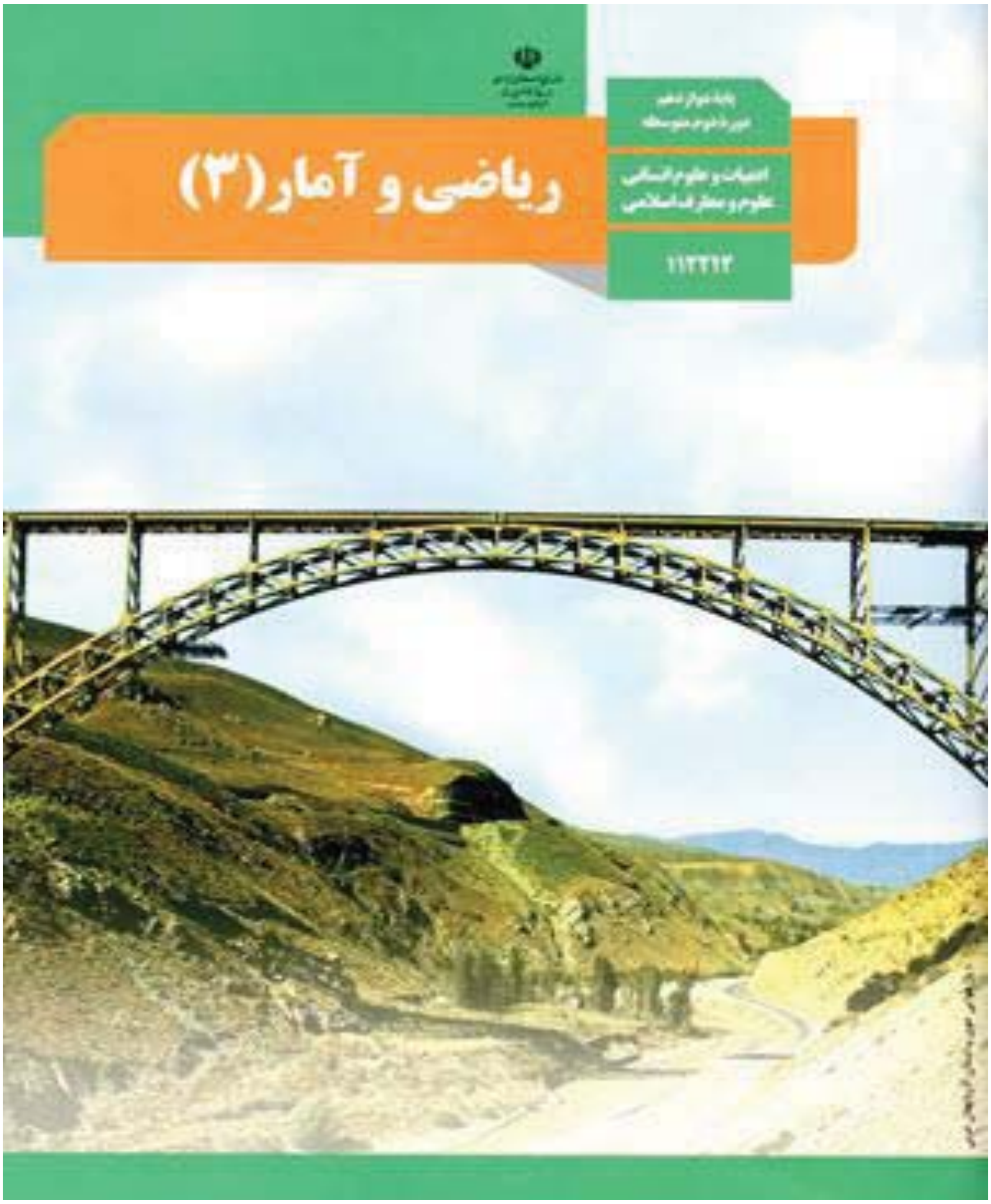
«یک لحظه جدا نیستم از یاد تو هر دم          در خانه‌ی دل نقش هویدای تو بینم»

# جزوه ریاضی و آمار (۳)
## دوازدهم انسانی


تنظیم و نگارش: زهره صفار

دبیر ریاضی شهرستان گرگان

## درس (۱): شمارش

**مقدمه:**

مسائل زیادی وجود دارند که در آنها دانستن تعداد حالات موجود و چگونگی قرار گرفتن اشیاء، اعداد یا افراد، می‌تواند در برنامه‌ریزی و تصمیم‌گیری نقش مهمی ایفا کند. برای حل چنین مسائلی شمردن تمام حالات مورد نظر همیشه امکان‌پذیر نیست، بنابراین با استفاده از روش‌های محاسباتی و روابط ریاضی شمارش این حالات آسانتر خواهد شد. استفاده از دو اصل جمع و ضرب که به اصول شمارش معروفند در این زمینه کارساز است.

**اصل جمع:**

اگر بتوان عملی را به $m$ طریق و عمل دیگری را به $n$ طریق انجام داد، طوریکه این دو عمل را نتوان با هم انجام داد، در این صورت به $m+n$ طریق می‌توان عمل اول «یا» عمل دوم را انجام داد. ( این اصل را می‌توان به بیش از دو عمل نیز تعمیم داد)

☺**مثال:** اگر برای انتخاب رئیس شورای دانش‌آموزی از بین ۵ دانش آموز سال یازدهم یا ۳ دانش‌آموز سال دهم، قرار باشد یک نفر برگزیده شود، تعداد حالتهای این انتخاب را بیابید.

پاسخ: چون فقط مجاز به انتخاب یک نفر هستیم ( یا دانش‌آموز یازدهم یا دهم) پس از اصل جمع استفاده می‌کنیم.

بنابراین ۸ حالت وجود دارد. $۵+۳=۸$

☺**مثال:** برای شرکت در مسابقات ورزشی کشوری، استان تهران ۵ تکواندوکار، ۱۲ والیبالیست، ۶ کشتی‌گیر و ۸ شناگر معرفی کرده است. به چند طریق می‌توان از بین این افراد یک نفر را به عنوان نماینده گروه در مراسم افتتاحیه انتخاب کرد؟

**پاسخ:** چون فقط مجاز به انتخاب یک نفر به عنوان نماینده گروه هستیم، پس از اصل جمع استفاده می‌کنیم.

بنابراین ۳۱ حالت انتخاب وجود دارد. $۵+۱۲+۶+۸=۳۱$

❖**مثال:** برای ورود به یک استادیوم ورزشی در ضلع غربی ۲ در، ضلع شرقی ۱ در و در ضلع شمالی ۳ در وجود دارد. هر تماشاگر برای ورود به استادیوم به چند طریق می‌توانند وارد شود؟

❖**مثال:** از بین ۴ دانشجوی پزشکی، ۳ دندانپزشکی و ۵ پرستاری قرار است یک نفر برای اجرای همایشی علمی انتخاب شود. به چند طریق می‌توان مجری انتخاب کرد؟

❖**مثال:** شخصی برای رفتن به مسافرت می‌تواند از طریق سه نوع اتوبوس یا دونوع قطار یا یک پرواز با هواپیما به مقصد برسد. او از چند طریق می‌تواند به مقصد برسد؟

❖**مثال:** دانش آموزی ۳ خودکار به رنگهای آبی، مشکی و سبز و دو مداد به رنگهای مشکی و قرمز و یک روانویس مشکی دارد. برای نوشتن چند انتخاب می‌تواند داشته باشد؟

**اصل ضرب:**

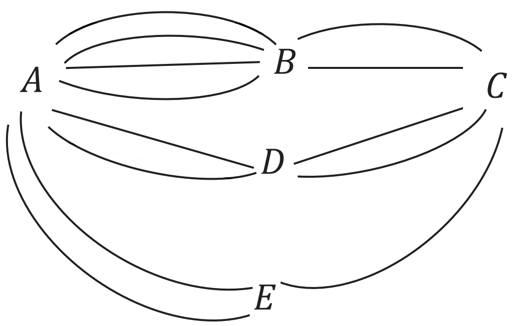
اگر عملی طی دو مرحله انجام پذیر باشد، طوری‌که در مرحله اول به $m$ طریق «و» در مرحله دوم هر کدام از این $m$ طریق به $n$ روش قابل انجام باشد، در کل آن عمل از $m \times n$ طریق قابل انجام است. (اصل ضرب را می‌توان به بیش از دو عمل نیز تعمیم داد)

☺**مثال:** سارا سه مانتو به رنگهای مشکی، سفید و سبز و دو شلوار به رنگهای مشکی و سفید دارد. برای پوشیدن یک دست لباس کامل چند انتخاب دارد؟

**پاسخ:** چون برای پوشیدن یک دست لباس کامل لازم است به طور همزمان مانتو و شلوار را بپوشید پس از اصل ضرب استفاده می‌کنیم. بنابراین ۶ مدل انتخاب وجود دارد. $۳ \times ۲ = ۶$

❖**مثال:** در یک مهمانی شام، دو نوع پلو، سه نوع خورشت، چهار نوع سالاد و سه نوع نوشیدنی موجود است. به چند طریق می‌توان از بین این موارد یک شام کامل خورد؟

☺**مثال:** بین پنج شهر $E, D, C, B, A$ مطابق شکل زیر راه‌های مختلفی وجود دارد که همه دو طرفه‌اند، به چند طریق می‌توان:




الف) از شهر $A$ به شهر $B$ سفر کرد؟ به ۴ طریق (از ۴ راه)

ب) از شهر $A$ به شهر $C$ و از طریق شهر $B$ سفر کرد؟ چون دو انتخاب در دو مرحله باید انجام شود پس اصل ضرب است. ۴ راه از $A$ به $B$ و ۲ راه از $B$ به $C$ پس جواب برابر است با $۴ \times ۲ = ۸$

ج) از شهر $A$ به شهر $C$ و از طریق شهر $D$ سفر کرد؟ مشابه قسمت قبل $۲ \times ۲ = ۴$

د) از شهر $A$ به شهر $C$ و از طریق شهر $E$ سفر کرد؟ $۲ \times ۱ = ۲$

ه) از شهر $A$ به شهر $C$ سفرکرد؟
چون گذشتن از شهر خاصی را ذکر نکرده، همه‌ی حالتهای قبل را باید با هم جمع کنیم. یعنی می‌توان از طریق $B$ یا $D$ یا $E$ به شهر $C$ رسید.

$$(۴ \times ۲) + (۲ \times ۲) + (۲ \times ۱) = ۸ + ۴ + ۲ = ۱۴$$

و) از شهر $A$ به شهر $C$ مسافرت کرد بدون آنکه از شهر $D$ گذشت؟

فقط دو حالت گذشتن از $B$ و $E$ را در نظر می‌گیریم. $(۴ \times ۲) + (۲ \times ۱) = ۸ + ۲ = ۱۰$

ز) از شهر $B$ بدون عبور از شهر $E$ به شهر $A$ مسافرت کرد؟

با دقت در مسیرها یا باید از $B$ مستقیما به $A$ رفت که ۴ راه دارد یا باید از $B$ ابتدا به $C$ و سپس به $D$ و آخر به $A$ رفت. پس:

$$۴ + (۲ \times ۲ \times ۲) = ۴ + ۸ = ۱۲$$

ح) از شهر $A$ به شهر $C$ به صورت رفت و برگشت مسافرت کرد به شرط گذشتن از $B$ ؟

چون عمل رفت و برگشت انتخاب در چند مرحله و پشت سرهم است از اصل ضرب استفاده می‌شود.

$$۴ \times ۲ \times ۲ \times ۴ = ۶۴$$

ط) از شهر $A$ به شهر $C$ و از طریق $B$ به صورت رفت و برگشت مسافرت کرد طوری‌که مسیرهای رفت و برگشت یکسان نباشد کرد؟

تفاوت این قسمت با قسمت قبل در این است که راهی که برای رفت استفاده شده برای برگشت حذف شود پس در برگشت یکی از تعداد راهها کم می‌شود. $۴ \times ۲ \times ۱ \times ۳ = ۲۴$

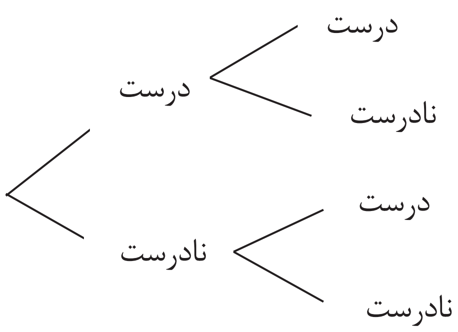
☺**مثال:** یک آزمون ۴ گزینه‌ای با دو سوال را به چند طریق می‌توان پاسخ داد به شرط آنکه جواب دادن به تمام سوالات الزامی باشد؟

**پاسخ:** سوال اول را به ۴ حالت و سوال دوم را نیز به ۴ حالت می‌توان پاسخ داد، چون در آزمونها تمام سوالات بررسی می‌شوند، پس باید از اصل ضرب استفاده کنیم. $۱۶ = ۴ \times ۴$

☺**مثال:** یک آزمون درست و نادرست با ۲ سوال موجود است. برای پاسخگویی به سوالات این آزمون چند راه وجود دارد، در صورتی که قرار باشد به هر ۲ سوال پاسخ داده شود. نمودار درختی مربوطه را رسم کنید.

**پاسخ:** در این آزمون سوال اول ۲ انتخاب و سوال دوم۲ انتخاب دارد.( درست، نادرست)، چون قرار است تمام سوالات مورد بررسی قرار گیرد پس از اصل ضرب استفاده می کنیم. پس۴ حالت برای پاسخگویی به این آزمون وجود دارد. $۴ = ۲ \times ۲$

در نمودار درختی اگر تعداد سرشاخه‌های انتهایی را بشمارید با تعداد حالتهای انتخاب برابر است.




☺**مثال:** یک آزمون درست و نادرست با ۳ سوال موجود است. برای پاسخگویی به سوالات این آزمون چند راه وجود دارد، در صورتی که قرار باشد به هر ۳ سوال پاسخ داده شود.

**پاسخ:** در این آزمون سوال اول ۲ انتخاب، سوال دوم۲ انتخاب و سوال سوم نیز ۲ انتخاب دارد.( درست یا نادرست)، چون قرار است تمام سوالات مورد بررسی قرار گیرد پس از اصل ضرب استفاده می کنیم. $۸ = ۲ \times ۲ \times ۲$

پس ۸ حالت برای پاسخگویی به این آزمون وجود دارد. در واقع تعداد پاسخ‌ها را به اندازه‌ی تعداد سوالات در هم ضرب می‌کنیم. ۲ را ۳ بار ضرب کردیم. برای سهولت در محاسبه از توان استفاده می‌کنیم. $۸ = ۲^۳$

❖نمودار درختی آزمون درست و نادرست با ۳ سوال را رسم کنید.

