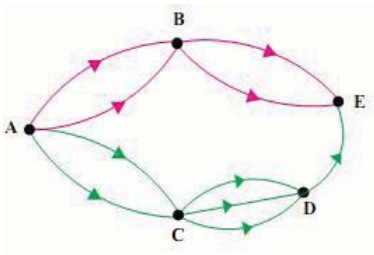
ب) از شهر A به شهر C سفر کرد؟

پ) از شهر B به شهر D سفر کرد؟



۸. اگر شکل زیر نشان‌دهنده‌ی جاده‌های بین شهرهای A و B و C و D و E باشد و همه‌ی جاده‌ها یک طرفه باشند، به

چند طریق می‌توان از شهر A به شهر E رفت؟



نماد فاکتوریل: اگر n یک عدد طبیعی باشد، حاصل ضرب اعداد طبیعی و متوالی از ۱ تا n را به صورت $n!$ (n فاکتوریل) نمایش می‌دهیم. به عنوان مثال:

$$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6 \quad 2! = 2 \times 1 = 2 \quad 1! = 1$$

قرارداد: $0! = 1$ (البته می‌توان ثابت کرد که $0! = 1$)

نکته: جهت سهولت در ساده‌سازی، فاکتوریل یک عدد را می‌توانیم برحسب حاصل ضرب یک یا چند عدد در فاکتوریل عددی دیگر بنویسیم. به عنوان مثال:

$$8! = 8 \times 7! \quad 8! = 8 \times 7 \times 6! \quad 10! = 10 \times 9 \times 8 \times 7!$$

۹. کدام یک از موارد زیر دست و کدام یک نادرست است؟

$$1) 6! = 3! + 3! \quad 2) 6! = 6 \times 5! \quad 3) 8! = 4! \times 2! \quad 4) 2 \times 3! = 6!$$

$$5) (3!)^2 = 9! \quad 6) \frac{8!}{2!} = 4!$$

۱۰. عبارت‌های زیر را ساده کنید.

$$۱) \frac{۷!}{۵!}$$

$$۲) \frac{۱۰!}{۹!}$$

$$۳) \frac{۹!}{۶! \times ۳!}$$

$$۴) \frac{۱۰۰!}{۲! \times ۹۸!}$$

$$۵) \frac{۳! \times ۵! \times ۰!}{۷! \times ۱!}$$

جایگشت: اگر چند شیء متمایز داشت باشیم، به هر حالت چیدن آن‌ها کنار هم، یک جایگشت از آن اشیاء می‌گوییم.

نکته: تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز از رابطه‌ی $n!$ به دست می‌آید.

۱۱. تعداد جایگشت‌های ۶ شیء متمایز چندتاست؟

۱۲. به چند حالت مختلف می‌توان حروف e, d, c, b, a را کنار هم قرار داد؟

۱۳. اگر قرار باشد افراد A, B و C در یک همایش سخنرانی کنند، این عمل به چند طریق امکان‌پذیر است؟

۱۴. با حروف کلمه (تهران) و بدون تکرار حروف: (با معنی یا بی‌معنی)

الف) چند کلمه ۳ حرفی می‌توان نوشت؟

ب) چند کلمه ۳ حرفی می‌توان نوشت که با حرف (ن) شروع شود؟

پ) چند کلمه ۴ حرفی می‌توان نوشت که با حرف (ا) شروع و به حرف (ت) ختم شود؟

۱۵. با کنار هم قرار دادن اعداد ۱, ۲, ۳, ۴ چند عدد چهار رقمی می‌توان ساخت؟

۱۶. با ارقام ۲, ۷, ۴, ۵ و ۶ چند عدد ۵ رقمی (بدون تکرار ارقام) می‌توان نوشت؟

۱۷. با ارقام ۵, ۶, ۷, ۸ و ۹ چند عدد:

الف) سه رقمی می‌توان نوشت که تکرار ارقام مجاز نباشد؟

ب) سه رقمی می‌توان نوشت که تکرار ارقام مجاز باشد؟

پ) چهار رقمی زوج می‌توان نوشت که تکرار مجاز نباشد؟

ت) سه رقمی مضرب ۵ می توان نوشت که تکرار مجاز نباشد؟

ث) سه رقمی مضرب ۵ می توان نوشت که تکرار مجاز نباشد؟

ج) سه رقمی بدون تکرار نوشت که مضرب ۵ نباشد؟

۱۸. با ارقام ۵، ۳، ۸، ۲ و ۷ به چند طریق می توان یک عدد سه رقمی ساخت به طوری که:
الف) این عدد زوج باشد و تکرار ارقام مجاز نباشد.

ب) رقم یکان آن ۷ باشد و تکرار ارقام مجاز باشد.

پ) بزرگ تر از ۵۰۰ باشد و تکرار مجاز نباشد

ت) کوچک تر از ۴۰۰ باشد و تکرار مجاز باشد.

۱۹. با ارقام ۳، ۷، ۵، ۶ و ۸ به چند طریق می توان یک عدد سه رقمی بدون تکرار ساخت به طوری که:
الف) آن عدد زوج باشد.

ب) رقم یکان آن، عدد اول باشد.

۲۰. با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و بدون تکرار:

الف) چند عدد سه رقمی می توان نوشت؟

ب) چند عدد چهار رقمی مضرب پنج می توان نوشت؟

پ) چند عدد چهار رقمی فرد می توان نوشت؟

ت) چند عدد چهار رقمی زوج می توان نوشت؟

۲۱. به چند طریق می‌توانیم ۳ کتاب را از بین ۵ کتاب متمایز، انتخاب کنیم و در یک ردیف بچینیم؟

تبدیل r شی از n شی یا جایگشت r شی از n شی: تعداد جایگشت‌های r تایی از n شی متمایز یا به عبارتی تعداد انتخاب‌های r شی از بین n شی متمایز که در آن‌ها ترتیب قرار گرفتن مهم باشد، با $p(n, r)$ نمایش می‌دهیم و مقدار آن از دستور زیر محاسبه می‌شود.

$$p(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!} \quad (0 \leq r \leq n)$$

۲۲. با ارقام ۱، ۲، ۴، ۶، ۸، ۹ و ۷ چند عدد سه رقمی می‌توان نوشت؟ (تکرار مجاز نیست)

۲۳. به چند طریق می‌توان با ارقام ۱ تا ۹، عددی ۵ رقمی ساخت؟ (تکرار مجاز نیست)

۲۴. در یک شرکت که ۲۰ عضو دارد، قرار است یک رئیس، یک معاون و یک خزانه دار انتخاب شوند؛ اگر هر عضو فقط حداکثر در یکی از این سمت‌ها بتواند باشد، به چند طریق می‌توان انتخاب آن‌ها را انجام داد؟

۲۵. یک مربی فوتبال قصد دارد برای بازی پیش رو در تیم خود یک دفاع راست، یک دفاع چپ، یک دفاع جلو و یک دفاع عقب قرار دهد. او شش بازیکن دفاعی دارد که می‌توانند در هر کدام از این چهار پست بازی کنند. در شروع بازی چند حالت برای چیدن این خط دفاعی برای این مربی وجود دارد؟

ترکیب r شی از n شی: به هر انتخاب r شی از n شی متمایز که در آن ترتیب انتخاب اهمیت نداشته باشد یا به عبارتی به هر زیرمجموعه‌ی r عضوی از یک مجموعه‌ی n عضوی، یک ترکیب r تایی از n شی می‌گوییم. تعداد ترکیب‌های r تایی از n شی متمایز را معمولاً با $C(n, r)$ یا $\binom{n}{r}$ نمایش می‌دهیم و داریم:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \quad (0 \leq r \leq n)$$

نکته: در محاسبات مربوط به ترکیب، از فرمول‌های زیر می‌توان استفاده کرد.

$$\binom{n}{0} = 1 \quad \binom{n}{n} = 1 \quad \binom{n}{1} = n$$

$$\binom{n}{n-1} = n \quad \binom{n}{r} = \binom{n}{n-r} \quad \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

۲۶. به چند طریق می‌توان از بین ۱۲ نفر، یک تیم ۴ نفره برای کوهنوردی انتخاب کرد؟

۲۷. به چند طریق می‌توان از بین ۹ نفر، یک تیم والیبال ۶ نفره انتخاب کرد؟

۲۸. به چند طریق می‌توانیم ۳ کتاب از بین ۷ کتاب انتخاب کنیم و به دوستان هدیه بدهیم؟

۲۹. کدام یک از سوالات زیر از طریق جایگشت و کدام یک از طریق ترکیب حل می‌شوند؟ جواب هر کدام را به دست آورید.

الف) به چند طریق می‌توانیم از بین ۶ کتاب، ۴ کتاب را در یک قفسه کنار هم بچینیم؟

ب) به چند طریق می‌توانیم از بین ۶ کتاب، ۴ کتاب را برای هدیه دادن به یک نفر انتخاب کنیم؟

پ) به چند طریق می‌توان از بین ۸ کتاب مختلف، ۵ کتاب را برای مطالعه انتخاب کرد؟

ت) به چند طریق ممکن می‌توان از بین ۷ دانش‌آموز، ۳ نفر را برای اعزام به یک اردوی فرهنگی انتخاب کرد؟

۳۰. در یک کیسه ۴ مهره سفید و ۶ مهره آبی متمایز وجود دارد. به چند طریق می‌توان ۴ مهره خارج کرد به طوری که:

الف) سه مهره سفید و یک مهره آبی باشد.

ب) فقط سه مهره آبی باشد.

پ) حداقل دو مهره سفید باشد.

ت) هر چهار مهره هم‌رنگ باشند.

۳۱. برای تشکیل تیمی ۶ دانش‌آموز سال سوم و ۵ دانش‌آموز سال اول داوطلب شده اند، به تصادف سه دانش‌آموز انتخاب می‌کنیم. احتمال آن را بیابید که:

الف) دو دانش‌آموز از سال سوم و یک دانش‌آموز از سال اول باشد.

ب) هر سه دانش آموز از یک کلاس باشند.

پ) حداکثر ۲ دانش آموز از سال اول باشد.

۳۲. به چند طریق می توان ۳ لامپ باهم و به تصادف از بین ۱۲ لامپ متمایز که ۸ عدد از آنها معیوب است انتخاب کرد به طوری که:

الف) هر سه لامپ سالم باشد.

ب) حداقل دو لامپ معیوب باشد.

پ) یکی از لامپ ها معیوب باشد.

نکته: اگر یک مجموعه دارای n عضو باشد، در این صورت:

الف) تعداد کل زیر مجموعه های آن برابر است با 2^n

ب) تعداد زیرمجموعه های k عضوی آن برابر است با $\binom{n}{k}$.

۳۳. در مجموعه $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ مطلوب است:

الف) تعداد کل زیر مجموعه ها.

ب) تعداد زیر مجموعه های دو عضوی.

پ) تعداد زیر مجموعه های هشت عضوی.

ت) تعداد زیر مجموعه های پنج عضوی.

ث) تعداد زیر مجموعه های زوج عضوی.

ج) تعداد زیر مجموعه‌های ۵ عضوی که عدد ۸ در تمام آنها موجود باشد.

ج) تعداد زیر مجموعه‌های ۵ عضوی که عدد ۸ در هیچ کدام از آنها موجود نباشد.

ح) تعداد زیر مجموعه‌های ۷ عضوی که شامل اعداد ۳ و ۷ و ۸ باشند ولی در هیچ کدام از آنها اعداد ۵ و ۹ نباشند.

۳۴. ۸ نقطه روی محیط یک دایره قرار دارند:

الف) چند وتر می‌توان با نقاط یاد شده رسم کرد؟

ب) چند مثلث می‌توان رسم کرد که رئوس مثلث از نقاط مذکور باشند.

۳۵. مساله‌ای طرح کنید که جواب آن $\binom{5}{3}$ باشد.

سوالات درست یا نادرست و جای خالی مربوط به درس ۱:

۳۶. جاهای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید.

الف) اگر عملی طی دو مرحله اول و دوم انجام شود، به طوی که در مرحله اول به m طریق و در مرحله دوم هر

کدام از این m طریق به n روش انجام پذیر باشند، در کل آن عمل به طریق انجام‌پذیر است.

ب) برای عدد صفر، فاکتوریل را به صورت $0! = \dots$ تعریف می‌کنیم.

پ) مقدار $\frac{0!}{1!}$ برابر است.

ت) حاصل $\frac{4!}{2!}$ برابر است با

ث) هر حالت از کنار هم قرار گرفتن ۵ شی متمایز را یک از آن ۵ شی می‌گوییم.

ج) تعداد جایگشت‌های n شی متمایز برابر است.

چ) تعداد جایگشت‌های n تایی از n شی متمایز برابر است با

ح) در انتخاب r شی از بین n شی متمایز، جابجایی اشیا اهمیت ندارد.

خ) حاصل عبارت $p(2, 2)$ برابر است.

د) حاصل عبارت $\binom{9}{6}$ برابر است.

۳۷. درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

الف) برای اعداد صفر و یک، فاکتوریل را به صورت $0! = 1$ و $1! = 1$ تعریف می‌کنیم.

ب) تساوی $\frac{6!}{3!} = 2!$ همواره برقرار است.

پ) تساوی $\frac{8!}{2!} = 4!$ همیشه برقرار است.

