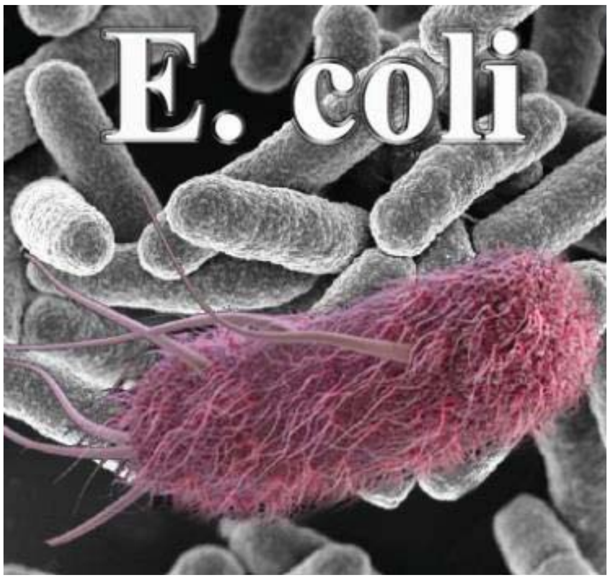
به نام خدا

آموزش وپرورش منطقه ... تهران



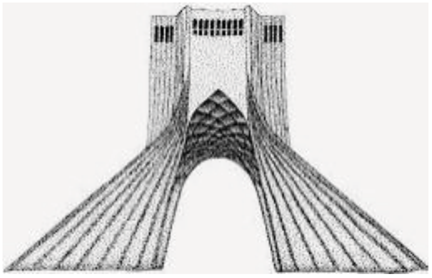
ریاضی (۲)

یازدهم (رشته تجربی)

۱۴۰۲-۱۴۰۳

سعید میری

فهرست



فصل اول: هندسه تحلیلی و جبر

۱. آشنایی با هندسه تحلیلی

۱– فاصله بین دو نقطه روی محور طول‌ها

اگر طول نقاط A , B را با x_A , x_B نشان دهیم در اینصورت فاصله بین A تا B از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$|AB| = |x_B - x_A|$$

مثال۱. اگر طول نقاط A برابر ۱۱ و طول نقاط B برابر $-\sqrt{2}$ باشد فاصله بین A تا B را بیابید.

۲– فاصله دو نقطه $A\begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix}$ تا $B\begin{bmatrix} x_B \\ y_B \end{bmatrix}$ از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$\boxed{AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}$$

مثال۲– اگر $C\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$, $B\begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$, $A\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ سه راس مثلث باشند:

۱– رسم مثلث.۲–محیط آن را بیابید. ۳–نوع آن را تعیین کنید. ۴–شیب دوضلع AC و CB را بیابید.

مثال ۳–معادله خط عمودمنصف پاره خطی را بیابید که دو نقطه $A\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$, $B\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ را بهم وصل می‌کند.

۳– شرط عمود و موازی بودن دوخط

۱. دوخط $L\,,L'$ را موازی گوییم اگر و تنها اگر شیب‌های آنها با هم برابر باشند یعنی $m=m'$

۲. دو خط $L\,,L'$ را برهم عمود می گوییم و تنها اگر شیب یکی قرینه و معکوس دیگری باشد به عبارتی دیگر

$m=-\frac{1}{m'}$ یا $m\times m'=-1$

مثال : وضعیت خطوط زیر را نسبت به هم تعیین کنید :

الف)
$$\begin{cases} y=2x-3 \longrightarrow m=2 \\ x+2y=5 \longrightarrow m'=-\frac{\text{ضریب } x}{\text{ضریب } y}=-\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow 2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$$

$\Rightarrow$ دو خط برهم عمودند

ب)
$$\begin{cases} \frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1 \longrightarrow 3x+2y=6 \longrightarrow m=-\frac{3}{2} \\ x=-\frac{2}{3}y-4 \longrightarrow 3x+2y=4 \longrightarrow m'=-\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow m=m' \Rightarrow$$ خط موازی اند

نکته : دو خط $ax+by+c=0$, $a'x=b'y+c'=0$ مفروض اند .

۱. اگر $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$ باشد آن گاه دوخط با هم موازی‌اند و بالعکس .

۲. اگر $aa'+bb'=0$ باشد ، آن گاه دو خط برهم عمودند و بالعکس .

۳. اگر $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$ باشد آن گاه دو خط برهم منطبق‌اند .

مثال ۱. دو خط $(m-1)x+2y=3$, $5x-\frac{m}{2}y-1=0$ برهم عمودند . مقدار m را بیابید.

مثال 2. اگر نقاط $A(a\,,1-2a)$, $B(1-2m\,,m)$, $C(0,1)$ در یک راستا باشند مقدار a,m را بیابید.

شراط اینکه سه نقطه بر یک استقامت باشند این است که

شیب هر دو نقطه دلخواه با شیب دو نقطه دیگر برابر باشند.

۴- مختصات نقطه وسط یک پاره‌خط

۱. مختصات وسط پاره خط AB با طول های x_A , x_B از رابطه زیر به دست می آید :

$$AM = MB \Rightarrow x_m - x_A = x_A - x_m \Rightarrow 2x_m = x_A + x_B \Rightarrow x_m = \frac{xA+xB}{2}$$

مثال ۱. اگر طول A ، -3 و طول B برابر ۵ باشد و $AM = 3MB$

$$x_B = 5 \quad , \quad x_A = -3 \qquad\qquad x_m - x_A = 3(x_B - x_m)$$

$$x_m - (-3) = 3(5 - x_m) \Rightarrow x_m + 3 = 15 - 3x_m \Rightarrow 4x_m = 12 \Longrightarrow x_m = 3$$

۲. اگر $A\begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix}$ و $B\begin{bmatrix} x_B \\ y_B \end{bmatrix}$ آنگاه مختصات وسط پاره خط AB از رابطه

$$M\begin{bmatrix} \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ \dfrac{y_A + y_B}{2} \end{bmatrix}$$

بدست می‌آید.

مثال ۲. اگر $A\begin{bmatrix} 2a+1 \\ 3 \end{bmatrix}$ و $B\begin{bmatrix} 4 \\ k-1 \end{bmatrix}$ مفروض باشد و $M\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ مختصات وسط آنها باشد مقادیر a و k را بیابید.

مثال ۳. در مثلثی با سه راس $A\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, B\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}, C\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$ اندازه میانه AM را بیابید.

مثال۴. خطوط $x = 0$ و $y = -\frac{3}{2}$ و $2x - 3 = 0$ را رسم کنید و و ضعیت هریک را نسبت به دیگری تعیین کنید.

۵– فاصله یک نقطه از یک خط

فاصله یک نقطه $A(x_0\,,y_0)$ از خط $ax+by+c=0$ از فرمول زیر محاسبه می شود

$$l:ax+by+c=0 \quad و \quad A(x_0,y_0) \Rightarrow \quad AH=d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

نکته: معادله خط حتما باید به صورت استاندارد $ax+by+c=0$ باشد یعنی مساوی صفر باشد .

مثال ۱. فاصله نقطه $A(-3\,,2)$ را از خط $y=2x+1$ به دست آورید .

مثال ۲. فاصله نقطه $A(-1\,,4)$ از خط $3x+4y=k+1$ برابر ۲ است . مقدار k را بیابید .

مثال ۳. نقطه $A(3\,,-1)$ وسط قطر مربعی است که یک ضلع ان منطبق بر خط $2y-x=5$ است.

مساحت این مربع را بیابید. (تجربی ۹۳)

مثال ۴. دو نقطه روی خط به معادله $y=x-1$ قرار دارند که فاصله این نقاط از خط به معادله $3x-3y=5$ برابر $\sqrt{13}$ است . طول این دو نقطه را بیابید . (تجربی ۸۹)

۶– فاصله دو خط موازی

۱. اگر دو خط $ax+by+c=0$ و $ax+by+c'=0$ و موازی مفروض باشند فاصله آنها از یکدیگر از رابطه زیر به دست می آید :

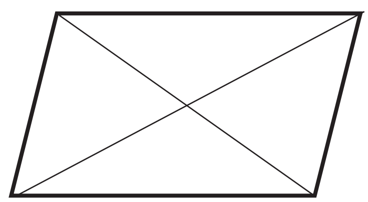
$$\boxed{d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

۲. معادله خطی که از وسط دو خط موازی $ax+by+c=0$ و $ax+by+c'=0$ می گذرد از رابطه زیر به دست می آید :

$$l: ax+by+\frac{c+c'}{2}=0$$

۳. در هر متوازی الاضلاع مجموع طول های مختصات رأس ها مقابل باهم برابرند همچنین مجموع عرض های مختصات رأس های مقابل نیز باهم برابرند به عبارت دیگر :

$$\boxed{\begin{cases}x_A+x_C=x_B+x_D\\ y_A+y_C=y_B+y_D\end{cases}}$$



مثال ۱. فاصله دو خط $3x-2y=5$ و $9x=6y+2$ را به دست آورید.

مثال ۲. در مثال قبل معادله خط میانی دو خط داده شده را بیابید.

مثال ۳. تقطه (۶ و ۷) رأس یک متوازی الاضلاع است که دو ضلع آن منطبق بردو خط معادلات

$2y-3x=11$ و $3y+4x=8$ می باشند، مختصات وسط قطر را بیابید . (تجربی ۹۰)

۴.اگر $A(x_A\ ,x_A)$ و $B(x_B\ ,Y_B)$ و $C(x_C\ ,y_C)$ مختصات رأس‌های مثلث ABC باشند آن گاه

الف) مختصات مرکز ثقل مثلث از رابطه $G\begin{bmatrix}\frac{x_A+x_B+x_C}{3}\\ \frac{y_A+y_B+y_C}{3}\end{bmatrix}$ به دست می آید.

(مرکز ثقل مثلث محل برخورد سه میانه مثلث است)

ب) مساحت مثلث از رابطه زیر به دست می آید :

$$S_\Delta=\frac{1}{2}\left|(x_Ay_B+x_By_C+x_cy_A)-(y_Ax_B+y_Bx_C+y_cx_{A)}\right|$$

مثال ۴. اگر $A(2\ ,-1)$ و $B(3\ ,5)$ و $C(4\ ,-6)$ باشد.

الف) مرکزثقل مثلث را بیابید. ب) مساحت مثلث را حساب کنید.

تمرین در منزل

۱. مثلث ABC را به رأس‌های $A(-1\ ,3)$ و $B(1\ ,1)$ و $3(1\ ,3)$ در نظر بگیرید :

الف) مثلث را رسم کنید. ب)نوع مثلث را تعیین کنید. ج)محیط مثلث را به دست آورید.

د) معادله خط عمود منصف BC را به دست آورید. ه) طول ارتفاع AH را حساب کنید.

۲. $A(-2 , 5)$ و $B(-6 , 11)$ نقاط دو سر قطر یک دایره اند. مختصات مرکز و طول شعاع دایره را به دست آورید.

۳. شکل نمای جانبی عدسی از منحنی سهمی به معادله $Y = x^2 - 6x - 27$ مدل سازی شده است.

الف) مختصات B , A ب) طول AB ج) بیشترین ضخامت عدسی

۴. فاصله دو خط موازی $-3x + \sqrt{3}y + 6 = 0$ و $-x\sqrt{3} + y - 2 = 0$ را بیابید.

۵. خط $6x + 8y = 10$ بر دایره ۳ به مرکز $5(-2 , 1)$ مماس است. طول قطر دایره چقدر است ؟

۶. نقطه $S(x , 4)$ روی نیم‌دایره‌ای به شعاع ۵ در شکل روبرو داده است.

الف) x را بیابید. ب)شیب خط های AS و BS را بیابید و نشان دهید برهم عموداند.

۷. اگر فاصله نقطه $A(-1 , 2)$ از خط $ax + 3y = 2$ برابر ۲ باشد. مقدار a را به دست آورید .

۸. فاصله نقطه $A(1 , -4)$ از خط $8x - 6y = 2k$ برابر ۳ باشد مقدار k را به دست آورید.

۹. نقطه ای روی خط $y = 3x$ تعیین کنید که مجموع فاصله‌های آن تا مبدأ مختصات و نقطه $A(2\,,1)$ برابر ۴ باشد.

۱۰. $A(3\,,2)$ و $B(-1\,,1)$ و $C(5\,,3)$ سه رأس مثلث ABC هستند. اگر M , H به ترتیب پای ارتفاع AH و میانه AM باشند طول M , H را به دست آورید .

۱۱. فاصله دو خط به معادلات $y = \sqrt{3}x + 2$ و $\sqrt{3}y - 3x + 6 = 0$ را به دست آورید.(تجربی۸۸)

۱۲. مساحت مثلث با سه رأس $A(2\,,5)$ و $B(3\,,0)$ و $3(0\,,2)$ را به دست آورید. (تجربی۹۲)

۱۳. اگر نقطه‌های $A(3\,,2)$ و $B(-1\,,-4)$ و $C(2\,,1)$ فاصله نقطه A از عمود منصف BC را به دست آورید.

۱۵. نقطه $A(3\,,-1)$ وسط قطر مربعی است که یک ضلع آن منطبق بر خط روی $2y - x = 5$ است. مساحت این مربع؟

۱۵. نقطه $A(3\,,2)$ مرکز لوزی $ABCD$ است. اگر قطرهای لوزی به موازات محورهای مختصات و خط $6x + y = 8$ معادله یکی از اضلاع آن باشد، محیط لوزی؟

۱۶. در مربع $ABCD$ مختصات راس $A(3\,,2)$ و ضلع BC روی خط $y = kx + 1$ قرار دارد. اگر مساحت این مربع 5 باشد، حاصل جمع مقادیر قابل قبول برای k را بیابید.

۲– تابع و معادله درجه دو

در سال دهم با روش های تجزیه، مربع کامل کردن، ریشه گیری و روش کلی (Δ) برای حل معادله درجه دوم $ax^2 + \mathrm{b}x + \mathrm{c} = 0$ آشنا شدید. هر یک را به روش خواسته شده حل کنید:

الف) $x^2 - x - 110 = 0$ (تجزیه)

ب) $x^2 + 6x + 7 = 0$ (مربع کامل کردن)

ج) $x^2 - 8 = 0$ (ریشه‌گیری)

د) $2x^2 - x = 2$ (روش کلی–دلتا)

همچنین روش میانبری نیز بود: (برای هر یک مثالی بیاورید)

اگر $a + b + c = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{c}{a} \end{cases}$

$a + c = b \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -\frac{c}{a} \end{cases}$

روش ساختن معادله درجه دو با داشتن (معلوم بودن) ریشه های آن $(\alpha\,,\beta)$

روش اول: مطابق روبرو انجام مراحل ۱و۲و۳

$(1)\quad S = \alpha + \beta$ $\qquad (2)\quad P = \alpha \times \beta$

$$\Rightarrow (3)\quad x^2 - Sx + P = 0$$

روش دوم:

مطابق زیر انجام مراحل ۱ و ۲ و ۳

$$(1)\begin{cases}x=\alpha\\x=\beta\end{cases}\Rightarrow\quad(2)\begin{cases}x-\alpha=0\\x-\beta=0\end{cases}\Rightarrow\quad(3)\ \boxed{(x-\alpha)(x-\beta)=0}$$

مثال ۱: معادله درجه دومی بسازید که ریشه‌های آن $-\frac{3}{5}$ و ۷ می‌باشد:

$S=7+\left(-\frac{3}{5}\right)=\frac{35-3}{5}=\frac{32}{5}$ و $P=7\times\left(-\frac{3}{5}\right)=-\frac{21}{5}$

$$\Longrightarrow x^2-\frac{32}{5}x-\frac{21}{5}=0\Longrightarrow\cdots$$

مثال 2. محیط یک مستطیل 33^{cm} و مساحت آن 65^{cm^2} است. ابعاد مستطیل را بیابید.