**تذکر:** برای تعیین تعداد حالات پاسخگویی به سوالات چند گزینه‌ای می‌توان از رابطه‌ی زیر استفاده کرد:

$$\textbf{تعداد حالات} = \text{تعداد گزینه‌ها}^{\text{تعداد سوالات}}$$

☺**مثال:** در یک آزمون تستی که هر سوال دارای چهار گزینه است، ۱۰سوال مطرح شده است.

الف) به شرط آنکه تمام سوالات پاسخ داده شود، چند راه برای پاسخ‌گویی وجود دارد؟

**پاسخ:** تعداد راههای پاسخگویی برابرا است با $۴^{۱۰}$

ب) اگر داوطلب مجاز باشد به سوالات پاسخ ندهد،چطور؟

**پاسخ:** چون پاسخ ندادن به سوالات نیز مجاز است، پس برای هر سوال ۵ حالت انتخاب وجود دارد به صورت زیر:

الف ☐    ب ☐    ج ☐    د ☐    بدون پاسخ ☐

بنابراین $۵^{۱۰}$ راه برای انتخاب وجود دارد.

❖**مثال:** یک قفل رمزدار دارای رمز سه رقمی با ارقام ۰،۱، ۲، ... ، ۹ می‌باشد اگر رمز این قفل را ندانیم، چند حالت برای امتحان کردن این رمز وجود دارد؟

**فاکتوریل:** اگر $n$ یک عدد طبیعی باشد، حاصل‌ضرب اعداد طبیعی و متوالی از ۱ تا $n$ را به صورت $n!$ نمایش می‌دهیم. به عنوان مثال داریم:

$$۱! = ۱$$
$$۲! = ۲ \times ۱$$
$$۳! = ۳ \times ۲ \times ۱$$
$$۴! = ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱$$
$$۵! = ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱$$
$$\vdots$$
$$n! = n \times (n-۱) \times (n-۲) \times (n-۳) \times (n-۴) \times \ldots \times ۱$$

**قرارداد:** $۰! = ۱$

**توصیه:** برای سرعت عمل بیشتر بهتر است اعداد زیر را به خاطر بسپاریم:

$۱! = ۱$ $\quad$ $۲! = ۲$ $\quad$ $۳! = ۶$ $\quad$ $۴! = ۲۴$ $\quad$ $۵! = ۱۲۰$ $\quad$ $۶! = ۷۲۰$

**مثال:** حاصل عبارات زیر را تعیین کنید.

الف) $۳! + ۴! = ۳ \times ۲ \times ۱ + ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۶ + ۲۴ = ۳۰$

ب) $۹ + ۵! - ۲! = ۹ + ۱۲۰ - ۲ = ۱۲۷$

ج) $\frac{۶!}{۳!} = \frac{۶\times۵\times۴\times۳\times۲\times۱}{۳\times۲\times۱} = \frac{۷۲۰}{۶} = ۱۲۰$

❖**مثال:** درستی یا نادرستی عبارات زیر را تعیین کنید. (با ذکر دلیل)

الف) $\frac{۶!}{۲!} = ۳!$

ب) $۵! = ۳! + ۲!$

ج) $۶! = ۵! \times ۶$

د) $۸! = ۸ \times ۷ \times ۶!$

**تذکر:** دقت کنید در محاسبه ی فاکتوریل‌ها اعمال محاسباتی به صورت مستقیم روی اعداد با فاکتوریل انجام نمی‌شود به عنوان مثال نمی‌توان $۲! + ۴!$ را با $۶!$ برابر دانست، چون حاصل برابر ندارند.

همچنین برای سهولت در محاسبه در مباحث بعدی گاهی لازم است فاکتوریلها را تا جایی که لازم است باز کنیم. مانند:

$۶! = ۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳!$ $\quad$ $۶! = ۶ \times ۵ \times ۴!$ $\quad$ $۶! = ۶ \times ۵!$

پس با توجه به نیازی که در مسئله وجود دارد، عمل می‌کنیم.

دقت کنید در مورد فاکتوریلهایی که در آنها نمادهایی مانند $n , k , m , ...$ نیز وجود دارند به همین صورت عمل می‌شود.

**مثال:** جای خالی را به صورت مناسب پر کنید.

الف) $\frac{....}{۶!} = ۹ \times ۸ \times ۷$

پاسخ: $\frac{۹\times۸\times۷\times۶!}{۶!} = ۹ \times ۸ \times ۷$

$۹!$ را تا $۶!$ باز می‌کنیم تا با مخرج ساده شود و فقط $۹ \times ۸ \times ۷$ در جواب باقی بماند.

ب) $\frac{۷!}{۵!} = \cdots$

پاسخ: $\frac{۷!}{۵!} = \frac{۷\times۶\times۵!}{۵!} = ۷ \times ۶ = ۴۲$

در این قسمت لازم است $۷!$ را تا $۵!$ باز کنیم و سپس با $۵!$ صورت ساده کنیم.

ج) $\frac{k!}{(k-۱)!} = \cdots$

پاسخ: $\frac{k!}{(k-۱)!} = \frac{k\times(k-۱)!}{(k-۱)!} = k$

چون $k$ بزرگتر از $k - ۱$ است بنابراین فاکتوریل صورت را تا $k - ۱$ باز می‌کنیم، سپس از صورت و مخرج $(k - ۱)!$ ساده می‌شود.

❖**مثال:** درستی یا نادرستی عبارات زیر را تعیین کنید. (با ذکر دلیل)

الف) $۸! \times ۹ = ۹!$

ب) $n! \times (n+۱) = (n+۱)!$

ج) $\frac{m\times(m-۱)\times(m-۲)\times(m-۳)!}{(m-۲)!} = m \times (m-۱)$

د) $\frac{(k-۱)!}{k!} = \frac{۱}{k}$

❖**مثال:** جای خالی را به صورت مناسب پر کنید.

الف) $\frac{n!}{(n-۲)!} =$ ........................

ب) حاصل عبارت $\frac{((۳!)!)}{۵!}$ برابر است با ............

**جایگشت:**

سه حرف $b, a$ و $c$ را در نظر بگیرید، این سه حرف می‌توانند به حالتهای مختلفی در کنار یکدیگر قرار گیرند، به عنوان مثال

$abc \quad acb \quad bac \quad bca \quad cab \quad cba$

با کمی دقت می‌توان دریافت این ۳ حرف به ۶ حالت مختلف می‌توانند کنار هم قرار گیرند. به هر کدام از این حالتها یک جایگشت ۳ تایی از این ۳ حرف می‌گویند.

پس به طور کلی به هر حالت از کنار هم قرار گرفتن $n$ شیء متمایز یک جایگشت $n$ تایی از آن $n$ شیء گویند. تعداد این جایگشت‌ها برابر با $n!$ است.

$P_n = n!$

در مثال قبل که ۳ حرف (شیء متمایز) در اختیار داشتیم به $۶ = ۳!$ حالت اشیاء کنار هم قرار گرفتند. پس $P_۳ = ۶$

**تذکر:** در مسائل مربوط به جایگشت تمام اشیائی که در اختیار داریم می‌توانند با جابجایی همه جا قرار گیرند و حالتهای مختلفی را بسازند. ترتیب قرار گرفتن اشیاء در کنار هم مهم است.

☺**مثال:** فرض کنید چهار کتاب مختلف در اختیار شما قرار گرفته باشد، به هرحالت از چینش این کتاب‌ها در کنار یکدیگر یک جایگشت چهارتایی از آنها گویند. برای تعیین تعداد کل حالات قرار گرفتن این کتابها یا تعداد کل جایگشتها از رابطه‌ی زیر استفاده می‌کنیم.

$$P_۴ = ۴! = ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۲۴$$

☺**مثال:** با حروف کلمه‌ی " عینک" چند کلمه‌ی چهار حرفی می‌توان نوشت؟ ( با معنا بودن کلمات لازم نیست)

پاسخ: عینک از ۴ حرف مختلف تشکیل شده است ( ع، ی، ن، ک) که همگی قابلیت انتخاب و جابجایی با هم دارند. پس جایگشت ۴ تایی حروف را باید بدست آوریم و تعداد کلماتی که می‌توان ساخت برابر است با:

$$P_۴ = ۴! = ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۲۴$$

☺**مثال:** با حروف کلمه‌ی" دبستان" چند کلمه‌ی شش حرفی می‌توان ساخت؟

پاسخ: دبستان از ۶ حرف مختلف تشکیل شده است که همگی قابلیت انتخاب و جابجایی با هم دارند. پس جایگشت ۶ تایی حروف است و تعداد کلماتی که می‌توان ساخت برابر است با:

$$P_۶ = ۶! = ۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۷۲۰$$

☺**مثال:** با ارقام ۹ , ۷ , ۶ , ۴ , ۳ چند عدد ۵ رقمی و بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

پاسخ: با پنج رقم داده شده اعداد پنج رقمی باید بسازیم پس جایگشت است و داریم:

$$P_۵ = ۵! = ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۱۲۰$$

❖**مثال:** آقایان محمدی، افشار و رضایی به عنوان سخنران در یک همایش دعوت شده‌اند، به چند طریق این سه نفر می‌توانند سخنرانی کنند؟

❖**مثال:** با ارقام شماره تلفن ۲۳۱۵۴۹۷ چند شماره تلفن ۷ رقمی و بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

**تذکر مهم:** در مثالهای بالا عملی که انجام می‌شود مانند آن است که با انتخاب هر شیء برای مکان مورد نظر آن شیء را کنار گذاشته و حق انتخاب برای بقیه‌ی اشیاء وجود دارد. به عنوان مثال در کلمه‌ی " عینک" که ۴ حرف دارد باید ۴ جای خالی را با حروف ( ع، ی، ن، ک) پر کنیم، اگر یکبار از حرف (ن) استفاده کنیم آن حرف حذف شده و ۳ انتخاب دیگر باقی می‌ماند. پس می‌توان نوشت:

تعداد انتخابها $\underline{۴} \times \underline{۳} \times \underline{۲} \times \underline{۱} = ۲۴$

پس برای راحتی کار از فاکتوریل استفاده می‌کنیم.
اما در مسائلی که برای همه‌ی اشیاء فضای کافی وجود ندارد یا شرطهایی برای انتخابها گذاشته شده است از روش بالا استفاده می‌کنیم.

☺**مثال:** با حروف کلمه‌ی " دانشجو" و بدون تکرار حروف:

الف) چند کلمه‌ی ۶ حرفی می‌توان نوشت؟

پاسخ (۱) چون تمام حروف قابل انتخاب شدن هستند پس: $P_۶ = ۶! = ۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۷۲۰$

پاسخ (۲) تعداد انتخابها $\underline{۶} \times \underline{۵} \times \underline{۴} \times \underline{۳} \times \underline{۲} \times \underline{۱} = ۷۲۰$

ب) چند کلمه‌ی ۵ حرفی می‌توان نوشت؟

پاسخ: برای نوشتن کلمه‌ی ۵ حرفی به ۵ جای خالی نیاز داریم، پس $\underline{۵} \times \underline{۴} \times \underline{۳} \times \underline{۲} \times \underline{۱} = ۱۲۰$

۱۲۰ کلمه می‌توان نوشت.

ج) چند کلمه‌ی ۴ حرفی می‌توان نوشت؟

پاسخ: برای نوشتن کلمه‌ی ۴ حرفی به ۴ جای خالی نیاز داریم، پس $\underline{۴} \times \underline{۳} \times \underline{۲} \times \underline{۱} = ۲۴$ کلمه‌ی مختلف می‌توان نوشت.

د) چند کلمه‌ی ۵ حرفی می‌توان نوشت که با حرف "ج" شروع و به حرف "د" ختم شود؟

پاسخ: برای اولین و آخرین حرف فقط یک انتخاب داریم. پس ۲ حرف حذف شده و ۴ حرف باقی می‌ماند، با هر بار جاگذاری یک حرف کم می‌شود. ۲۴ کلمه‌ی مختلف می‌توان ساخت.

$$\overset{ج}{\underline{۱}} \times \underline{۲} \times \underline{۳} \times \underline{۴} \times \overset{د}{\underline{۱}} = ۲۴$$

ه) چند کلمه‌ی۳ حرفی می‌توان نوشت که حرف "ش" در وسط آن باشد.

پاسخ: ابتدا حرف"ش" را در وسط قرار می‌دهیم پس یکی از تعداد حروف کم می‌شود و ۵ حرف باقی می‌ماند، در مرحله‌ی بعد یکی دیگر از حروف کم می‌شود و ۴ حرف می‌ماند. $\underline{۴} \times \underset{ش}{\underline{۱}} \times \underline{۵} = ۲۰$

❖**مثال:** با حروف کلمه « فاکتوریل» و بدون تکرار حروف:

الف) چند کلمه ۸ حرفی می‌توان نوشت؟

ب) چند کلمه ۶ حرفی می‌توان نوشت که با «ت» شروع و به «ل» ختم شوند؟

ج) چند کلمه ۵ حرفی می‌توان نوشت که به «ی» ختم شوند؟

د) چند کلمه ۴ حرفی می‌توان نوشت که با حرف بدون نقطه شروع شوند؟

**مثال:** ۳ کتاب روانشناسی و ۴ کتاب زبان در اختیار داریم.

الف) به چند طریق می‌توان تمام کتابها را در قفسه کنار هم چید؟

پاسخ: تعداد کل کتابها ۷ تاست پس تعداد انتخابها برابر است با $P_{۷} = ۷! = ۵۰۴۰$

ب) چند راه برای چیدن کتابها وجود دارد که کتابهای هر رشته همیشه کنار هم باشند؟

پاسخ: کتابهای روانشناسی به !۳ حالت و کتابهای زبان به !۴ حالت دیگر قابل جابجایی‌اند، این ۲ دسته کتاب می‌توانند با هم نیز جابجا شوند، پس تعداد حالتها برابر است با $۳! \times ۴! \times ۲ = ۶ \times ۲۴ \times ۲ = ۲۸۸$

**مثال:** با ارقام ۲ ،۳، ۵ ، ۶ ،۸ چند عدد سه رقمی بدون تکرار ارقام می‌توان ساخت که:

الف) یکان همگی ۲ باشد.

پاسخ: اولین رقم از سمت راست یکان عدد است. برای یکان فقط یک انتخاب داریم. پس از این انتخاب یکی از تعداد اعداد کم می‌شود و ۴ عدد باقی می‌ماند.

$$\underline{۴} \times \underline{۳} \times \underset{\uparrow\ \text{یکان۲}}{\underline{۱}} = ۱۲$$ تعداد انتخابها

ب) عدد زوج باشد.

پاسخ: برای ساختن عدد زوج باید یکان را عددی زوج انتخاب کرد. در بین اعداد سه عدد زوج داریم ( ۲، ۶، ۸) پس یکان ۳ انتخاب دارد اما در نهایت یکی از این اعداد در یکان قرار می‌گیرد.

$$\underline{۴} \times \underline{۳} \times \underset{\uparrow\ \text{۲ یا ۶ یا ۸}}{\underline{۳}} = ۳۶$$ تعداد انتخابها

ج) عدد مورد نظر فرد باشد.