تمرین

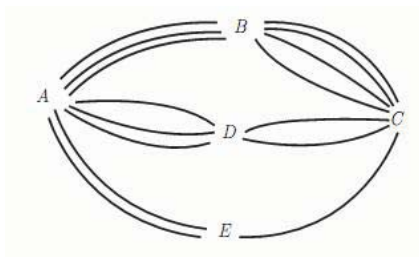
۱. می‌خواهیم از بین ۱۰ دانش‌آموز کلاس دهم و ۱۱ دانش‌آموز کلاس یازدهم و ۱۲ دانش‌آموز کلاس دوازدهم، یک دانش‌آموز انتخاب کنیم؛ به چند طریق می‌توانیم این دانش‌آموز را انتخاب کنیم؟

۲. بین پنج شهر A ، B ، C ، D و E مطابق شکل زیر راه‌هایی وجود دارد که همه دو طرفه‌اند. مشخص کنید به چند طریق می‌توان:

الف) از شهر A به شهر C مسافرت کرد؟

ب) از شهر A به شهر C و از طریق شهر B مسافرت رفت و برگشت انجام داد؟

پ) از شهر D بدون عبور از شهر E به شهر A مسافرت کرد؟



۳. با حروف کلمه (ولایت) و بدون تکرار حروف: (با معنی یا بی‌معنی)
الف) چند کلمه ۵ حرفی می‌توان نوشت؟

ب) چند کلمه ۳ حرفی می‌توان نوشت که به حرف (ی) ختم شوند؟

پ) چند کلمه ۵ حرفی می‌توان نوشت که با (و) شروع و به (ل) ختم شوند؟

۴. یک دوره بازی فوتبال بین ۱۰ تیم فوتبال، به صورت رفت و برگشت انجام می‌شود. اگر همه تیم‌ها باهم بازی داشته باشند، در پایان دوره چند بازی انجام شده است؟

۵. یک کارخانه خودروسازی، خودروهایی در ۷ رنگ، با ۲ حجم موتور و ۳ نوع مختلف جلو داشبورد تولید می‌کند. یک خریدار برای خرید یک خودرو از این کارخانه چند انتخاب دارد؟

۶. مجموعه $A = \{1, 2, 4, 6, 8, 9\}$ مفروض است.

الف) با ارقام موجود در این مجموعه، چند عدد ۵ رقمی و زوج بدون تکرار ارقام می توان ساخت؟

ب) چند عدد ۵ رقمی و بزرگتر از ۸۰۰۰۰ می توان نوشت؟

پ) مجموعه A چند زیرمجموعه ۳ عضوی دارد؟

۷. روی محیط یک دایره، ۱۲ نقطه وجود دارد. مشخص کنید:

الف) با این ۱۲ نقطه، چه تعداد مثلث می توان تشکیل داد؟

ب) چه تعداد وتر می توان تشکیل داد؟

۸. می خواهیم از بین ۵ دانش آموز پایه یازدهم و ۶ دانش آموز پایه دوازدهم، افرادی را انتخاب کنیم و یک تیم ۶ نفره والیبال

تشکیل دهیم. مشخص کنید به چند طریق می توانیم این تیم را تشکیل دهیم هرگاه بخواهیم:

الف) به تعداد مساوی دانش آموز پایه یازدهم و دوازدهم در تیم حضور داشته باشند.

ب) کاپیتان تیم، فرد مشخصی از پایه دوازدهم باشد.

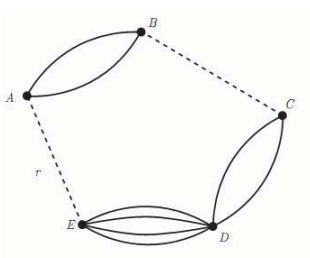
پ) حداقل ۴ نفر از اعضای تیم، دانش آموز پایه دوازدهم باشند.

ت) فقط ۲ نفر از اعضای تیم، از پایه یازدهم باشند.

۹. مساله ای طرح کنید که پاسخ آن به صورت $3^2 + 3 \times 4 + 2 \times 3$ باشد.

۱۰. تعداد راه های جاده ها از شهر B به C و از شهر E به D را طوری تعریف کنید که با توجه به شکل زیر، بتوان به ۲۰

طریق از شهر A به شهر D سفر کرد.



درس ۲: احتمال

پدیده قطعی: به پدیده‌ها یا آزمایش‌هایی که نتیجه‌ی آن‌ها قبل از اجرای آزمایش به طور قطع مشخص باشد، پدیده یا آزمایش تصادفی می‌گوییم.

به عنوان مثال:

(الف) در پرتاب یک تاس، آمدن عددی کوچکتر از ۷، یک آزمایش قطعی است.
(ب) اگر در ظرفی ۵ مهره سیاه داشته باشیم، انتخاب دو مهره سیاه از این ظرف، پدیده‌ای قطعی است.

پدیده تصادفی: به پدیده‌ها یا آزمایش‌هایی که نتیجه‌ی آن‌ها قبل از اجرای آزمایش به طور قطع مشخص نیست، پدیده یا آزمایش تصادفی می‌گوییم.

در پدیده‌های تصادفی از همه‌ی نتیجه‌های ممکن اطلاع داریم اما از این که کدام حالت قطعاً رخ می‌دهد، اطمینان نداریم.
به عنوان مثال در پرتاب یک سکه، می‌دانیم یکی از حالت‌های **رو** یا **پشت** ظاهر می‌شود ولی قبل از پرتاب، قطعاً نمی‌توان گفت که کدام یک ظاهر خواهد شد.

به عنوان مثال:

(الف) در پرتاب یک تاس، ظاهر شدن عدد ۲، پدیده‌ای تصادفی است.
(ب) اگر اعداد ۱ تا ۲۰ را روی ۲۰ کارت مختلف بنویسیم و از بین آن‌ها یک کارت بیرون بیاوریم، مشاهده عددی مضرب ۵ یک پدیده تصادفی است.
(پ) در پرتاب یک سکه، ظاهر شده (رو) پدیده‌ای تصادفی است.

برآمد: به هر یک از نتایج ممکن برای یک آزمایش تصادفی، برآمد می‌گوییم.
به عنوان مثال:

(الف) در پرتاب یک سکه به هر یک از نتایج **رو** و **پشت**، یک **برآمد** می‌گوییم.
(ب) در پرتاب یک تاس، به هر یک از نتایج ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ یک **برآمد** می‌گوییم.

۱. کدام یک از پدیده‌های زیر، تصادفی و کدام یک قطعی است؟ چرا؟

(الف) وجود دانش‌آموی که سن او بیشتر از ۱۰ سال باشد، در کلاس دوازدهم.

(ب) در ابتدای مسابقه فوتبال، پرتاب سکه‌ای که در یک طرف آن عدد ۱ و در طرف دیگر آن عدد ۲ حک شده باشد.

(پ) مشاهده دو مهره سفید، پس از خارج کردن دو مهره از جعبه‌ای که در آن ۷ مهره سفید وجود دارد.

(ت) پیش‌بینی نتیجه بازی فوتبال بین دو تیم، قبل از بازی.

(ث) در یک بازی بین دو نفر، سکه‌ای پرتاب می‌شود و به دنبال آن تاسی انداخته می‌شود. اگر شخصی سکه‌اش رو و تاسش زوج بیاید، برنده است. آیا قبل از بازی می‌توان نفر برنده را مشخص کرد؟

فضای نمونه: در یک آزمایش تصادفی، به مجموعه‌ی تمام برآمدهای ممکن، فضای نمونه می‌گوییم.

فضای نمونه را با S و تعداد اعضای فضای نمونه را با $n(S)$ نشان می‌دهیم.

۲. در هر یک از پدیده‌های تصادفی زیر، فضای نمونه را بنویسید و تعداد اعضای آن را مشخص کنید.

الف) پرتاب یک سکه

ب) پرتاب دو سکه

پ) پرتاب سه سکه

ت) پرتاب یک تاس

ث) پرتاب یک سکه و یک تاس

ج) پرتاب دو تاس

چ) انتخاب یک عدد از بین اعداد طبیعی کمتر از ۲۰.

۳. در کیسه‌ای ۳ مهره قرمز، ۴ مهره آبی و ۴ مهره سبز وجود دارد. به طور تصادفی سه مهره را یک‌جا از کیسه خارج می‌کنیم. تعداد اعضای فضای نمونه‌ی این پدیده تصادفی را مشخص کنید.

پیشامد: به هر یک از زیرمجموعه‌های فضای نمونه‌ای S ، یک پیشامد می‌گوییم. پیشامدها را معمولاً با حروف A ، B ، C و ... نشان می‌دهیم.

پیشامدهای نشدنی و حتمی: از آنجا که $\emptyset \subseteq S$ ، پس \emptyset یک پیشامد روی S است و به آن پیشامد غیر ممکن (نشدنی) می‌گوییم. همچنین چون $S \subseteq S$ ، پس S نیز یک پیشامد است و آن را پیشامد حتمی می‌گوییم.

۴. در پرتاب یک تاس، پیشامدهای زیر را مشخص کنید.
الف) عدد زوج ظاهر شود.

ب) عدد اول ظاهر شود.

پ) عدد بزرگتر از ۳ ظاهر شود.

ت) عدد بزرگتر از ۷ ظاهر شود.

ث) عدد کوچکتر از ۷ ظاهر شود.

۵. خانواده‌ای دارای سه فرزند است.

الف) فضای نمونه مربوط به جنسیت فرزندان این خانواده را بنویسید.

ب) پیشامد A را بنویسید که در آن فقط یک فرزند پسر باشد.

پ) پیشامد B را بنویسید که در آن هر سه فرزند همجنس باشند.

ت) پیشامد C را بنویسید که در آن تعداد فرزندان دختر از پسر بیشتر باشد.

ث) پیشامد D را بنویسید که دو فرزند اول و آخر همجنس باشند.

ج) پیشامد E را بنویسید که در آن حداقل دو فرزند پسر باشد.

چ) پیشامد F را بنویسید که در آن حداکثر دو فرزند پسر باشد.

۶. در یک برنامه کوهنوردی، ۵ دانش‌آموز سال دهم، ۶ دانش‌آموز سال یازدهم و ۴ دانش‌آموز سال دوازدهم شرکت دارند. قرار است یک گروه پیشتاز ۳ نفره از بین آن‌ها برای صعود انتخاب کنیم. تعداد عضوهای پیشامدهای زیر را مشخص کنید.
الف) ۳ نفر دانش‌آموز پیشتاز از سه پایه مختلف باشند.

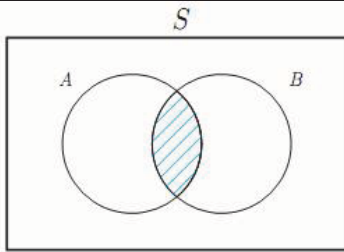
ب) هر ۳ نفر دانش‌آموز پیشتاز از یک پایه باشند.

پ) فقط یک نفر از دانش‌آموزان پیشتاز از پایه دهم باشد.

ت) حداقل ۲ نفر از دانش‌آموزان پیشتاز از پایه یازدهم باشد.

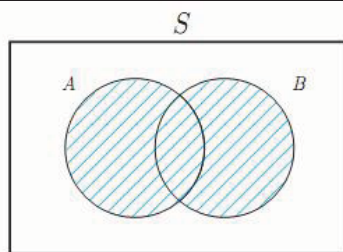
ث) حداکثر ۲ نفر از دانش‌آموزان پیشتاز از پایه دوازدهم باشد.

اعمال روی پیشامدها: فرض کنید A و B دو مجموعه باشند؛ اجتماع و اشتراک دو مجموعه A و B ، تفاضل B از A و متمم مجموعه A را به صورت زیر یادآوری می‌کنیم.



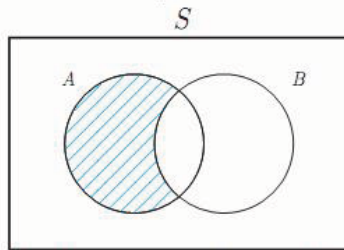
$$A \cap B = \{x \in S \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

(شکل ۱)



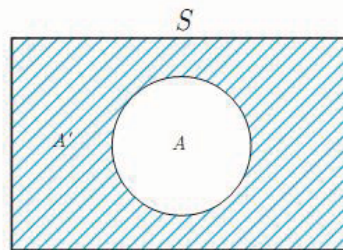
$$A \cup B = \{x \in S \mid x \in A \vee x \in B\}$$

(شکل ۲)



$$A - B = \{x \in S \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

(شکل ۳)



$$A' = \{x \in S \mid x \notin A\}$$

(شکل ۴)

$A \cup B$ وقتی رخ می‌دهد که حداقل یکی از پیشامدهای A یا B رخ دهد.

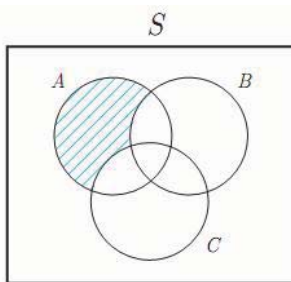
$A \cap B$ وقتی رخ می‌دهد که هر دو پیشامد A و B رخ دهند.

$A - B$ وقتی رخ می‌دهد که A رخ دهد ولی B رخ ندهد.

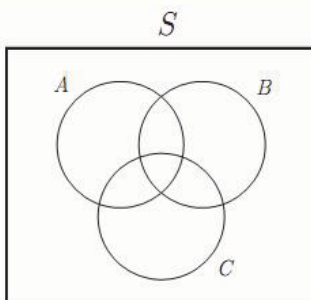
A' وقتی رخ می‌دهد که A رخ ندهد.

۷. فرض کنید A و B و C سه پیشامد فضای نمونه‌ی S باشند، هر یک از پیشامدهای زیر را روی نمودار ون سایه بزنید. سپس عبارت مجموعه‌ای مربوط به هر پیشامد را مانند نمونه بنویسید.

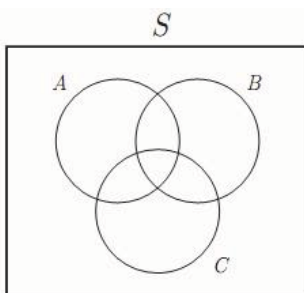
(الف) فقط پیشامد A رخ دهد و پیشامدهای B یا C رخ ندهد.



$$A - (B \cup C)$$



(ب) پیشامدهای A و B رخ دهند ولی پیشامد C رخ ندهد.