طول: α $\quad$ محیط $=2(\alpha+\beta)=33\qquad \alpha+\beta=\frac{33}{2}$

عرض: β $\quad$ مساحت $=\alpha\times\beta=65\qquad \Longrightarrow x^2-Sx+P=0$

$$\Longrightarrow\ 2x^2-33x+130=0\Longrightarrow\begin{cases}\Delta=b^2-4ac\\\Delta=33-4(2)(130)\end{cases}\quad x^2-\frac{33}{2}x+65=0\Longrightarrow$$

$$=1089-1040=49\quad\Longrightarrow\quad x=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x=\frac{33\pm7}{2(2)}=\begin{cases}\frac{33+7}{4}=\frac{40}{4}=10=\text{طول}\\\frac{33-7}{4}=\frac{2}{4}=\frac{13}{2}=\frac{7}{5}=\text{عرض}\end{cases}$$

مثال ۳. مساحت یک لوزی 4^{cm^2} و مجموع دو قطر آن $\frac{17}{3}$ است. محیط این لوزی را بیابید.

۲. روابط ریشه‌ها (α, β) و ضرایب (a, b, c) $ax^2 + bx + c = 0$

اگر α , β ریشه‌های معادله درجه دو باشند:

α و $\beta = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

$$S = \alpha + \beta = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$P = \alpha \times \beta = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \times \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{b^2-\Delta}{4a^2} = \frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

مثال 4.

اگر α و β ریشه های معادله درجه دوم $3x^2 - 6x + 2 = 0$ باشد، بدون حل معادله مقدار عددی عبارت زیر را به دست آورید: $S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{-6}{3}$ و $P = \alpha \times \beta = \frac{c}{a} = \frac{2}{3}$

الف) $\alpha^2 + \beta^2 = ?$ $\quad \Rightarrow \quad \alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P = 2^2 - 2\left(\frac{2}{3}\right) = 4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$

ب) $\alpha^3 + \beta^3 = ?$

$$\boxed{\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha^2\beta - 3\alpha\beta^2 = S^3 - 3PS}$$

$$= 2^3 - 3\left(\frac{2}{3}\right)(2) = 8 - 4 = 4$$

ج) $|\alpha - \beta| = ?$ $\qquad |\alpha - \beta| = A \Rightarrow (\alpha - \beta)^2 = A^2 \Rightarrow$

$$\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta = S^2 - 2P - 2P = S^2 - 4P \Rightarrow \boxed{|\alpha - \beta| = \sqrt{S^2 - 4P}}$$

$$= \sqrt{2^2 - 4\left(\frac{2}{3}\right)} = \sqrt{4 - \frac{8}{3}} = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

د) $3\alpha^2 + 6\beta - 2 = ?$

ریشه $\beta \Rightarrow 3\beta^2 - 6\beta + 2 = 0 \Longrightarrow 3\beta^2 = 6\beta - 2 \Longrightarrow 3\alpha^2 + 6\beta - 2 = \ 3\alpha^2 + 3\beta^2 =$
$3(\alpha^2 + \beta^2) = 3 \times \frac{8}{3} = 8$

ح) $3\alpha^2 + 2\beta^2 = ?$

$$\boxed{m\alpha^2 + n\beta^2 = \left(\frac{m+n}{2}\right)(\alpha^2 + \beta^2) + \left(\frac{m-n}{2}\right)(\alpha^2 - \beta^2)}$$

$$\left(\frac{3+2}{2}\right)(\alpha^2 + \beta^2) + \left(\frac{3-2}{2}\right)(\alpha^2 - \beta^2) = \cdots$$

مثال5. اگر β و α ریشه‌های معادله $x^2 - 6x + 2 = 0$ باشند، مقدار عددی عبارات زیر را به دست آورید:

الف) $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} =$

ب) $\frac{\alpha}{\beta+1} + \frac{\beta}{\alpha+1} =$

ج) $\beta^2 + \frac{4}{\beta^2} =$

ح) $4\alpha^2 + 3\beta^2 =$

مثال۶. معادله درجه دومی بنویسید که ریشه های آن مربع ریشه‌های معادله $x^2 + 4x - 1 = 0$ باشد؟

(گزینه ۲-۹۷)

کار در کلاس:

1. اگر α و β ریشه‌های معادله $x(5x+3)=2$ باشند، به ازای کدام مقدار k مجموعه جواب‌های معادله $4x^2-kx+25=0$ به صورت $\frac{1}{\alpha^2}, \frac{1}{\beta^2}$ است؟(ریاضی ۹۰)

2. به ازای چه مقدار m ، مجموع جذر هردو ریشه معادله $2x^2-(m+1)x+\frac{1}{8}=0$ برابر 2می باشد؟

(ریاضی ۹۶)

3. در معادله $3x^2-15x+m=0$ اگر یکی از ریشه‌ها2 واحد بیشتر از ریشه دیگر باشد، m و هر دو ریشه را بیابید.

4. به ازای چه مقدار m نمودار تابع $f(x)=(m-3)x^2+mx-1$ از ناحیه اول محورهای مختصات نمی‌گذرد؟ (ریاضی ۹۲)

5. به ازای چه مقدار m ، معادله درجه دوم $(2m-1)x^2+6x+m-2=0$ دارای دو ریشه حقیقی است؟ (ریاضی ۹۷)

1) $-2<m<\frac{3}{5}$

2) $-2<m<\frac{2}{5}$

3) $-1<m<\frac{3}{}5$ 4) $-1<m<\frac{2}{5}$

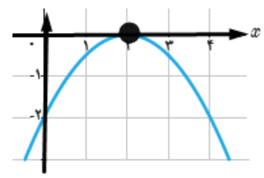
۳. صفرهای تابع

برای هر تابع f ، جواب‌های معادله $f(x) = 0$ را در صورت وجود، صفرهای تابع می‌نامند.

به لحاظ شهودی اگر نمودار $f(x)$ را رسم کنیم صفرهای تابع f، طول نقاط تلاقی نمودار با محور x هاست.

مثال ۱ . صفرهای تابع $f(x) = -x^2 + 4x - 4$ را بدست آورید .

الف) روش جبری : $-x^2 + 4x - 4 = -(x-2)^2 = 0 \Rightarrow x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$



ب) روش هندسی : $f(x) = -(x^2 - 4x + 4) = -(x-2)^2$

مثال ۲ . صفرهای تابع $f(x) = -2x^2 + 2x + 1$ و $g(x) = x^4 - x^2 - 123$ را بیابید.

شیوه یافتن ضابطه سهمی از روی نمودار داده شده

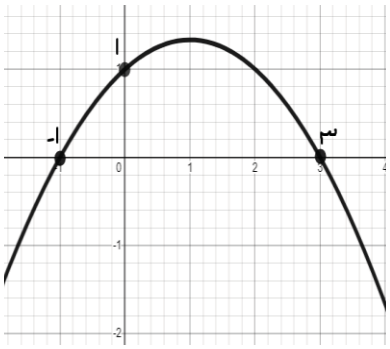
۱. اگر صفرهای تابع α, β داده شده باشنده از رابطه $y = a\,(x-\alpha)(x-\beta)$ و استفاده از یک نقطه کمکی در شکل، ضابطه را می‌یابیم.

۲. اگر راس سهمی (h, k) داده شده باشد، از رابطه $y = a(x-h)^2 + k$ و استفاده از یک نقطه کمکی در شکل، ضابطه را می‌یابیم.

۳-اگر سه نقطه متفاوت از سهمی با کمک توصیف یا در شکل داده شده باشد از رابطه

$y = ax^2 + bx + c$ استفاده کرده و با جایگذاری نقاط در آن و حل دستگاه، ضابطه را می‌یابیم.

مثال ۱. اگر نمودار سهمی $y = ax^2 + bx + c$ به صورت زیر باشد ، مقایر b و a و c را به دست آورید.



با توجه به نمودار $\begin{matrix} \alpha = -1 \\ \beta = 3 \end{matrix}$ $\quad y = a\,(x-\alpha)(x-\beta)$

$$\Rightarrow\ y = a\,(x-(-1))(x-3)\ \Rightarrow\ 1 = a(0+1)(0-3)$$

$$\Rightarrow\ 1 = -3a\ \Rightarrow\ a = -\frac{1}{3}\ \Rightarrow y = -\frac{1}{3}\,(x+1)(x-3)$$

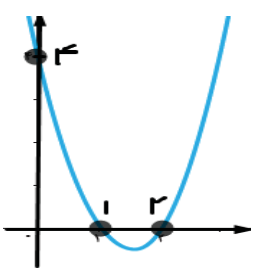
$$y = -\frac{1}{3}\,(x^2-2x-3)\ \Rightarrow\ y = -\frac{1}{3}\,x^2 + \frac{2}{3}x + 1\ \Rightarrow b = \frac{2}{3}\ \text{و}\ c = 1$$

$$\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix} \Rightarrow\ 0 = a(3)^2 + b(3)^2 + 1\ \Rightarrow \begin{cases} 9a + 3b = -1 \\ a - b = -1 \end{cases} \Rightarrow \cdots$$

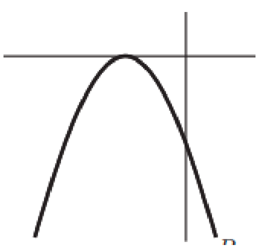
$$\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}\ \Rightarrow\ 0 = a(-1)^2 + b(-1) + 1$$

$$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\ \Rightarrow\ 1 = a(0)^2 + b(0) + c\ \Rightarrow$$

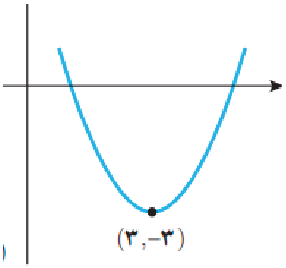
مثال ۳. در نمودار سهمی زیر با معادله $y = ax^2 + bx + c$ مقایر a و b و c را بدست آورید.



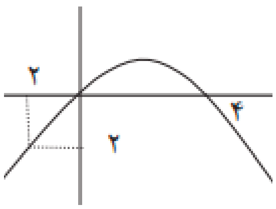
مثال ۴. در نمودار سهمی زیرمحور طولها را در ۱- و محور عرض ها را در ۲- قطع کرده است. ضابطه سهمی را بیابید.



مثال ۵. **در نمودار سهمی زیر** $|a|=1$ **معادله** $y=ax^2+bx+c$ **را بدست آورید.**



مثال ۶. **در نمودار سهمی زیر ضابطه** $y=ax^2+bx+c$ **را بدست آورید.**



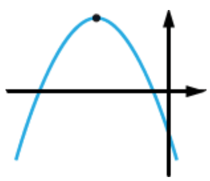
مثال ۶. **بهازای چند مقدار ، سهمی** $y=ax^2+(3+2a)x$ **از ناحیه سوم محورهای مختصات نمی گذرد.**

(کنکور ۱۴۰۱) ۱)هیچ ۲) تمام ۳) ۲ ۴) ۱

مثال ۷. محورتقارن سهمی‌های $y=x^2+ax-2$ و $y=-x^2-2x+b$ مشترک هستند. اگر از دو نقطه با عرض یکسان روی دو سهمی خط $y=1$ رسم شود. مقدار ؟ $ab=$ (کنکور دی ۱۴۰۲)

۱)۴ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) -۸

مثال ۸. به ازای کدام مقادیر k نمودار تابع $f(x) = kx^2 + (k+3)x - 1$ محور xها را در دو نقطه به طول‌های منفی قطع می‌کند ؟ (ریاضی ۹۲)



عرض از مبدأ $c = (-1)$ است و دو ریشه منفی دارد

پس نمودار آن شبیه روبرو است .

۱ دهانه سهمی روبه پایین است پس $k < 0$

۲ دو ریشه دارد پس : $\Delta > 0 \Leftarrow$ $\quad (k+3)^2 - 4(k)(-1) > 0$

هر نامعادله درجه ۲ نیاز به تعیین علامت دارد بنابراین: $\quad k^2 + 6k + 9 + 4k > 0 \Rightarrow k^2 + 10k + 9 > 0$

$$k^2 + 10k + 9 = 0 \longrightarrow \begin{cases} k = -1 \\ k = -9 \end{cases} \text{شکل} \Rightarrow (k < -9) \cup (k > -1)$$

۳ با توجه به منفی بودن ریشه ها طول رأس سهمی باید منفی باشد یعنی : $-\frac{b}{2a} < 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{k+3}{k} > 0 \Rightarrow \text{شکل} \Rightarrow (k < -3) \cup (k > 0)$$

مثال۹. فرض کنید نقاط $(-2,5)$ و $(0,5)$ و $(1,11)$ ، بر سهمی $f(x) = ax^2 + bx + c$ واقع باشند. سهمی از کدام نقطه می‌گذرد؟(۹۹) $\quad (-1,3) \quad (-1,4) \quad (2,9) \quad (2,15)$

مثال ۱۱. اگر یکی از ریشه های معادله $x(ax^2 - x - 5) = 2$ برابر با ۲ باشد. مجموع دو ریشه دیگر را بیابید. (ریاضی ۸۷)

$$x = 2 \Rightarrow 2(4a - 2 - 5) = 2 \Rightarrow 4a = 8 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow x(2x^2 - x - 5) = 2$$

$$2x^3 - x^2 - 5x - 2 = 0 \;\Rightarrow\; 2x^2 + 3x + 1 = 0 \;\Rightarrow\; a + c = b \;\Rightarrow x = -1, -\frac{1}{2}$$

$$(2x^3 - x^2 - 5x - 2) \div (x - 2) = 2x^2 + 3x + 1 \qquad \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{3}{2}$$

۴. تشخیص علامت Δ , c , b , a از روی نمودار سهمی داده شده :

۱. دهانه سهمی روبه بالا $a > 0$ دهانه سهمی روبه پایین $a < 0$

2. نقطه برخورد با محور عرض‌ها وضعیت علامت c را تعیین می‌کند :

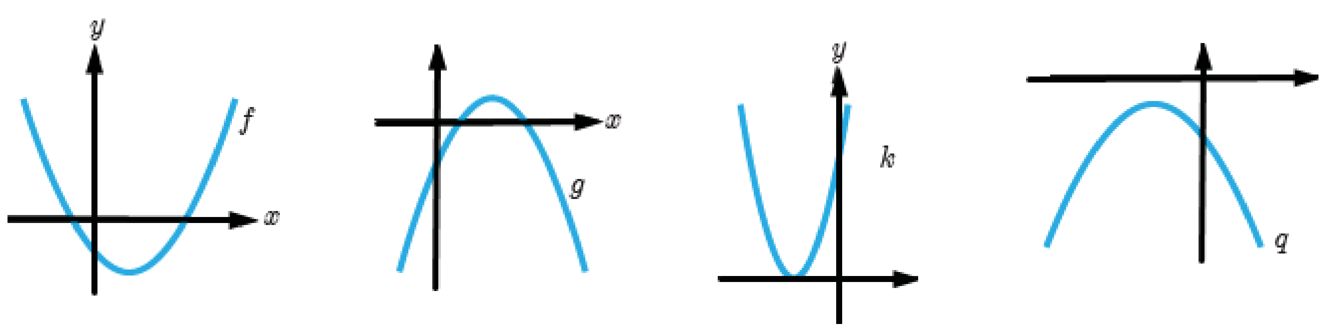
3. برای علامت b، ابتدا موقعیت رأس سهمی را تعیین کرده و با توجه به علامت طول رأس سهمی

$\left(-\frac{b}{2a}\right)$ و علامت a ، علامت b تعیین می‌شود.(روش دیگر از شیب خط مماس بر نقطه تقاطع با y ها)

۴- علامت Δ ، با توجه به تعداد برخورد نمودار سهمی با محور طول تعیین می‌شود یعنی:

بدون برخورد $\leftrightarrow$ $\Delta < 0$	یک نقطه برخورد $\leftrightarrow$ $\Delta = 0$	دو نقطه برخورد $\leftrightarrow$ $\Delta > 0$

مثال ۱. در هر قسمت علامت Δ , c , b , a را تعیین کنید.



مثال ۲. الف) یک نمودار سهمی در دستگاه مختصات رسم کنید که در آن c , b , a هم علامت باشند.

ب) یک نمودار سهمی در دستگاه مختصات رسم کنید که $a < 0$ و $b > 0$ و $c = 0$ باشند.

کار در کلاس

۱. در هر قسمت صفر تابع را در صورت وجود بیابید :

الف) $f(x) = (x-2)^2 + (x-2) - 6$

ب) $f(x) = x^4 - 10x^2 + 24$

ج) $f(x) = x^6 - 10x^3 - 6$

۲. اگر $x = 2$ یکی از صفرهای تابع $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$ باشد. حاصلضرب ریشه‌های دیگر را بیابید.