پاسخ: برای ساختن عدد فرد باید یکان را عددی فرد انتخاب کرد. در بین اعداد دو عدد فرد داریم (۳، ۵) پس یکان ۲ انتخاب دارد.

$$\underline{۴} \times \underline{۳} \times \underset{\uparrow\ \text{۳ یا ۵}}{\underline{۲}} = ۲۴$$ تعداد انتخابها

د) عدد مورد نظر مضرب ۵ باشد.

پاسخ: برای ساختن عددی که مضرب ۵ باشد باید یکان را صفر یا ۵ انتخاب کرد. در بین اعداد صفر که وجود ندارد پس یکان فقط می‌تواند ۵ باشد.

$$\underline{۴} \times \underline{۳} \times \underset{\uparrow\ \text{فقط ۵}}{\underline{۱}} = ۱۲$$ تعداد انتخابها

**مثال:** با ارقام ۰ ، ۱ ،۲، ۵ ، ۴ ، ۷ ، ۹ و بدون تکرار ارقام:

الف) چند عدد چهار رقمی می‌توان نوشت؟

پاسخ: چون بین اعداد صفر وجود دارد باید دقت بیشتری داشته باشید زیرا صفر نمی‌تواند در اولین جایگاه از سمت چپ قرار گیرد. اگر صفر در این جایگاه قرار گیرد عدد چهار رقمی به سه رقمی تبدیل می‌شود. پس ۶ رقم دیگر می‌توانند انتخاب شوند. اما در انتخاب بعدی می‌توانیم صفر را انتخاب کنیم و یکی از اعداد دیگر را که انتخاب کردیم حذف می‌کنیم.

تعداد انتخابها $\underset{\text{غیر از صفر}}{\underline{۶}} \times \underline{۶} \times \underline{۵} \times \underline{۴} = ۷۲۰$

ب) چند عدد چهار رقمی فرد می‌توان نوشت؟

پاسخ: یکان باید فرد باشد و اولین عدد از سمت چپ غیر صفر باشد .

$\underset{\text{غیر از صفر}}{\underline{۵}} \times \underline{۵} \times \underline{۴} \times \underset{\text{۱ یا ۵ یا ۷ یا ۹}}{\underline{۴}} = ۴۰۰$

ج) چند عدد چهار رقمی زوج می‌توان نوشت؟

پاسخ: روش اول: تعداد ۴ رقمی‌های فرد _ تعداد کل ۴ رقمی‌ها = تعداد ۴ رقمی‌های زوج

$۷۲۰ - ۴۰۰ = ۳۲۰$ = تعداد ۴ رقمی‌های زوج

روش دوم: (محاسبه‌ی مستقیم)

پاسخ: می‌دانیم عددی زوج است که یکانش زوج باشد. در بین اعداد داده شده ۰، ۲و ۴ زوجند. اما برای بدست آوردن جواب باید ۲ حالت زیر را در نظر بگیریم و سپس جوابها را با هم جمع کنیم.

حالت اول: اگر یکان صفر باشد در این حالت داریم:

تعداد انتخابها $\underline{۶} \times \underline{۵} \times \underline{۴} \times \underset{\text{صفر}}{\underline{۱}} = ۱۲۰$

حالت دوم: اگر یکان ۲ یا ۴ باشد در این حالت داریم:

تعداد انتخابها $\underset{\text{غیر از صفر}}{\underline{۵}} \times \underline{۵} \times \underline{۴} \times \underset{\text{۲ یا ۴}}{\underline{۲}} =۲۰۰$

پس در حالت کلی $۳۲۰ = ۲۰۰ + ۱۲۰$ عدد زوج چهار رقمی می‌توان نوشت.

د) چند عدد چهار رقمی و مضرب ۵ می‌توان نوشت؟

پاسخ: می‌دانیم برای ساختن عددی که مضرب ۵ باشد باید یکان را صفر یا ۵ انتخاب کرد. پس۲ حالت زیر را در نظر می‌گیریم و سپس جوابها را با هم جمع کنیم.

حالت اول: اگر یکان صفر باشد در این حالت داریم:

تعداد انتخابها $\underline{6} \times \underline{5} \times \underline{4} \times \underset{\substack{\uparrow \\ \text{صفر}}}{\underline{1}} = 120$

حالت دوم: اگر یکان ۵ باشد در این حالت داریم:

تعداد انتخابها $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{غیر از صفر}}}{\underline{5}} \times \underline{5} \times \underline{4} \times \underset{\substack{\uparrow \\ 5}}{\underline{1}} = 100$

پس در حالت کلی ۲۲۰ = ۱۰۰ + ۱۲۰ عدد چهار رقمی و مضرب ۵ می‌توان نوشت.

☺**مثال:** با ارقام ۰ ، ۱ ،۲، ۳ ، ۴ ، ۵ ، ۷ و بدون تکرار ارقام:

الف) چند عدد پنج رقمی بزرگتر از ۵۰۰۰۰ می‌توان نوشت؟

پاسخ: با توجه به صورت سوال عددی بزرگتر از پنجاه هزار است که اولین رقم سمت چپ آن ۵ یا ۷ باشد.

تعداد انتخابها $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{۵ یا ۷}}}{\underline{2}} \times \underline{6} \times \underline{5} \times \underline{4} \times \underline{3} = 720$

ب) چند عدد پنج رقمی کوچکتر از ۴۰۰۰۰ می‌توان نوشت؟

پاسخ: با توجه به صورت سوال عددی کوچکتر از چهل هزار است که اولین رقم سمت چپ آن ۱ یا ۲ یا ۳ باشد.

تعداد انتخابها $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{۱ یا۲یا۳}}}{\underline{3}} \times \underline{6} \times \underline{5} \times \underline{4} \times \underline{3} = 1080$

❖**مثال:** با ارقام ۰ ، ۱ ،۲، ۳ ، ۵ ، ۸ و بدون تکرار ارقام چند عدد پنج رقمی:

الف) بزرگتر از ۳۰۰۰۰ می‌توان نوشت؟

ب) چند عدد کوچکتر از ۸۰۰۰۰ می‌توان نوشت؟

ج) چند عدد زوج می‌توان نوشت؟

**تبدیل $r$ شیء از بین $n$ شیء: ( جایگشت $r$ شیء از بین $n$ شیء)**

تعداد انتخابهای $r$ شیء از بین $n$ شیء متمایز (که جابجایی یا ترتیب انتخاب مهم باشد) را با نماد $P(n,r)$ نمایش می‌دهند و برای محاسبه آن از رابطه زیر استفاده می‌شود: $(n \geq r)$

$$P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}$$

☺**مثال:** در یک شرکت خصوصی ۸ نفر برای استخدام داوطلب شده‌اند. از بین این افراد به چند طریق می‌توان ۱ منشی، ۱ حسابدار و ۱ مسئول روابط عمومی انتخاب نمود، طوریکه هر نفر حداکثر یک شغل داشته باشد.

پاسخ: قرار است از بین ۸ نفر، ۳ نفر انتخاب کنیم که هر یک سمت و شغل خاصی داشته باشند، در این انتخاب ترتیب اهمیت دارد زیرا با عوض شدن شغل افراد حالات جدیدی بوجود می‌آید پس داریم:

$$P(۸,۳)=\frac{۸!}{(۸-۳)!}=\frac{۸!}{۵!}=\frac{۸\times۷\times۶\times۵!}{۵!}=۳۳۶$$ تعداد راههای انتخاب

☺**مثال:** در یک پارکینگ با ۱۰ جای خالی که در کنار یکدیگر قرار دارند ۴ خودروی مختلف به چند طریق می‌توانند پارک کنند؟

پاسخ: قرار گرفتن خودروها در پارکینگ دارای ترتیب است یعنی اگر خودروها جای پارک خود را عوض کنند حالت جدیدی در مدل پارک آنها بوجود می‌آید پس داریم:

$$P(۱۰,۴)=\frac{۱۰!}{(۱۰-۴)!}=\frac{۱۰!}{۶!}=\frac{۱۰\times۹\times۸\times۷\times۶!}{۶!}=۵۰۴۰$$ تعداد راههای انتخاب

☺**تست:** به چند طریق می‌توان از بین ۷ دونده‌ی یک مسابقه، نفرات اول تا سوم را مشخص نمود طوری‌که هیچ دو نفری هم‌زمان به خط پایان نرسند؟

الف) ۲۲۲　　ب) ۵۱۲　　ج) ۳۳۶　　د) ۲۱۰

پاسخ: در تعیین نفرات برتر یا مشخص کردن رتبه‌ی نفرات در مسابقات ترتیب اهمیت دارد، پس داریم:

$$P(۷,۳)=\frac{۷!}{(۷-۳)!}=\frac{۷!}{۴!}=\frac{۷\times۶\times۵\times۴!}{۴!}=۲۱۰$$ تعداد راههای انتخاب

گزینه (د) درست است.

☺**مثال:** با حروف کلمه « دانشجو» و بدون تکرار چند کلمه ۳ حرفی می‌توان نوشت؟

پاسخ:

راه اول: $\underline{۶}\times\underline{۵}\times\underline{۴}=۱۲۰$ تعداد راههای انتخاب

راه دوم: از بین ۶ حرف قرار است کلمه‌ی ۳ حرفی نوشته شود، چون جابجا شدن حروف باعث می‌شود که کلمات جدیدی ساخته شود و ترتیب اهمیت دارد پس:

$$P(۶,۳) = \frac{۶!}{(۶-۳)!} = \frac{۶!}{۳!} = \frac{۶\times۵\times۴\times۳!}{۳!} = ۶ \times ۵ \times ۴ = ۱۲۰$$ تعداد راههای انتخاب

❖**مثال:** به چند طریق می‌توان ۴ کتاب را از بین ۹ کتاب انتخاب کرد و در قفسه چید؟

❖**مثال:** از بین ارقام ۹ ،۸ ،۶ ،۵ ،۳ ،۱،۲ می‌خواهیم اعداد ۵ رقمی بسازیم به چند روش می‌توان این کار را انجام داد؟

❖**مثال:** از بین ۱۵ دانش‌آموز ۱۰ نفر می‌خواهند در یک ردیف صف تشکیل دهند، این کار به چند طریق امکان پذیر است؟

❖**مثال:** حاصل عبارات زیر را بیابید.

الف) $P(۱۲,۴) + P(۹,۳)$

ب) $P(n,n)$

ج) $P(n,۱)$

❖**مثال:** درستی رابطه $P(n,۰) = ۱$ را نشان دهید.

**ترکیب $r$ شیء از بین $n$ شیء:**

تعداد انتخاب‌های $r$ شیء از بین $n$ شیء متمایز که جابجایی اشیاء انتخاب شده حالت جدیدی را تولید نکرده و ترتیب اهمیت نداشته باشد را با نماد $C(n,r)$ نمایش می‌دهند. برای محاسبه‌ی تعداد ترکیب‌های $r$ تایی از بین $n$ شیء متمایز از رابطه زیر استفاده می‌شود:

$$C(n,r) = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

**تذکر:** گاهی اوقات به جای نماد $C(n,r)$ از نماد $\binom{n}{r}$ استفاده می‌شود.

☺**مثال:** به چند طریق می‌توان از بین ۱۲ نفر یک تیم ۳ نفره برای کوهنوردی انتخاب کرد؟

پاسخ: چون انتخاب افراد گروه کوهنوردی دارای ترتیب خاصی نیست و جابجایی آنها گروه جدیدی را نمی‌سازد پس از ترکیب استفاده می‌کنیم.

$$C(۱۲,۳) = \frac{۱۲!}{۳!\,(۱۲-۳)!} = \frac{۱۲!}{۳!\ \times ۹!} = \frac{۱۲ \times ۱۱ \times ۱۰ \times ۹!}{۳! \times ۹!} = \frac{۱۲ \times ۱۱ \times ۱۰}{۶} = ۲۲۰$$

☺**مثال:** مجموعه ۷ عضوی $A = \{۱,۲,۳,۴,۵,,۶,۷\}$ چند زیرمجموعه‌ی چهارعضوی دارد؟

پاسخ: چون جابجا شدن اعضا در مجموعه‌ها حالت جدیدی را بوجود نمی‌آورد و مهم نیست پس از ترکیب استفاده می‌کنیم.

$$C(۷,۴) = \frac{۷!}{۴!\,(۷-۴)!} = \frac{۷!}{۴!\ \times ۳!} = \frac{۷ \times ۶ \times ۵ \times ۴!}{۴! \times ۳!} = \frac{۷ \times ۶ \times ۵}{۶} = ۳۵$$

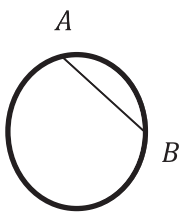
۳۵ زیر مجموعه ۴ عضوی دارد.

❖**مثال:** از یک کیسه که شامل ۲ مهره سفید و ۴ مهره قرمز است به چند طریق می‌توان ۲ مهره خارج کرد؟

☺ **مثال:** هفت نقطه روی محیط یک دایره قرار دارند. با استفاده از این نقاط:

الف) چند وتر می‌توان رسم کرد؟

ب) چند مثلث می‌توان کشید؟




پاسخ: الف) از وصل کردن هر دو نقطه مانند $A\,,B$ روی دایره به یکدیگر، یک وتر بدست می‌آید.

با جابجا کردن نقاط $A\,,B$ وتر جدیدی بدست نمی‌آید و ترتیب مهم نیست پس داریم:

$$C(۷,۲) = \frac{۷!}{۲!\,(۷-۲)!} = \frac{۷!}{۲!\ \times ۵!} = \frac{۷ \times ۶ \times ۵!}{۲! \times ۵!} = \frac{۷ \times ۶}{۲} = ۲۱$$

ب) برای تشکیل مثلث باید ۳ نقطه انتخاب کنیم، ترتیب قرار گرفتن راسهای مثلث اهمیت ندارد پس:

$$C(۷,۳) = \frac{۷!}{۳!\,(۷-۳)!} = \frac{۷!}{۳!\ \times ۴!} = \frac{۷ \times ۶ \times ۵ \times ۴!}{۳! \times ۴!} = \frac{۷ \times ۶ \times ۵}{۶} = ۳۵$$

**تذکر:** اگر در قسمت (الف) به جای وتر، بردار گفته می‌شد باید از رابطه‌ی ترتیب استفاده می‌کردیم زیرا اگر ابتدا و انتهای بردار جابجا شود بردار جدیدی بوجود می‌آید. $P(۷,۲) = \frac{۷!}{(۷-۲)!} = \frac{۷!}{۵!} = \frac{۷\times۶\times۵!}{۵!} = ۴۲$ تعداد انتخابها

**تذکر:** از این پس برای راحتی کار در مسائل ترکیب به جای $C(n,r)$ می‌نویسیم $\binom{n}{r}$

☺**مثال:** از یک کیسه که شامل ۲ مهره سفید و ۴ مهره قرمز است به تصادف ۲ مهره خارج می‌کنیم. تعداد حالتهای انتخاب را در هر مورد تعیین کنید.