(پ) پیشامدهای A یا B رخ دهند ولی پیشامد C رخ ندهد.

۸. یک تاس را پرتاب می‌کنیم؛ هر یک از پیشامدهای زیر را با اعضا مشخص کنید. (الف) پیشامد اینکه عدد رو آمده زوج و اول باشد.

ب) پیشامد اینکه عدد رو آمده زوج یا اول باشد.

پ) پیشامد اینکه عدد رو آمده زوج باشد ولی اول نباشد.

ت) پیامد اینکه عدد رو آمده اول باشد ولی زوج نباشد.

ث) پیشامد اینکه عدد رو آمده اول نباشد.

۹. دو تاس را باهم پرتاب می‌کنیم، هر یک از پیشامدهای زیر را بنویسید.

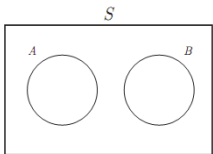
الف) اعداد رو شده از دو تاس، مانند هم باشند.

ب) حاصل ضرب اعداد ظاهر شده کمتر از ۴ باشد.

پ) مجموع اعداد ظاهر شده برابر با ۸ و تاس اول مضرب سه باشد.

ت) هر دو عدد ظاهر شده از دو تاس مضرب ۳ باشد.

پیشامدهای ناسازگار: دو پیشامد A و B از فضای نمونه‌ای S را ناسازگار می‌گوییم هرگاه: $A \cap B = \emptyset$



۱۰. خانواده‌ای صاحب ۳ فرزند است. پیشامدهای زیر را مشخص کنید.

الف) پیشامد A اینکه همه فرزندان خانواده دارای یک جنسیت باشند.

ب) پیشامد B اینکه دو فرزند خانواده پسر و یک فرزند خانواده دختر باشد.

پ) پیشامد C اینکه حداقل دو فرزند این خانواده دختر باشد.

آیا پیشامدهای A و B ناسازگارند؟

آیا پیشامدهای C و B ناسازگارند؟

آیا پیشامدهای A و C ناسازگارند؟

احتمال: اگر A پیشامدی از فضای نمونه‌ی S باشد، احتمال وقوع پیشامد A از رابطه زیر به دست می‌آید. که در آن،

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

$n(A)$ تعداد اعضای پیشامد و $n(S)$ تعداد اعضای فضای نمونه می‌باشد.

نکته: $P(S) = 1$ و $P(\emptyset) = 0$.

نکته: اگر $A \subseteq B$ ، آنگاه $P(A) \leq P(B)$

اثبات: $A \subseteq B \Rightarrow n(A) \leq n(B) \Rightarrow \frac{n(A)}{n(S)} \leq \frac{n(B)}{n(S)} \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

نکته: $0 \leq P(A) \leq 1$

نکته: $P(A) = 1 - P(A')$ و $P(A') = 1 - P(A)$

نکته: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

نکته: اگر A و B ناسازگار باشند، آنگاه $P(A \cap B) = 0$ و همچنین $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

۱۱. اگر احتمال وقوع پیشامد A برابر $\frac{2}{5}$ باشد، احتمال این که پیشامد A رخ ندهد چقدر است؟

۱۲. احتمال این که فردا بارانی باشد $1/0$ است، احتمال این که فردا بارانی نباشد چقدر است؟

۱۳. عددی به تصادف از بین اعداد طبیعی ۱ تا ۱۲ انتخاب می‌کنیم؛ احتمال آن را بیابید که:

الف) عدد انتخاب شده زوج باشد.

ب) عدد انتخاب شده اول باشد.

پ) عدد انتخاب شده هم زوج و هم اول باشد.

ت) عدد انتخاب شده فرد یا اول باشد.

ث) عدد انتخاب شده فرد باشد ولی مضرب ۳ نباشد.

ج) عدد انتخاب شده زوج باشد ولی اول نباشد.

۱۴. یک سکه و یک تاس را باهم پرتاب می‌کنیم؛ مطلوب است محاسبه احتمال اینکه:

الف) تاس زوج بیاید.

ب) سکه پشت بیاید.

پ) تاس زوج یا سکه رو بیاید.

ت) تاس فرد و سکه پشت بیاید.

ث) تاس حداکثر ۳ بیاید.

۱۵. خانواده‌ای دارای ۳ فرزند است. مطلوب است احتمال این‌که:

الف) فقط دو فرزند پسر باشد.

ب) هر سه فرزند از یک جنس باشند.

پ) هر سه فرزند از یک جنس نباشند.

۱۶. یک تاکسی دارای ۵ سرنشین است؛ مطلوب است محاسبه‌ی احتمال اینکه:

الف) هر پنج نفر آنها در ماه فروردین متولد شده باشند.

ب) هر پنج نفر آنها در یک ماه از سال متولد شده باشند.

(پ) تولد هیچ دو تای آنها در یک ماه نباشد.

۱۷. در یک بازی ۱۱ نفره، به هر شخص یکی از شماره‌های ۲، ۳، ۴، ... و ۱۲ را نسبت می‌دهیم. سپس با پرتاب دو تاس و مجموع اعداد برآمده از آنها، نفر برنده مشخص می‌شود.
الف) احتمال برنده شدن چه شماره‌ای نسبت به بقیه بیشتر است؟

(ب) احتمال برنده شدن کدام شماره‌ها از همه کمتر است؟

(پ) آیا کسی که احتمال برنده شدنش کمتر است، ممکن است در این مسابقه برنده شود، چرا؟

۱۸. در یک جعبه، ۳ مداد و ۵ خودکار وجود دارد. از این جعبه به طور تصادفی یک شی خارج می‌کنیم. مطلوب است محاسبه‌ی:

الف) احتمال اینکه شی انتخابی مداد باشد. $P(A)$.

(ب) احتمال اینکه شی انتخابی خودکار باشد. $P(B)$.

(پ) احتمال اینکه شی انتخابی مداد نباشد. $P(A')$.

(ت) پاسخ‌های قسمت‌های ب و پ را باهم مقایسه کنید؛ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

(ث) حاصل $P(A) + P(A')$ را پیدا کنید.

۱۹. احتمال اینکه فردا بارانی باشد برابر با $\frac{1}{10}$ است. مطلوب است محاسبه احتمال اینکه فردا بارانی نباشد.

۲۰. احتمال اینکه کپارش فردا به مدرسه نرود برابر با $\frac{1}{10}$ است. مطلوب است محاسبه احتمال اینکه فردا کپارش به مدرسه برود.

۲۱. احتمال اینکه ریحانه امشب سریال شبکه یک را تماشا نکند برابر با $\frac{32}{49}$ است. مطلوب است احتمال اینکه ریحانه امشب سریال را تماشا کند.

۲۱. در یک فروشگاه ورزشی، تعدادی پیراهن ورزشی شامل ۳ پیراهن قرمز، ۴ پیراهن آبی و ۲ پیراهن زرد در یک رخت‌آویز قرار دارند. شخصی درخواست می‌کند که فروشنده به طور تصادفی ۳ پیراهن انتخاب کند و برای او بفرستد.

الف) احتمال اینکه ۳ پیراهن از یک رنگ باشند چقدر است؟

ب) احتمال اینکه رنگ ۳ پیراهن متفاوت باشد چقدر است؟

پ) احتمال اینکه حداقل ۲ پیراهن قرمز باشد چقدر است؟

ت) احتمال اینکه حداکثر ۲ پیراهن آبی باشد چقدر است؟

ث) احتمال اینکه رنگ ۳ پیراهن آبی نباشد چقدر است؟

ج) جواب‌های قسمت‌های ت و ث را مقایسه کنید؛ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

سوالات درست یا نادرست و جای خالی مربوط به درس ۲:

۲۲. کدام‌یک از عبارتهای زیر درست و کدام یک نادرست است؟

الف) نتیجه حل معادله $(x+1)^2 = 0$ یک پدیده تصادفی است.

ب) تهی را یک پیشامد حتمی می‌نامیم.

پ) پیشامد A را یک پیشامد حتمی می‌گوییم.

ت) نتیجه یک آزمون چهارگزینه‌ای که نیمی از سوالات را شانسی پاسخ داده‌ایم، یک پیشامد حتمی است.

ث) خارج کردن ۲ مهره سفید از جعبه‌ای که در آن ۵ مهره سفید است، یک پیشامد حتمی است.

ج) در فضای نمونه‌ای پرتاب یک تاس، پیشامد رو شدن عددی بزرگ‌تر از ۶ نشدنی است.

- چ) در پرتاب یک تاس، ظاهر شدن عددی کمتر از ۷ یک پیشامد حتمی است.
 ح) فضای نمونه‌ای پرتاب سه سکه ۹ عضو دارد.
 خ) احتمال رو شدن عدد ۷ در پرتاب یک تاس برابر صفر است.
 د) پیشامد $B - A$ وقتی رخ می‌دهد که پیشامد B رخ دهد و پیشامد A رخ ندهد.
 ذ) پیشامد A وقتی رخ می‌دهد که پیشامد A' رخ ندهد.
 ر) پیشامد $A \cap B$ وقتی رخ می‌دهد که یا A و یا B رخ دهد.
 ز) تهی زیرمجموعه همه مجموعه‌ها است.

۲۳. جاهای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید.

- الف) مجموعه زیر مجموعه همه مجموعه‌ها است.
 ب) به هر یک از نتایج ممکن برای یک آزمایش تصادفی می‌گوییم.
 پ) احتمال وقوع یک پیشامد نشدنی برابر است با
 ت) احتمال وقوع یک پیشامد حتمی برابر است با
 ث) اگر پیشامد A با فضای نمونه‌ای S برابر باشد، A را یک پیشامد می‌گوییم.
 ج) فضای نمونه‌ای پرتاب سه سکه عضو دارد.
 چ) فضای نمونه‌ای پرتاب یک تاس و دو سکه عضو دارد.
 ح) پیشامد وقتی رخ می‌دهد که A رخ ندهد.
 خ) پیشامد وقتی رخ می‌دهد که پیشامد A و B هر دو رخ دهند.
 د) پیشامد وقتی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ دهد و پیشامد B رخ ندهند.
 ذ) اگر $A \cap B = \emptyset$ باشد، دو پیشامد A و B را می‌گوییم.
 ر) هرگاه A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، به طوری که در این صورت پیشامدهای A و B را ناسازگار می‌گوییم.

۲۴. کدامیک از پدیده‌های زیر، تصادفی و کدامیک قطعی است؟

- الف) مشاهده عدد ۳ در پرتاب یک تاس که روی هر شش وجه آن، عدد ۳ حک شده باشد.
 ب) نتیجه یک آزمون چهارگزینه‌ای که نیمی از سوالات آن را شانسی پاسخ داده‌ایم.

تمرین

۱. کدام یک از پدیده‌های زیر، آزمایش تصادفی و کدام یک آزمایش قطعی است؟
- (الف) نام ۲۰ دانش آموز را روی ۲۰ کارت می‌نویسیم و پس از مخلوط کردن کارت‌ها، به طور تصادفی یک کارت بیرون می‌کشیم تا نام یکی از دانش آموزان استخراج شود.
- (ب) مقداری آب را حرارت می‌دهیم تا به بخار تبدیل شود.
- (پ) نتیجه یک آزمون چهار جوابی که نیمی از سوالات آن را شانسی پاسخ داده‌ایم.
- (ت) در یک بازی ساده دو نفره، یکی از دو نفر مراحل زیر را انجام می‌دهد:
- عددی را انتخاب می‌کند.
 - سه واحد به آن می‌افزاید.
 - سپس حاصل را دو برابر می‌کند.
 - از عدد حاصل، ۲ واحد کم می‌کند.
 - نتیجه به دست آمده را نصف می‌کند.
 - از حاصل به دست آمده، عدد اولیه را کم می‌کند.
 - در مرحله‌ی آخر، فرد دوم به جای شخص محاسبه کننده پاسخ را اعلام می‌کند.
۲. سکه‌ای را پرتاب می‌کنیم. اگر رو ظاهر شد، آن‌گاه تاس را می‌ریزیم. در غیر این صورت، یک بار دیگر سکه را می‌اندازیم.
- (الف) فضای نمونه‌ی این آزمایش تصادفی را مشخص کنید.

(ب) پیشامد A را که در آن، عدد ظاهر شده روی تاس زوج باشد یا سکه پشت بیاید، با اعضا مشخص کنید.

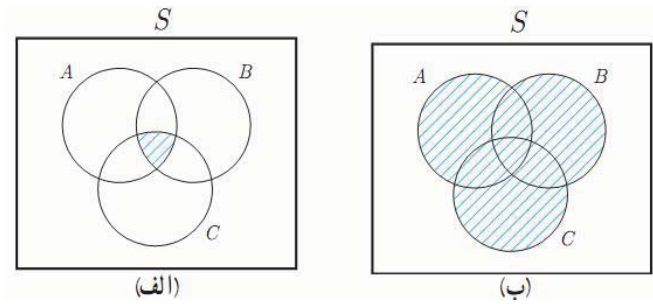
۳. هر یک از اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۲۰ را روی یک کارت می‌نویسیم و پس از مخلوط کردن کارت‌ها، به طور تصادفی یک کارت را برمی‌داریم؛ مطلوب است تعیین:
- (الف) فضای نمونه‌ی این آزمایش تصادفی.

(ب) پیشامد A که در آن عدد روی کارت مضرب ۳ باشد.

(پ) پیشامد B که در آن عدد روی کارت، مجذور کامل باشد.

(ت) پیشامدهای $A \cap B$ و $A - B$ را با اعضا مشخص کنید.