۳. در تعداد ریشه‌های معادله $ax^4 + bx^2 + c = 0$ در حالات مختلف بحث کنید.

۴. منحنی با معادله $y = (2x+1)(x+8)$ با خطوط $y = mx$ نقطه مشترک ندارد. حدود m را بیابید .

۶. ماکزیمم و مینیمم تابع درجه دو

در سهمی $f(x) = ax^2 + bx + c$ ابتدا طول راس سهمی را از رابطه $x = -\frac{b}{2a}$ می‌یابیم.

سپس عدد به دست آمده را در تابع جایگزین می‌کنیم در واقع $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ را محاسبه می‌کنیم. (می‌توان از رابطه $y = -\frac{\Delta}{4a}$ نیز مقدار y را به دست آورد).

الف) اگر $a > 0$ آنگاه مقدار $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{\Delta}{4a}$ مینیمم تابع است.

ب) اگر $a < 0$ آنگاه مقدار $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{\Delta}{4a}$ ماکزیمم تابع است.

مثال ۱. مقدار ماکزیمم یا مینیمم توابع زیر را بیابید. $f(x) = (x-1)^2 + \frac{1}{2}x + 1$

$f(x) = -x^2 + \sqrt{2}x - 2$

مثال ۲ نمودار تابع $y = x^2 + 2x + 5$ را 3 واحد به طرف x های مثبت، سپس2 واحد به طرف yهای منفی انتقال می‌دهیم. نمودار جدید در کدام بازه بالای نیمساز ربع اول است ؟ (ریاضی ۹۷)

1) $(3, 4)$

2) $(2, 5)$

3) $(3, 5)$

4) $(2, 6)$

مثال۴. کمترین مقدار تابع $y = mx^2 - 12x + 5m - 1$ برابر ۲ است. محور تقارن سهمی را تعیین کنید.

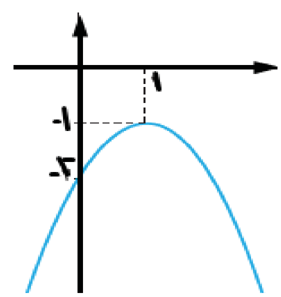
کاردر کلاس

۱. در هر قسمت معادله درجه دومی بنویسید که :

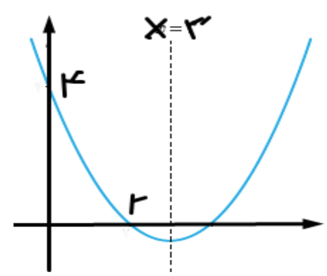
الف) ریشه‌های آن $2 \pm \sqrt{a^2+4}$ باشد.

ب)یکی از ریشه‌های آن معکوس ریشه دیگری باشد.

۲. در هر یک از شکل‌های زیر با نمودار سهمی $f(x) = ax^2 + bx + c$، مقایر c , b , a را تعیین کنید و پس از تعیین صفرهای تابع آن را تعیین علامت کنید .



الف)



ب)

۳. مقدار ماکزیمم یا می‌نیمم توابع زیر را به دست آورید.

الف) $f(x) = -3x^2 + 2x$

ب) $q(x) = \sqrt{2}x^2 + 4x + 3$

ج) $h(x) = x + \frac{1}{x} \qquad x > 0$

۴. اگر بیشترین مقدار تابع $f(x) = (k+1)x^2 - 4x + k$ برابر صفر باشد، مقدار k ؟(ریاضی ۸۳)

۵. منحنی تابع $y = (m+2)x^2 - 2x + 1$ از هر چهار ناحیه مختصات می گذرد. حدود m را بیابید.
(ریاضی۸۷)

۶. برد تابع $f(x) = \frac{x^2}{3} - 2x + 1$ را به دست آورید.

۷. توپی را از ارتفاع ۴۰ متری پرتاب کنیم. اگر معادله ارتفاع توپ از رابطه $h(t) = -t^2 + 13t - 40$ باشد .

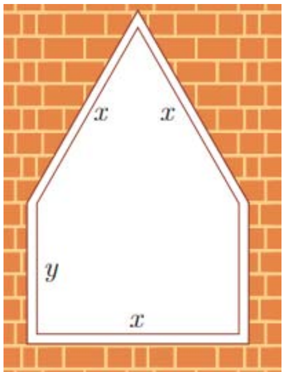
الف)توپ در چه زمانی برای بار دوم به زمین می‌خورد ؟

ب)Max ارتفاعی که توپ بالا می‌رود چقدر است ؟

۸. معادله ارتفاع توپی در یک ضربه پنالتی از رابطه $h(t) = -t^2 + 3t$ به دست می‌آید.

الف) توپ در چه زمان‌هایی روی زمین است ؟

ب) بیشترین ارتفاعی که توپ می‌گیرد چقدر است ؟



مثال : یک پنجره به شکل مستطیلی است که در بالای آن یک مثلث متساوی‌الاضلاع قرار گرفته است. اگر محیط پنجره ۴m باشد، ابعاد مستطیل را طوری بیابید که پنجره حداکثر نوردهی را داشته باشد.

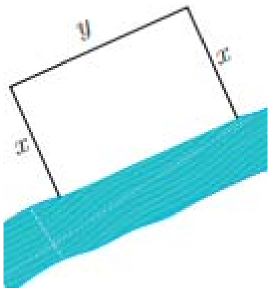
۱۰. رضا و صدرا در یک مسابقه ورزشی، وزنه‌های خود را با زاویه‌های متفاوت α و β که $\alpha < \beta$ است پرتاب می کنند. رضا، زاویه α را انتخاب و مسیر طی شده از رابطه $y = -\frac{x^2}{2} + \frac{3}{2} + 2$ به دست می‌آید. صدرا زاویه β را انتخاب و مسیر طی شده از رابطه $y = 2x^2 + 3x + 2$ به دست می‌آید. در هر دو معادله، y ارتفاع وزنه از سطح زمین و x مسافت افقی طی شده بر حسب متر است.

الف) مسیر حرکت هر کدام از وزنه‌ها را رسم کنید.

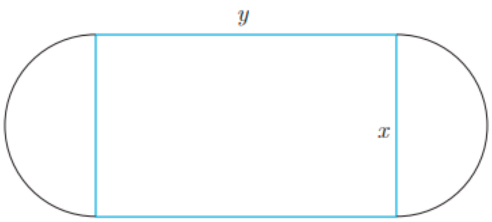
ب) محل برخورد وزنه‌ها با زمین در چه نقاطی است ؟ کدام یک مسافت بیشتری طی می‌کند ؟

ج) کدامیک از وزنه‌ها ارتفاع بیشتری از سطح زمین پیدا کرده است ؟ مقدار آن چقدر است ؟

۱۱. یک عکس 15×10 درون یک قاب با مساحت 300 قرار دارد. اگر فاصله همه لبه‌های عکس تا قاب برابر باشد، ابعاد قاب را بیابید.



۱۲. مطابق شکل با ۱۲۰ متر نرده می‌خواهیم کنار رودخانه‌ای زمینی مستطیل شکل محصور کنیم.ا بعاد مستطیل چقدر باشد تا ماکزیمم مساحت را داشته باشیم.



۱۳- در شکل روبرو محیط برابر ۱۴۰۰ متر است. x و y را طوری بیابید که

الف) مساحت مستطیل حداکثر مقدار ممکن گردد.

ب) مساحت کل حداکثر ممکن گردد.

۳. معادلات گنگ (اصم)

به زبان ساده معادله‌هایی را که مجهول، زیر رادیکال باشند را معادله گنگ یا رادیکالی می‌گوییم. برای حل آنها ابتدا در صورت نیاز، جابجایی مناسب را انجام می‌دهیم و سپس دو طرف را به توان فرجه رادیکال می‌رسانیم و محاسبات لازم را انجام می‌دهیم. با جایگذاری در معادله اصلی جواب‌های به دست آمده را امتحان می‌کنیم. اگر به تساوی درستی رسیدیم جواب به دست آمده قابل قبول است. در حل معادله‌های گنگ برخی موارد خاص نیز می‌باشد که با توان دو رساندن مناسب نیست. در ضمن مثال‌ها با آنها آشنا خواهید شد.

مثال ۱. مجموع جواب معادلات زیر را به دست آورید:

الف) $\sqrt{x+1}+x=5$

$$\sqrt{x+1}=5-x \Rightarrow \sqrt{x+1}=(5-x)^2 \Rightarrow x+1=25-10x+x^2 \Rightarrow$$

$$x^2 - 11x + 24 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x-3)(x-8) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = 3 \longrightarrow \sqrt{3+1} + 3 = 5 \longrightarrow x = 3 \\ x = 8 \longrightarrow \sqrt{8+1} + 3 = 5 \longrightarrow \text{غ ق ق} \end{cases}$$

ب) $\sqrt{x+2} + \sqrt{x+7} = 5 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x+2} = 5 - \sqrt{x+7} \quad \Rightarrow$

$$(\sqrt{x+2})^2 = (5 - \sqrt{x+7})^2 \Rightarrow x + 2 = 25 - 10\sqrt{x+7} + x + 7 \Rightarrow$$

$$-30 = -10\sqrt{x+7} \Rightarrow \sqrt{x+7} = 3 \Rightarrow x + 7 = 9 \Rightarrow x = 2$$

$\boxed{\sqrt{2+2} + \sqrt{3+7} = 5} \Rightarrow$ ق ق

ج) $\sqrt{x^2+4} + 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x^2+4} = -9$

غیر ممکن، زیرا جواب رادیکال با فرجه زوج نمی‌تواند منفی باشد به عبارتی: $(\sqrt{A+B}) \geq 0$

د) $\boxed{\sqrt{x+3} + \sqrt{x-3} = 0} \Rightarrow \sqrt{x+3} = -\sqrt{x-3} \Rightarrow$ م ج $= \emptyset$

غیر ممکن، زیرا مجموع دو مقدارنامنفی وقتی صفر می‌شود که هر دو عبارت‌ها (سمت چپ سوال) همزمان صفر باشند.

ه) $\boxed{\sqrt{x+3} + \sqrt{x^2-9} = 0}$ زیرا $x = -3$ همزمان هر دو رادیکال را صفر می کند.

$x + 3 = 0$ و $x^2 - 9 = 0 \Longrightarrow \cap \Rightarrow$ م ج $= \{-3\}$

$$x = -3 \quad \cap \quad x = \pm 3$$

و) $\boxed{\sqrt{x^2-4} + 3\sqrt{1-x^2} = 16}$ گاهی اوقات با تعیین دامنه به جواب می رسیم.

$x^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow |x| \geq 2 \Rightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq -2 \end{cases} \quad (1) \qquad$ م ج $= (1) \cap (2) = \emptyset$

$$1 - x^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad |x| \leq 1 \quad \Rightarrow \quad -1 \leq x \leq 1 \qquad (2)$$

ز) $\sqrt{x + 2\sqrt{2x-4}} + \sqrt{x - 2\sqrt{2x-4}} = 4$

$$\left(\sqrt{x + 2\sqrt{2x-4}} + \sqrt{x - 2\sqrt{2x-4}}\right)^2 = 16 \Rightarrow \cdots$$

ح) $\sqrt{x^2 - x + 3} = x^2 - x + 1$

مثال۲. الف) عددی بیابید که جمع دو برابر آن با جذرش برابر یک گردد.

ب) عددی بیابید که تفاضل جذرش از دو برابر ثلث آن برابر ۳ گردد.

مثال۳. مختصات نقطه‌ای روی خط $y = x + 1$ بیابید که فاصله آن از دو نقطه $A(1,-1)$ و $B(-3,3)$ به یک فاصله باشد.

مثال۴. نقطه‌ای روی محور طول‌ها بیابید که فاصله آن از نقطه $P(1,2)$ برابر ۴ باشد. مسیله چند جواب دارد؟

مثال۵. مجموع جواب‌های معادله $\sqrt{x^2 - 2x} - 1 = |x|$ کدام است؟(قلم چی ۹۵)

۱) $-\frac{1}{4}$ ۲) ۰ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) بدون جواب

مثال۶. اگر $f\left(x+\sqrt{2x-1}\right)=x^2-6$ باشد حاصل $f(1)$ کدام است؟

۱) $-4\sqrt{2}$ ۲) $-2\sqrt{2}$ ۳) $2\sqrt{2}$ ۴) $4\sqrt{2}$ (قلم چی ۹۵)

مثال۷. حاصلضرب ریشه‌های حقیقی معادله $2+\sqrt{4x^2-6x-1}=2x^2-3x$ کدام است؟

۱) $-\frac{5}{4}$ ۲) $-\frac{5}{2}$ ۳) $\frac{5}{2}$ ۴) $-\frac{5}{2}$ (گزینه ۲ ۱۴۰۰)

مثال۸. اگر a یک ریشه معادله $\sqrt{3+x}=3\sqrt{x}+1$ باشد، مقدار $\frac{a+1}{a}$ کدام است؟

۱) 12 ۲) 3 ۳) 15 ۴) 17 (گزینه ۲ ۱۴۰۰)

۴. معادلات گویا

به زبان ساده معادله‌ای که مجهول آن در مخرج نیز باشد را معادله گویا می‌گوییم. برای حل آن به کمک ضرب کل معادله در کوچکترین مضرب مشترک مخرج‌ها آن را از حالت کسری خارج می‌کنیم و بعد از محاسبات لازم مجهول را می‌یابیم. جوابی قابل قبول است که باعث صفر شدن مخرج‌ها نگردد و یا در شرایط طبیعی صورت مسیله کاربردی داده شده صدق کند.

عموما بیشتر با چهار دسته سوال مواجهیم:۱. حل محاسباتی معادلات. ۲. مسایل حلّال(حل شدن مایعات) ۳. مسایل اتمام کاری توسط دو یا چند نفر. ۴. رفت و برگشت وسیله‌ای با سرعت متفاوت. در زیر با انواع و شیوه حل هر یک آشنا می‌شوید.

مثال ۱. مجموعه جواب معادله‌های زیر را بدست آورید.

$$A)\quad \frac{x^2}{x^2-2x}-\frac{4-x}{x-2}=\frac{x-1}{x}$$

$$B)\quad \frac{x}{x-1}-\frac{3}{x^2-1}=\frac{x-2}{x+1}$$

مثال ۲. اگر $x=2$ یک جواب معادله $\frac{x}{a-x}-\frac{a-x}{x}=\frac{a}{x}$ باشد مقدار a را بیابید$(a\neq 2)$

مثال ۳. به ازای چه مقداری از m حاصلضرب ریشه‌های معادله زیر برابر ۱۵ است.

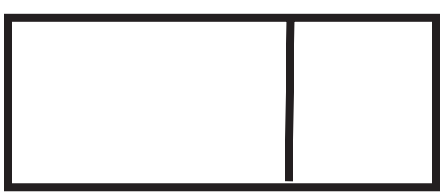
$$\frac{m}{x}-\frac{x}{x-3}=2$$

مثال ۴. به ازای چه مقادیری از m ، معادله $\frac{m}{x^2-3x}-\frac{m}{x^2+3x}=\frac{x}{x^2-9}$ هیچ ریشه قابل قبولی ندارد؟

مثال ۵. سیصد کیلوگرم آب نمک ۴ درصدی را چگونه می توان با افزایش نمک یا کاهش آب به آب نمک ۷ درصدی تبدیل کرد.(به دو روش)

مثال ۶. خط مترو تجریش تا مرقد ۶۰ کیلومتر است. سرعت برگشت به تجریش، ۱۰ کیلومتر بر ساعت کمتر از مسیر تجریش به مرقد است. از اینرو نیم‌ساعت طولانی‌تر می‌شود. سرعت رفت به مرقد چقدر است؟

مثال۷. علی مسیر۳۵کیلومتری A تا B را با دوچرخه رکاب زده و به مبداء بازگشته است. سرعت در برگشت ۶ کیلومتربرساعت کمتر بوده است. اگر مجموع زمان رفت و برگشت ۴ ساعت باشد، سرعت در رفت چقدر است؟



نکته : (عدد طلایی، نسبت طلایی)

عدد طلایی جواب مثبت معادله $x^2 - x - 1 = 0$ است و برابر $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ که تقریبا $\frac{1}{618}$ است و از طرفین وسطین تناسب زیر بدست می‌آید.

$$\boxed{\frac{x}{1} = \frac{x+1}{x}}$$

اگر در یک مستطیل با طول L و عرض W داشته باشیم: $\boxed{\frac{L}{W} = \frac{W+L}{L}}$ آنگاه در این مستطیل نسبت طلایی برقرار است.