الف) رنگ مهره‌ها مهم نباشد.

پاسخ: چون رنگ مهره‌ها مهم نیست پس ۲ مهره را از بین ۶ مهره انتخاب می‌کنیم. هیچ ترتیبی در برداشتن و انتخاب مهره تاثیر ندارد بنابراین از ترکیب استفاده می‌کنیم.

$$\binom{۶}{۲} = \frac{۶!}{۲!\times(۶-۲)!} = \frac{۶!}{۲!\times۴!} = \frac{۶\times۵\times۴!}{۲\times۴!} = \frac{۶\times۵}{۲} = ۱۵$$ تعداد انتخابها

ب) یکی سفید و دیگری قرمز باشد.

پاسخ: قرار است ۲ مهره از بین ۶ مهره انتخاب کنیم که یک سفید از بین ۲ سفید و یک قرمز از بین ۴ قرمز برداشته شود. پس

$$\binom{۲}{۱}\times\binom{۴}{۱} = \frac{۲!}{۱!\times(۲-۱)!}\times\frac{۴!}{۱!\times(۴-۱)!} = \frac{۲}{۱\times۱}\times\frac{۴!}{۱\times۳!} = ۲\times\frac{۲۴}{۶} = ۲\times۴ = ۸$$

ج) هر دو مهره قرمز باشد.

پاسخ: ۲ مهره قرمز از بین ۴ مهره قرمز انتخاب شود. پس

$$\binom{۴}{۲} = \frac{۴!}{۲!\times(۴-۲)!} = \frac{۴!}{۲!\times۲!} = \frac{۴!}{۲\times۲} = \frac{۲۴}{۴} = ۶$$ تعداد انتخابها

د) مهره‌های انتخاب شده همرنگ باشند.

پاسخ: دو مهره همرنگ باشند یعنی یا دو مهره سفید باشند یا هر دو قرمز باشند.

$$\binom{۲}{۲}+\binom{۴}{۲} = \frac{۲!}{۲!\times(۲-۲)!}+\frac{۴!}{۲!\times(۴-۲)!} = \frac{۲!}{۲!\times۰!}+\frac{۴!}{۲!\times۲!} = ۱+۶ = ۷$$

☺**مثال:** از بین ۴ دانش‌آموز دهم، ۶ دانش‌آموز یازدهم و ۵ دانش‌آموز دوازدهم قرار است یک شورای ۳ نفره تشکیل شود. تعداد راههای ممکن برای انتخاب آنکه از هر پایه یک نفر انتخاب شود را بیابید.

پاسخ: یکی دهم $\binom{۴}{۱}$ و یکی یازدهم $\binom{۶}{۱}$ و یکی دوازدهم $\binom{۵}{۱}$ انتخاب می‌کنیم.

$$\binom{۴}{۱}\times\binom{۶}{۱}\times\binom{۵}{۱}=\frac{۴!}{۱!\times ۳!}\times\frac{۶!}{۱!\times ۵!}\times\frac{۵!}{۱!\times ۴!}=۴\times ۶\times ۵=۱۲۰$$

**تذکر:** رابطه‌ی خیلی مهم و کاربردی $\binom{n}{۱}=n$

☺**مثال:** از بین ۳ داور ایرانی و ۵ داور خارجی قرار است ۲ داور برای مسابقات آسیایی انتخاب شوند تعداد راههای ممکن برای انتخاب حداقل یک داور ایرانی را بیابید.

پاسخ: حداقل یک ایرانی یعنی یکی و بیشتر. پس دو حالت داریم:

الف) یک داور ایرانی $\binom{۳}{۱}$ و یک داور خارجی $\binom{۵}{۱}$ باشد. $\binom{۳}{۱}\times\binom{۵}{۱}=۳\times ۵=۱۵$

یا

ب) هر ۲ داور ایرانی باشند. $\binom{۳}{۲}=\frac{۳!}{۲!\times(۳-۲)!}=\frac{۶}{۲\times ۱}=۳$

پس تعداد راههای انتخاب برابر است با $۱۵+۳=۱۸$

✸**دقت کنید:** اگر در مثال بالا قرار باشد حداکثر یک داور ایرانی انتخاب شود به چند راه می‌توان این کار را انجام داد؟

پاسخ: حداکثر یک ایرانی یعنی یکی و کمتر. پس دو حالت داریم:

الف) یک داور ایرانی $\binom{۳}{۱}$ و یک داور خارجی $\binom{۵}{۱}$ باشد. $\binom{۳}{۱}\times\binom{۵}{۱}=۳\times ۵=۱۵$

یا

ب) هیچ داوری ایرانی نباشند (پس هر ۲ داور خارجی باشند) $\binom{۵}{۲}=\frac{۵!}{۲!\times(۵-۲)!}=\frac{۵!}{۲\times ۳!}=\frac{۱۲۰}{۲\times ۶}=۱۰$

پس تعداد راههای انتخاب برابر است با $۱۵+۱۰=۲۵$

☺**مثال:** حاصل $C(n,n)$ را بیابید.

پاسخ: $C(n,n)=\frac{n!}{n!\times(n-n)!}=\frac{n!}{n!\times ۰!}=\frac{n!}{n!\times ۱}=۱$

❖**مثال:** حاصل را بیابید.

الف) $C(n,\cdot) =$

ب) $C(۵,\cdot) + C(۷,۱) - P(۴,۳) =$

❖**مثال:** درستی تساوی زیر را نشان دهید:

$C(n,n) = C(n,\cdot)$

**انتخاب‌های شامل و فاقد:**

✵ برای انتخاب $r$ شیء از بین $n$ شیء که همواره یک شیء خاص در بین انتخاب‌شده‌ها باشد، ابتدا عضو مورد نظر را انتخاب می‌کنیم، حال کافی است از بین $n-۱$ شیء باقی‌مانده $r-۱$ شیء انتخاب کنیم. پس تعداد کل انتخاب‌ها برابر با $\binom{n-۱}{r-۱}$ است. (شامل از هر دو قسمت کم می‌کند) ☹

☺**تست:** تعداد زیر مجموعه‌های سه عضوی از مجموعه $\{a,b,c,d,e,f\}$ شامل عضو $a$ کدام است؟

الف) ۸ ب) ۱۰ ج) ۱۲ د)۱۵

حل: تعداد زیرمجموعه‌های سه عضوی از مجموعه شش عضوی برابر $\binom{۶}{۳}$ است که اگر قرار باشد همیشه شامل $a$ باشند به $\binom{۶-۱}{۳-۱}$ تبدیل می‌شود یعنی: $\binom{۵}{۲} = ۱۰$. پس گزینه (ب) صحیح است.

✵ اگر قرار باشد $k$ شیء خاص بین اشیاء انتخاب شده باشد، از رابطه‌ی زیر تعداد حالت‌ها را تعیین می‌کنیم.

$\binom{n-k}{r-k} =$ تعداد انتخابهای شامل (دارای) $k$ شیء مورد نظر از بین $n$ شیء

☺**مثال:** یک مربی فوتبال می‌خواهد لیست ۱۱ بازیکن را از بین تیم ۲۰ نفره انتخاب و معرفی کند. با فرض آنکه دروازه‌بان و کاپیتان مشخصی از این تیم ثابتند و حتما جزء نفرات انتخابی هستند، تعداد راه‌های انتخاب بازیکنان را محاسبه کنید.

حل: چون دروازه‌بان و کاپیتان ثابتند و حتما جزء نفرات انتخابی هستند پس به $\binom{۱۸}{۹} = \binom{۲۰-۲}{۱۱-۲}$ حالت انتخاب وجود دارد.

❋ اگر قرار باشد یک شیء خاص بین اشیاء انتخاب شده نباشد، ابتدا آن شیء را کنار می‌گذاریم، سپس تعداد اشیاء مورد نظر را از انتخاب می‌کنیم. پس تعداد کل انتخاب‌ها برابر با $\binom{n-۱}{r}$ است. (فاقد از قسمت بالا کم می‌کند)☹

☺**مثال:** می‌خواهیم از بین کتابهای {فلسفه، اقتصاد، جغرافیا، زبان، عربی، ریاضی} ۴ کتاب انتخاب کنیم طوریکه کتاب فلسفه جزء آنها نباشد. این کار به چند طریق انجام می‌شود؟

پاسخ: از همان ابتدا کتاب فلسفه را حذف می‌کنیم پس فقط به کتابهای {اقتصاد، جغرافیا، زبان، عربی، ریاضی} نیاز داریم یعنی ۵ کتاب برایمان باقی می‌ماند. حال ۴ کتاب را از بین ۵ کتاب انتخاب می‌کنیم.

$$\binom{۶-۱}{۴}=\binom{۵}{۴}=\frac{۵!}{۴!\times ۱!}=\frac{۱۲۰}{۲۴}=۵$$

❋اگر قرار باشد $m$ شیء خاص بین اشیاء انتخاب شده نباشد، ابتدا این $m$ شیء را کنار می‌گذاریم، سپس از بین اشیاء باقی‌مانده، تعداد شیء مورد نظر را انتخاب می‌کنیم. (فاقد فقط از قسمت بالا کم می‌کند)☹ $\binom{n-m}{r}$

☺**مثال:** می‌خواهیم از بین کتابهای {فلسفه، اقتصاد، جغرافیا، زبان، عربی، ریاضی} ۴ کتاب انتخاب کنیم طوریکه کتابهای فلسفه و عربی جزء آنها نباشد. این کار به چند طریق انجام می‌شود؟

پاسخ: از همان ابتدا کتاب فلسفه و عربی را حذف می‌کنیم پس فقط به کتابهای {اقتصاد، جغرافیا، زبان، ریاضی} نیاز داریم یعنی ۴ کتاب برایمان باقی می‌ماند. حال ۴ کتاب را از بین ۴ کتاب انتخاب می‌کنیم.

$$\binom{۶-۲}{۴}=\binom{۴}{۴}=\frac{۴!}{۴!\times ۰!}=\frac{۱۲۰}{۱۲۰}=۱$$

❋ مثالی از ترکیب دو حالت بالا:

☺**مثال:** تعداد زیر مجموعه‌های۴ عضوی از مجموعه {۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷} که شامل عدد ۳ باشند اما شامل عدد ۷ نباشند را تعیین کنید.

پاسخ: از دو نکته‌ی گفته شده استفاده می‌شود. $\binom{۷-۱-۱}{۴-۱}=\binom{۵}{۳}=\frac{۵!}{۳!\times۲!}=\frac{۱۲۰}{۱۲}=۱۰$

■**تذکر:** روابط زیر همواره برقرارند.

$$P(n,۰)=۱\quad ,\quad P(n,۱)=n\quad ,\quad \binom{n}{۱}=\binom{n}{n-۱}=n\quad ,\quad \binom{n}{۰}=\binom{n}{n}=۱$$

**نمونه سوالات امتحانات نهایی درس اول، فصل اول:**

**خرداد ۹۹:**

۱- درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. (۰/۲۵)

الف) تساوی $۲! = \frac{۶!}{۳!}$ همواره برقرار است.   پاسخ: نادرست

۲- به چند طریق می‌توان ۴ کتاب را از بین ۹ کتاب انتخاب کرد. (۰/۷۵)

پاسخ: $C(۹,۴) = \binom{۹}{۴} = \frac{۹!}{۴!\times(۹-۴)!} == \frac{۹\times۸\times۷\times۶\times۵!}{۲۴\times۵!} = ۱۲۶$

۳- با ارقام ۱و۲و۴و۶ و ۸ و۷و۹ چند عدد ۳ رقمی بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟ (۱)

پاسخ: $\underline{۷}\times\underline{۶}\times\underline{۵} = ۲۱۰$ تعداد راههای انتخاب

۴- به چند طریق می‌توان ۳ توپ همرنگ را از بین ۵ توپ قرمز و ۴ توپ آبی انتخاب کرد؟ (۱)

پاسخ: هر ۳ توپ قرمز یا هر ۳ آبی باشند $\binom{۵}{۳} + \binom{۴}{۳} = \frac{۵!}{۳!\times۲!} + \frac{۴!}{۳!\times۱!} = \frac{۱۲۰}{۶\times۲} + \frac{۲۴}{۶} = ۱۰ + ۴ = ۱۴$

۵- روی محیط یک دایره ۵ نقطه وجود دارد، مشخص کنید با این ۵ نقطه چه تعداد وتر می‌توان تشکیل داد. (۱)

پاسخ: برای کشیدن هر وتر دایره به ۲ نقطه نیاز داریم.

$$\binom{۵}{۲} = \frac{۵!}{۲!\times۳!} = \frac{۱۲۰}{۲\times۶} = \frac{۱۲۰}{۱۲} = ۱۰$$

۶- به چند طریق می‌توانیم ۳ کتاب را از بین ۷ کتاب متمایز، انتخاب کنیم و به دوستمان هدیه بدهیم؟ (۱)

پاسخ: $\binom{۷}{۳} = \frac{۷!}{۳!\times۴!} = \frac{۷\times۶\times۵\times۴!}{۳!\times۴!} = \frac{۷\times۶\times۵}{۶} = ۳۵$

**شهریور ۹۹:**

۱- درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. (۰/۲۵)

ت) برای اعداد صفر و یک، فاکتوریل را به صورت $۰! = ۱$ و $۱! = ۱$ تعریف می‌کنیم.

پاسخ: درست

۲- با حروف کلمه "خورشید" و بدون تکرار حروف ( با معنی و بی معنی):

الف) چند کلمه ۳ حرفی می‌توان نوشت که به "د" ختم شوند؟ (۱)

ب) چند کلمه ۴ حرفی می‌توان نوشت که با "ی" شروع و به "خ" ختم شوند؟ (۱)

پاسخ: الف) تعداد انتخابها $\underline{۵} \times \underline{۴} \times \underset{\substack{\uparrow \\ د}}{\underline{۱}} = ۲۰$

ب) تعداد انتخابها $\underset{\substack{\uparrow \\ خ}}{\underline{۱}} \times \underline{۴} \times \underline{۳} \times \underset{\substack{\uparrow \\ ی}}{\underline{۱}} = ۱۲$

۳- می‌خواهیم از بین ۱۰ خودروی سواری، ۱۲ خودروی وانت و ۶ خودروی کامیون یک خودرو انتخاب کنیم. به چند طریق می‌توانیم این خودرو را انتخاب کنیم؟ (۱)

پاسخ: از اصل جمع استفاده می‌کنیم. $۱۰ + ۱۲ + ۶ = ۲۸$

۴- مجموعه ۸ عضوی $\{۱,۲,۳,...,۸\}$ چند زیر مجموعه ۳ عضوی دارد؟ (۱)

پاسخ: چون ترتیب قرار گرفتن اعضا مهم نیست از ترکیب استفاده می‌کنیم $\binom{۸}{۳} = \frac{۸!}{۳!\times۵!} = \frac{۸\times۷\times۶\times۵!}{۶\times۵!} = ۵۶$

**شهریور ۹۸:**

۱- جای خالی را با پاسخ درست کامل کنید.