۴. برای هر یک از پیشامدهای زیر، یک عبارت توصیفی و یک عبارت مجموعه‌ای بنویسید.



۵. هر یک از اعداد دو رقمی را که با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴ می‌توان نوشت، روی کارت‌های می‌نویسیم و پس از مخلوط کردن کارت‌ها، یک کارت را به طور تصادفی خارج می‌کنیم؛ مطلوب است:
الف) فضای نمونه‌ی این آزمایش تصادفی.

ب) پیشامد A که در آن عدد روی کارت مضرب ۶ باشد.

پ) پیشامد B که در آن عدد روی کارت اول باشد.

۶. خانواده‌ای دارای ۳ فرزند است.

الف) فضای نمونه‌ی مناسب برای ترکیب جنسیت فرزندان این خانواده چیست؟

ب) پیشامد A را که در آن هر ۳ فرزند از یک جنس باشند، بنویسید.

پ) پیشامد B را که در آن فقط یک فرزند دختر باشد، بنویسید.

ت) پیشامد C را که در آن حداقل ۲ فرزند پسر باشند، بنویسید.

ث) پیشامد D را که در آن حداکثر یک فرزند پسر باشد، بنویسید.

۷. خانواده‌ای دارای ۴ فرزند است.

الف) فضای نمونه‌ی مناسب برای ترکیب جنسیت فرزندان این خانواده چند عضو دارد؟

ب) پیشامد A را مشخص کنید طوری که در آن، دو فرزند سوم و چهارم دختر باشند.

پ) پیشامد C را مشخص کنید که در آن، تعداد فرزندان دختر بیشتر از تعداد فرزندان پسر باشد.

ت) آیا پیشامدهای A و C ناسازگارند؟

۸. از جعبه‌ای که شامل ۱۲ سیب سالم و ۵ سیب لکه‌دار است، ۳ سیب را به طور تصادفی برمی‌داریم. مطلوب است محاسبه‌ی احتمال اینکه:

الف) هر ۳ سیب سالم باشند.

ب) دو سیب سالم و یک سیب لکه‌دار باشد.

پ) تعداد سیب‌های سالم از تعداد سیب‌های لکه‌دار بیشتر باشد.

۹. عقربه‌ی دستگاہ چرخنده‌ی زیر، پس از به حرکت درآمدن روی یکی از ۸ ناحیه می‌ایستد و عددی را نشان می‌دهد. چقدر احتمال دارد که:

الف) عقربه روی یک عدد اول بایستد؟



ب) عقربه یک عدد اول یا فرد را نشان دهد؟

پ) عقربه روی یک عدد مضرب ۳ بایستد؟

۱۰. ۷ پرچم مختلف را به هفت میله‌ی پرچم نصب کرده‌ایم و روی میله‌ها، شماره‌های ۱ تا ۷ را حک کرده‌ام. چنانچه این پرچم‌ها به طور تصادفی کنار هم قرار بگیرند، مطلوب است محاسبه‌ی احتمال این‌که پرچم‌های با شماره‌های غیر اول، در مکان‌های زوج باشند؟

۱۱. یازده بازیکن فوتبال تیم مدرسه‌ی شما، به طور تصادفی کنار یکدیگر قرار می‌گیرند تا عکس یادگاری بیندازند. چنانچه دروازه‌بان و کاپیتان تیم، دو نفر متفاوت باشند، مطلوب است محاسبه‌ی احتمال اینکه در عکس، ۴ نفر بین دروازه‌بان و کاپیتان حضور داشته باشند.

۱۲. در یک پارک جنگلی حفاظت شده، ۲۰ قوچ وحشی البرز مرکزی وجود دارد؛ ۵ تا از آنها را می‌گیرند و پس از نشان‌دار کردن، رهایشان می‌کنند. بعد از مدتی، محیط‌بانان به طور تصادفی ۷ تا از آنها را می‌گیرند و می‌خواهند تعداد قوچ‌های نشان‌دار را بشمارند. مطلوب است محاسبه‌ی احتمال اینکه حداکثر ۲ قوچ نشان‌دار باشند.

۱۳. انجمن اولیا و مربیان یک دبیرستان، ۱۰ نفر عضو دارد. به یک برنامه‌ی خاص، ۵ نفر رای موافق، ۳ نفر رای مخالف و ۲ نفر رای ممتنع داده‌اند. از بین آنها به طور تصادفی ۳ نفر انتخاب می‌کنیم. مطلوب است محاسبه‌ی احتمال اینکه:

الف) حداقل ۲ نفر از افراد انتخابی موافق برنامه باشند.

ب) نظر هیچ دو نفری از آنها مانند هم نباشد.

درس ۳: چرخه آمار در حل مسائل

دنیای امروز پر از اطلاعاتی است که ما در بخش‌های مختلف زندگی با آنها روبه‌رو می‌شویم. بنابر این، برای این که بتوانیم بهتر زندگی کنیم و درباره مسائل مختلف بهتر تصمیم بگیریم، لازم است بتوانیم این اطلاعات را به خوبی درک و تحلیل کنیم. درک صحیح شاخص‌ها، نمودارها، اصطلاحات و مفاهیم آماری به ما کمک می‌کند که تفسیر درستی از این اطلاعات داشته باشیم، محدودیت‌های نتایج به دست آمده را بشناسیم و در نهایت با استدلالی درست، بهتر تصمیم بگیریم. در این درس می‌خواهیم از شکل‌گیری یک مساله در محیط زندگی‌مان تا یافتن پاسخی برای آن، از آمار استفاده کنیم و آماری فکر کردن را تمرین کنیم.

گام‌های چرخه آمار در حل مسائل:

برای پیدا کردن پاسخ پرسش اصلی در یک مساله تا رسیدن به یک جمع‌بندی منطقی، یک مساله چندین بار طی یک چرخه با ۵ گام بازبینی می‌شود و ممکن است یک مساله جدید و با دقت بالا شکل بگیرد.

گام اول (بیان مساله)

طرح یک پرسش دقیق و شفاف، مهم‌ترین گام رسیدن به پاسخ است. بنابر این، پیش از هر چیز باید مساله به درستی درک شود و سپس به طور دقیق تعریف و بیان گردد؛ یعنی با توجه به اهداف، بودجه، زمان و دیگر شرایط موجود، جامعه آماری را محدود و هدف مطالعه را مشخص کنیم.

موارد زیر، در گام اول بیشتر مورد توجه است:

الف) فهم مساله

ب) تعریف دقیق مساله

گام دوم (طرح و برنامه ریزی)

اندازه‌گیری یا سنجش، اولین قدم برای یافتن داده‌ها و بررسی متغیر موجود است. در اندازه‌گیری، در واقع سعی می‌کنیم اطلاعات توصیفی (کیفی) را تا حد ممکن به اطلاعات کمی (عددی) تبدیل کنیم.

در این گام، علاوه بر چگونگی اندازه‌گیری متغیرها، درباره اندازه نمونه، چگونگی نمونه‌گیری و همچنین شیوه تحلیل داده‌ها، تصمیم‌گیری می‌شود.

تعداد اعضای جامعه را اندازه جامعه و تعداد اعضای نمونه را، اندازه نمونه می‌گوییم. هر چه اندازه جامعه بزرگتر باشد و یا پراکندگی متغیر مورد بررسی در جامعه بیشتر باشد، برای حصول اطمینان از وجود تنوع در نمونه، به نمونه بزرگ‌تری نیاز داریم.

مثال: در کدام یک از موارد زیر، احتیاج به نمونه بیشتری داریم؟ چرا؟

الف) سن دانش‌آموزان یک کلاس.

ب) معدل دانش‌آموزان یک کلاس.

نمونه انتخابی در این گام، باید یک نمونه کاملاً تصادفی باشد تا همه اعضای جامعه، شانس حضور یکسان در نمونه داشته باشند.

در این گام به حضور افراد متخصص نیاز داریم.

موارد زیر، در گام دوم بیشتر مورد توجه است:

الف) شیوه اندازه‌گیری

ب) روش نمونه‌گیری

پ) روش کار

گام سوم (گردآوری و پاک‌سازی داده‌ها)

داده‌ها را گردآوری می‌کنیم و تا حد ممکن از درستی آن‌ها مطمئن می‌شویم.

در هر مطالعه ممکن است در مرحله اندازه‌گیری، گردآوری یا ثبت داده‌ها و یا وارد کردن داده‌ها در نرم‌افزار، اشتباهی رخ دهد. با بررسی داده‌ها می‌توان برخی از این اشتباه‌ها را تصحیح کرد.

از آنجایی که داده‌های نادرست می‌توانند به نتیجه‌گیری غلط منجر شوند، پس از گردآوری و سازماندهی داده‌ها، به پاک‌سازی یا حذف داده‌هایی که نادرست و ناسازگار هستند، می‌پردازیم.

موارد زیر، در گام سوم بیشتر مورد توجه است:

الف) گردآوری

ب) سازماندهی

پ) پاک‌سازی

گام چهارم (تحلیل داده‌ها)

در این مرحله، داده‌ها را تحلیل می‌کنیم و نتایج را ارائه می‌دهیم. منظور از تحلیل داده‌ها در واقع صرفاً گزارش معیارها و ارائه نمودارها و دیگر نتایج آماری است. تفسیر این نتایج و نتیجه‌گیری از آن‌ها در گام بعد انجام خواهد شد.

موارد زیر، در گام چهارم بیشتر مورد توجه است:

الف) مرتب کردن داده‌ها

ب) معیارها و شاخص‌ها (شاخص‌های گرایش به مرکز، شاخص‌های پراکندگی)

پ) نمودارها و جدول‌ها

گام پنجم (بحث و نتیجه‌گیری)

پس از تحلیل داده‌ها، باید بتوانیم با تفسیر نتایج، پاسخی برای مساله اصلی پیدا کنیم. در تفسیر نتایج، توجه به محدودیت‌های مطالعه‌ای که انجام داده‌ایم بسیار مهم است. روش کار و محدودیت‌های آن باید چنان صادقانه گزارش شود که اگر افراد دیگری تصمیم به انجام دادن مطالعه‌ای در همان زمینه داشتند، با مشکلاتی مواجه نشوند.

اگر تمام افراد جامعه را مورد بررسی قرار ندادیم، نتایج ما قطعی نیستند و ممکن است نتایج، از نمونه‌ای به نمونه دیگر تغییر کند.

در جامعه‌ای که n عضو دارد، می‌توان به تعداد $\binom{n}{k}$ روش، نمونه‌های با اندازه k انتخاب کرد.

موارد زیر، در گام پنجم بیشتر مورد توجه است:

الف) تفسیر نتایج

ب) نتیجه‌گیری

پ) نقد و بررسی

ت) ایده‌های جدید

یادآوری رسم نمودار جعبه‌ای:

برای رسم نمودار جعبه‌ای مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

الف) داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم.

ب) کوچکترین داده، بزرگ‌ترین داده، میانه، چارک اول و چارک سوم را مشخص می‌کنیم.

پ) از کوچک‌ترین داده به چارک اول، یک پاره خط و از چارک اول به چارک سوم، یک مستطیل و از چارک سوم به بیشترین داده یک پاره خط می‌کشیم.

ت) میانه را روی مستطیل به صورت نقطه چین یا پاره‌خط مشخص می‌کنیم.



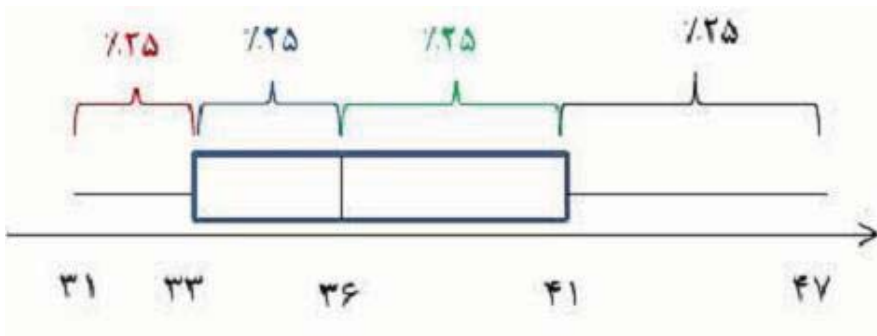
نکته: در نمودار جعبه‌ای:

الف) ۵۰ درصد داده‌ها قبل از **میانه** و ۵۰ درصد آنها بعد از **میانه** قرار دارند.

ب) ۲۵ درصد داده‌ها قبل از **چارک اول** و ۷۵ درصد داده‌ها بعد از **چارک اول** قرار دارند.

پ) ۷۵ درصد داده‌ها قبل از **چارک سوم** و ۲۵ درصد داده‌ها بعد از **چارک سوم** قرار دارند.

در نمودار جعبه‌ای رسم شده زیر، به نحوه توزیع داده‌ها دقت کنید:

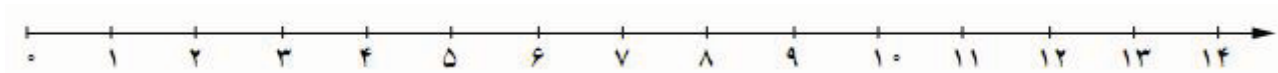


مثال: دو شرکت که یکی ۳۰ و دیگری ۳۱ کارمند دارد به آقای ابراهیمی پیشنهاد کار داده‌اند. اگر میانگین حقوق ماهیانه شرکت اول تقریباً $\frac{1}{6}$ میلیون تومان و برای شرکت دوم ۴ میلیون تومان باشد:
الف) با اطلاعات بالا کدام شرکت برای استخدام مناسب است؟

ب) به طور تصادفی از هر شرکت ۹ نفر را انتخاب کرده و اطلاعات زیر را گردآوری کرده‌ایم:

شرکت اول	حقوق کارمندان								
	۱	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$	۳	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{8}$
شرکت دوم	$\frac{0}{7}$	۱	۸	$\frac{12}{1}$	$\frac{0}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{10}{1}$	$\frac{0}{9}$	$\frac{0}{8}$

با استفاده از داده‌های جدول بالا، نمودار جعبه‌ای حقوق ماهیانه کارمندان این دو شرکت را روی یک محور رسم کنید.