در حل سوالاتی که پاره‌خطی به طول l به دو قسمت a , b تقسیم شده و بین آنها نسبت طلایی برقرار است با تشکیل نسبت زیر و حل آن، مقادیر a , b را می‌یابیم.

$$\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}\approx\frac{1}{618}$$

مثال۸. اگر محیط یک زمین مستطل شکل برابر ۱۴۴ متر و اندازه طول و عرض آن متناسب با نسبت طلایی باشد طول و عرض زمین چقدر است.

مثال ۹. صد کیلوگرم آب و الکل با غلظت ۲۰ درصد موجود است. اگر نیمی از اب آن را تبخیر کنیم چند کیلوگرم باید الکل اضافه کنیم تا غلظت آن ۴۰ درصد گردد.

مثال ۱۰. کار انجام شده توسط آراد در ۸ ساعت انجام می‌شود. اگر رضا به او کمک کند می‌توانند آن کار را در ۱ ساعت و ۳۶ دقیقه تمام کنند. رضا به تنهایی در چند ساعت کار را تمام می‌کند.

تمرین

۱. حاصلضرب ریشه‌های حقیقی معادله $\sqrt{x^2+4x+5}=x^2+4x+3$ را بدست آورید.(کنکور ۹۴)

۲. یازده کیلوگرم رنگ با غلظت ۴۰ درصد با ۴ کیلوگرم رنگ از همان نوع با غلظت ۷۰ درصد مخلوط شده‌اند. با تبخیر چند کیلوگرم از آن، غلظت محلول به ۵۰ درصد می‌رسد.(خارج ۹۲)

۳. مجموعه جواب معادله روبرو را بدست آورید.

$$2=\sqrt{12+x}-\sqrt{2x+7}$$

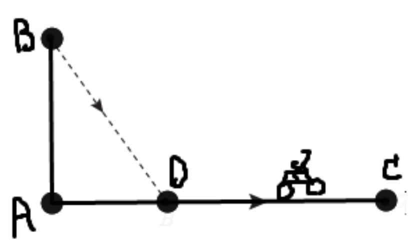
۴. امید نقاشی ساختمانی را به تنهایی ۵ روز زودتر از امیر انجام می‌دهد. اگر هر دو نفر با همدیگر کار را در ۱۰ روز تمام کنند. هر یک از آنها به تنهایی در چند روز نقاشی ساختمان را انجام می‌دهند.

۵. مجموعه جواب را بیابید.

$$\frac{x+1}{x-1}-\frac{x-1}{x+1}=3\left(1-\frac{x-1}{x+1}\right)$$

۶. در شکل زیر اگر $AB=4\ (km)$ و $AC=10\ (km)$ و قایق فقط ۱۷ لیتر بنزین تا نقطه D داشته باشد.

برای طی مسیر از B به D و سپس از D به C با موتور سیکلت می‌خواهیم از B به C برسیم. اگر قایق $4\ {}^{lit}/_{km}$ و موتور سیکلت $1\ {}^{lit}/_{km}$ مصرف سوخت داشته باشند با موجود بودن فقط ۱۷ لیتر سوخت در قایق موقعیت نقطه D را تعیین کنید.



۷. مجموعه جواب را بیابید.

$$A)\quad 2\sqrt{3-x}+\sqrt{x-1}=x-4$$

$$B)\quad \frac{x^2-4x+3}{x^2-1}=0$$

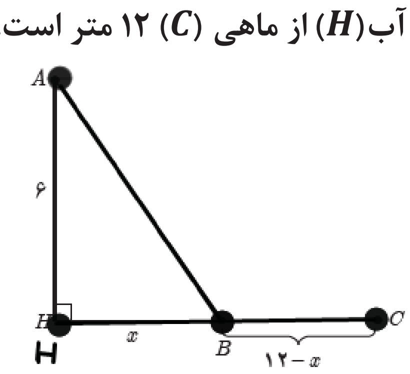
$$C)\quad \frac{2-\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}=4-x$$

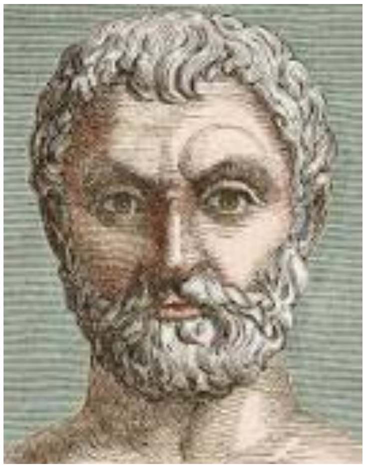
$$D)\quad \sqrt{\frac{x+1}{3-x^2}}+\sqrt{\frac{3-x^2}{x+1}}=2$$

۸. مجموعه جواب نامعادله زیر را بیابید.

$$\frac{3}{2x^2+x+3}\leq\frac{1}{x^2-x+2}$$

۹. یک مرغ دریایی (A) به ارتفاع ۶ متر از سطح آن است. فاصله تصویر او روی آب(H) از ماهی (C) ۱۲ متر است. مرغ برای شکار ابتدا از A به B و سپس از B به C می رود. اگر مرغ در هوا برای هر متر ۱۴ کیلو کالری و برای طی مسیر از سطح آب ۱۰ کیلو کالری انرژی مصرف کند. نقطه B درچه فاصله‌ای از C باشد تا مرغ ۱۸۰ کیلوکالری انرژی مصرف کند؟ اگر مرغ دریایی مستقیما از A به C برود چقدر کالری مصرف می‌کند؟





فصل دوم هندسه

این فصل شامل سه قسمت:

۱. هندسه ترسیمی ۲. استدلال و قضیه طالس ۳.تشابه مثلث‌ها است.

۱. هندسه ترسیمی:

الف) دایره را تعریف کنید:

ب) وضعیت یک نقطه را نسبت به دایره تعیین کنید.

پ) وضعیت یک خط را نسبت به دایره تعیین کنید:

ت) وضعیت دو خط را نسب به یکدیگر بنویسید.

ث) عمود منصف یک پاره‌خط را تعریف کنید:

ج) شیوه رسم عمود منصف یک پاره‌خط را به کمک خط‌کش و پرگار بنویسید.

چ) به کمک خط‌کش و پرگار مثلثی رسم کنید که طول سه ضلع آن معلوم است.

ح) شیوه رسم خط عمود بر یک خط از نقطه‌ای روی آن را بنویسید.

خ) شیوه رسم خط عمود بر یک خط از نقطه‌ای غیرواقع بر آن را بنویسید.

د) شیوه رسم خط موازی با خط داده شده از نقطه‌ای غیر واقع بر آن را بنویسید.

ذ) نیمساز یک زاویه را تعریف کنید.

ر) شیوه رسم یک نیمساز را به کمک خط‌کش و پرگار بنویسید.

ز) تمارین ۱ الی ۴ صفحه ۲۹ و ۳۰ کتاب درسی را حل کنید و نتایج کلی هر یک را بنویسید.

۲. استدلال و قضیه طالس

۱. نسبت و تناسب را تعریف کنید و ویژگی‌های آنها را بنویسید.

۲. استدلال استقرایی و استدلال استنتاجی را تعریف کنید و تفاوت آنها را بنویسید.

۳. شیوه استدلال برهان خلف(برهان غیر مستقیم) را بنویسید.

مثال: به کمک برهان خلف ثابت کنید:

الف) اگر مربع عددی طبیعی فرد باشد آنگاه خود آن عدد نیز فرد است.

ب) اگر قطعات ایجاد شده توسط نیمساز داخلی مثلثی نابرابر باشند آنگاه اضلاع روی آن زوایه نیز نابرابرند.

ج) نمی‌توان از یک نقطه غیر واقع بر یک خط، دو عمود بر آن خط رسم کرد.

۴.توضیحی برای قضیه یک شرطی، قضیه دوشرطی، عکس قضیه بنویسید و برای هرکدام مثالی بیاورید.

۵. مثال نقض را تعریف کنید. مهمترین مشخصه حکم، برای بودن مثال نقض احتمالی چیست؟

برای آن مثال بیاورید.

الف) هر یک از حکم‌ها را با مثال نقض رد کنید:

۱. همع اعداد اول فردند.

۲. به ازای هر عدد طبیعی، مقدار عبارت $n^2 + n + 41$ عدد اول است.

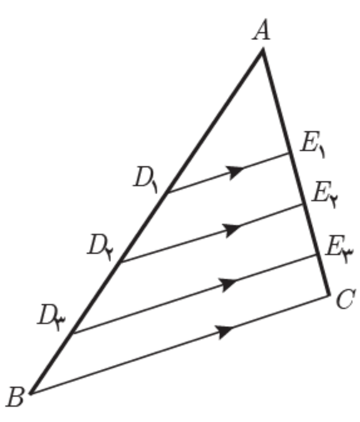
۳. هیچ عدد اول بزرگتر از ۱۲۷ وجود ندارد.

۴. مساحت هر مربع از مساحت هر مثلث بیشتر است.

۵. در هر مثلث اندازه هر ضلع از اندازه هر ارتفاع بزرگتر است.

۶. در هر مثلث میانه و عمودمنصف متناظر به هر ضلع برهم منطبق‌اند.

۶. در شکل مقابل تناسب بین قطعات را بنویسید:



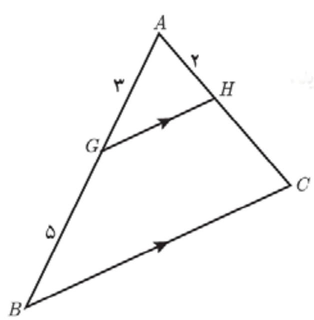
$D_1E_1 || BC$ و $D_2E_2 || BC$ و $D_3E_3 || BC$

$D_iE_i || BC$ برای $1 \le i \le 3$

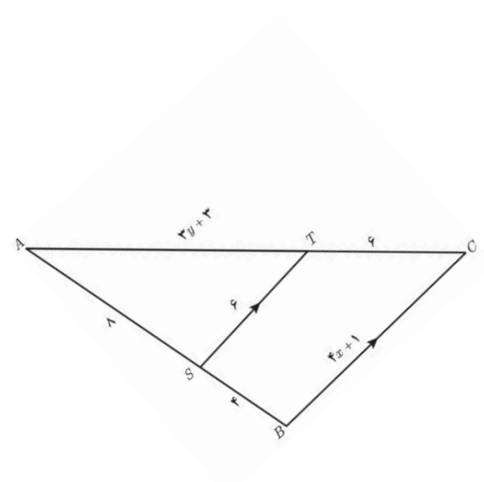
الف) قضیه طالس را بنویسید و آن را اثبات کنید.

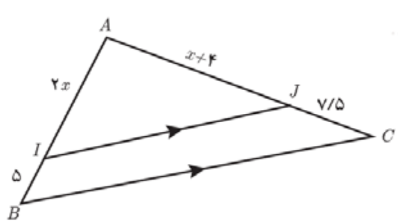
ب) تعمیم‌های قضیه طالس را بنویسید.

مثال: در هر قسمت مقدار مجهول خواسته شده را بیابید.



HC و $AC = ?$





x و AI و $AJ = ?$

x و $y = ?$

پ) عکس قضیه طالس را بنویسید و آن را اثبات کنید.

ت) قضیه طالس را در ذوزنقه بنویسید.

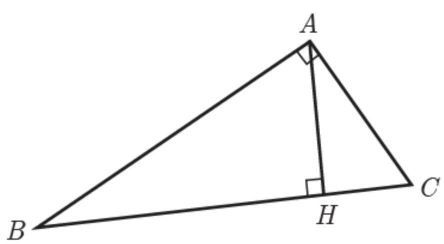
۳. تشابه مثلث‌ها

۱. دو مثلث را چه موقع متشابه گویند(به توصیف فارسی و زبان ریاضی)؟

۲. قضیه اساسی تشابه مثلث‌ها را بنویسید.

۳. سه قضیه در مورد تشابه مثلث‌ها را بنویسید و برای هر کدام مثالی بیاورید.

۴. برخی روابط طولی در مثلث قایم‌الزاویه:



الف) در شکل روبرو سه مثلث

با یکدیگر متشابهند. یعنی:

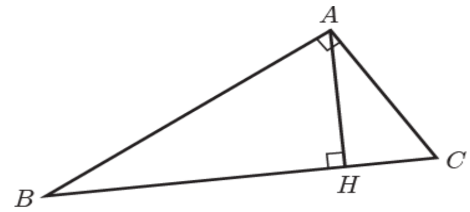
$$\Delta ABC \sim \Delta ABH \sim \Delta ACH$$

ب) با توجه به تشابه سه مثلث بالا روابط طولی که بین اضلاع مثلث (به کمک تناسب)می‌توان نوشت عبارت‌اند از:

$$\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{AHC} \Rightarrow \frac{AH}{\cdots} = \frac{AC}{\cdots} = \frac{HC}{\cdots} \Rightarrow \boxed{AC^{۲} = \cdots \times \cdots}$$

$$\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{AHB} \Rightarrow \frac{AH}{\cdots} = \frac{AB}{\cdots} = \frac{HB}{\cdots} \Rightarrow \boxed{AB^{۲} = \cdots \times \cdots}$$

$$\overset{\Delta}{AHB} \sim \overset{\Delta}{AHC} \Rightarrow \frac{AH}{\cdots} = \frac{AC}{\cdots} = \frac{HC}{\cdots} \Rightarrow \boxed{AH^{۲} = \cdots \times \cdots}$$



با جمع طرفین روابط ۴ و ۵ رابطهٔ فیثاغورس را برای مثلث ABC نتیجه بگیرید.

$$\boxed{BC^{۲} = \cdots\cdots + \cdots\cdots}$$

مساحت مثلث ABC را به دو طریق محاسبه و با توجه به آن تساوی زیر را کامل کنید.

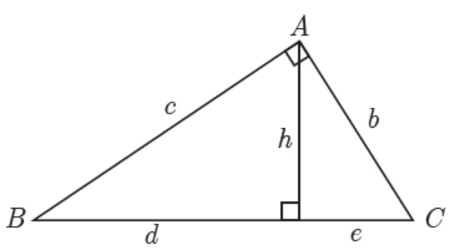
$$\boxed{AB \times \ldots\ldots = AH \times \ldots\ldots}$$

مثال: در هر قسمت مقدار مجهول را بیابید.

۱) $h = 12$, $d = 8$, $e = ?$

۲) $d = 6$, $e = 3$, $b = ?$

۳) $b = 12$, $c = 16$, $h = ?$



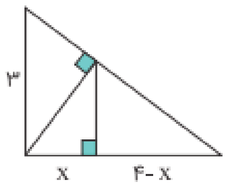
مثال: اگر دو مثلث متشابه با نسبت تشابه k باشند آنگاه :

الف) نشان دهید که بین ارتفاع‌ها، نیمسازها، میانه‌ها و محیط دو مثلث نیز نسبت تشابه k است.

ب) بین مساحت دو مثلث نسبت تشابه k^2 است.

تست‌های کنکور و ...