الف) حاصل عبارت $\binom{۹}{۶}$ ................. می‌باشد. (۰/۵)

پاسخ: $\binom{۹}{۶} = \frac{۹!}{۶!\times۳!} = \frac{۹\times۸\times۷\times۶!}{۶!\times۶} = ۸۴$

۲- الف) به چند طریق می‌توانیم ۳ کتاب را از بین ۸ کتاب انتخاب کنیم؟ (۱)

پاسخ: $\binom{۸}{۳} = \frac{۸!}{۳!\times۵!} = \frac{۸\times۷\times۶\times۵!}{۶\times۵!} = ۵۶$

ب) به چند طریق می‌توان با ارقام ۱ تا ۷ عددی چهار رقمی ساخت؟ (تکرار مجاز نیست) (۱)

پاسخ: $\underline{۷} \times \underline{۶} \times \underline{۵} \times \underline{۴} = ۸۴۰$

**دی ۹۸:**

۱- مجموعه پنج عضوی $\{۱,۲,۴,۶,۸\}$ چند زیر مجموعه دو عضوی دارد؟ (۲)

پاسخ: از ترکیب استفاده می‌کنیم $\binom{۵}{۲} = \frac{۵!}{۲!\times۳!} = \frac{۱۲۰}{۲\times۶} = ۱۰$

## درس ۲: احتمال

**مقدمه:** پیرامون ما پدیده‌هایی رخ می‌دهند که در بعضی از آنها نتیجه رخداد قابل پیش‌بینی و در برخی دیگر غیرقابل پیش‌بینی است. به عنوان مثال به علت وجود جاذبه هنگامی‌که سنگی به بالا پرتاب می‌شود قطعا به سمت پایین می‌آید، اما پدیده‌هایی مانند نتیجه یک قرعه‌کشی، پرتاب یک تاس و بسیاری از پدیده‌های دیگر به طور قطعی قابل پیش‌بینی نیستند.

**پدیده‌های تصادفی:**

به پدیده‌ها یا آزمایش‌هایی که نتیجه آنها قبل از اجرای آزمایش به طور قطع مشخص نیست، پدیده یا آزمایش تصادفی می‌گویند. به هر یک از نتایج ممکن برای یک آزمایش تصادفی، برآمد می‌گوییم.

در پدیده‌های تصادفی از همه‌ی نتیجه‌های ممکن اطلاع داریم اما از اینکه کدام حالت رخ می‌دهد، اطمینان نداریم. مانند پرتاب یک سکه یا یک تاس.

**پدیده‌های قطعی:**

در پدیده‌های قطعی، نتیجه آزمایش یا مشاهده را قبل از وقوع می‌توان به طور قطع مشخص کرد.

**فضای نمونه:**

مجموعه تمام نتایج ممکن در یک آزمایش تصادفی را فضای نمونه‌ی آن آزمایش گویند که با $S$ نمایش می‌دهند.

تعداد اعضای فضای نمونه $S$ را با $n(S)$ نمایش می‌دهند.

☺**مثال:** فضای نمونه‌ی پدیده‌های تصادفی را مشخص کنید و تعداد اعضای آنها را بدست آورید.

الف) پرتاب یک سکه: $S = \{\text{رو ، پشت}\} \to n(S) = ۲$

ب) پرتاب یک تاس: $S = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶\} \to n(S) = ۶$

ج) خانواده‌ای با یک فرزند: $S = \{\text{پسر، دختر}\} \to n(S) = ۲$

د) پرتاب دو سکه: $S = \{(\text{پشت،پشت})(\text{رو، پشت})(\text{پشت،رو})(\text{رو،رو})\} \to n(S) = ۴$

در خانواده‌ای با ۲ فرزند: $S = \{(\text{پسر،پسر})(\text{دختر، پسر})(\text{پسر،دختر})(\text{دختر،دختر})\} \to n(S) = ۴$

■ **تذکر:** به طور کلی در پرتاب $n$ سکه $n(S) = ۲^n$ ، یعنی اگر ۳ سکه را با هم پرتاب کنیم تعداد اعضای فضای نمونه برابر $n(S) = ۲^۳ = ۸$ حالت می‌شود.

$S = \{(\text{پ، پ، پ})(\text{پ،پ،ر})(\text{پ،ر،پ})(\text{ر، پ،پ})(\text{ر،ر،پ})(\text{ر،پ،ر})(\text{پ،ر،ر})(\text{ر،ر،ر})\} \to n(S) = ۸$

اگر $n$ سکه را با هم بیندازیم یا یک سکه را $n$ بار بیندازیم هیچ فرقی ندارد و تعداد اعضای فضای نمونه‌ای برابر $۲^n$ است.

■ **تذکر:** به طور کلی در پرتاب $m$ تاس: $n(S)=۶^m$ یعنی اگر ۲ تاس را با هم پرتاب کنیم تعداد اعضای فضای نمونه برابر $n(S)=۶^۲=۳۶$ حالت می‌شود.

$$S=\{(۱,۱)(۱,۲)(۱,۳)(۱,۴)(۱,۵)(۱,۶)(۲,۱)(۲,۲)(۲,۳)(۲,۴)(۲,۵)(۲,۶)\ \dots\ (۶,۵)(۶,۶)\}$$

■ **تذکر:** در فضای نمونه‌ی تولد $n$ فرزند $n(S)=۲^n$ است. به عنوان مثال در خانواده‌ای با ۳ فرزند $n(S)=۲^۳=۸$ که اعضای $S$ به صورت نمایش داده می‌شود.

$S=\{$ (پ،پ،پ) (پ،پ،د) (پ،د،پ) (د،پ،پ) (پ،د،د) (د،پ،د) (د،د،پ) (د،د،د) $\}\rightarrow n(S)=۸$

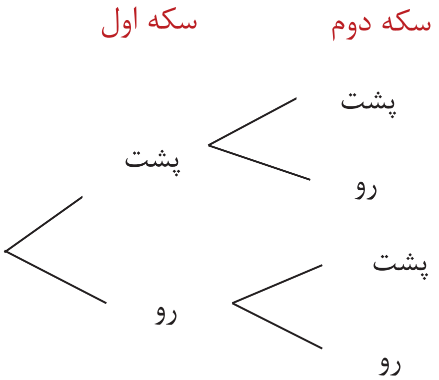
■ **تذکر:** در پرتاب $n$ سکه و $m$ تاس با هم تعداد فضای نمونه به صورت $n(S)=۲^n\times۶^m$ خواهد بود.

به عنوان مثال در پرتاب یک سکه و یک تاس: $n(S)=۲^۱\times۶^۱=۱۲$ است.

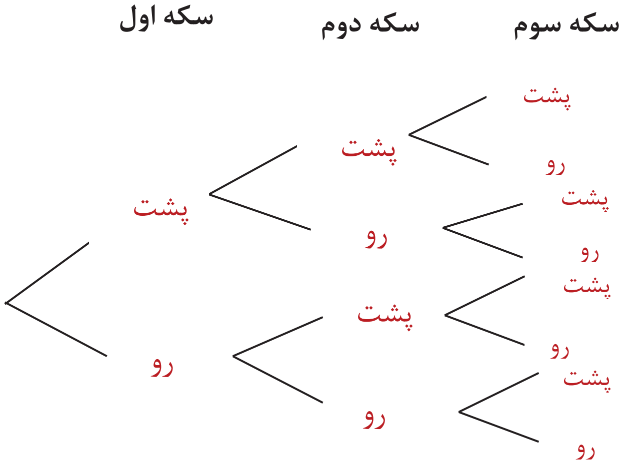
$S=\{$ (ر,۱)(ر,۲)(ر,۳)(ر,۴)(ر,۵)(ر,۶)(پ,۱)(پ,۲)(پ,۳)(پ,۴)(پ,۵)(پ,۶) $\}$

در پرتاب ۲ سکه و یک تاس : $n(S)=۲^۲\times۶^۱=۲۴$ است.

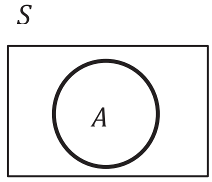
☺ **مثال:** نمودار درختی پرتاب دو سکه را رسم کنید.




❖ **مثال:** نمودار درختی پرتاب ۳ سکه را رسم کنید.



**پیشامد:**




هر زیر مجموعه مانند $A$ از فضای نمونه‌ی $S$ را یک پیشامد گویند. $A \subseteq S$

به عنوان مثال آمدن پشت در پرتاب یک سکه یک پیشامد است یا ظاهر شدن عدد زوج در پرتاب یک تاس یک پیشامد است. پیشامدها را با حروف بزرگ لاتین نمایش می‌دهیم.

❖**مثال:** سه پیشامد در پرتاب یک تاس بنویسید.

■**تذکر:** تعداد پیشامدها با تعداد زیر مجموعه‌های فضای نمونه‌ی $S$ برابر است یعنی:

$$\text{تعداد پیشامدها} = ۲^{n(S)}$$

☺**مثال:** در پرتاب یک سکه تمام پیشامدها را بنویسید.

پاسخ: می‌دانیم در پرتاب یک سکه ممکن است دو حالت پیش آید، سکه پشت یا رو بیاید پس $S = \{\text{رو ، پشت}\}$ چون $n(S) = ۲$ است پس تعداد زیرمجموعه‌ها برابر $۴ = ۲^۲$ خواهد بود. پس پیشامدها به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\{\text{رو ، پشت}\},\ \{\text{رو}\},\ \{\text{پشت}\},\ \emptyset$$

تعداد پیشامدها برابر ۴ تاست.

دقت کنید مجموعه‌ی تهی، $\emptyset$ ، همیشه در پیشامدها حضور دارد.

☺**مثال:** جاهای خالی را به صورت درست کامل کنید.

الف) در پرتاب یک تاس تعداد پیشامدها برابر .......... است.

پاسخ: در پرتاب هر تاس ۶ حالت دیده می‌شود، $S = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ پس تعداد پیشامدها برابر $۶۴ = ۲^۶$ است. پس در جای خالی باید عدد ۶۴ را بنویسیم.

ب) در پرتاب دو سکه تعداد پیشامدها برابر ........... است.

پاسخ: در پرتاب ۲ سکه ۴ حالت مختلف بوجود می‌آید و $n(S) = ۴$ است پس تعداد پیشامدها برابر $۱۶ = ۲^۴$ است، پس در جای خالی باید عدد ۱۶ را بنویسیم.

☺**مثال:** در پرتاب یک سکه، پیشامد آن را بنویسید که:

الف) پشت ظاهر شود. پاسخ: $A = \{\text{پشت}\}$

ب) پشت یا رو ظاهر شود. پاسخ: $B = \{\text{رو، پشت}\}$

☺**مثال:** در پرتاب یک تاس پیشامدهای زیر را بنویسید:

الف) عدد زوج بیاید. پاسخ: $A = \{۲,۴,۶\}$

ب) عدد اول بیاید. پاسخ: $B = \{۲,۳,۵\}$

☺**مثال:** در پرتاب دو تاس پیشامدهای زیر را بنویسید:

الف) اعداد مساوی ظاهر شوند.

پاسخ: $A = \{(۱,۱)(۲,۲)(۳,۳)(۴,۴)(۵,۵)(۶,۶)\}$

ب) مجموع دو عدد از ۸ بیشتر شود.

پاسخ: $B = \{(۳,۶)(۴,۵)(۴,۶)(۵,۴)(۵,۵)(۵,۶)(۶,۳)(۶,۴)(۶,۵)(۶,۶)\}$

ج) هر دو عدد اول باشند.

پاسخ: $C = \{(۲,۲)(۲,۳)(۲,۵)(۳,۲)(۳,۳)(۳,۵)(۵,۲)(۵,۳)(۵,۵)\}$

د) حاصل‌ضرب اعداد برآمده برابر ۳۶ باشد.

پاسخ: $D = \{(۶,۶)\}$

☺**مثال:** در پرتاب دو سکه پیشامدهای زیر را بنویسید.

الف) حداقل یک‌بار رو ظاهر شود. پاسخ: $A = \{$(ر،ر) (پ،ر) (ر، پ)$\}$

ب) فقط یک‌بار پشت دیده شود. پاسخ: $B = \{$(پ،ر) (ر، پ)$\}$

ج) حداکثر یک‌بار رو ظاهر شود. پاسخ: $C = \{$(پ، پ) (پ،ر) (ر، پ)$\}$

❖**مثال:** در خانواده‌ای با سه فرزند، پیشامدهای زیر را بنویسید.

الف) حداقل یکی از فرزندان دختر باشد.

ب) دقیقا یک دختر در این خانواده متولد شده باشد.

ج) حداکثر یکی از فرزندان دختر باشد.

**پیشامد غیرممکن:** پیشامدی که امکان وقوع آن وجود نداشته باشد را غیرممکن گویند. چنین پیشامدی برابر $\emptyset$ است. مانند ظاهر شدن عدد ۷ در پرتاب یک تاس، بدست آوردن مجموع بیشتر از ۱۲ در پرتاب دو تاس با هم که امکان‌پذیر نیست و $A = \emptyset$.

**پیشامد حتمی:** به پیشامدی گویند که امکان وقوع آن قطعی باشد، در این صورت پیشامد حتمی $A = S$ است. مانند ظاهر شدن عدد طبیعی کوچکتر از ۷ در پرتاب یک تاس که تمام حالات یک تاس می‌شود.

☺**مثال:** در پرتاب دو تاس پیشامدهای زیر را بنویسید:

الف) هر دو عدد مربع کامل بیاید. پاسخ: $A = \{(۱,۱)(۱,۴)(۴,۱)(۴,۴)\}$

ب) حاصل‌ضرب اعداد برآمده بزرگتر از ۳۶ باشد.

پاسخ: چنین حالتی رخ نمی‌دهد، این پیشامد غیر ممکن است. $B = \emptyset$

ج) مجموع اعداد رو شده کوچکتر از ۱۳ باشد.

پاسخ: در تمام حالاتی که دو تاس ظاهر می‌شوند مجموع اعداد کوچکتر از ۱۳ است. این پیشامد حتمی و برابر $S$ است.

$$C = \{(۱,۱)(۱,۲)(۱,۳)(۱,۴)(۱,۵)(۱,۶)(۲,۱)(۲,۲)(۲,۳)(۲,۴)(۲,۵)(۲,۶) \dots (۶,۵)(۶,۶)\}$$

☺**مثال:** از کیسه‌ای که شامل ۷ مهره قرمز و ۳ مهره سفید است، ۲ مهره را به طور تصادفی برمی‌داریم، تعداد عضوهای پیشامدهای زیر را مشخص کنید.