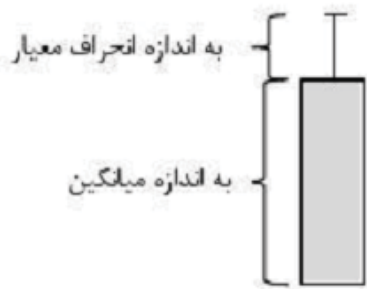
پ) با توجه به نمودارهای رسم شده، درستی یا نادرستی هر یک از عبارتهای زیر را مشخص کنید.
۱) حقوق تقریباً ۵۰٪ کارمندان شرکت دوم کمتر از کمترین حقوق کارمندان شرکت اول است.

۲) اگر آقای ابراهیمی سطح تحصیلات و تجربه متوسطی داشته باشد و این دو شرکت افراد را بر اساس شایستگی‌هایشان انتخاب کند، شرکت اول برای او مناسب است.

۳) در شرکت دوم، میانگین، معیار گرایش به مرکز مناسبی است.

نمودار میانگین و انحراف معیار:

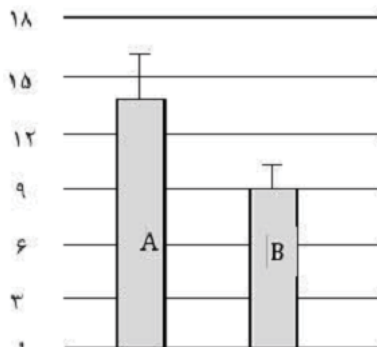
در داده‌هایی که میانگین و انحراف معیار، شاخص‌های مناسبی برای توصیف هستند (هنگامی که داده‌ی دور افتاده نداشته باشیم)، می‌توانیم از نموداری استفاده کنیم که بلندی مستطیل آن نشان دهنده‌ی میانگین باشد و میله‌ی خطای آن، به اندازه‌ی انحراف معیار، روی مستطیل بالا آمده باشد.



تذکر: در صورتی که داده‌ی دور افتاده داشته باشیم، نمی‌توانیم فقط به نمایش میانگین و انحراف معیار بسنده کنیم؛ زیرا گزارش میانگین می‌تواند گمراه کننده باشد. در این گونه موارد باید از نمودار جعبه‌ای استفاده کنیم.

مثال: اگر میانگین و انحراف معیار داده‌های A به ترتیب برابر ۱۴ و ۲ و میانگین و انحراف معیار داده‌های B به ترتیب برابر ۹ و ۱/۵ باشد، نمودار میانگین و انحراف معیار داده‌ها را رسم کنید.

پاسخ:



جمع‌بندی و تکمیل:

- الف) در یک تحقیق آماری، به افراد یا اشیاء مورد مطالعه، جامعه آماری می‌گوییم.
- ب) معمولاً به جای بررسی کل اعضای جامعه، یک نمونه تصادفی از بین اعضای جامعه انتخاب کرده و آنها را مورد بررسی قرار می‌دهیم.
- پ) به تعداد اعضای جامعه، اندازه جامعه می‌گوییم.
- ت) به تعداد اعضای نمونه، اندازه نمونه می‌گوییم.
- ث) هر چه اندازه جامعه بیشتر باشد یا پراکندگی متغیر در جامعه بیشتر باشد، به نمونه بیشتری نیاز داریم.
- ج) داده پراکنده یا دور افتاده، داده‌ای است که از داده‌های دیگر خیلی بزرگ‌تر یا خیلی کوچک‌تر باشد.
- چ) مطمئن‌ترین نمودار برای متغیر کمی **نمودار جعبه‌ای** است.
- ح) نمودار جعبه‌ای بهتر نشان می‌دهد که داده‌ها در کدام ناحیه پراکنده‌تر و در کدام ناحیه متمرکزترند.
- خ) اگر داده دور افتاده داشته باشیم از نمودار جعبه‌ای استفاده می‌کنیم.
- د) میانه، عددی است که نصف داده‌ها کوچک‌تر از آن و نصف دیگر داده‌ها بزرگ‌تر از آن باشد.

- ذ) شاخص‌های مرکزی (شاخص‌های گرایش به مرکز) عبارتند از: میانگین و میانه.
 ر) معیارهایی مانند میانگین و میانه به ما کمک می‌کنند بدانیم داده‌ها در کجا متمرکزند.
 ز) شاخص‌های پراکندگی عبارتند از: دامنه تغییرات، دامنه میان‌چارکی، انحراف معیار.
 س) شاخص‌های پراکندگی به ما کمک می‌کنند تا میزان پراکندگی داده‌ها را مشخص کنیم.
 ش) هر چه عدد شاخص‌های پراکندگی در یک جامعه بزرگ‌تر باشند، آن جامعه پراکندگی بیشتری دارد.
 ص) اگر داده دور افتاده داشته باشیم، میانه و دامنه میان‌چارکی شاخص‌های بهتری برای بررسی داده‌ها هستند.
 ض) اگر داده دور افتاده نداشته باشیم، میانگین و انحراف معیار شاخص‌های بهتری برای بررسی داده‌ها هستند.
 ط) برای توصیف داده‌های کیفی (اسمی یا ترتیبی)، گزارش درصد باید با گزارش تعداد همراه باشد.

۱. جاهای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید.

- الف) تعداد اعضای جامعه را جامعه می‌گویند.
 ب) تعداد اعضای نمونه را نمونه می‌گوییم.
 پ) هر چه پراکندگی متغیر در جامعه بیشتر باشد، برای اطمینان از وجود تنوع، به اندازه نمونه نیاز داریم.
 ت) اندازه‌گیری یا سنجش، گام برای یافتن داده‌ها و بررسی متغیر مورد نظر است.
 ث) اولین قدم برای یافتن داده‌ها و بررسی متغیر مورد نظر است.
 ج) بیان مساله و فهم آن گام در چرخه آمار است.
 چ) گردآوری و پاک‌سازی داده‌ها، گام در چرخه آمار است.
 ح) بیان یا مفهوم مساله گام چرخه آماری در حل مسائل است.
 خ) داده‌ها را گردآوری می‌کنیم و تا حد ممکن از درستی آن‌ها مطمئن می‌شویم، گام چرخه آمار است.
 د) راهی برای رسیدن به پاسخ مساله پیدا می‌کنیم. به نمونه‌گیری، شیوه اندازه‌گیری متغیر و چگونگی توصیف نتایج می‌اندیشیم گام چرخه آمار است.
 ذ) داده‌ای است که نصف داده‌ها از آن کم‌تر و نصف داده‌ها از آن بیشتر هستند.
 ر) نمودار بهتر نشان می‌دهد که داده‌ها متراکم‌تر یا پراکنده‌تر هستند.
 ز) برای توصیف داده‌های کیفی، گزارش درصد باید همیشه با گزارش همراه باشد.
 س) اگر داده‌های دور افتاده داشته باشیم، معیار پراکندگی مناسب است.
 ش) هنگامی که داده‌های دور افتاده نداشته باشیم، میانگین و شاخص مناسبی برای توصیف داده‌ها هستند.
 ص) مطمئن‌ترین نمودار برای متغیر نمودار جعبه‌ای است.
 ض) اگر داده دور افتاده داشته باشیم از نمودار استفاده می‌کنیم.

۲. کدام گزینه جزء گام اول داده‌ها در چرخه حل مسائل آماری محسوب نمی‌شود؟

- ۱) استفاده از نمودار (۲) مرتب کردن داده‌ها (۳) گزارش معیارها (۴) تفسیر داده‌ها

۳. تفسیر نتایج به دست آمده، کدام گام در چرخه حل مسائل آماری است؟

- ۱) بیان مساله (۲) گردآوری داده‌ها (۳) تحلیل داده‌ها (۴) بحث و نتیجه‌گیری

۴. کدام یک از عبارتهای زیر درست و کدام یک نادرست است؟
- الف) هر چه جامعه بزرگتر شود، اندازه نمونه ثابت میماند.
- ب) مرتب کردن دادهها در گام دوم چرخه آمار قرار دارد.
- پ) طرح یک پرسش دقیق و شفاف، مهمترین گام رسیدن به پاسخ است که در مرحله بیان مساله صورت میگیرد.
- ت) طرح و برنامه ریزی دومین گام در چرخه آمار است.
- ث) گردآوری و سازماندهی دادهها سومین گام در چرخه آمار است.
- ج) برای توصیف دادههای کیفی، گزارش درصد باید با گزارش تعداد همراه باشد.
- چ) برای توصیف دادههای کیفی، گزارش درصد باید همیشه با گزارش تعداد متفاوت باشد.
- ح) معیارهایی مانند میانگین و میانه به ما کمک می کنند بدانیم دادهها در کجا متمرکزند.
- خ) دامنه تغییرات از معیارهای گرایش به مرکز می باشد.
- د) وقتی داده دور افتاده داریم، میانه معیار مناسبی برای توصیف دادهها می باشد.
- ذ) وقتی داده دور افتاده نداریم، میانه شاخص مناسبتری از میانگین برای توصیف دادهها می باشد.
- ر) اگر داده دور افتاده داشته باشیم می توانیم از میانه و دامنه میان چارکی استفاده کنیم.

۵. به سوالات زیر پاسخ کوتاه بدهید.

- الف) روش نمونه گیری مربوط به کدام گام چرخه آمار است؟
- ب) تفسیر نتایج به دست آمده، کدام گام در چرخه حل مسائل آماری است؟
- پ) اگر داده دور افتاده داشته باشیم، کدام معیار گرایش به مرکز مناسب است؟
- ت) اگر داده دور افتاده داشته باشیم، کدام معیار پراکندگی مناسب است؟
- ث) اگر داده دور افتاده نداشته باشیم، کدام معیار پراکندگی مناسب است؟

۶. در یک نمودار جعبه ای اگر چارک اول برابر ۳ و دامنه میان چارکی آن (IQR) برابر ۱۱ باشد، چارک سوم آن کدام است؟

۱۵ (۴)

۸ (۳)

۷ (۲)

۱۴ (۱)

فصل ۲: الگوهای خطی

درس ۱: مدل سازی و دنباله

هر آرایشی از اعداد حقیقی که به دنبال هم قرار بگیرند، دنباله نامیده می‌شود. مثل: $۲, ۵, ۸, \dots$
 به هر یک از اعداد ۲ و ۵ و ۸ و ... یک جمله از دنباله می‌گوییم.
 جمله اول دنباله را با a_1 ، جمله دوم را با a_2 و ... و جمله n ام دنباله را با a_n نشان می‌دهیم.

به زبان ریاضی، دنباله، تابعی است از مجموعه اعداد طبیعی به مجموعه اعداد حقیقی.
 بنابر این دامنه دنباله، مجموعه اعداد طبیعی است.

جملات دنباله ممکن است دارای الگو باشند. در این صورت رابطه‌ی بین جملات دنباله را می‌توان به یکی از دو صورت زیر نوشت:

الف) ضابطه تابعی دنباله (ضابطه دنباله): اگر بتوانیم فرمولی بنویسیم که با داشتن شماره جمله بتوان آن جمله از دنباله را به دست آورد، به آن فرمول، ضابطه دنباله می‌گوییم.
 ۱. جمله اول دنباله‌های زیر را بنویسید.

$$۱) a_n = 6n$$

$$۲) b_n = 2n + 3$$

$$۳) c_n = n^2 - 5$$

$$۴) d_n = 2^n - n$$

$$۵) a_n = -4n + 3$$

$$۶) b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

۲. اگر $a_n = -(2)^n$ و $b_n = \frac{n+4}{n+1}$ و $c_n = -2n + 3$ باشند، حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$a_3 - b_3 + c_3$$

۳. با توجه به دنباله‌های $a_n = 2^{2n+1}$ و $b_n = \frac{15}{n+1}$ و $c_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$ حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$a_1 - b_4 + c_2$$

۴. با توجه به دنباله‌های $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2}$ و $b_n = n^2 + 1$ حاصل عبارت زیر را بیابید.

$$2a_1 + b_2$$

۵. کدام جمله دنباله زیر برابر با ۲۸ است؟

$$a_n = 3n + 4$$

۶. کدام جمله دنباله زیر برابر با ۳۳ است؟

$$b_n = n^2 - 3$$

ب) رابطه بازگشتی: اگر بتوانیم بین یک جمله از دنباله و یک یا چند جمله قبل از آن الگویی پیدا کنیم، به آن رابطه بازگشتی می‌گوییم.

۷. رابطه بازگشتی دنباله‌های زیر را بنویسید.

۱) ۳, ۶, ۱۲, ۲۴, ...

۲) ۲, ۵, ۸, ۱۱, ...

۳) $\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, \dots$

۴) ۲۵, ۲۰, ۱۵, ۱۰, ...

۸. چهار جمله اول دنباله‌های بازگشتی زیر را بنویسید.

$$۱) \begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + 2 \\ a_1 = 2 \end{cases}$$

$$۲) \begin{cases} a_{n+1} = a_n + 4 \\ a_1 = -3 \end{cases}$$

$$۳) \begin{cases} a_{n+1} = \frac{a_n}{(-1)^n} \\ a_1 = 3 \end{cases}$$

$$۴) \begin{cases} a_{n+2} = a_{n+1} + 6 \\ a_1 = 4 \end{cases}$$

$$۵) \begin{cases} a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \\ a_1 = 1, a_2 = 1 \end{cases}$$

$$۶) \begin{cases} a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} \\ a_1 = 2, a_2 = 4, a_3 = 5 \end{cases}$$

۹. جمله چهارم دنباله بازگشتی زیر را به دست آورید.