۱ در شکل زیر، ارتفاع هر دو مثلث قائم‌الزاویه رسم شده است. اندازهٔ x کدام است؟

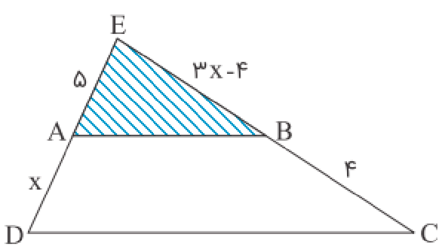


۱) ۱/۹۶
۲) ۱/۵۶
۳) ۱/۶۴
۴) ۱/۴۴

۲ در ذوزنقه‌ای اندازهٔ قاعده‌ها ۹ و ۴ واحد و طول ساق‌ها ۶ و ۵ واحد است. محیط مثلثی که از امتداد ساق‌ها در بیرون ذوزنقه تشکیل شود، کدام است؟

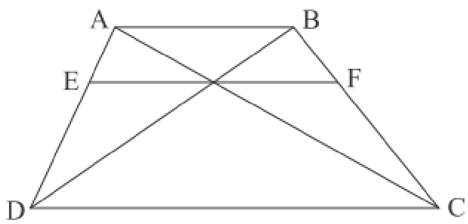
۱) ۱۱/۵
۲) ۱۱/۶
۳) ۱۲/۲
۴) ۱۲/۸

۳ در شکل زیر، مساحت ذوزنقهٔ ABCD، چندبرابر مساحت مثلث EAB است؟



۱) $\frac{۹}{۴}$
۲) $\frac{۱۶}{۹}$
۳) $\frac{۲۵}{۱۶}$
۴) $\frac{۳۶}{۲۵}$

۴ در شکل زیر، $DC \parallel EF \parallel AB$ و اندازهٔ پاره‌خط‌های AB و DC، به ترتیب ۵ و ۹ واحد است. اندازهٔ پاره‌خط EF، کدام است؟



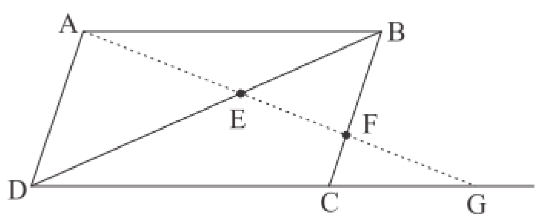
۱) $\frac{۴۵}{۷}$

۲) $\frac{۴۵}{۶}$

۳) $۳\sqrt{۵}$

۴) ۷

۵ در شکل زیر، چهار ضلعی $ABCD$ متوازی‌الاضلاع است. مقدار $EF \times EG$ کدام است؟



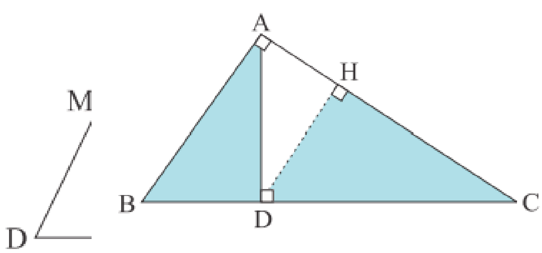
۱) $EA^{۲}$

۲) $ED^{۲}$

۳) $EB \times ED$

۴) $FB \times FC$

۸ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، طول اضلاع قائم $AB = \sqrt{۳}$ و $AC = ۲$ است. نسبت مساحت‌های دو مثلث قائم‌الزاویهٔ HCD و ABD، کدام است؟



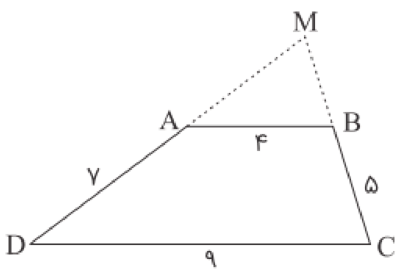
۱) $\frac{۳}{۷}$

۲) $\frac{۴}{۷}$

۳) $\frac{۱۶}{۲۱}$

۴) $\frac{۸}{۹}$

۹ اندازهٔ اضلاع ذوزنقهٔ $ABCD$ مطابق شکل زیر داده شده است. محیط مثلث MAB، کدام است؟



۱) ۱۳/۲

۲) ۱۳/۶

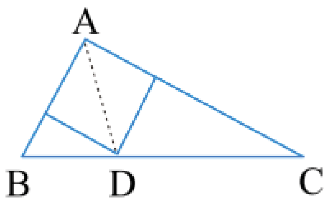
۳) ۱۴/۴

۴) ۱۴/۸

۴

۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۱۰ در مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع قائم ۳ و ۷ واحد، طول نیمساز داخلی زاویهٔ قائمه کدام است؟



۱) $۱/۴\sqrt{۲}$

۲) $۲/۱$

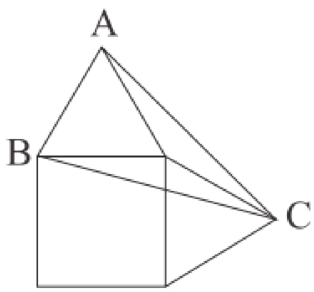
۳) $۲/۸$

۴) $۲/۱\sqrt{۲}$

۱۱ در یک ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه، اگر از نقطهٔ O محل تلاقی قطرها، خطی موازی قاعده‌ها رسم شود، ساق قائم را در A و ساق مایل را در B قطع می‌کند. نسبت $\frac{OA}{OB}$ چگونه است؟

۱) کوچک‌تر از ۱
۲) مساوی ۱
۳) بزرگ‌تر از ۱
۴) متغیر نسبت به اضلاع

۱۲ در خارج یک مربع به ضلع ۲ واحد بر روی هر دو ضلع مجاور آن، مثلث متساوی‌الاضلاع ساخته‌شده است، مساحت مثلث ABC کدام است؟



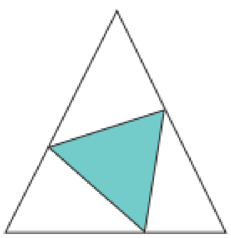
۱) ۴

۲) $۲\sqrt{۳}$

۳) $۲+\sqrt{۳}$

۴) $۱+\sqrt{۳}$

۱۳ هر ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع به نسبت‌های ۱ و ۲ تقسیم‌شده است. مساحت مثلث رنگی، چندبرابر مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع است؟



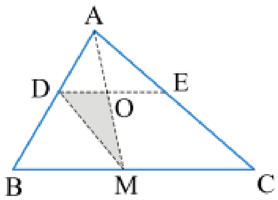
۱) $\frac{۱}{۴}$

۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) $\frac{۴}{۹}$

۴) $\frac{۱}{۳}$

۱۴ در شکل زیر، نقطهٔ M وسط BC و $\frac{DA}{DB}=\frac{۲}{۳}$ و $DE \parallel BC$ است، مساحت مثلث ODM چند درصد مساحت مثلث ABC است؟



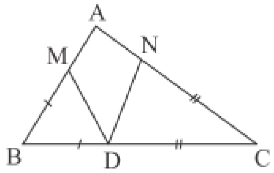
۱) ۱۲

۲) ۱۵

۳) ۱۶

۴) ۱۸

۱۵ در شکل زیر $\hat{A} = ۵۸^\circ$، $BM = BD$ و $CN = CD$، زاویه $M\hat{D}N$ چند درجه است؟



۱) ۵۸

۲) ۵۹

۳) ۶۱

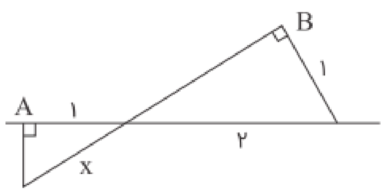
۴) ۶۲

۱۶ در یک ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین، قطر عمود بر ساق است. اگر اندازهٔ قاعدهٔ بزرگ‌تر و قطر آن به ترتیب ۱۰ و ۸ واحد باشند، اندازهٔ قاعدهٔ کوچک‌تر چند واحد است؟

۱) ۲/۸   ۲) ۳/۲

۳) ۳/۶   ۴) ۴/۲

۱۷ در شکل زیر دو زاویهٔ $\hat{A}$ و $\hat{B}$ قائمه‌اند، مقدار x چقدر است؟



۱) $\frac{۱}{۲}\sqrt{۳}$

۲) $\frac{۲}{۳}\sqrt{۳}$

۳) $\frac{۴}{۳}$

۴) $\frac{۳}{۲}$

۱۸ در یک ذوزنقه، خطی که وسط ساق‌ها را به هم وصل کند، مساحت آن را به نسبت ۳ به ۵ تقسیم می‌کند. نسبت قاعده‌های ذوزنقه کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$

۳) $\frac{۲}{۵}$ ۴) $\frac{۳}{۵}$

۱۹ درون مثلثی به اضلاع ۹ و ۷ و ۵ واحد، مثلث دیگر طوری رسم می‌کنیم که اضلاع آن موازی اضلاع مثلث اصلی باشد، اگر بزرگ‌ترین ضلع این مثلث ۶ واحد باشد، مساحت محدود به این دو مثلث، چند برابر مساحت مثلث کوچک‌تر است؟

۱) ۰/۷۵   ۲) ۱

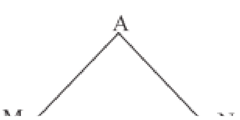
۳) ۱/۲۵   ۴) ۱/۵

۲۰ طول ضلع یک مربع برابر محیط مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین به ضلع قائم ۲ واحد است. با حذف گوشه‌های این مربع، بزرگ‌ترین هشت ضلعی منتظم ممکن داخل آن ساخته شده است. مساحت این هشت ضلعی، کدام است؟

۱) ۳۲   ۲) $۲۴\sqrt{۲}$

۳) $۲۴ + ۸\sqrt{۲}$ ۴) $۱۶ + ۱۶\sqrt{۲}$

۲۱ در شکل زیر $\frac{۳}{۲} = \frac{MA}{MB}$ است. مساحت متوازی‌الاضلاع $MNPB$ چند درصد مساحت مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ است؟



۲۲ مثلثی به اضلاع ۵ و ۴ و a با مثلثی به طول اضلاع ۹ و ۷ و b متشابه است. بیش‌ترین مقدار ممکن برای عدد a کدام است؟

۱) $\frac{۳۶}{۷}$ ۲) $\frac{۴۵}{۷}$

۳) $\frac{۳۶}{۵}$ ۴) $\frac{۳۵}{۴}$

۲۳ مثلثی به اضلاع b و a و ۳ با مثلثی به طول اضلاع ۵ و ۴ و ۳ متشابه است و دو مثلث قابل انطباق نیستند. بیشترین محیط از مثلث اول کدام است؟

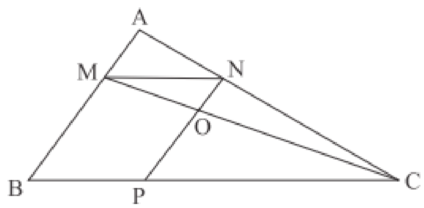
۱) ۷/۲   ۲) ۹

۳) ۱۰   ۴) ۱۳/۵

۲۴ در یک مثلث قائم‌الزاویه، ارتفاع وارد بر وتر، مثلث مفروض را به دو جزء تقسیم می‌کند. اگر مساحت مثلث کوچک‌تر $\frac{۱}{۵}$ مساحت مثلث اصلی باشد، نسبت فواصل پای ارتفاع از دو ضلع قائم مثلث مفروض کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) $\frac{۲}{۳}$
۳) $\frac{۳}{۴}$
۴) $\frac{۴}{۵}$

۲۵ در شکل زیر $\frac{۳}{۷} = \frac{MA}{MB}$ و چهار ضلعی $MNPB$ متوازی‌الاضلاع است. مساحت مثلث OMN چند درصد مساحت مثلث AMN است؟

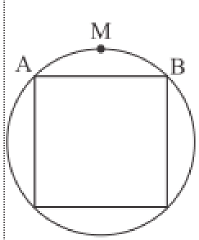


۱) ۶۳
۲) ۶۰
۳) ۷۰
۴) ۸۴

۲۶ در مثلث متساوی‌الساقین $\overset{\triangle}{ABC}$، $AB = AC = ۴$ و $BC = ۲\sqrt{۷}$ است. ضلع AC را به‌اندازهٔ خود تا نقطهٔ D امتداد می‌دهیم $(AD = AC)$. اندازهٔ BD کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۱۰}$
۲) $۴\sqrt{۲}$
۳) ۶
۴) ۷

۲۷ در شکل زیر، ضلع مربع برابر ۲ واحد است. فاصلهٔ وسط کمان AB از نزدیک‌ترین رأس مربع چقدر است؟



۱) $\sqrt{۲ - \sqrt{۲}}$
۲) $\sqrt{۴ - ۲\sqrt{۲}}$
۳) $\sqrt{۲}$
۴) $\sqrt{۱ + \sqrt{۲}}$

۲۸ در یک مثلث قائم‌الزاویه، طول اضلاع قائم به نسبت ۱ و ۳ و مساحت آن ۶۰ واحد مربع است. ارتفاع وارد بر وتر چقدر است؟

۱) ۵
۲) $۴\sqrt{۲}$
۳) ۶
۴) ۸

۲۹ در مثلث ABC $\left(\hat{A}=۹۰^\circ\right)$، ارتفاع AH مثلث مفروض را به دو جزء تقسیم می‌کند. مساحت مثلث اصلی ۶/۷۶ برابر مساحت مثلث کوچک‌تر است. نسبت فواصل H از دو ضلع قائم کدام است؟

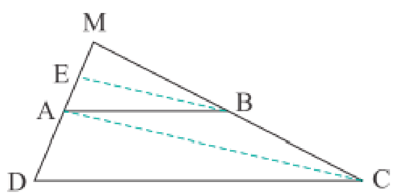
۱) $\frac{۲}{۸}$

۲) $\frac{۵}{۱۲}$

۳) $\frac{۷}{۱۲}$

۴) $\frac{۳}{۸}$

۳۰ در ذوزنقهٔ $ABCD$، پاره‌خط BE موازی قطر AC است. اگر $AD=۷$ و $AE=۳$ باشد، فاصلهٔ MD کدام است؟



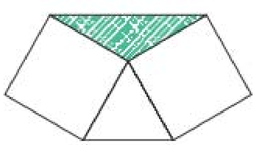
۱) ۱۲

۲) ۱۲/۲۵

۳) ۱۲/۵

۴) ۱۲/۷۵

۳۱ در یک مثلث متساوی‌الاضلاع، بر روی دو ضلع آن دو مربع ساخته شده است. مساحت مثلث سایه‌زده، چند برابر مساحت مثلث اصلی می‌باشد؟



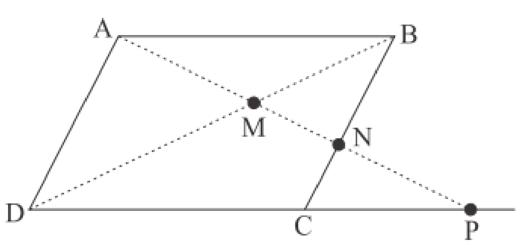
۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۲) $\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$

۳) ۱

۴) $\sqrt{۳}$

۳۲ در شکل زیر، $ABCD$ متوازی‌الاضلاع می‌باشد. حاصل $MN\times MP$ برابر کدام است؟



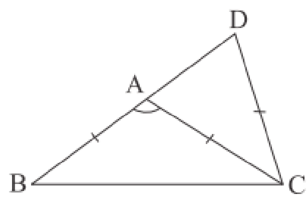
۱) $AB^۲$

۲) $AD^۲$

۳) $MD^۳$

۴) $MA^۲$

۳۳ در مثلث متساوی‌الساقین $ABC(AB = AC)$، ساق BA را از نقطهٔ B به‌اندازهٔ قاعدهٔ BC تا نقطهٔ D، امتداد می‌دهیم. اگر $CD = CA$ باشد، زاویهٔ A چند درجه است؟



۱) ۱۰۲

۲) ۱۰۵

۳) ۱۰۸

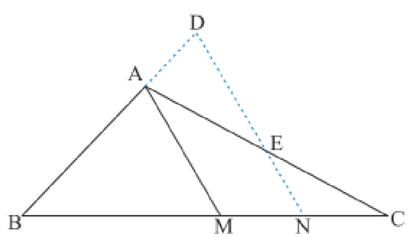
۴) ۱۱۲

۳۴ مساحت یک مثلث قائم‌الزاویه برابر با مساحت مربعی است که بر روی ضلع کوچک‌تر آن ساخته می‌شود. اندازهٔ میانهٔ وارد بر ضلع متوسط چند برابر ضلع متوسط این مثلث است؟

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۳) $\sqrt{۲}$ ۴) $\sqrt{۳}$

۳۵ در مثلث ABC که $AB = \frac{۲}{۳}AC$، پاره‌خط ND موازی میانهٔ AM است. نسبت $\frac{AD}{AE}$ کدام است؟