الف) رنگ مهره‌ها متفاوت باشد. پاسخ: $\binom{۷}{۱} \times \binom{۳}{۱} = ۷ \times ۳ = ۲۱$

ب) هر دو مهره سفید باشند. پاسخ: $\binom{۳}{۲} = \frac{۳!}{۲! \times ۱!} = \frac{۶}{۲} = ۳$

❖**مثال:** از جعبه‌ای که در آن ۵ کارت سبز، ۴ کارت سفید و ۳ کارت قرمز است، ۳ کارت را به طور تصادفی برمی‌داریم، تعداد عضوهای پیشامدهای زیر را مشخص کنید.

الف) از هر رنگ یک کارت انتخاب شود.

ب) ۲ کارت سبز و ۱ کارت قرمز باشد.

ج) هر ۳ کارت سفید باشند.

د) حداقل ۲ کارت قرمز باشند.

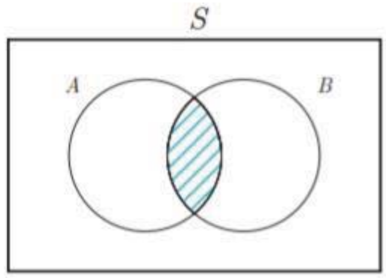
ه) هر ۳ کارت همرنگ باشند.

**پیشامدها و اعمال روی آنها:**

فرض کنید پیشامدهای $A, B$ در فضای نمونه‌ای $S$ تعریف شده باشند، از آنجایی‌که این دو پیشامد زیر مجموعه‌های $S$ هستند پس می‌توان اجتماع، اشتراک، تفاضل و عمل متمم‌گیری را روی آنها انجام داد.

**الف) اشتراک دو پیشامد:**

پیشامد $A \cap B$ هنگامی رخ می‌دهد که هر دو پیشامد با هم اتفاق بیفتد، یعنی هم $A$ و هم $B$ اتفاق بیفتد.



$A \cap B = \{x \in S | x \in A \wedge x \in B\}$

$$A \cap B = \{x \in S | x \in A \wedge x \in B\}$$

**مثال:** یک تاس را پرتاب می‌کنیم، پیشامد آن را بنویسید که تاس عدد زوج و عدد بزرگتر از ۲ بیاید.

پاسخ: $A = \{۲,۴,۶\}$ عدد زوج بیاید

$B = \{۳,۴,۵,۶\}$ عدد بزرگتر از ۲ بیاید

$A \cap B = \{۴,۶\}$ تاس عدد زوج و عدد بزرگتر از ۲

**مثال:** دو تاس را پرتاب می‌کنیم، پیشامد آن را بنویسید که مجموع اعداد برآمده از دو تاس برابر ۵ و هر دو عدد اول بیاید.

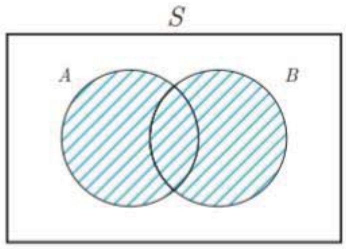
پاسخ: $A = \{(۱,۴)(۲,۳)(۳,۲)(۴,۱)\}$ مجموع دو عدد ۵ باشد

$B = \{(۲,۲)(۲,۳)(۲,۵)(۳,۲)(۳,۳)(۳,۵)(۵,۲)(۵,۳)(۵,۵)\}$ هر دو عدد اول باشند

$A \cap B = \{(۲,۳)(۳,۲)\}$ مجموع دو تاس برابر ۵ و هر دو عدد اول

**ب) اجتماع دو پیشامد:**

پیشامد $A \cup B$ هنگامی رخ می‌دهد که حداقل یکی از پیشامدها اتفاق بیفتد، یعنی یا $A$ یا $B$ یا هر دو اتفاق بیفتد.



$A \cup B = \{x \in S | x \in A \vee x \in B\}$

$$A \cup B = \{x \in S | x \in A \vee x \in B\}$$

☺**مثال:** یک سکه را پرتاب می‌کنیم، پیشامد آن را بنویسید که سکه پشت یا رو بیاید.

پاسخ:

$A = \{\text{پشت}\}$ سکه پشت بیاید

$B = \{\text{رو}\}$ سکه رو بیاید

$A \cup B = \{\text{رو ، پشت}\}$ سکه پشت یا رو بیاید

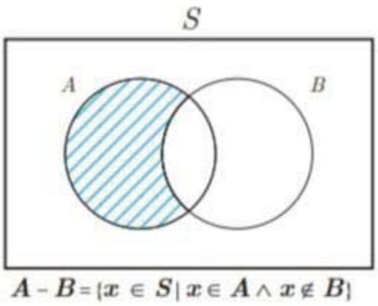
☺**مثال:** دو تاس را پرتاب می‌کنیم، پیشامد آن را بنویسید که دو تاس یکسان یا اعدادکوچکتر از ۳ بیایند.

پاسخ: $A = \{(۱,۱)(۲,۲)(۳,۳)(۴,۴)(۵,۵)(۶,۶)\}$ دو تاس یکسان بیایند

$B = \{(۱,۱)(۱,۲)(۲,۱)(۲,۲)\}$ دو تاس اعداد کوچکتر از ۳ بیایند

$A \cup B = \{(۱,۱)(۲,۲)(۳,۳)(۴,۴)(۵,۵)(۶,۶)(۱,۲)(۲,۱)\}$ دو تاس یکسان یا اعدادکوچکتر از ۳ بیایند

**پ) تفاضل دو پیشامد:** پیشامد $A - B$ هنگامی رخ می‌دهد که $A$ اتفاق بیفتد ولی $B$ اتفاق نیفتد، یا به عبارتی فقط $A$ اتفاق بیفتد.



$A - B = \{x \in S | x \in A \wedge x \notin B\}$

$$A - B = \{x \in S | x \in A \wedge x \notin B\}$$

☺**مثال:** در پرتاب یک تاس پیشامد آن را بنویسید که عدد ظاهر شده زوج باشد اما اول نباشد.

پاسخ:

$A = \{۲,۴,۶\}$ تاس زوج بیاید

$B = \{۲,۳,۵\}$ عدد اول باشد

$A - B = \{۲,۴,۶\} - \{۲,۳,۵\} = \{۴,۶\}$ عدد زوج باشد اما اول نباشد

تذکر: با در نظر گرفتن شرایط می‌توانید جواب را به صورت ذهنی حساب کرده و بنویسید.

☺**مثال:** در پرتاب دو تاس پیشامد آن را بنویسید که اعداد رو آمده هر دو یکسان باشند اما هر دو بزرگتر از۵ نباشند.

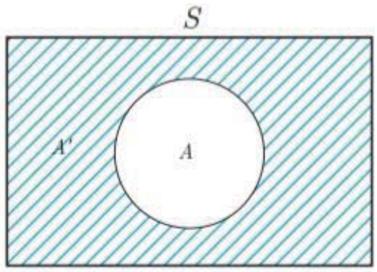
پاسخ: $A = \{(۱,۱)(۲,۲)(۳,۳)(۴,۴)(۵,۵)(۶,۶)\}$ اعداد یکسان بیایند

$B = \{(۶,۶)\}$ هر دو بزرگتر از۵ باشند

$A - B = \{(۱,۱)(۲,۲)(۳,۳)(۴,۴)(۵,۵)\}$ هر دو یکسان باشند اما هر دو بزرگتر از۵ نباشند.

**ت)متمم یک پیشامد:** اگر پیشامد $A$ را در فضای نمونه‌ای $S$ فرض کنیم، متمم آن را با $A'$ نمایش می‌دهیم، $A'$ زمانی اتفاق می‌افتد که پیشامد $A$ اتفاق نیفتد. $A' = S - A$

$(A')' = A$ $\quad A' \cup A = S$ و $\quad A' \cap A = \emptyset$ و $\quad n(A') = n(S) - n(A)$




$A'=\{x \in S \mid x \notin A\}$

$$A' = \{x \in S | x \notin A \}$$

☺**مثال:** در پرتاب یک تاس پیشامد آن را بنویسید که عدد اول نیاید.

پاسخ: می‌دانیم فضای نمونه پرتاب یک تاس $S = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ است اگر پیشامد آمدن عدد اول $A = \{۲,۳,۵\}$ باشد پس متمم آن یعنی نیامدن عدد اول را با $A'$ نمایش می‌دهیم و داریم: $A' = S - A = \{۱,۴,۶\}$

☺**مثال:** در پرتاب دو سکه پیشامد آن را بنویسید که هر دو یکسان ظاهر نشوند.

پاسخ: $B = \{(\text{پ،پ}) (\text{ر،ر})\}$ یکسان ظاهر شوند

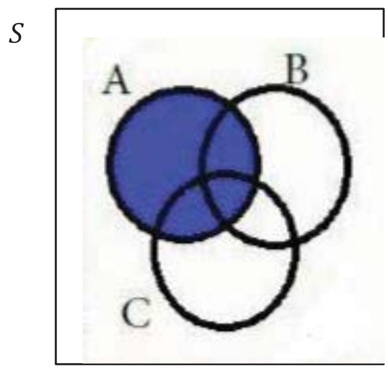
$B' = S - B = \{(\text{ر، پ}) (\text{پ،ر})\}$ یکسان ظاهر نشوند

تذکر: برای تعیین متمم پیشامد $A$ یعنی $A'$ می‌توان به صورت ذهنی پیشامد $A$ را از فضای نمونه $S$ حذف و پیشامد را نوشت.

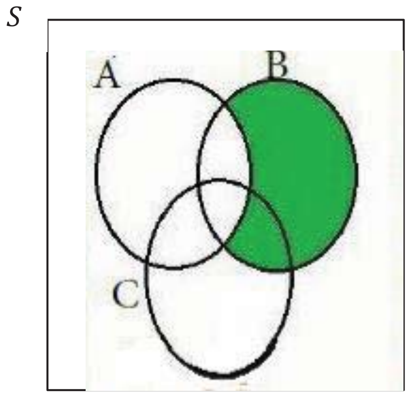
☺**مثال:** در پرتاب یک تاس عدد ظاهر شده مربع کامل نباشد. پاسخ: $A' = \{۲,۳,۵,۶\}$

☺ **مثال:** فرض کنید $A, B, C$ سه پیشامد در فضای نمونه $S$ باشند. هر یک از پیشامدهای زیر را روی نمودار ون سایه بزنید.سپس عبارت مجموعه‌ای مربوط به آن را بنویسید.

الف) پیشامد $A$ رخ دهد. پاسخ: $A$

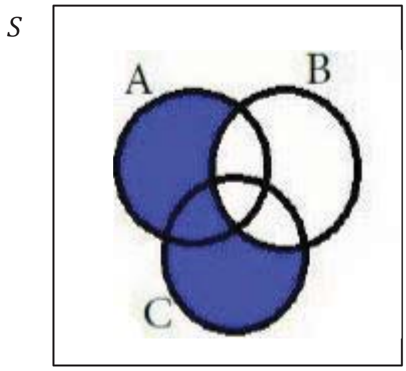


ب) پیشامد $B$ رخ دهد اما پیشامد $A$ رخ ندهد. پاسخ: $B-A$



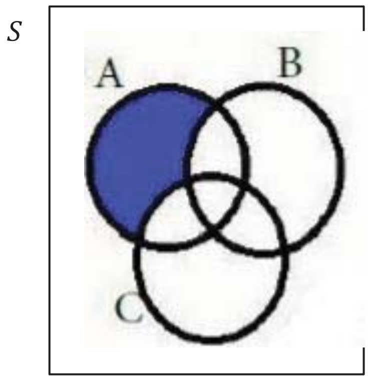

ج) پیشامدهای $A$ یا $C$ رخ دهند ولی پیشامد $B$ رخ ندهد.

پاسخ: $(A \cup C)-B$



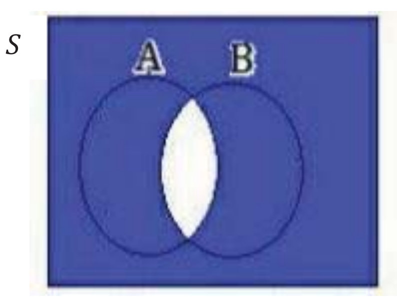

د) فقط پیشامد $A$ رخ دهد و پیشامدهای $B$ یا $C$ رخ ندهند.

پاسخ: $A-(B \cup C)$



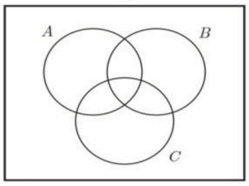

ه) پیشامد $A$ و $B$ رخ ندهد.

پاسخ: $(A \cap B)'$

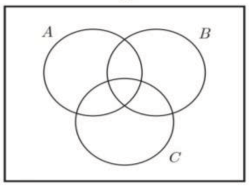


❖ **مثال:** اگر $A, B, C$ سه پیشامد در فضای نمونه $S$ باشند هر یک از پیشامدهای زیر را روی نمودار ون سایه بزنید.

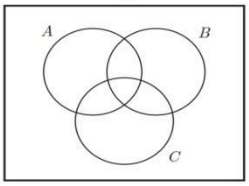
الف) $(A \cap B) \cap C$



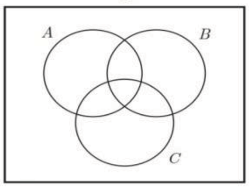

ب) $(B \cap C) - A$




ج) $C - (A \cap B)$




د) $(A \cup B) - (B \cap C)$



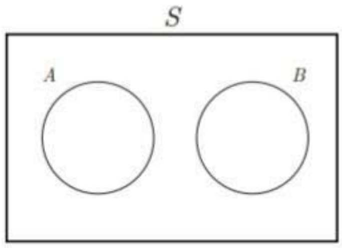

**تذکر مهم:**

اگر $A, B, C$ سه پیشامد دلخواه باشند می‌توان نوشت:

| نماد ریاضی | جمله ی معادل به فارسی |
|---|---|
| $(A \cap B) \cap C$ | $A, B$ و $C$ هر سه با هم رخ دهند |
| $(A \cup B) \cup C$ | $A$ یا $B$ یا $C$ رخ دهد |
| $A - (B \cup C)$ | فقط $A$ رخ دهد |
| $B - (A \cup C)$ | فقط $B$ رخ دهد |
| $C - (A \cup B)$ | فقط $C$ رخ دهد |
| $(A \cup B) - C$ | $A$ یا $B$ رخ دهد ولی $C$ رخ ندهد |

**مثال:** هرگاه $A, B$ دو پیشامد ناتهی در فضای نمونه $S$ باشد، طوریکه $A - B = A$ و $B - A = B$ در این صورت پیشامد $A \cap B$ را محاسبه کنید.

پاسخ: چون $A, B$ پیشامدهای ناتهی هستند، با توجه به شرایط داده شده $A, B$ عضو مشترکی ندارند زیرا پس از انجام عمل تفاضل هیچ عضوی از آنها کم نشده است. پس $A \cap B = \emptyset$



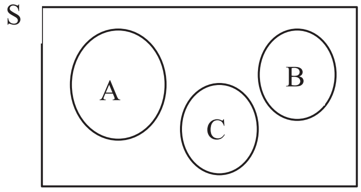

**دو پیشامد ناسازگار:**

پیشامدهای $A$ و $B$ از فضای نمونه‌ای $S$ را دو پیشامد ناسازگار گویند، هرگاه اشتراک آنها تهی باشد. $A \cap B = \emptyset$

چنین پیشامدهایی نمی‌توانند با هم رخ دهند، مانند پیشامد ظاهر شدن اعداد زوج و اعداد فرد در پرتاب یک تاس.