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{a_n}{2} \\ a_1 = 16 \end{cases}$$

رسم نمودار دنباله: برای رسم نمودار دنباله، کفایت چند جمله از دنباله را به دست آورده و آن نقاط را در دستگاه مختصات پیدا کنیم. (نقاط را نباید به یکدیگر وصل کنیم)

۱۰. نمودار دنباله‌های زیر را رسم کنید.

۱) $a_n = n + 1$

۲) $b_n = n^2$

سوالات درست یا نادرست و جای خالی مربوط به درس ۱:

۱۱. جاهای خالی را با عبارت مناسب تکمیل کنید.

الف) جمله پنجم دنباله $a_n = n^2 - 3$ برابر است.

ب) جمله چهارم دنباله $a_n = \frac{1}{2}n - \frac{5}{2}$ برابر است.

پ) در دنباله $a_{n+1} = a_n + 3$ ، اگر جمله پنجم برابر ۱۷ باشد، جمله ششم آن برابر است.

ت) در دنباله $\dots, -9, -4, -1, \dots$ ضابطه این دنباله برابر است.

درس ۲: دنباله حسابی

یک دنباله را حسابی می‌گوییم، هرگاه هر جمله آن از مجموع جمله قبل از آن با یک عدد حقیقی ثابت به دست آید. مثل: $\dots, 13, 10, 7, 4$ و $\dots, -3, 1, 5, 9$ و $\dots, 3, 3, 3$ به عبارت دیگر، یک دنباله حسابی به صورت $\dots, a_1 + 3d, a_1 + 2d, a_1 + d, a_1$ می‌باشد که در آن به a_1 جمله اول و به d اختلاف مشترک دنباله می‌گوییم. برای به دست آوردن اختلاف مشترک، کافی است یک جمله را منهای جمله قبلی کنیم. اگر $d > 0$ باشد، دنباله را افزایشی و اگر $d < 0$ باشد، دنباله را کاهشی و اگر $d = 0$ باشد، دنباله را ثابت می‌گوییم.

۱. کدام یک از دنباله‌های زیر حسابی است؟

۱) $\dots, 11, 9, 7, 5$

۲) $\dots, 16, 11, 7, 4$

۳) $\dots, -1, 2, 5, 8$

۲. در دنباله‌های حسابی زیر، جمله اول و اختلاف مشترک را مشخص کنید.

۱) $\dots, 11, 8, 5, 2$

۲) $\dots, -2, 2, 6, 10$

جمله عمومی دنباله حسابی: الگو یا ضابطه ای است که جملات دنباله حسابی از روی آن تعیین می‌شوند.

جمله عمومی دنباله حسابی به صورت $a_n = a_1 + (n - 1)d$ می‌باشد. (مثلاً می‌توان نوشت $a_n = a_1 + nd$) بنابراین برای نوشتن جمله عمومی دنباله حسابی، ابتدا باید جمله اول و اختلاف مشترک را مشخص کنیم.

۳. جمله عمومی دنباله‌های حسابی زیر را بنویسید.

۱) $\dots, 10, 7, 4$

۲) $\dots, -2, 3, 8$

۳) $... , -2, -5, -8$

۴) $... , 3, \frac{5}{2}, 2$

۴. دنباله حسابی $a_n = 4n + 3$ را در نظر بگیرید.
الف) جمله دهم دنباله را بنویسید.

ب) جمله چندم دنباله برابر با ۸۷ است؟

نکته: اگر a_n و a_m دو جمله دلخواه از دنباله حسابی باشند، اختلاف مشترک دنباله را می‌توان از فرمول زیر به دست آورد.

$$d = \frac{a_n - a_m}{n - m} \quad \text{یا} \quad d = \frac{a_m - a_n}{m - n}$$

۵. اگر در یک دنباله حسابی، $a_4 = 3$ و $a_{15} = 15$ باشد، اختلاف مشترک دنباله را به دست آورید.

۶. جمله یازدهم یک دنباله حسابی ۵۲ و جمله نوزدهم آن ۹۲ است.
الف) جمله عمومی دنباله را بنویسید.

ب) جمله سی ام دنباله را بنویسید.

۷. در یک دنباله حسابی، جمله اول برابر ۵- و اختلاف مشترک برابر ۸ است. کدام جمله دنباله ۵۵۵ است؟

۸. در یک دنباله حسابی، جمله اول برابر ۳ و اختلاف مشترک برابر ۱۱ است. کدام جمله دنباله ۹۱ است؟

۹. در یک کارخانه سنگبری، برای صیقل دادن سنگ‌ها از یک صفحه به وزن ۱۴۰۰ گرم استفاده می‌شود. اگر با توجه به مصرف هفتگی، به طور میانگین ۲۴۰ گرم از وزن صفحه کم شود، پس از شش هفته استفاده مداوم، وزن صفحه چقدر است؟

۱۰. رابطه بازگشتی دنباله حسابی: رابطه بازگشتی دنباله حسابی به صورت مقابل است. $a_1 = \dots$ ، $a_{n+1} = a_n + d$ را بنویسید.

۱۱. با نوشتن جملات رابطه بازگشتی دنباله‌های زیر، مشخص کنید کدام یک دنباله حسابی است.

$$۱) a_{n+1} = a_n + 5, \quad a_1 = -1$$

$$۲) a_{n+1} = 5a_n + 1, \quad a_1 = -1$$

$$۳) a_{n+1} = \frac{1}{a_n}, \quad a_1 = 2$$

رسم نمودار دنباله حسابی: کافی است چند جمله اول دنباله را به دست آورده و آنها را به صورت نقطه در صفحه مشخص کنیم. (دقت کنید که نقاط باید در راستای یک خط راست قرار بگیرند و شیب خط، همان اختلاف مشترک خواهد بود)

۱۲. جدول زیر را کامل کنید.

ضابطه تابع	دنباله ساخته شده از تابع	چهار جمله اول دنباله	نمودار دنباله
$y = 2x - 1$	$a_n = 2n - 1$	۱, ۳, ۵, ۷	
$y = -x + 4$			

واسطه حسابی: اگر a, b, c سه جمله متوالی (یا سه جمله متساوی الفاصله) از یک دنباله حسابی باشند، آن گاه

$$2b = a + c \quad \text{یا} \quad b = \frac{a + c}{2}$$

۱۳. مقدار x را چنان بیابید که $10, x + 1, 4$ سه جمله متوالی یک دنباله حسابی باشند.

۱۴. اگر $x + 6, 2x + 1, x$ سه جمله متوالی یک دنباله حسابی باشند، مقدار x را بیابید.

درج n واسطه حسابی: اگر بین دو عدد a و b ، به تعداد n عدد چنان قرار دهیم که جملات از a تا b یک دنباله

حسابی تشکیل دهند، آن گاه اختلاف مشترک جملات دنباله برابر است با $d = \frac{b-a}{n+1}$

۱۵. بین اعداد ۱۰ و ۱۸، سه عدد طوری قرار دهید که یک دنباله حسابی تشکیل دهند.

۱۶. بین اعداد ۶- و ۴۲، هفت عدد طوری قرار دهید که یک دنباله حسابی تشکیل دهند.

مجموع جملات دنباله حسابی: مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی به یکی از دو روش زیر تعیین می‌شود.

$$۱) S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{۲} \quad \text{اگر جمله اول و جمله آخر معلوم باشد:}$$

$$۲) S_n = \frac{n(2a_1 + (n-1)d)}{۲} \quad \text{اگر جمله اول و قدر نسبت معلوم باشد:}$$

۱۷. مجموع ۲۰ جمله اول دنباله حسابی ... ، ۱۰ ، ۷ ، ۳ را بیابید.

۱۸. مجموع ۱۰ جمله اول دنباله حسابی ... ، ۰ ، ۲- ، ۴- را بیابید.

۱۹. مجموع ۱۵ جمله اول دنباله حسابی ... ، ۴ ، ۷ ، ۱۰ را بیابید.

۲۰. مجموع ۳۰ جمله اول اعداد فرد را به دست آورید.

۲۱. در دنباله حسابی مقابل، S_{10} را حساب کنید. $a_1 = -2$ ، $a_{n+1} = 5 + a_n$

نکته: در دنباله حسابی $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ ، اگر جمله اول و جمله آخر و اختلاف مشترک معلوم باشد، تعداد جمله

ها را می‌توان از فرمول مقابل به دست آورد. $n = \frac{b-a}{d} + 1$

۲۲. تعداد جملات دنباله ۶۱، ۱۰، ۷، ۴ را بیابید.

۲۳. مجموع جملات دنباله های حسابی زیر را به دست آورید.

۱) ۱، ۵، ۹، ...، ۴۰۱

۲) ۱۳، ...، ۸۱، ۸۵، ۸۹

۳) ۱۹۹، ...، ۹، ۴، ۱-

سوالات درست یا نادرست و جای خالی مربوط به درس ۲:

۲۴. جاهای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید.

الف) هر دنباله حسابی یک تابع خطی است که شیب خط آن، همان اختلاف مشترک جملات دنباله، یعنی d است.

ب) جمله عمومی دنباله ۱، ۷، ۳ برابر و جمله دهم آن می‌باشد.

پ) بین دو عدد ۳ و ۱۹ می توان واسطه حسابی با اختلاف مشترک ۴ نوشت.

فصل ۳: الگوهای غیرخطی

درس ۱: دنباله هندسی

یک دنباله را هندسی می‌گوییم هرگاه هر جمله آن از حاصل ضرب جمله قبل از آن با یک عدد حقیقی ثابت مخالف صفر به دست آید.

مثل: ... ۳, ۶, ۱۲, ۲۴ یا ... ۱, ۳, ۹, ۲۷ یا ... ۸, ۸, ۸, ۸

به عبارت دیگر، یک دنباله هندسی به صورت ... $a_1 r^3, a_1 r^2, a_1 r, a_1$ می‌باشد که در آن به a_1 جمله اول و به r نسبت مشترک دنباله می‌گوییم. (دقت می‌کنیم که $a_1 \neq 0$ و $r \neq 0$)

اگر $r > 1$ باشد، آن‌گاه دنباله را افزایشی می‌گوییم.

اگر $0 < r < 1$ باشد، آن‌گاه دنباله را کاهش می‌گوییم.

اگر $r = 1$ باشد، دنباله را ثابت می‌گوییم.

(برای به دست آوردن نسبت مشترک، کافی است یک جمله را به جمله قبلی تقسیم کنیم)

۱. کدام یک از دنباله‌های زیر هندسی است؟ در صورت هندسی بودن، جمله اول و نسبت مشترک را مشخص کنید.

۱) ۳, ۶, ۱۲, ۲۴, ...

۲) ۵, -۱۰, ۲۰, -۴۰, ...

۳) ۴, ۲, ۱, $\frac{1}{2}$, ...

۴) ۲, ۴, ۶, ۱۰, ...

۲. چه تعداد از دنباله‌های زیر هندسی نیستند؟

۳, ۶, ۱۲, ...	۸, ۴, ۲, ...	۴, ۸, ۱۲, ...	۲, $2\sqrt{2}$, ۴
	چهار (۴)	سه (۳)	دو (۲)
			یک (۱)

جمله عمومی دنباله هندسی جمله عمومی دنباله هندسی به صورت مقابل به دست می‌آید. $a_n = a_1 r^{n-1}$

بنابر این برای نوشتن جمله عمومی دنباله هندسی، ابتدا باید جمله اول و نسبت مشترک را مشخص کنیم.

۳. جمله عمومی دنباله‌های هندسی زیر را بنویسید.

۱) ۴, ۱۲, ۳۶, ...

$$۲) ۳, -۶, ۱۲, \dots$$

$$۳) ۲۷, ۹, ۳, \dots$$

$$۴) ۱, \frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \frac{1}{125}, \dots$$

$$۵) ۴, -۲, ۱, \dots$$

$$۶) \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{24}, \dots$$

۴. در دنباله $\dots, \frac{1}{54}, \frac{1}{18}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}$ ، ضابطه این دنباله برابر است.

۵. اگر در یک دنباله هندسی، جمله اول برابر با ۴ و نسبت مشترک برابر با $\frac{1}{4}$ باشد، حاصل $a_4 + a_5$ را به دست آورید.

$$۳, ۶, ۱۲, ۲۴, \dots$$

۶. جمله هفتم دنباله مقابل را دست آورید.

۷. یک شهاب سنگ، ۱۵ هزار کیلو گرم وزن دارد. پس از ورود آن به جو زمین، در هر دقیقه ۱۵٪ از وزنش به سبب تماس با جو، از بین می‌رود. پس از گذشت ۵ دقیقه از ورود این شهاب سنگ به جو زمین، چقدر از وزن آن باقی می‌ماند؟

۸. چندمین جمله از دنباله هندسی مقابل برابر با ۳۲۰ است؟
 $۵, ۱۰, ۲۰, \dots$

۹. جمله چندم دنباله مقابل برابر با $\frac{۳}{۲۵۶}$ است؟
 $۳, \frac{۳}{۲}, \frac{۳}{۴}, \frac{۳}{۸}, \dots$

نکته: اگر دو جمله از یک دنباله هندسی معلوم باشند، برای تعیین نسبت مشترک، آنها را بر یکدیگر تقسیم می‌کنیم.

۱۰. در یک دنباله هندسی، جمله چهارم برابر ۵ و جمله هفتم برابر ۱۳۵ است. نسبت مشترک این دنباله را بیابید.

۱۱. اگر جمله اول یک دنباله هندسی برابر با ۲ و جمله چهارم آن برابر با ۵۴ باشد، جمله عمومی دنباله را بنویسید.