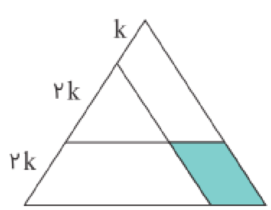
۱) $\frac{۴}{۹}$

۲) $\frac{۵}{۹}$

۳) $\frac{۲}{۳}$

۴) $\frac{۴}{۵}$

۳۶ در شکل زیر، یک ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع به نسبت‌های ۱، ۲ و ۲ تقسیم شده است. مساحت متوازی‌الاضلاع سایه‌زده، چند درصد مساحت مثلث اصلی است؟



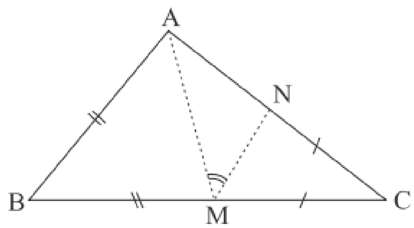
۱) ۱۶

۲) ۱۸

۳) ۲۰

۴) ۲۴

۳۷ در شکل زیر، دو مثلث کناری متساوی‌الساقین‌اند و $\hat{M} = ۴۳^\circ$، اندازهٔ زاویهٔ $B\hat{A}C$ چند درجه است؟



۱) ۹۳

۲) ۹۴

۳) ۹۶

۴) ۹۷

۳۸ در مثلث ABC داریم $AB = AC$ و $\hat{A} = ۸۰^\circ$، عمودمنصف‌های دو ساق مثلث، قاعدهٔ BC را در M و N قطع می‌کند. کوچک‌ترین زاویهٔ مثلث AMN چند درجه است؟

۱) ۱۵ ۲) ۲۰

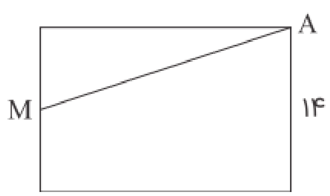
۳) ۲۵ ۴) ۳۰

۳۹ در یک مکعب به طول یال $۴\sqrt{۲}$، فاصلهٔ وسط هریک از دو وجه غیرموازی از یکدیگر چقدر است؟

۱) ۳ ۲) $۲\sqrt{۳}$

۳) ۴ ۴) $۳\sqrt{۲}$

۴۰ در شکل زیر، پاره‌خط AM مساحت مستطیل را به دو جزء با نسبت مساحت‌های $\frac{۵}{۹}$ تقسیم کرده است. اگر قطر مستطیل ۲۵ واحد باشد، پاره‌خط AM چند واحد است؟



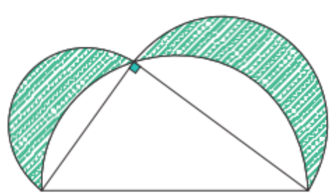
۱) ۲۱

۲) ۲۳

۳) $۹\sqrt{۷}$

۴) $۱۰\sqrt{۶}$

۴۱ در مثلث قائم‌الزاویهٔ زیر، طول اضلاع قائم ۳ و ۴ واحد است. نیم‌دایره‌ها به قطر اضلاع رسم شده‌اند. مجموع مساحت دو ناحیهٔ سایه‌زده، کدام است؟



۱) ۲π

۲) ۶

۳) ۷

۴) ۳π

۴۲ در مثلث متساوی‌الساقین $\overset{\triangle}{ABC}$، قاعدهٔ BC را از دو طرف به‌اندازهٔ ساق‌ها تا نقاط D و E امتداد می‌دهیم. در مثلث $\overset{\triangle}{ADE}$ کوچک‌ترین زاویهٔ خارجی، چند برابر کوچک‌ترین زاویهٔ داخلی آن است؟

۱) ۱
۲) $\frac{۳}{۲}$
۳) ۲
۴) ۳

۴۳ در چهار ضلعی محدب ABCD، رابطهٔ $\frac{\hat{C}+\hat{D}}{۱۱} = \frac{\hat{B}}{۳} = \frac{\hat{A}}{۴}$، بین زاویه‌ها برقرار است. زاویهٔ حادهٔ بین نیمسازهای داخلی دو زاویهٔ مجاور $\hat{A}$ و $\hat{B}$، چند درجه است؟

۱) ۵۰
۲) ۶۰
۳) ۷۰
۴) ۷۵

۴۴ در یک مستطیل با ابعاد ۱ و ۲ واحد، از انتهای یک قطر، خطی بر آن قطر عمود می‌کنیم تا امتداد ضلع کوچک‌تر مستطیل را در M قطع کند. فاصلهٔ نقطهٔ M از سر دیگر این قطر چند واحد است؟

۱) ۴
۲) ۴/۵
۳) ۵
۴) ۶

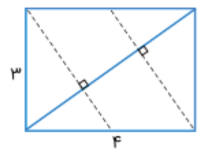
۴۵ در مثلث ABC، اضلاع $AB = ۴$ و $AC = ۶$ و $BC = ۷$ است. از رأس C خطی موازی میانهٔ AM رسم شده و امتداد BA را در نقطهٔ D قطع کرده است. اندازهٔ BD، کدام است؟

۱) ۷/۵
۲) ۸
۳) ۸/۵
۴) ۹

۴۶ در مربعی به ضلع ۲ واحد، دایره‌ای به مرکز یک رأس آن و شعاع ۲/۵ واحد، دو ضلع مربع را قطع می‌کند. فاصلهٔ نزدیک‌ترین رأس مربع تا نقطهٔ تقاطع، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$
۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۴۷ در مستطیلی به طول اضلاع ۳ و ۴ واحد از هر دو رأس متقابل، عمودی بر قطر دیگر این مستطیل رسم شده است. مساحت متوازی‌الاضلاع حاصل کدام است؟



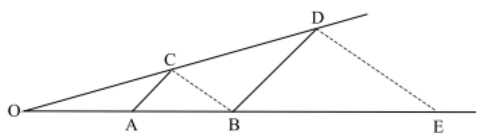
۱) ۵/۲۵

۲) ۵/۷۵

۳) ۶

۴) ۷/۵

۵۰ در شکل زیر، دو جفت پاره‌خط موازی‌اند. $\text{OA} = ۳$ و $\text{AB} = ۵$، اندازهٔ BE، کدام است؟



۱) $۱۳\frac{۱}{۳}$

۲) $۱۲\frac{۲}{۳}$

۳) $۱۱\frac{۱}{۳}$

۴) $۱۰\frac{۲}{۳}$

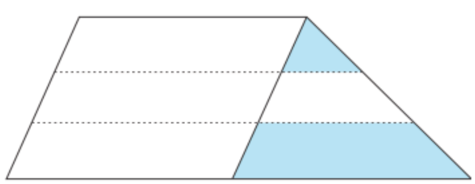
۴۸ در مستطیلی به طول اضلاع $۲\sqrt{۷}$ و ۶ واحد، از هر دو رأس متقابل، عمودی بر قطر دیگر این مستطیل رسم شده است. فاصلهٔ این دو خط عمود کدام است؟

۱) ۱   ۲) ۱/۵

۳) ۱/۷۵   ۴) ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۶

۴۹ یک ساق ذوزنقه به سه قسمت مساوی تقسیم شده است. هر چهار پاره‌خط موازی یکدیگرند. نسبت مساحت دو ناحیهٔ رنگی، کدام است؟



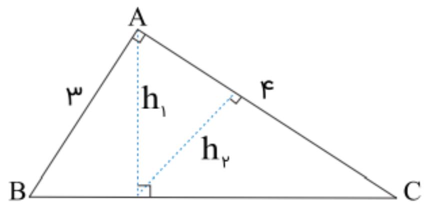
۱) $\frac{۱}{۶}$

۲) $\frac{۱}{۵}$

۳) $\frac{۲}{۹}$

۴) $\frac{۱}{۴}$

۵۱ در شکل زیر، h_1 و h_2 ارتفاع‌های دو مثلث قائم‌الزاویه هستند. نسبت $\frac{h_2}{h_1}$ کدام است؟



۱) $\frac{۳}{۵}$

۲) $\frac{۴}{۵}$

۳) $\frac{۲}{۳}$

۴) $\frac{۳}{۴}$

۵۲ در ذوزنقه‌ای با طول قاعده‌های ۸ و ۱۲ و ارتفاع ۱۰ واحد، مساحت مثلث محدود به دو قطر و یک ساق آن، چند واحد مربع است؟

۱) ۱۸ ۲) ۲۰

۳) ۲۴ ۴) ۲۸

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۵۳ در ذوزنقه‌ای اندازهٔ قاعده‌ها ۹ و ۴ واحد و طول ساق‌ها ۶ و ۵ واحد است. محیط مثلثی که از امتداد ساق‌ها در بیرون ذوزنقه تشکیل شود، کدام است؟

۱) ۱۱/۴ ۲) ۱۱/۶

۳) ۱۲/۲ ۴) ۱۲/۸

۵۴ در شکل زیر، نسبت قاعده‌های ذوزنقه $\frac{۳}{۵}$ است. مساحت مثلث سایه‌زده، چند برابر مساحت ذوزنقه است؟

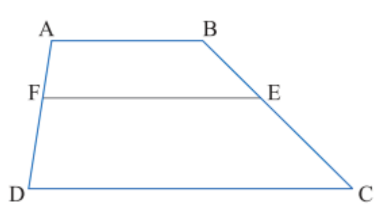
۱) $\frac{۳}{۴}$

۲) $\frac{۷}{۸}$

۳) $\frac{۱۴}{۱۵}$

۴) $\frac{۱۵}{۱۶}$

۵۵ در ذوزنقهٔ ABCD، قاعدهٔ بزرگ $\frac{۵}{۲}$ قاعدهٔ کوچک است و $AF = \frac{۱}{۴}AD$ و EF موازی قاعده است. نسبت $\frac{EF}{CD}$ کدام است؟



۱) $\frac{۱۱}{۲۰}$

۲) $\frac{۷}{۱۵}$

۳) $\frac{۸}{۱۵}$

۴) $\frac{۳}{۵}$

۵۶ در مثلث ABC، ضلع AB بزرگ‌تر از ضلع AC است. هریک از میانه‌های BM و CN را از وسط اضلاع به‌اندازهٔ خود تا D و E امتداد می‌دهیم. نسبت مساحت مثلث DBC به مساحت مثلث EBC کدام است؟

۱) کمتر از ۱
۲) بیشتر از ۱
۳) مساوی ۱
۴) بستگی به ضلع سوم دارد.

۵۷ در یک ذوزنقه، پاره‌خطی که وسط‌های دو ساق را به هم وصل کند، مساحت آن را به نسبت‌های ۱ و ۲ تقسیم می‌کند. نسبت قاعده‌های آن ذوزنقه کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۶}$
۲) $\frac{۱}{۵}$
۳) $\frac{۱}{۴}$
۴) $\frac{۲}{۵}$

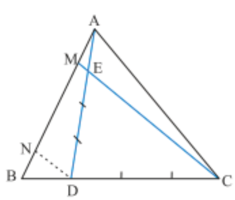
۵۸ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، اضلاع قائم $AB = ۳\sqrt{۵}$ و $AC = ۶$، ارتفاع AH و میانهٔ AM رسم شده است. مساحت مثلث ABC، چندبرابر مساحت مثلث AMH است؟

۱) ۱۰
۲) ۱۲
۳) ۱۵
۴) ۱۸

۵۹ در مستطیل $ABCD$ به طول $AB = ۱۷$، از نقطهٔ A عمود AH بر قطر BD رسم شده است. اگر $BH = ۱۵$ باشد، طول قطر مستطیل از عدد ۱۹، چقدر بیشتر است؟

۱) $\frac{۴}{۱۵}$
۲) $\frac{۱}{۳}$
۳) $\frac{۷}{۱۵}$
۴) $\frac{۳}{۵}$

۶۰ در شکل زیر، $BD = \frac{۱}{۴}BC$ و $AE = \frac{۱}{۴}AD$ و $DN || CM$. اندازهٔ AB چندبرابر AM است؟



۱) ۴
۲) ۴/۵
۳) ۵
۴) ۶

فصل سوم   تابع

۱- آشنایی بیشتر با تابع   ۲- انواع تابع

۳- وارون تابع   ۴- اعمال روی تابع

۱- آشنایی بیشتر با تابع:

در سال دهم با مفهوم تابع آشنا شدید. در این فصل ضمن یادآوری تابع و بررسی اجزای آن، چند نوع دیگر تابع و ویژگی‌های آنها را مورد بررسی قرار می‌دهیم. سپس ویژگی یک به یک بودن و وارون تابع و اعمال جبری را روی توابع یاد می‌گیرید.

تعریف تابع :

یک تابع از مجموع A به مجموعه B، رابطه‌ای بین این دو مجموعه است که در آن به هر عضو A، دقیقا یک عضو از مجموعه B نسبت داده می‌شود. به مجموعه A ; دامنه تابع و به مجموعه B ; هم‌دامنه تابع می‌گویند. برد تابع زیر مجموعه‌ای از هم‌دامنه است.

$$f\begin{cases} A \longrightarrow \ B \\ y = f(x) \end{cases}$$

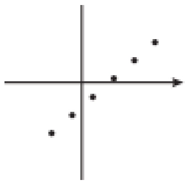
به زبان ساده‌تر : تابع

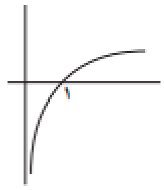
الف) از روی زوج مرتب : مجموعه زوج های مرتب که دارای مؤلفه اول یعنی (x) برابر نباشد.

ب) از روی نمودار : هر خط موازی محور yها رسم کنیم نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

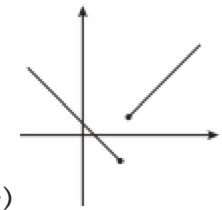
ج) از روی ضابطه : معمولا y نباید داخل قدر مطلق باشد یا توان زوج داشته باشد.

مثال ۱. کدام یک تابع است ؟


الف)



ب)


ج)

د) $|y| = |x|$ ه) $y = \frac{2}{x}$

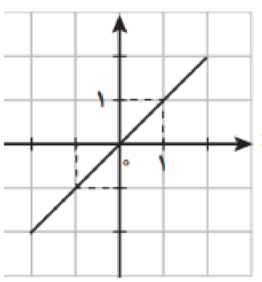
ز) $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ 2x & x < 1 \end{cases}$ ح) $f = \left\{\left(\sqrt{a}, 2\right) , \ (a , -1) , \ \left(\frac{a}{\sqrt{a}} , +2\right)\right\}$

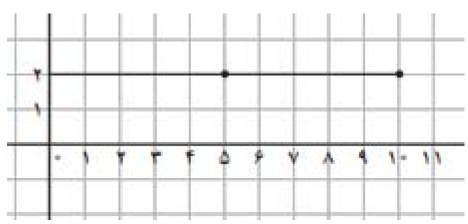
ط) $g = \{(0 , 1) , (1 , 2) , (2 , 4) , (3 , 8) , \ldots\}$

کار در کلاس

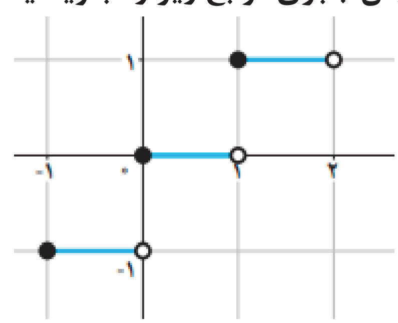
۱. در هر قسمت نمودار تابع را رسم کنید :

$h(x): \begin{cases} \{-2 , 0 , 1\} \longrightarrow N \\ f(x) = x^2 \end{cases}$ $y: \begin{cases} [-2 , 1) \longrightarrow [4 , 1) \\ f(x) = x^2 \end{cases}$ $f: \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = x^2 \end{cases}$





۲. نمایش جبری توابع زیر را بنویسید.



۳. تفاوت هم‌دامنه و برد را با ذکر یک مثال نشان دهید .

۴. برای مشخص کردن یک تابع باید چه چیزهایی کاملا مشخص باشند. مثال بزنید.

۵. هر تابع را از سه دیدگاه می‌توان بررسی کرد:

۱. به عنوان یک ماشین که ورودی می گیرد و خروجی تحویل می‌دهد.