**تذکر:** سه پیشامد $A$ و $B$ و $C$ را دو به دو ناسازگار گویند، هرگاه اشتراک هر دو پیشامد تهی باشد.

$$A \cap B = \emptyset \quad , \quad A \cap C = \emptyset \quad , \quad B \cap C = \emptyset$$




توجه کنید شرط $A \cap B \cap C = \emptyset$ برای ناسازگاری دو به دو پیشامدها کافی نیست

**مثال:** سه سکه را با هم پرتاب می‌کنیم. پیشامدهای زیر را بنویسید.

الف) پیشامد $A$ طوریکه هر سه سکه یکسان ظاهر شوند.

ب) پیشامد $B$ طوریکه فقط یک سکه پشت بیاید.

ج) پیشامد $C$ آنکه حداقل یکی از سکه‌ها رو بیاید.

پاسخ:

الف) $A = \{$(پ،پ،پ)(ر،ر،ر)$\}$

ب) $B = \{$(ر،ر،پ)(ر،پ،ر)(پ،ر،ر)$\}$

ج) $C = \{$(ر،ر،ر)(پ،ر،ر)(ر،پ،ر)(ر،ر،پ)(پ،پ،ر)(پ،ر،پ)(ر،پ،پ)$\}$

**مثال:** در مثال قبل با توجه به پیشامدهای $A, B, C$ :

الف) آیا پیشامدهای $A, B$ ناسازگارند؟　پاسخ: بله، زیرا هیچ عضو مشترکی ندارند. $A \cap B = \emptyset$

ب) آیا پیشامدهای $B, C$ ناسازگارند؟　پاسخ: خیر، زیرا عضو مشترکی دارند. $B \cap C = \{$(ر،ر،پ)(ر،پ،ر)(پ،ر،ر)$\}$

ج) آیا پیشامدهای $A, C$ ناسازگارند؟　پاسخ: خیر سازگارند، زیرا عضو مشترک دارند. $A \cap C = \{$(ر،ر،ر)$\}$

☺**مثال:** در پرتاب یک سکه و یک تاس پیشامدهای زیر را بنویسید.

الف) سکه پشت و تاس زوج بیاید.

پاسخ: $A =$ {(پ ,۶)(پ ,۴)(پ ,۲)}

ب) تاس عدد فرد یا سکه رو بیاید.

پاسخ: $B =$ {(پ ,۵)(پ ,۳)(پ ,۱)(ر ,۶)(ر ,۵)(ر ,۴)(ر ,۳)(ر ,۲)(ر ,۱)}

ج) سکه پشت بیاید.

پاسخ: $C =$ {(پ ,۶)(پ ,۵)(پ ,۴)(پ ,۳)(پ ,۲)(پ ,۱)}

❖ **مثال:** در خانواده‌ای با ۳ فرزند پیشامد آن را بنویسید که تعداد پسران از دختران بیشتر نباشد.

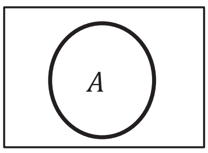
**احتمال: (اندازه‌گیری شانس)**

همه ما کم و بیش در گفتگوها و گمانه‌زنی‌های روزانه از کلمه شانس استفاده می‌کنیم و تصور روشنی از مفهوم آن داریم. از دیرباز حدس زدن نتیجه یک مسابقه یا رقابت یا یک رویداد و شرطبندی روی آن مرسوم بوده است. این امر باعث شد شاخه‌ی جدیدی به نام علم احتمالات در ریاضی بوجود آید که با نگاهی علمی‌تر و دقیق‌تر به آن پرداخته شود.

**احتمال یک پیشامد:** فرض کنیم $A$ پیشامدی در فضای نمونه‌ای $S \neq \emptyset$ باشد در این صورت احتمال وقوع پیشامد $A$ را با $P(A)$ نمایش داده و چنین تعریف می‌کنیم:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(s)} = \frac{\text{تعداد عضوهای پیشامد} A}{\text{تعداد عضوهای فضای نمونه}}$$

S




☺**مثال:** تاسی را پرتاب کرده‌ایم، مطلوبست محاسبه احتمال آنکه:

الف) تاس عدد زوج بیاید.

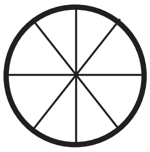
پاسخ: $A = \{۲,۴,۶\} \rightarrow n(A) = ۳ \quad , n(S) = ۶ \rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲}$

ب) عدد بزرگتر از ۲ ظاهر شود.

پاسخ:

$$B = \{۳,۴,۵,۶\} \rightarrow n(B) = ۴ \rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{۴}{۶} = \frac{۲}{۳}$$

☺**مثال:** صفحه‌ی عقربه‌داری به هشت قسمت مساوی تقسیم شده و روی قسمتهای آن به ترتیب اعداد ۱ تا ۸ نوشته شده است، عقربه را می‌چرخانیم. به سوالات زیر پاسخ دهید:



الف) احتمال آن را بیابید که عقربه روی عدد ۵ بایستد.

پاسخ: $A=\{۵\}\to n(A)=۱\ ,\ S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸\}\to n(S)=۸ \quad \Rightarrow \quad P(A)=\frac{۱}{۸}$

ب) احتمال آن را بیابید که عقربه روی عدد زوج و مضرب ۳ بایستد.

پاسخ: $B=\{۶\}\to n(B)=۱\quad ,\ n(S)=۸ \quad \Rightarrow \quad P(B)=\frac{۱}{۸}$

ج) احتمال آن را بیابید که عقربه عدد اول را نشان دهد.

پاسخ: $C=\{۲,۳,۵,۷\}\to n(C)=۴\quad ,\ n(S)=۸ \ \Rightarrow \quad P(C)=\frac{۴}{۸}=\frac{۱}{۲}$

☺**مثال:** دو تاس را با هم انداخته‌ایم، مطلوبست محاسبه احتمال آنکه:

الف) حاصل‌ضرب اعداد ظاهر شده روی دو تاس برابر ۸ شود.

پاسخ: $A=\{(۲,۴)(۴,۲)\}\to n(A)=۲\quad ,n(S)=۳۶ \quad \Rightarrow \quad P(A)=\frac{۲}{۳۶}=\frac{۱}{۱۸}$

ب) مجموع اعداد دو تاس حداکثر ۴ باشد.

پاسخ:

$$B=\{(۱,۱)(۱,۲)(۱,۳)(۲,۱)(۲,۲)(۳,۱)\}\to n(B)=۶\quad ,n(S)=۳۶ \qquad P(B)=\frac{۶}{۳۶}=\frac{۱}{۶}$$

**تذکر:**

۱- برای هر پیشامد دلخواه در فضای نمونه $S$ داریم: $\quad ۰\le P(A)\le ۱$

۲- اگر $A$ پیشامدی غیر ممکن باشد $P(A)=۰$ و اگر $A$ پیشامدی قطعی باشد $P(A)=۱$ است در واقع می‌توان نوشت:

$$P(\emptyset)=۰ \quad , \quad P(S)=۱$$

به بیان دیگر احتمال رخ دادن پیشامد غیرممکن برابر صفر درصد و احتمال رخ دادن پیشامد حتمی برابر ۱۰۰ درصد است.

😊**مثال:** یک سکه و یک تاس را با هم می‌اندازیم. مطلوبست احتمال آنکه:

الف) سکه رو بیاید.

پاسخ:

$$A = \{(۱،ر)(۲،ر)(۳،ر)(۴،ر)(۵،ر)(۶،ر)\} \rightarrow n(A) = ۶ \quad , \quad n(S) = ۱۲ \quad \Rightarrow P(A) = \frac{۶}{۱۲} = \frac{۱}{۲}$$

ب) سکه پشت و تاس فرد بیاید.

پاسخ: $$B = \{(پ,۱)(پ,۳)(پ,۵)\} \rightarrow n(B) = ۳ \quad , n(S) = ۱۲ \quad \Rightarrow P(B) = \frac{۳}{۱۲} = \frac{۱}{۴}$$

ج) سکه پشت یا تاس فرد بیاید.

پاسخ: $$C = \{(پ,۱)(پ,۲)(پ,۳)(پ,۴)(پ,۵)(پ,۶)(ر,۱)(ر,۳)(ر,۵)\} \rightarrow n(C) = ۹$$

$$, n(S) = ۱۲ \Rightarrow P(C) = \frac{۹}{۱۲} = \frac{۳}{۴}$$

**احتمال پیشامد متمم:**

اگر $P(A)$ احتمال رخ دادن پیشامد $A$ در فضای نمونه $S$ باشد،در این صورت احتمال رخ ندادن آن پیشامد را با $P(A')$ نمایش می‌دهیم و داریم:

$$P(A') = ۱ - P(A)$$

($A$ و $A'$ متمم یکدیگرند)

همچنین می‌توان نوشت:

$$P(A') + P(A) = ۱ \qquad , \qquad P(A) = ۱ - P(A')$$

😊**مثال:** اگر $P(A) = \frac{۲}{۳}$ باشد مقدار $P(A')$ را بدست آورید.

پاسخ: $$P(A') = ۱ - P(A) \Rightarrow P(A') = ۱ - \frac{۲}{۳} = \frac{۱}{۳}$$

😊**مثال:** اگر احتمال قبول شدن سارا در یک امتحان برابر $\frac{۵}{۷}$ باشد، احتمال قبول نشدن او در این امتحان چقدر است؟

پاسخ: پیشامد $A$ را قبول شدن سارا فرض می‌کنیم، پس قبول نشدن او $A'$ می‌شود.

احتمال قبول نشدن $$P(A') = ۱ - P(A) \Rightarrow P(A') = ۱ - \frac{۵}{۷} = \frac{۲}{۷}$$

☺**مثال:** احتمال آن را بیابید که در پرتاب دو تاس اعداد ظاهر شده یکسان نباشند.

پاسخ: با دقت در حالات بوجود آمده در پرتاب دو تاس درمی‌یابیم که تعداد حالاتی که دو تاس اعداد متفاوتی را نشان می-دهند بیشتر از یکسان بودن اعداد رو شده است بنابراین از پیشامد متمم استفاده می‌کنیم.

یکسان بودن اعداد رو شده در دو تاس $A = \{(۱,۱)(۲,۲)(۳,۳)(۴,۴)(۵,۵)(۶,۶)\} \rightarrow n(A) = ۶$

$A' =$ یکسان نبودن اعداد در دو تاس $=$ متمم $A$

$$n(A') = n(S) - n(A) \rightarrow n(A') = ۳۶ - ۶ = ۳۰$$

$$P(A') = \frac{n(A')}{n(S)} = \frac{۳۰}{۳۶} = \frac{۵}{۶}$$

☺**مثال:** اگر با ارقام ۱, ۲ , ۶, ۸ یک عدد چهار رقمی بسازیم، احتمال آن که این عدد زوج باشد را تعیین کنید.

پاسخ: تعداد کل اعداد ۴ رقمی که می‌توان نوشت برابر است با $n(S) = ۴! = ۲۴$

تعداد اعداد زوج ۴ رقمی برابر است با $n(A) = \underline{۳} \times \underline{۲} \times \underline{۱} \times \underset{\uparrow\ \text{۲ یا ۶ یا ۸}}{\underline{۳}} = ۱۸$

پس: $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۱۸}{۲۴} = \frac{۳}{۴}$

☺**مثال:** دو سکه را با هم می‌اندازیم، احتمال آن را بیابید که:

الف) حداقل یک بار پشت بیاید.

پاسخ:
$$n(S) = ۲ \times ۲ = ۴$$

$$A = \{(\text{ر، پ})(\text{پ،ر})(\text{پ،پ})\} \rightarrow n(A) = ۳$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۳}{۴}$$

ب) حداکثر یک بار پشت بیاید.

پاسخ:
$$B = \{(\text{ر، پ})(\text{پ،ر})(\text{ر،ر})\} \rightarrow n(B) = ۳$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{۳}{۴}$$

☺**مثال:** از جعبه‌ای که حاوی ۸ لامپ سالم و ۳ لامپ سوخته است، ۳ لامپ به تصادف خارج می‌کنیم. احتمال آن را بیابید که:

الف) هر ۳ لامپ سالم باشند.

پاسخ: می‌خواهیم ۳ لامپ از بین ۱۱ لامپ انتخاب کنیم پس تعداد اعضای فضای نمونه برابر است با:

$$n(S) = \binom{۱۱}{۳} = \frac{۱۱!}{۳! \times ۸!} = \frac{۱۱ \times ۱۰ \times ۹ \times ۸!}{۳! \times ۸!} = ۱۶۵$$

چون قرار است هر ۳ لامپ سالم باشند پس از بین ۸ لامپ سالم انتخاب می‌کنیم:

$$n(A) = \binom{۸}{۳} = \frac{۸!}{۳! \times ۵!} = \frac{۸ \times ۷ \times ۶ \times ۵!}{۶ \times ۵!} = ۵۶ \rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۵۶}{۱۶۵}$$

ب) ۲ لامپ سوخته باشد.

پاسخ: اگر ۲ لامپ انتخابی سوخته باشد، یک لامپ باقی‌مانده باید سالم باشد یعنی ۲ لامپ سوخته و ۱ لامپ سالم:

$$n(B) = \binom{۳}{۲} \times \binom{۸}{۱} = ۳ \times ۸ = ۲۴ \rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{۲۴}{۱۶۵}$$

❖ **مثال:** از جعبه‌ای که شامل ۴ مهره سفید و ۳ مهره زرد است، دو مهره به تصادف خارج می‌کنیم. احتمال آن را بیابید که:

الف) دو مهره همرنگ نباشند.

ب) حداقل یک مهره سفید باشد.

❖ **مثال:** از مجموعه $\{۱,۲,۳, \dots ,۹\}$ عددی به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال آن را بیابیدکه عدد انتخاب شده اول یا مضرب ۳ باشد.

❖ **مثال:** با حروف کلمه *flower* کلمه‌های چهارحرفی (بدون تکرار) ساخته‌ایم. مطلوبست احتمال آنکه کلمه ساخته شده با حرف " *w* "شروع شود.

❖ **مثال:** خانواده‌ای دارای سه فرزند است. احتمال آن را بیابید که:

الف) تعداد پسرها حداکثر یکی باشد.

ب) فرزند اول دختر باشد.

☺**مثال:** در یک جمع ۴ نفری احتمال آن را بیابید که:

الف) همه افراد در روز یکشنبه متولد شده باشند.

پاسخ: هر کدام از این ۴ نفر می‌توانند در یکی از روزهای هفته به دنیا آمده باشند پس به طور کلی هر کدام ۷ انتخاب دارند.