۱۲. در یک دنباله افزایشی، جمله سوم یک دنباله هندسی ۲۷ و جمله پنجم آن برابر با ۲۴۳ است. جمله هفتم این دنباله هندسی را به دست آورید.

۱۳. نخستین جمله یک دنباله هندسی ۱۵۳۶ و نسبت مشترک این دنباله هندسی برابر با $\frac{1}{3}$ است. کدام جمله دنباله برابر ۶ است؟

نکته: رابطه بازگشتی جملات دنباله هندسی به صورت مقابل است.

$$a_{n+1} = ra_n, \quad a_1 = \dots$$

۱۴. رابطه بازگشتی دنباله‌های هندسی زیر را بنویسید.

۱) $15, 5, \frac{5}{3}, \dots$

۲) $\frac{1}{4}, \frac{3}{16}, \frac{9}{64}, \dots$

۱۵. جمله عمومی دنباله هندسی مقابل را بنویسید.

$$a_{n+1} = \frac{4}{3}a_n, \quad a_1 = 2$$

۱۶. با نوشتن جملات رابطه‌های بازگشتی زیر، مشخص کنید کدام یک از آن‌ها یک دنباله هندسی تشکیل می‌دهد.

۱) $a_{n+1} = 2a_n, \quad a_1 = 1$

۲) $a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n, \quad a_1 = \frac{1}{2}$

$$۳) a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}, \quad a_1 = 1$$

$$۴) a_{n+1} = (a_n)^2, \quad a_1 = \frac{1}{2}$$

واسطه هندسی: اگر a, b, c سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند، آن گاه $b^2 = a \times c$. به عدد b واسطه هندسی دو عدد a و c می‌گوییم.
۱۷. بین دو عدد ۵ و ۲۰، یک واسطه هندسی بنویسید.

۱۸. اگر $x - 2, x, x + 4$ سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند، مقدار x را به دست آورید.

۱۹. اگر $x, x + 2, x + 3$ سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند، مقدار x را به دست آورید.

۲۰. مقدار a را چنان بیابید که $\sqrt{a} + 1$ و 7 و $\sqrt{a} - 1$ تشکیل یک دنباله هندسی بدهند. سپس مقدار نسبت مشترک دنباله را تعیین کنید.

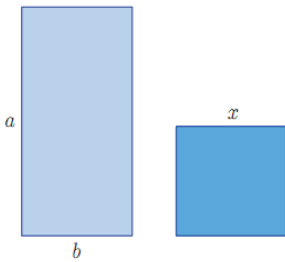
۲۱. مقدار x را چنان بیابید که $\sqrt{x} + 2$ و 3 و $\sqrt{x} - 2$ تشکیل یک دنباله هندسی بدهند. سپس مقدار نسبت مشترک دنباله را تعیین کنید.

۲۲. مستطیل با اضلاع a و b مطابق شکل مقابل مفروض است. اگر مربعی به ضلع x هم مساحت با آن باشد، کدام یک از دنباله‌های زیر، تشکیل یک دنباله هندسی می‌دهند؟

پ) b, a, x

ب) a, x, b

الف) a, b, x



۲۳. اگر بین دو عدد a و b ، به تعداد n عدد چنان قرار دهیم که جملات از a تا b یک دنباله هندسی **درج n واسطه هندسی**:

تشکیل دهند، آن گاه نسبت مشترک جملات دنباله از رابطه مقابل به دست می‌آید.

$$r^{n+1} = \frac{b}{a}$$

۲۳. بین دو عدد ۴ و ۲۵۶ پنج واسطه هندسی درج کنید.

۲۴. بین دو عدد ۲ و $\frac{16}{27}$ دو عدد چنان بنویسید که اعداد حاصل، تشکیل دنباله هندسی بدهند.

مجموع جملات دنباله هندسی: مجموع n جمله اول دنباله هندسی از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$S_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}$$

۲۵. مجموع ۵ جمله اول یک دنباله هندسی با جمله اول $a_1 = 2$ و نسبت مشترک $r = 3$ را به دست آورید.

۲۶. مجموع ۵ جمله اول دنباله هندسی زیر را بیابید.

$$\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \dots$$

نکته: در مسائل مربوط به مجموع جملات دنباله هندسی، اگر جمله اول و آخر معلوم باشند، ابتدا باید تعداد جمله‌ها را پیدا کنیم؛ یعنی مشخص کنیم جمله آخر دنباله، چندمین جمله دنباله است.

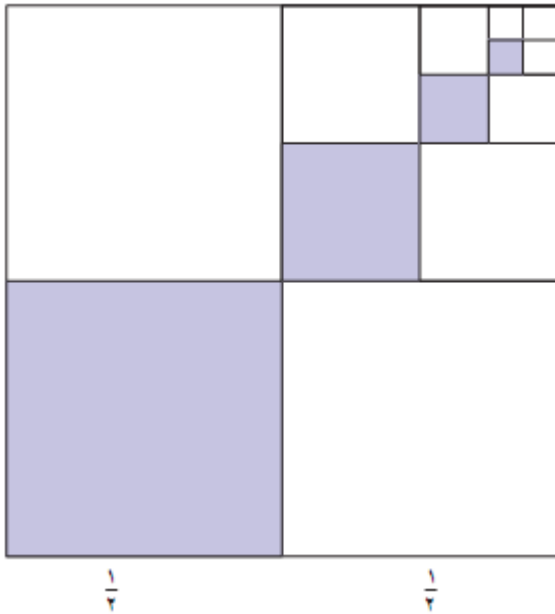
۲۷. مجموع‌های زیر را به دست آورید.

۱) $1 + 4 + 16 + \dots + 4096$

۲) $\frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \dots + \frac{1}{640}$

۳) $1536 + 768 + 384 + \dots + 6$

۲۸. پس از تقسیم مربعی به ضلع یک متر به چهار مربع برابر، یکی از آن‌ها را رنگ می‌کنیم. از مربع‌های باقی‌مانده، مربعی را که با مربع رنگ‌آمیزی شده ضلع مشترک ندارد، انتخاب می‌کنیم و با تقسیم آن به چهار مربع برابر، مربعی را که با مربع رنگ‌آمیزی شده، در یک راس مشترک است، رنگ‌آمیزی می‌کنیم و همین روند را مطابق شکل ادامه می‌دهیم.



الف) چرا دنباله مساحت‌های مربع‌های رنگی، یک دنباله هندسی تشکیل می‌دهد؟

ب) اگر روند رنگ‌آمیزی گفته شده را n مرحله انجام دهیم، مجموع مساحت‌های مربع‌های رنگی از چه رابطه‌ای به دست می‌آید؟

پ) پس از شش مرحله رنگ‌آمیزی مربع به روش بالا، چه مساحتی از مربع رنگ می‌شود؟

درس ۲: ریشه n ام و توان گویا

ریشه دوم: عدد b را ریشه دوم عدد a می‌گوییم هرگاه $b^2 = a$ باشد. به عبارت دیگر، ریشه دوم عدد a ، عدد یا عددی هستند که اگر به توان دو برسند، عدد a به دست آید. به عنوان مثال ریشه‌های دوم عدد ۴۹ برابر است با 7 ، -7 . چون $7^2 = 49$ و $(-7)^2 = 49$.

نکته: اعداد مثبت، دو ریشه دوم دارند که قرینه یکدیگر هستند.

نکته: ریشه دوم صفر برابر خودش است.

نکته: اعداد منفی ریشه دوم ندارند. (چون عددی وجود ندارد که توان دومش منفی باشد)

نکته: اگر a یک عدد مثبت باشد، ریشه‌های دوم عدد a را به صورت \sqrt{a} و $-\sqrt{a}$ نشان می‌دهیم.

به عنوان مثال، ریشه‌های دوم عدد ۶۴ برابر است با $\sqrt{64} = 8$ و $-\sqrt{64} = -8$

۱. ریشه دوم اعداد زیر را در صورت وجود به دست آورید.

- ۱) ۲۵ ۲) ۸۱ ۳) ۱ ۴) ۰ ۵) -۴

- ۶) ۵ ۷) $\frac{1}{16}$ ۸) $\frac{2}{3}$ ۹) $\frac{4}{5}$

جذر: دیدیم که هر عدد مثبت مثل a ، دو ریشه دوم دارد. به ریشه دوم مثبت عدد a ، جذر a می‌گوییم و به صورت

\sqrt{a} نشان می‌دهیم. به عنوان مثال جذر ۱۶ برابر است با ۴.

نکته: در حالت کلی: $\sqrt{a^2} = |a|$.

۲. حاصل عبارت‌های زیر را در صورت وجود بیابید.

- ۱) $\sqrt{36}$ ۲) $\sqrt{49}$ ۳) $\sqrt{(3)^2}$ ۴) $\sqrt{(-3)^2}$
۵) $\sqrt{-3^2}$

ریشه سوم: عدد b را ریشه سوم عدد a می‌گوییم هرگاه $b^3 = a$ باشد و آن را به صورت $\sqrt[3]{a}$ نشان می‌دهیم. به

عبارت دیگر، ریشه سوم عدد a ، عددی است که اگر به توان سه برسد، عدد a به دست آید. به عنوان مثال ریشه سوم عدد ۸ برابر است با ۲ چون $2^3 = 8$ و ریشه سوم عدد -۸ برابر است با -۲ چون $(-2)^3 = -8$.

نکته: هر عدد حقیقی (مثبت یا صفر یا منفی)، فقط یک ریشه سوم دارد.

نکته: ریشه سوم اعداد مثبت، عددی مثبت و ریشه سوم اعداد منفی، عددی منفی است.

نکته: ریشه سوم اعداد ۱، ۰، -۱ برابر با خودش است.

نکته: در حالت کلی: $\sqrt[3]{a^3} = a$

۳. حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

- | | |
|-----------------------|---------------------|
| ۱) $\sqrt[3]{27}$ | ۲) $\sqrt[3]{64}$ |
| ۳) $\sqrt{-125}$ | ۴) $\sqrt[3]{1}$ |
| ۵) $\sqrt{-1}$ | ۶) $\sqrt[3]{0}$ |
| ۷) $\sqrt[3]{(-6)^3}$ | ۵) $\sqrt[3]{-7^3}$ |

ریشه n ام: در ادامه ریشه‌های دوم و سوم، به ریشه‌های مراتب بالاتر مثل ریشه‌های چهارم، پنجم و ... می‌پردازیم. اگر n یک عدد طبیعی و بزرگ‌تر یا مساوی ۲ باشد، b را یک ریشه n ام عدد a می‌نامیم هرگاه $b^n = a$ باشد. به عنوان مثال ریشه پنجم عدد ۳۲ برابر با ۲ است چون $2^5 = 32$.

نکته: ریشه‌های n ام با توجه به زوج یا فرد بودن n به دو دسته تقسیم می‌شوند.

ریشه‌های n ام زوج	ریشه‌های n ام فرد
اعداد منفی ریشه n ام (n زوج) ندارند.	اعداد منفی ریشه n ام (n فرد) دارند.
هر عدد مثبت a دارای دو ریشه n ام (n زوج) به صورت $\sqrt[n]{a}$ و $-\sqrt[n]{a}$ است.	هر عدد مثبت یا منفی دارای فقط یک ریشه n ام (n فرد) است.
$\sqrt[n]{a^n} = a $	$\sqrt[n]{a^n} = a$

نکته: در حالت کلی رابطه زیر، همواره برقرار است.

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} |a| & \text{زوج } n \\ a & \text{فرد } n \end{cases}$$

۴. حاصل عبارت‌های زیر را در صورت وجود بیابید.

- | | | | |
|--------------------|-----------------------|-----------------------|---------------------|
| ۱) $\sqrt[3]{2^8}$ | ۲) $\sqrt[6]{2^6}$ | ۳) $\sqrt[6]{(-2)^6}$ | ۴) $\sqrt[6]{-2^6}$ |
| ۵) $\sqrt[3]{3^7}$ | ۶) $\sqrt[7]{(-3)^7}$ | ۷) $\sqrt[7]{-3^7}$ | |

توان‌های گویا: در سال‌های گذشته با توان‌های صحیح آشنا شدیم. به عنوان مثال: $(-2)^4 = 16$ و $2^3 = 8$ اکنون با اعدادی که توان گویا (توان کسری یا اعشاری) دارند، آشنا می‌شویم.

نکته: برای هر عدد طبیعی $n \geq 2$ ، توان $\frac{1}{n}$ عدد حقیقی مثبت a را به صورت مقابل تعریف می‌کنیم. $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ (در این کتاب، اگر $a < 0$ باشد، $a^{\frac{1}{n}}$ را تعریف نمی‌کنیم. به عنوان مثال عبارت‌هایی مثل $(-2)^{\frac{1}{2}}$ و $(-1)^{\frac{1}{3}}$ را تعریف نمی‌کنیم. از این به بعد هر جا عبارت $a^{\frac{1}{n}}$ بیان می‌شود، a را عددی مثبت در نظر می‌گیریم.)

۵. اعداد رادیکالی زیر را به صورت اعداد تواندار بنویسید.