۲.به عنوان دستور یا قاعده ای (ضابطه ای) که با ورودی های مشخص خروجی می‌دهد.

۳. به عنوان نموداری از صفحه xy که شامل تمام زوج مرتب‌هایی به صورت $\left(x\,,f(x)\right)$ است.

با یک مثال هر سه مورد را نشان دهید .

مثال 6. نمودار تابع $f:\begin{cases}[-1\,,2]\longrightarrow[0\,,+\infty)\\ f(x)=|x|\end{cases}$ را رسم کنید. با کدام یک از توابع زیر برابر است؟

$f:\begin{cases}\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\\ f(x)=|x|\end{cases}$ $\qquad$ $f:\begin{cases}[-1\,,2]\longrightarrow[0\,,2]\\ f(x)=|x|\end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases}f:[-1\,,2]\longrightarrow\mathbb{R}\\ f(x)=\sqrt{x^2}\end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases}f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^{\geq 0}\\ f(x)=|x|\end{cases}$

۷. در هر قسمت دامنه و برد تابع را تعیین کنید.

تابع خالی شدن آب یک منبع $\quad$ ب) $V(x)=20-2t$ $\quad$ الف) $f(x)=-\frac{1}{2}$

ج) تابع ارتفاع سیبی که از زیر زمین به هوا پرتاب شده است: $\quad h(t)=-t^2+5t-4$

د) تابع هزینه پاک سازی شهری و صنعتی از یک رودخانه(x درصد از آلودگی‌های): $\quad f(x)=\frac{255x}{100-x}$

ه) تابع برچیده شدن رطوبت از بتنی که تازه ریخته شده برحسب زمان: $\quad g(x)=\sqrt{2t+3}$

و) تابع رشد یک نوع سلول سرطانی برحسب زمان $\quad k(t)=3^t$

ز) تابع رشد قد یک کودک برحسب ماه $\quad g(x)=7\sqrt{x}+50$

تابع به عنوان ماشین

x متغییر مستقل و y متغییر وابسته می‌شود. در این صورت y از روی عملی که روی x انجام می‌دهد به دست می-آید. به عبارت دیگر

به عنوان مثال در تابع f با ضابطه $f(x) = |x|$

ماشین تابع : $f(x) = |\quad|$ است که برای هر ورودی x فاصله آن را از مبدا مختصات $f(x)$ یا y نتیجه می‌دهد. مثلا برای ورودی ۳-، $f(x) = |-۳|$ خواهد بود.

یا مثال دیگر در تابع f با ضابطه $f(x) = \sqrt{x}$ ماشین تابع $f(x) = \sqrt{\quad}$ است که برای هر ورودی x جذر آن برای خروجی (y) نتیجه می‌دهد. مثلا برای ورودی ۳۶ خروجی۶ خواهد بود.

اما تابع $f(x) = |x|$ از منظر تعریف به صورت $f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$ معرفی می‌شود.

و از منظر نمودار، تمام زوج مرتب‌هایی به شکل $(x، |x|)$ در صفحه مختصات است. یعنی:

تساوی دو تابع

دو تابع g و f را برابر می‌گوییم هرگاه :

الف) $D_f = D_g$ و ب) برا ی هر x از دامنه آنها : $f(x) = g(x)$

از منظر نمودار: هنگامی دو تابع برابرند که نمودارهای آنها کاملا بر هم منطبق باشند.

از منظر زوج مرتب: اگر دو تابع با زوج مرتب داده شده باشند، هنگامی با هم برابرند که به عنوان دو مجموعه با هم برابر باشند.

مثال: کدام جفت توابع زیر با هم مساوی‌اند؟

الف) $\begin{cases} f(x) = \frac{|x|}{x} \\ g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2}} \end{cases}$

ب) $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x}^2 \\ g(x) = \sqrt{x^2} \end{cases}$

ج) $\begin{cases} f = \{(۱،۲), (-۱،۱۲), (-۲،۳)\} \\ g = \{(۱،۱۲), (-۱،۳), (-۲،۲)\} \end{cases}$

د) $\begin{cases} f(x) = \frac{x^2-4}{x+2} \\ g(x) = \frac{2x-4}{2} \end{cases}$

مثال ۲. تابعی بنویسید که مساحت یک مربع را برحسب طول ضلع آن بیان می‌کند و نمودار آن را رسم کنید

تابع $y = x^2$ را رسم کنید و آن را با تابع مساحت برحسب طول ضلع مقایسه کنید. شباهت‌ها و تفاوت‌ها را بنویسید.

کار در کلاس

۱. درست و نادرست را با ذکر دلیل بیان کنید.

الف) اگر دامنه دو تابع برابر و برد آنها نیز باهم برابر باشند آنگاه دو تابع برابرند.

ب) برد تابع همان هم‌دامنه تابع است.

ج) بی‌شمار تابع وجود دارد که دامنه آن بازه $[0\,,2]$ است.

د) تعداد توابع $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ به $B = \{b_1, b_2, b_3, \dots, b_n\}$ برابر m^n است.

۲. تابعی مثال بزنید که دامنه آن مجموع اعداد حقیقی منفی باشد. چه تعداد از این توابع وجود دارند.

۳. کدام جفت توابع زیر مساوی‌اند؟ چرا؟

د) $\begin{cases} t: [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R} \\ t(x) = \sqrt{x} \end{cases}$

الف) $\begin{cases} f: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = |x| \end{cases}$

ب) $\begin{cases} g: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ g(x) = x \end{cases}$

ه) $\begin{cases} m: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ m(x) = 2 \end{cases}$

ج) $\begin{cases} h: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ h(x) = \frac{x}{\sqrt{x}} \end{cases}$

و) $\begin{cases} n: \mathbb{R} - \{1\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{2\} \\ n(x) = \frac{2x-2}{x-1} \end{cases}$

۴. تابع $f(x) = x + 3$ و $g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x-3} & x \neq 3 \\ k^2 - 9 & x = 3 \end{cases}$ با یکدیگر برابرند. مقدار k را به دست آورید.

۵. کدام جفت توابع زیر مساوی‌اند؟ چرا؟

الف) $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x+1} \times \sqrt{x-1} \\ g(x) = \sqrt{x^2-1} \end{cases}$

ب) $\begin{cases} f(x) = \sqrt{1+x^2} + x \\ g(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}-x} \end{cases}$

ج) $\begin{cases} f(x) = x \times sgn(x) \\ g(x) = |x| \end{cases}$

د) $\begin{cases} f(x) = \frac{1}{x} \div \frac{x+1}{x+2} \\ g(x) = \frac{x^2+2x}{x+1} \end{cases}$

۷. تابع g در شرایط زیر صدوق می‌کند. g را رسم کنید و ضابطه آن را بنویسید.

الف) دامنه آن اعداد حقیقی نامثبت باشد. ب) تابع g به هر عدد بزرگتر از (-2) قرنیه مربع آن را نسبت می‌دهد.

ج) تابع g به هر عدد کوچکتر از یا مساوی (-2) قدر مطلق آن را نسبت می‌دهد.

۸. دامنه توابع زیر را به دست آورید

الف) $f(x) = -\frac{5}{3}$ ب) $f(x) = \frac{x+2}{5}$ ج) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \sqrt{2}$

د) $f(x) = \frac{x-2}{x^2-2x}$ ه) $f(x) = \frac{x-2}{x^2+4}$ و) $f(x) = \frac{x+1}{|2x-1|-3}$

ز) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ ح) $f(x) = \sqrt{10 - x^2}$ ط) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 2}$

ی) $f(x) = \sqrt{\frac{x+2}{3-x}}$ ک) $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x+2}{3-x}}$ ل) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{|x|-2}}$

م) $f(\mathrm{x}) = \sqrt{2x + 1} + \sqrt{2 - x}$ ن) $f(x) = \frac{1+\frac{x+1}{x}}{2-\frac{x+1}{x-1}}$

انواع تابع

۱- **تابع ثابت** : تابعی که دارای مولفه دوم مشخص و ثابتی باشد. مانند:

$$g:\begin{cases}[1,3] \to N \\ g(x) = 5\end{cases} \qquad h(x) = 5f = \{(1,4),(2,4),(3,4)\}$$

۲- **تابع همانی** : تابعی که مولفه اول و دوم آنها در هر زوج مرتب، برابرند. مانند:

$$g:\begin{cases}[1,3] \to \mathbb{R} \\ g(x) = x\end{cases} \qquad h(x) = x\,f = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$$

۳- **تابع خطی** : هر تابع به صورت $f(x) = ax + b$ را تابع خطی گویند. (توابع ثابت و همانی نوع خاصی از توابع خطی‌اند). مانند:

$$p(x) = 2x - 1 \qquad g(x) = \frac{x}{2} + 1 \qquad h(x) = \frac{x}{2} + 1 f(x) = -x + 3$$

$$D = [0, 2] \qquad\qquad D = \{-1, 0, 1, 2\}$$

۴- **تابع سهمی**: هر تابع به فرم $f(x) = ax^2 + bx + c \ : \ a \neq 0$ را تابع درجه دو یا سهمی می‌گویند.

ویژگی‌های تابع سهمی:

الف) دامنه آن $\mathbb{R}$ است مگراینکه صورت سوال دامنه مشخص را مدنظر داشته باشد.

ب) برد این تابع از محاسبه $\frac{-\Delta}{4a}$ و با توجه به علامت a تعیین می‌شود.

$$a > 0 \Rightarrow \qquad \Rightarrow \text{برد} = R = \left[-\frac{\Delta}{4a}, +\infty\right)$$

$$a < 0 \Rightarrow \qquad \Rightarrow \text{برد} = R = \left(-\infty, -\frac{\Delta}{4a}\right]$$

ج) **یادآوری برای تعیین علامت عبارت** $f(x) = ax^2 + bx + c$ **مطابق زیر:**

$$\Delta > 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{دو ریشه حقیقی} \qquad \Rightarrow$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a} \quad \text{یک جواب مضاعف} \qquad \Rightarrow$$

$$\Delta < 0 \Rightarrow \text{معادله جواب ندارد} \qquad \Rightarrow$$

۵- **تابع گویا** : به زبان ساده تابع به فرم کسری که متغییر در مخرج باشد. مانند $y = \frac{x+3}{5x}$ یا

هر تابع به صورت $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ را یک تابع گویا می‌نامند، که در آن $P(x)$ و $Q(x)$ چند جمله‌ای‌اند و $Q(x) \neq 0$

مثال: کدام یک تابع گویا است؟ چرا؟

الف) $f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x}}$ ب) $g(x)=\frac{x+3}{\sqrt{2}x-2}$ ج) $h(x)=\frac{x+2}{5}$ د) $p(x)=\frac{5}{x+2}$

مثال: نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $\begin{cases} g:\{-3,-2,-1,1,2,3\} \\ g(x)=\frac{1}{x} \end{cases}$

ج) $\begin{cases} h:(-\infty,0)\to(-\infty,0) \\ h(x)=\frac{1}{x} \end{cases}$

ب) $\begin{cases} f:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R}-\{0\} \\ f(x)=\frac{1}{x} \end{cases}$

۶- **تابع رادیکالی** : به زبان ساده تابعی که متغییر زیر رادیکال باشد. مانند $y=\sqrt{3x^2+6}$ یا

تابعی که هر عدد نامنفی را به ریشه دوم نامنفی آن نسبت می‌دهد، تابع رادیکالی(ریشه دوم) می‌نامند و به صورت $f(x)=\sqrt{x}$ نمایش می‌دهند.

مثال1-

$f(x)=\sqrt{x}$: $D=[0,+\infty)$: دامنه $R=[0,+\infty)$: برد

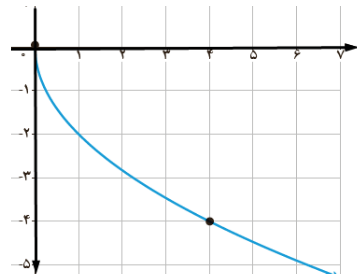
۲. تابع ریشه‌سوم را به صورت $y=\sqrt[3]{x}$ داریم. دامنه و برد این تابع را بنویسید و نمودار آن را رسم کنید.

۳. رسم کنید:

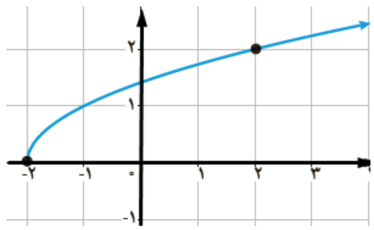
الف) $y=\sqrt{x+2}$ ب) $y=\sqrt{x}+3$ ج) $y=-\sqrt{-x}+1$

ه) $y = \sqrt{2 - x}$ چ) $y = 2 - \sqrt{x}$ د) $y = \sqrt{2x - 3}$

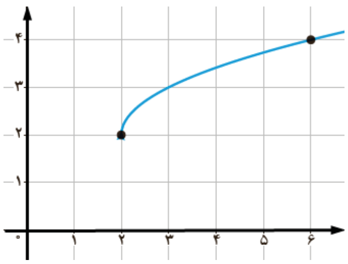
۴. نمایش جبری توابع زیر را بر اساس $y = \sqrt{x}$ بنویسید.



ج)



ب)



الف)

۵. تابع $y = \sqrt{x}$ را ابتدا نسبت به محور xها قرینه می‌دهیم (قرینه استخری) سپس یک واحد به سمت راست منتقل کرده و ۲ واحد بالا می‌آوریم. نمایش جبری این تابع را بنویسید و دامنه و برد آن را مشخص کنید و نمودار آن را رسم کنید.

۶. شکل روبرو نمودار تابع $y = f(x)$ است. دامنه تابع $\sqrt{xf(x)}$ را بیابید. (ریاضی ۹۲)

۷. اگر عبارت $\left(\sqrt[2]{\frac{2}{x^2} - \frac{9}{2}} + \sqrt[3]{2x - x^2}\right)$ عدد حقیقی باشد. مجموعه مقادیر x را تعیین کنید.(تجربی ۹۶)

۸. دامنه تابع $y=\frac{1}{\sqrt{mx^2-mk+2}}$ برابر تمام اعداد حقیقی است. حدود m را بیابید.

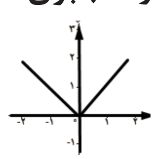
۹. به کمک توصیف فارسی توضیح دهید نمودار $y=3\sqrt{6x+1}$ چگونه از روی نمودار $y=\sqrt{x}$ به دست آورید.

۱۰. نمودار تابع $y=\sqrt{|x|}$ را رسم کنید و دامنه و برد آن را بنویسید.

۱۱. تابع $f(x)=7\sqrt{x}+50$ قد متوسط کودکان را به تقریب برحسب (cm) تا حدود ۶۰ سالگی نشان می‌دهد. x نشان دهند ماه‌های پس از تولد است. دامنه و برد این تابع را مشخص کنید و نمودار آن را رسم کنید. قد یک کودک شش ساله تقریبا چقدر است؟ کودکی با قد (cm) ۸۵ حدودا چند ماهه است؟

۷- قدر مطلق:

تابع $y=|f(x)|$ که $f(x)$ عبارت جبری است را تابع شامل قدر مطلق می‌گوییم. ساده‌ترین نوع تابع قدر مطلق $y=|x|$ است که نمودار آن



است و $D=\mathbb{R}$ و $R=[0,+\infty)$

۸- تابع چند جمله‌ای:

هر تابع به شکل $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ که $a_n \neq 0$ را یک تابع چند جمله‌ای از درجه n می‌گوییم. $(n \in W)$ مانند :

$$f(x) = \frac{1}{3}x^{10} + \sqrt{2}x^8 - 3x^5 + 2$$

۹- تابع نمایی، لگاریتمی : مانند

$y = \log(x+1) - 2$ or $y = 2^{x-1}$

در فصل‌های بعدی بررسی می‌گردد.