برای هر کدام از این افراد یک جایگاه در نظر می‌گیریم، پس تعداد اعضای فضای نمونه برابر است با:

تعداد کل انتخاب افراد : $\underline{۷} \times \underline{۷} \times \underline{۷} \times \underline{۷} \Rightarrow n(S) = ۷^۴$

برای تعیین تعداد اعضای پیشامد، هر کدام از افراد فقط یک انتخاب می‌توانند داشته باشند و آن انتخاب روز یکشنبه است

پس: تعداد انتخابها : $\underset{\text{یکشنبه}}{\underline{۱}} \times \underline{۱} \times \underline{۱} \times \underline{۱} \Rightarrow n(A) = ۱$

$$\to P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = (\frac{۱}{۷})^۴ = \frac{۱}{۷^۴}$$

که به صورت ساده‌تر برای هر شخص سهم $\frac{۱}{۷}$ نیز می‌توان در نظر گرفت و احتمال را به صورت زیر نوشت:

$$P(A) = \frac{۱}{۷} \times \frac{۱}{۷} \times \frac{۱}{۷} \times \frac{۱}{۷} = \frac{۱}{۷^۴}$$

ب) همگی در یک روز از هفته متولد شده باشند.

پاسخ: چون روز مشخصی از هفته مشخص نشده است بنابراین هر یک از روزهای هفته می‌تواند انتخاب شود.

به عنوان مثال روز شنبه: $\frac{۱}{۷} \times \frac{۱}{۷} \times \frac{۱}{۷} \times \frac{۱}{۷} = \frac{۱}{۷^۴}$ روز یکشنبه: $\frac{۱}{۷} \times \frac{۱}{۷} \times \frac{۱}{۷} \times \frac{۱}{۷} = \frac{۱}{۷^۴}$

روز دوشنبه : $\frac{۱}{۷} \times \frac{۱}{۷} \times \frac{۱}{۷} \times \frac{۱}{۷} = \frac{۱}{۷^۴}$ ... روز جمعه: $\frac{۱}{۷} \times \frac{۱}{۷} \times \frac{۱}{۷} \times \frac{۱}{۷} = \frac{۱}{۷^۴}$

پس این حالت ۷ بار تکرار شده است بنابراین احتمال برابر خواهد بود با:

$$P(B) = ۷ \times \left(\frac{۱}{۷^۴}\right) = \frac{۷}{۷^۴} = \frac{۱}{۷^۳}$$

ج) همگی در یک فصل از سال متولد شده باشند.

پاسخ: یک سال از ۴ فصل تشکیل شده که هر کدام از آنها می‌توانند انتخاب شوند.

هر ۴ نفر بهار بدنیا آمده باشند. $\frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{۴}=\frac{۱}{۴^۴}$

...

هر ۴ نفر زمستان بدنیا آمده باشند. $\frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{۴}=\frac{۱}{۴^۴}$

پس $P(C)=۴\times\frac{۱}{۴^۴}=\frac{۴}{۴^۴}=\frac{۱}{۴^۳}$

د) هیچ دو نفری در یک ماه متولد نشده باشند.

پاسخ: یکسال شامل ۱۲ ماه است، در این حالت ماه تولد همه‌ی افراد باید متفاوت باشد. نفر اول از بین ۱۲ ماه سال تمام ماهها را می‌تواند انتخاب کند اما نفر دوم یک انتخاب را از دست می‌دهد و ۱۱ ماه باقی‌مانده را می‌تواند انتخاب کند. به همین ترتیب با انتخاب ماه تولد برای هر نفر یک انتخاب کم می‌شود پس داریم:

$$\frac{۱۲}{۱۲}\times\frac{۱۱}{۱۲}\times\frac{۱۰}{۱۲}\times\frac{۹}{۱۲}=\frac{۹۹۰}{۱۲^۳}$$

❖ **مثال:** در یک تیم ورزشی ۶ نفره احتمال آن را بیابید که:

الف) هر شش نفر در ماه مهر به دنیا آمده باشند.

ب) هیچ دو نفری در یک روز از سال به دنیا نیامده باشند.

**نمونه سوالات امتحانات نهایی درس دوم، فصل اول:**

**خرداد ۹۹:**

۱- جاهای خالی را با عبارات مناسب تکمیل کنید. (هر مورد ۰/۲۵ )

الف) اگر $A \cap B = \emptyset$ باشد، دو پیشامد $A, B$ را ..................... می‌گوییم.

ب) فضای نمونه‌ای پرتاب یک تاس و دو سکه ................ عضو دارد.

پ) پیشامد ................ وقتی رخ می‌دهد که پیشامد $A$ رخ ندهد.

پاسخ: الف) ناسازگار　　ب) $۶ \times ۲ \times ۲ = ۲۴$　　پ) $A'$

۲- درستی یا نادرستی هر یک از عبارات زیر را مشخص کنید. (هر مورد ۰/۲۵ )

ب) خارج کردن ۲ مهره سفید از جعبه‌ای که در آن ۵ مهره سفید است، یک پیشامد حتمی است.

پ) در فضای نمونه‌ای پرتاب یک تاس، پیشامد رو شدن عددی بزرگتر از ۶ نشدنی است.

پاسخ:

ب) درست　　پ) درست

۶- خانواده‌ای دارای ۳ فرزند است. (۱نمره)

الف) فضای نمونه‌ای برای ترکیب جنسیت فرزندان این خانواده را بنویسید.

ب) مطلوبست احتمال آنکه هر سه فرزند از یک جنسیت نباشند.

پاسخ:

الف) $S = \{(\text{پ،پ ،پ})(\text{د،پ،پ})(\text{پ،د،پ})(\text{پ،پ،د})(\text{د، پ،پ})(\text{پ،د،د})(\text{د،پ،د})(\text{د،د،پ})(\text{د،د،د})\}$

ب) $A = \{(\text{د،د،پ})(\text{د،پ ،پ})(\text{پ،پ،د})\} \rightarrow P(A) = \frac{۶}{۸} = \frac{۳}{۴}$

۷- یک تاس و یک سکه را با هم پرتاب می‌کنیم، مطلوبست محاسبه احتمال آنکه تاس حداکثر ۳ یا رو بیاید.

$n(S) = ۱۲ \quad A = \{(\text{ر،۱})(\text{ر،۲})(\text{ر،۳})(\text{ر،۴})(\text{ر،۵})(\text{ر،۶})(\text{پ}, ۱)(\text{پ}, ۲)(\text{پ}, ۳)\}$

$$P(A) = \frac{۹}{۱۲} = \frac{۳}{۴}$$

**شهریور ۹۹:**

۱- جاهای خالی را با عبارات مناسب تکمیل کنید. (هر مورد ۰/۲۵ )

الف) به هر یک از نتایج ممکن برای یک آزمایش تصادفی .................. می‌گوییم.

ب) فضای نمونه‌ای پرتاب سه سکه ............... عضو دارد.

پ) پیشامد ............... وقتی رخ می‌دهد که پیشامد $A$ و $B$ رخ دهند.

پاسخ:

الف) برآمد　　ب) $۸ = ۲^۳ = ۲ \times ۲ \times ۲$　　پ) $A \cap B$

۲- درستی یا نادرستی هر یک از عبارات زیر را مشخص کنید. (هر مورد ۰/۲۵ )

پ) نتیجه یک آزمون چهارگزینه‌ای که نیمی از سوالات را شانسی پاسخ داده‌ایم یک پیشامد حتمی است.

ث) تهی زیرمجموعه تمام مجموعه‌هاست.

پاسخ:

پ) نادرست　　ث) درست

۵- می‌خواهیم از بین ۵ دانش آموز پایه دوازدهم و ۴ دانش آموز پایه یازدهم یک تیم ۶ نفره والیبال تشکیل دهیم.

مطلوبست احتمال انکه ۴ نفر از اعضای تیم دانش‌آموز پایه دوازدهم و ۲ نفر از اعضای تیم دانش‌آموز پایه یازدهم باشند.(۱/۵)

پاسخ: $n(A) = \binom{۵}{۴} \times \binom{۴}{۲} = ۵ \times ۶ = ۳۰$　و　$n(S) = \binom{۹}{۶} = \frac{۹!}{۳! \times ۶!} = ۸۴$

$$\rightarrow P(A) = \frac{۳۰}{۸۴}$$

۶- هر یک از اعداد فرد طبیعی ۱ تا ۱۵ را روی یک کارت نوشته و پس از مخلوط کردن کارت‌ها به طور تصادفی یک کارت را برمی‌داریم. مطلوب است محاسبه احتمال اینکه عدد روی کارت مضرب ۳ باشد. (۱ نمره)

پاسخ: $S = \{۱,۳,۵,۷,۹,۱۱,۱۳,۱۵\}$　$A = \{۳,۹,۱۵\}$　$\rightarrow P(A) = \frac{۳}{۸}$

۷- در پرتاب دو تاس پیشامدهای زیر را مشخص کنید. (۱/۵ نمره)

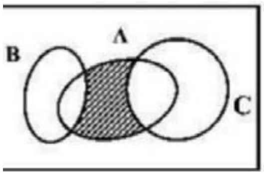
الف) مجموع اعداد رو شده مساوی ۱۰ باشد.

ب) اعداد رو شده از هر دو تاس یکسان و هر دو زوج باشند.

پاسخ: الف) $A = \{(۴,۶)(۵,۵)(۶,۴)\}$　ب) $B = \{(۲,۲)(۴,۴)(۶,۶)\}$

❖ **تست:**

**۱-** مجموعه‌های $C, B, A$ مطابق شکل زیر مفروض‌اند. کدام مورد برای قسمت سایه خورده نادرست است؟ (انسانی ۹۹)




۱) $A \cap (B' \cap C')$

۲) $A \cap (B \cup C)'$

۳) $(A - C) \cap (A - B)$

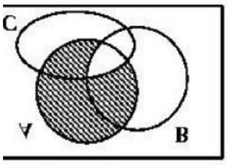
۴) $(A - C) \cup (A - B)$

**۲-** در جعبه‌ای ۵ مهره سفید و ۴ مهره سیاه یکسان قرار دارد. به تصادف ۳ مهره خارج می‌کنیم. با کدام احتمال ، ۲ مهره سفید و یک مهره سیاه، خارج می‌شود؟ (انسانی ۹۹)

۱) $\frac{۵}{۱۴}$    ۲) $\frac{۳}{۷}$    ۳) $\frac{۱۰}{۲۱}$    ۴) $\frac{۱۱}{۲۱}$

**۳-** مطابق شکل زیر، فرض کنید $C, B, A$ سه مجموعه باشند، کدام مورد برای قسمت سایه خورده نادرست است؟

(انسانی،خارج ۹۹)




۱) $(A - B) \cup (A - C)$

۲) $A \cap (B' \cup C')$

۳) $A - (B \cap C)$

۴) $A - (B \cup C)$

**۴-** در پرتاب یک تاس و ۲ سکه، احتمال این که لااقل یکی از سکه‌ها «پشت» و عدد رو شده در تاس، فرد باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۸}$    ۲) $\frac{۵}{۱۲}$    ۳) $\frac{۱}{۲}$    ۴) $\frac{۵}{۸}$    (انسانی، خارج ۹۹)

**۵-** با ارقام ۰,۱,۲,۳,۴,۵ چند عدد چهار رقمی بخش‌پذیر بر ۵، بدون تکرار رقم‌ها، می‌توان نوشت؟ ( انسانی ۹۸)

۱) ۷۲    ۲) ۹۶    ۳) ۱۰۸    ۴) ۱۲۰

**۶-** یک سکه و یک تاس با هم پرتاب می‌شود، با کدام احتمال سکه «رو» و عدد تاس مضرب ۳ ظاهر می‌شود؟ ( انسانی ۹۸)

۱) $\frac{۱}{۱۲}$    ۲) $\frac{۱}{۶}$    ۳) $\frac{۱}{۴}$    ۴) $\frac{۱}{۳}$

**۷**– دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال جمع دو عدد رو شده، کمتر از ۱۰ می‌باشد؟( انسانی، خارج ۹۸)

۱) $\frac{۵}{۹}$　　۲) $\frac{۷}{۱۲}$　　۳) $\frac{۳}{۴}$　　۴) $\frac{۵}{۶}$

**۸**- با ارقام موجود در مجموعه $\{۱,۲,۴,۶,۷,۸\}$ چند عدد پنج رقمی فرد، بدون تکرار رقم‌ها، می‌توان نوشت؟

۱) ۱۲۰　　۲) ۱۸۰　　۳) ۲۴۰　　۴) ۳۰۰　　( انسانی، خارج ۹۸)

**۹**– یک تاس قرمز و یک تاس سبز را با هم پرتاب می‌کنیم. احتمال اینکه مجموع دو عدد رو شده برابر ۷ باشد کدام است؟ (انسانی ۹۷)

۱) $\frac{۱}{۶}$　　۲) $\frac{۲}{۹}$　　۳) $\frac{۱}{۴}$　　۴) $\frac{۵}{۱۸}$

**۱۰**– اعداد یک رقمی ۹ ,... ,۱,۲,۳بر روی ۹ کارت یکسان نوشته شده است. اگر یک کارت از بین آنها بیرون آوریم احتمال اینکه عدد آن بر ۲ یا ۳ بخش‌پذیر باشد، کدام است؟ ( انسانی ۹۷)

۱) $\frac{۳}{۵}$　　۲) $\frac{۲}{۳}$　　۳) $\frac{۳}{۴}$　　۴) $\frac{۵}{۹}$

**۱۱**– برروی یک نیمکت ۴ دانش آموز نشسته‌اند. با کدام احتمال لااقل دو نفر از آنها در یک ماه از سال متولد شده‌اند؟

۱) $\frac{۴۱}{۹۶}$　　۲) $\frac{۲۳}{۴۸}$　　۳) $\frac{۲۵}{۴۸}$　　۴) $\frac{۵۵}{۹۶}$　　(انسانی خارج ۹۶)

**۱۲**- با حروف کلمه $DANESH$، چند رمز عبور چهار رقمی می‌توان ساخت به طوری که حرف $S$ در هر رمز باشد؟

۱) ۲۴۰　　۲) ۲۵۰　　۳) ۲۶۰　　۴) ۲۷۰　　( انسانی ۹۷)

**۱۳**– در پرتاب سه سکه با هم، احتمال ظاهرشدن لااقل یک «رو» کدام است؟ (انسانی ۹۵)

۱) $\frac{۳}{۸}$　　۲) $\frac{۵}{۸}$　　۳) $\frac{۶}{۸}$　　۴) $\frac{۷}{۸}$

**۱۴**– در پرتاب دو تاس با هم، احتمال ظاهر شدن دو عدد غیر مساوی کدام است؟(انسانی ۹۵)

۱) $\frac{۵}{۱۲}$　　۲) $\frac{۲}{۳}$　　۳) $\frac{۷}{۹}$　　۴) $\frac{۵}{۶}$