- | | | | |
|------------------|------------------|---|-------------------|
| ۱) $\sqrt[5]{5}$ | ۲) $\sqrt[3]{3}$ | ۳) $\sqrt[5]{\left(\frac{2}{3}\right)}$ | ۴) $\sqrt[3]{-2}$ |
|------------------|------------------|---|-------------------|

نکته: به طور کلی هرگاه a عددی مثبت و m و n دو عدد طبیعی باشند، داریم: $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$
 مثل $\sqrt[5]{3^5} = 3^{\frac{5}{5}}$

فرمول‌های محاسبه با اعداد تواندار:

۱) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

۲) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

۳) $a^m \cdot b^m = (ab)^m$

۴) $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$

۵) $(a^m)^n = a^{mn}$

۶) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$

۷) $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

۶. حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

۱) $3^{\frac{2}{5}} \times 3^{\frac{4}{5}}$

۲) $5^{\frac{2}{3}} \times 7^{\frac{2}{3}}$

۳) $6^{\frac{5}{3}} \div 6^{\frac{2}{3}}$

۴) $\frac{5^{\frac{7}{2}}}{5^{\frac{2}{2}}}$

۵) $8^{\frac{1}{5}} \div 4^{\frac{1}{5}}$

۶) $(a^{\frac{4}{3}} \times b^{\frac{4}{3}})^3 \times (a^4)^{\frac{1}{4}}$

۷. حاصل را به صورت اعداد تواندار با توان مثبت بنویسید.

۱) $3^{-\frac{4}{5}}$

۲) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{5}}$

۳) $\frac{1}{5^{-\frac{7}{2}}}$

۸. هر یک از عبارت‌های توانی را به صورت رادیکالی و عبارت‌های رادیکالی را به صورت توان دار بنویسید.

۱) $3^{\frac{1}{4}}$

۲) $7^{\frac{1}{8}}$

۳) $\sqrt[3]{25}$

۴) $\sqrt[3]{2/7}$

۵) $(\circ / 31)^{\frac{1}{2}}$

۶) $\sqrt[3]{1}$

۷) $\sqrt[3]{2^3}$

۸) $\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{4}{9}}$

۹. هر یک از اعداد توان دار زیر را به ساده ترین صورت ممکن بنویسید.

۱) $4^{\frac{1}{2}}$

۲) $125^{-\frac{1}{3}}$

۳) $100^{\frac{1}{2}}$

۳) $32^{\frac{1}{5}}$

۱۰. هر یک از عبارتهای زیر را به ساده ترین صورت ممکن بنویسید.

۱) $(2 \times 8)^{\frac{1}{2}}$

۲) $4(1000)^{\frac{1}{3}}$

۳) $3^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{2}{3}}$

۴) $7^{\frac{2}{4}} \times 7^{\frac{5}{4}}$

۵) $125^{\frac{2}{3}} \div 125^{\frac{1}{3}}$

۶) $8^{\frac{2}{3}} \times (1/5)^{\frac{2}{3}}$

۱۱. دانش آموزی $\sqrt[3]{-8}$ را به صورت $(-8)^{\frac{1}{3}}$ نوشت. توضیح دهید که چرا نمایش $\sqrt[3]{-8}$ به صورت $(-8)^{\frac{1}{3}}$ نادرست است؟

۱۲. با استفاده از تعریف توان های گویا نشان دهید که $\sqrt{5}$ و $\sqrt[4]{5^2}$ و $\sqrt[6]{5^3}$ باهم برابرند.

۱۳. حاصل هر یک از عبارتهای زیر را به ساده ترین صورت ممکن بنویسید. (a ، m و n اعداد حقیقی مثبت اند)

۱) $3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{4}}$

۲) $5^{\frac{1}{6}} \times 5^{(-\frac{1}{4})}$

۳) $8^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{2}}$

۴) $(2^6)^{\frac{1}{2}}$

۵) $(\frac{3^4}{2^6})^{\frac{1}{2}}$

۶) $\left(\frac{a^{-\frac{1}{2}}}{a^{-\frac{1}{4}}} \right)^{-4}$

۷) $3^{0/26} \times 3^{0/74}$

۸) $(m^{\frac{2}{3}} \cdot n^{\frac{1}{2}})^2 (m^2 n^2)^{\frac{1}{2}}$

۱۴. در هر یک از تساوی‌های زیر، مقدار x را مشخص کنید.

۱) $8^x \times 9^5 = 72^5$

۲) $(0/36)^4 \times (0/36)^x \times (0/36)^{-6} = (0/36)^7$

۳) $(3^x)^6 = \frac{1}{3^2}$

۴) $\frac{x^5 \times 15^3}{3^2 \times 3^5 \times 3} = 5^8$

۱۵. همان‌طور که می‌دانید، حجم کره‌ای به شعاع r با استفاده از فرمول $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ به دست می‌آید. (حجم کره است.)

الف) توضیح دهید که چگونه می‌توان با استفاده از مفهوم ریشه‌گیری و توان‌های گویا، شعاع کره‌ای به حجم V را

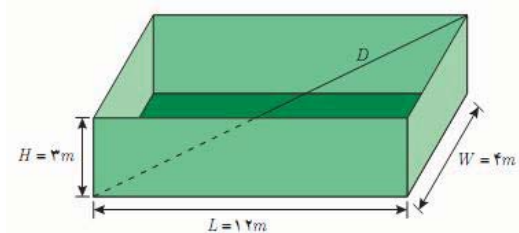
از فرمول زیر به دست آورد؟ $r = \left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$

ب) شعاع یک تانکر کره‌ای شکل را که حجم آن $\frac{32\pi}{3}$ است، به دست آورید.

۱۶. اگر D قطر جعبه زیر باشد، اندازه آن از طریق تابع $D = (L^2 + W^2 + H^2)^{\frac{1}{2}}$ به دست می‌آید. (L طول، W عرض و H ارتفاع جعبه است.)

الف) با توجه به شکل، اندازه D را به دست آورید.

ب) اگر اندازه $L = W = H = 1\text{ m}$ باشد، اندازه D را به دست آورید.



سوالات درست یا نادرست و جای خالی مربوط به درس ۲:

۱۷. جاهای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید.

الف) ریشه چهارم عدد ۱۶ برابر و می باشد.

ب) ریشه چهارم عدد ۱۰ برابر است با و

پ) نمایش $\sqrt[3]{-7}$ با به صورت $(-7)^{\frac{1}{3}}$ می توان نوشت.

ت) در تساوی $(\frac{0}{27})^2 \times (\frac{0}{27})^5 \times (\frac{0}{27})^{x+1} = (\frac{0}{27})^5$ مقدار x کدام است؟

۹ (۴)

۸ (۳)

۷ (۲)

۶ (۱)

درس ۳: تابع نمایی

هر تابع به صورت $y = a^x$ که در آن، a عددی حقیقی مثبت و مخالف یک و x یک متغیر است، یک تابع نمایی نامیده می‌شود. به a پایه و به x نما یا توان می‌گوییم.

۱. کدامیک از گزینه‌های زیر، تابع نمایی است؟

۱) $y = 3^x$ ۲) $y = \left(\frac{2}{5}\right)^x$ ۳) $y = 4^{-x}$ ۴) $y = (-2)^x$

رسم نمودار تابع نمایی: برای رسم نمودار تابع نمایی، از روش نقطه‌یابی استفاده می‌کنیم.

(معمولا در حالتی که پایه از ۱ بیشتر باشد، به x مقادیر ۲, ۱, ۰, -۱ و در حالتی که پایه از ۱ کوچکتر باشد، به x اعداد ۱, ۰, -۱, -۲ داده و y را به دست می‌آوریم و نقاط به دست آمده را به طور متوالی به هم وصل می‌کنیم)

۲. نمودار توابع نمایی زیر را رسم کنید.

۱) $y = 2^x$ ۲) $y = 3^x$ ۳) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ۴) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

۳. تابع نمایی $y = 2^x$ را در نظر بگیرید.

الف) جدول زیر را کامل کنید.

x	-۱	۰	۱
$y = 2^x$			

ب) نمودار مختصاتی $y = 2^x$ را رسم کنید.

پ) محل $2^{\frac{3}{2}}$ را روی محور مشخص کنید.

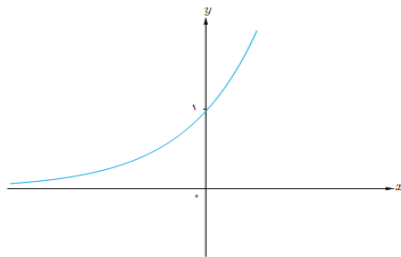
۴. الف) به کمک جدول، نمودار تابع $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ را رسم کنید.

ب) محل $\left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{5}{2}}$ را روی نمودار مشخص کنید.

نکته: حالت کلی نمودار تابع نمایی به یکی از دو حالت زیر است.

(۱) $a > 1$ باشد.

(۲) $0 < a < 1$ باشد.



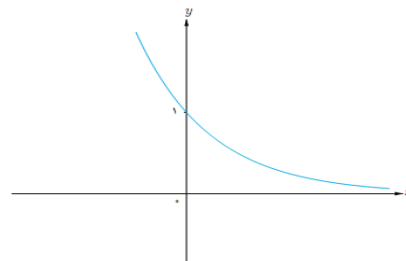
$$y = a^x$$

$$a > 1$$

تابع، کاهشی است

$$\text{دامنه} = R$$

R^+ = برد (برد تابع، اعداد حقیقی مثبت است)



$$y = a^x$$

$$0 < a < 1$$

تابع، کاهشی است

$$\text{دامنه} = R$$

R^+ = برد (برد تابع، اعداد حقیقی مثبت است)

نکته: هر دو تابع نمایی، همواره از نقطه $(0, 1)$ عبور می کنند.

۵. نمودار توابع $y = a^x$ ، $a > 1$ و $y = a^x$ ، $0 < a < 1$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنید و آن‌ها را باهم مقایسه کنید.

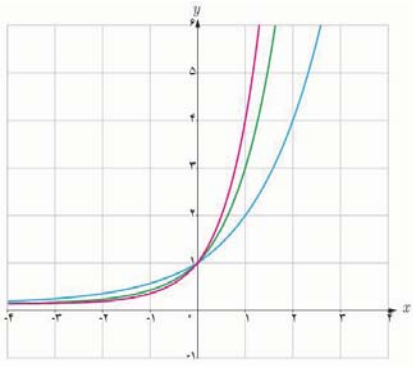
مقایسه نمودار توابع نمایی:

در هر دو نوع تابع نمایی $y = a^x$ ، $a > 1$ و $y = a^x$ ، $0 < a < 1$

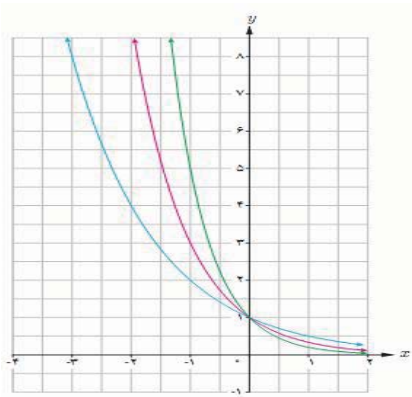
الف) به ازای مقادیر مختلف a ، تمام نمودارها از نقطه $(0, 1)$ عبور می کنند.

ب) هر چقدر a بیشتر باشد، نمودار تابع در سمت راست محور x ها بالاتر قرار می گیرد و در سمت چپ، پایین تر.

۶: نمودار توابع $y = 2^x$ ، $y = 3^x$ و $y = 4^x$ را در یک دستگاه مختصات رسم کرده‌ایم. مشخص کنید کدام نمودار مربوط به کدام تابع است؟



۷: نمودار توابع $y = (\frac{1}{2})^x$ ، $y = (\frac{1}{3})^x$ و $y = (\frac{1}{5})^x$ را در یک دستگاه مختصات رسم کرده‌ایم. مشخص کنید کدام نمودار مربوط به کدام تابع است؟



رشد نمایی: مسائلی که بر حسب زمان، به صورت یک تابع نمایی افزایشی باشند، رشد نمایی نامیده می‌شوند. مثل رشد جمعیت در هر سال و یا افزایش موجودی حساب بانکی با دریافت سود بانکی ماهانه.

نکته: معادله کلی مسائل رشد نمایی به صورت $f(t) = c(1+r)^t$ است که در آن، $f(t)$ مقدار نهایی، c مقدار اولیه، r میزان رشد و t بیان‌گر زمان است.

۸. جمعیت یک شهر، ۲۰۰۰۰۰ نفر است. اگر رشد جمعیت ۲ درصد در سال باشد، جمعیت این شهر، پس از ۲ سال، چند نفر خواهد شد؟

۹. جمعیت یک شهر، یک میلیون نفر است. اگر رشد جمعیت به صورت نمایی و با ضریب ثابت ۶ درصد در سال باشد، جمعیت این شهر، پس از ۱۰ سال، چند نفر خواهد شد؟

زوال نمایی: مسائلی که بر حسب زمان، به صورت یک تابع نمایی کاهش می‌باشند، زوال نمایی نامیده می‌شوند. مثل کاهش جمعیت در هر سال و یا میزان ضرر در یک بازار مالی.

نکته: معادله کلی مسائل زوال نمایی به صورت $f(t) = c(1-r)^t$ است که در آن، $f(t)$ مقدار نهایی، c مقدار اولیه، r میزان رشد و t بیان‌گر زمان است.

۱۰. جمعیت یک شهر ۲۰۰۰۰۰ نفر است. اگر به دلیل مهاجرت، هر سال جمعیت این شهر، ۲ درصد کاهش یابد، جمعیت این شهر را پس از دو سال به دست آورید.

۱۱. جمعیت کشوری، در سال ۲۰۰۰ میلادی حدود ۴۰ میلیون نفر برآورد شده است. اگر رشد جمعیت این کشور با نرخ ۱ درصد در حال کاهش باشد، جمعیت آن در سال ۲۰۱۸ میلادی چند نفر خواهد بود؟

شهریور	پایانی دوم	پایانی اول	فصل
۸	۵	۱۵	فصل ۱
۵/۵	۲	۵	فصل ۲ (تا صفحه ۶۰)
	۳/۵	-	فصل ۲ (از صفحه ۶۰ تا آخر)
۶/۵	۹/۵	-	فصل ۳
۲۰	۲۰	۲۰	جمع