۱۰– تابع چندضابطه‌ای: اگر دامنه تابع به چند بخش تقسیم شود و برای هر بخش ضابطه‌ای جداگانه تعریف شود **تابع را چند ضابطه‌ای** گوییم. توابع چند ضابطه‌ای به فرم زیرند :

$$f(x) = \begin{cases} f_1 & D_1 \\ f_2 & D_2 \\ f_3 & D_3 \end{cases}$$

۱۱- تابع مثلثاتی : تابعی که متغییر، کمان مثلثاتی باشد. مانند $y = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ یا

تابعی که متغییر جلوی نسبت مثلثاتی باشد را تابع مثلثاتی می‌گوییم مانند $f(x) = sinx$. نمودار و ویژگی‌های این نوع توابع در فصل‌های بعدی و سال‌های بعد مورد بررسی قرار می‌گیرند.

مثال : اگر تابع f به صورت زیر باشد حاصل $f(f(5)) - f(f(1))$

$$f(x) = \begin{cases} 2x+3, & x > 3 \\ x - \sqrt{x+4}, & x \leq 3 \end{cases}$$

۱۲- تابع علامت:

تابع به فرم $f(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$ یا $f(x)=\begin{cases}\frac{|x|}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ را تابع علامت می‌گوییم. این تابع را به صورت $f(x)=sgn(x)$ نیز معرفی می‌کنند. نمودار آن را رسم کنید.

۱۳- تابع پله‌ای:

تابعی که دامنه آن به چند قسمت تقسیم شود و برای هر قسمت دامنه آن تابع ثابت تعریف کنیم، تابع پله‌ای می‌نامند.

مثال: در یک پارکینگ هزینه پارک خودرو مطابق جدول روبروست. ضابطه تابع را بنویسید و نمودار آن را رسم کنید.

$$f(x)=\begin{cases}2 & 0<x<2\\ 3 & 2\leq x<2/5\\ 4 & 2/5\leq x<3\\ 5 & 3\leq x\leq 5\end{cases}$$

مثال2- برای تابع پله‌ای روبرو یک مسئله کاربردی بسازید و نمودار آن را رسم کنید.

$$f(x)=\begin{cases}7 & 0<x\leq 2\\ 11 & 2<x<5\\ 15 & 5\leq x<8\\ 25 & 8\leq x\leq 12\end{cases}$$

۱۵- تابع جزء صحیح

اگر x عدد حقیقی دلخواهی باشد، جزء صحیح آن بزرگترین عدد صحیحی است که از x بیشتر نباشد. جزء صحیح x را با نماد $[x]$ نمایش می‌دهیم.

$\left[-\frac{1}{3}\right]=-2$, $\left[\frac{2}{8}\right]=2$, $[4]=4$, $[-3]=-3$

مثال 1- حاصل را بنویسید :

۱) $[-\pi]+[\sqrt{2}]-\left[\frac{\pi}{3}\right]=$

۴) $\left|\left[-\frac{5}{2}\right]\right|+\left[\left|-\frac{5}{2}\right|\right]=$

۲) $[1+\sqrt{5}]+[1-\sqrt{5}]=$

۳) $[1]+[\sqrt{2}]+[\sqrt{3}]+\cdots+[\sqrt{35}]=$

تابعی که هر عدد حقیقی x را به جزء صحیح آن نسبت می‌دهد تابع جزء صحیح نامیده می‌شود.

$$f:\begin{cases}\mathbb{R}\to Z\\ f(x)=[x]\end{cases}\qquad D_f=\mathbb{R}\quad \text{و}\quad R=Z$$

مثال2- نمودار تابع $y=[x]$ را رسم کنید.

نکته: برای رسم نمودار $[kx]$ در بازه $[a,b]$ مطابق دستورالعمل زیر می‌رویم:

1 – $[a,b]\Rightarrow a\le x\le b\Rightarrow ka\le kx\le kb$ **(بازه را در k ضرب می‌کنیم.)**

2 – $ka\le kx<n\quad,\quad n\le kx<n+1\ ,\ldots\quad,\ \ldots\le kx<kb$

n اولین عدد صحیح بعد از ka است

3– با توجه به تقسیم‌بندی (۲) مقدار جزء صحیح از نامساوی‌ها می‌یابیم و y را محاسبه می‌کنیم.

4– تمام موارد قسمت (۲) را بر k تقسیم کرده و با تعیین آن روی محور xها و مقدار y آنها، نمودار را رسم می‌کنیم.

مثال3-نمودار $y=[3x]+1$ را در بازه $[-2,1]$ رسم کنید.

۱) $\left[-\frac{2}{3},1\right]\Rightarrow -\frac{2}{3}\le x\le 1\quad\Rightarrow\ -2\le 3x\le 3$

4-نمودار تابع $y=\left[\frac{x}{3}\right]$ را در بازه $[-6,5]$ رسم کنید.

۱) $[-6,5] \Rightarrow -6 \le x \le 5 \Rightarrow -2 \le \frac{x}{3} < \frac{5}{3}$

ویژگی‌های جزء صحیح:

1) $\boxed{[x]=n \quad \Leftrightarrow \quad n \in Z\,,\ n \le x < n+1}$

2) با توجه به رسم نمودار محور xها به صورت مایل و حفره‌دار بودن نقاط صحیح و توضیحات سر کلاس که بیانگر تعریف جزء صحیح است این نامساوی واضح است $\boxed{[x] \le x}$

به طور کلی داریم: $\boxed{x-1 < [x] \le x \quad : \ x \in \mathbb{R}}$

مثال: $\left[\frac{10}{2}\right] \le \frac{10}{2}$ $\qquad [-12] \le -12$

مثال: $[x+(-2)] = [x]-2$

3) $\boxed{[x+k]=[x]+k \ \Leftrightarrow k \in Z}$

4) $y=[x]+[-x]=\begin{cases} 0 & x \in Z \\ -1 & x \notin Z \end{cases}$ دامنه $= D=\mathbb{R}$ ، برد $= R=\{0,-1\}$

5) $y=x-[x]$ $\qquad D=\mathbb{R}$ و $R=[0,1)$

$0 \le x < 1 \quad y = x - 0$ و $-1 \le x < 0 \quad y = x - (-1)$ و ...

کار در کلاس

1- مجموعه جواب معادله‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $[2x - 3] = -8$

ب) $2[x+1] = 10$

ج) $3[x] = 5$

د) $[x] - 3 > 0$

ه) $[x] - 3 \ge 0$

و) $[x] - 3 < 0$

ز) $[x] - 3 \le 0$

2- نمودار توابع زیر را به‌دست آورید.

الف) $y = \left[\frac{x}{3}\right] \quad [-3, 7]$

ب) $y = \frac{1}{3}[x] \quad [-1, 2]$

ج) $y = [x] - [-x]$

د) $y = x + [x]$

ه) $y = \left[x + \frac{1}{2}\right] \quad [-2, 2]$

3- نمودار توابع زیر را به‌دست آورید.

الف) $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} & x < 0 \\ \sqrt{x-1} & x \geq 0 \end{cases}$

ب) $g(x) = \begin{cases} \sqrt{x} + 1 & x > 0 \\ \sqrt{x-1} & -2 \leq x \leq 0 \end{cases}$

ج) $h(x) = \begin{cases} [x] & 0 < x < 2 \\ \frac{x+1}{x} & -4 < x < 0 \end{cases}$

کار در منزل

1- اگر $[x^2 + x] = -1$ باشد حاصل $[x^{20}]$ کدام است؟ (تجربی۸۸)

2- در تابع $f(x) = x^2 - 2[x]$ مقدار؟ $f\left(-\frac{1}{2}f\left(\sqrt{3}\right)\right)$ (تجربی۹۰)

3- نمودار تابع‌های زیر را رسم کنید.

الف) $y = \frac{1}{[x]}$ ب) $y = x[x]$ ج) $y = \frac{x}{[x]}$

4- دامنه توابع زیر را به‌دست آورید.

الف) $y=\frac{x}{[x]+[-x]+1}$ ب) $y=\sqrt{[x]+[-x]}$ ج) $y=\frac{x^2+x}{x-[x]}$

5- برای $n>2$ و $n\in N$ حاصل را به‌دست آورید: (تجربی۹۱)

$$\left[\sqrt{4n^2-3n+1}\right]-2\left[\sqrt{n^2-2n}\right]=?$$

6- اگر $f(x)=x-[x]$ برد تابع $g(x)=f(2x-3)-2f(x)$ را بیابید. (ریاضی۹۲)

وارون تابع:

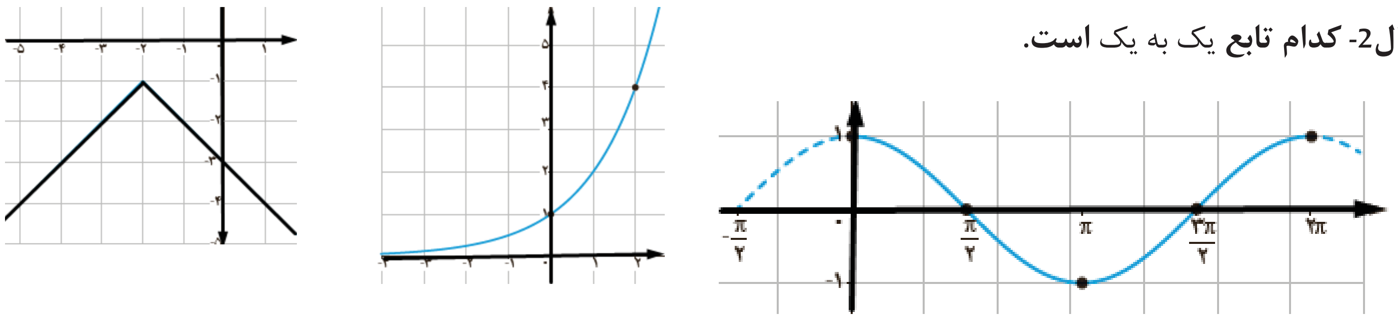
تابع یک به یک: تابعی یک به یک است که مولفه دوم برابر نداشته باشد.

مثال1- تابع f،$(1-1)$ است. اما تابع g یک به یک نیست.

$g=\{(1,3),(2,3),(3,5)\}$, $f=\{(1,7),(2,9),(3,1)\}$

برای تشخیص یک به یک بودن تابع از روی نمودار داده شده: اگر هر خطی موازی محور xها بکشیم نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

مثال2- کدام تابع یک به یک **است.**



وارون تابع و تابع وارون :

اگر رابطه بین دو مجموعه به‌صورت زوج مرتب داده شده باشد، رابطه که از جابجایی دو مولفه هر زوج مرتب به‌دست می‌آید وارون آن رابطه می‌نامیم. اگر f رابطه باشد، وارون آن را با f^{-1} نشان می‌دهیم.

$$f = \{(1,2),(3,5),(3,2)\} \xrightarrow{\text{وارون}} f^{-1} = \{(2,1),(5,3),(2,3)\}$$

در حالت کلی:

$$f^{-1} = \{\ (y,x)\ |\ \ (x,y) \in f\ \}$$

(-1) در f^{-1} یک نماد است و معنی توان منفی را نمی‌دهد، یعنی:

$$f^{-1} \neq \frac{1}{f}$$

اگر تابعی یک به یک باشد آن تابع را وارون پذیر می‌گوییم و f^{-1} را تابع وارون f می‌نامند واضح است که وارون تابع و تابع وارون با یکدیگر متفاوت‌اند. در واقع وارون تابع الزاما تابع نیست اما تابع وارون الزاما تابع است.

مثال: وارون توابع زیر را بنویسید. کدام تابع وارون پذیر است؟

$$f = \{(1,2),(3,7),(-1,8)\} \xrightarrow{\text{وارون}} f^{-1} = \{(2,1),(7,3),(8,-1)\}$$

f وارون‌پذیر است. زیرا تابعی یک به یک است. f^{-1} تابع وارون است.

$$g=\left\{\left(2,\frac{1}{2}\right),\left(3,\frac{1}{3}\right),(-1,1),(1,1)\right\}\xrightarrow{\text{وارون تابع}}g^{-1}=\left\{\left(\frac{1}{2},2\right),\left(\frac{1}{3},3\right),(1,-1),(1,1)\right\}$$

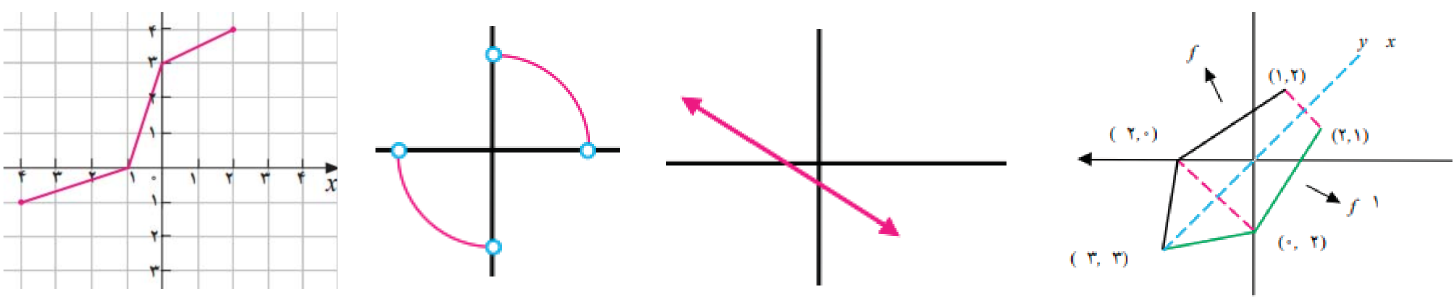
g وارون پذیر نیست. زیرا تابعی یک به یک نیست. g^{-1} تابع وارون نیست و صرفا وارون تابع است.

برای به‌دست آوردن تابع وارونِ یک تابع وارون پذیر :

الف) اگر تابع به صورت زوج مرتب باشد، در هر زوج مرتب جای y,x را عوض می‌کنیم.

الف) $f=\{(1,1),(2,4),(3,9),(4,16)\} \quad \longrightarrow \quad f^{-1}=\{(1,1),(4,2),(9,3),(16,4)\}$

ب) اگر نمودار تابع باشد، قرینه آن را نسبت به خط $y=x$ (نیمساز ربع اول و سوم) رسم می‌کنیم.



ج) اگر ضابطه تابع $y=f(x)$ داده شده باشد، ابتدا معادله تابع را برحسب x حل می‌کنیم (یعنی x را می‌یابیم) و سپس در مرحله آخر جای x و y را عوض می‌کنیم. آخرین y همان f^{-1} است.

مثال: در هر قست تابع وارون را به‌دست آورید:

الف) $f=\left\{(-1,0),\left(\frac{2}{3},-1\right),(2,2),(10,-6)\right\} \quad \longrightarrow \quad f^{-1}=$

ب) $f(x)=-2x+1 \quad \longrightarrow \quad f^{-1}=$

ج) $f(x)=\frac{2+5x}{3}$

د) $f(x)=x^2-2x+1 \quad ; \quad x\le 1$

$$y=(x-1)^2 \xrightarrow{\sqrt{\ }} \sqrt{y}=\sqrt{(x-1)^2} \rightarrow \sqrt{y}=|x-1| \xrightarrow{x\le 1} \sqrt{y}=-(x-1) \rightarrow$$

$$\sqrt{y}=-x+1 \rightarrow x=1-\sqrt{y} \xrightarrow{\text{جای y,x عوض می‌شود}} y=1-\sqrt{x} \rightarrow f^{-1}(x)=1-\sqrt{x}$$

محاسبه وارون تابع به کمک ماشین تابع:

مثال 1- وارون تابع $y = \sqrt{x+1} - 2$ را به کمک ماشین تابع به‌دست آورید.

ماشین تابع f:

مثال2- به روش ماشین تابع، تابع وارون $f(x) = x^2 - 4x + 3$

مثال3- به روش ماشین تابع ، تابع وارون $g(x) = ax + b$ $(a \neq 0)$ را به‌دست آورید.

مثال4- وارون تابع $y = \frac{x+1}{2x-3}$ را بیابید.

ویژگی‌های تابع وارون:

اگر f^{-1} تابع وارون با ضابطه f باشد.

$$1)\quad D_f = R_{f^{-1}} \quad , \quad R_f = D_{f^{-1}}$$

2) توابع f , f^{-1} در صورتی که همدیگر را قطع کنند باشرط صعودی بودن همدیگر را روی خط $y = x$ قطع می‌کنند. از این رو برای یافتن نقطه تقاطع یکی از معادلات $f = f^{-1}$ یا $f = x$ یا $f^{-1} = x$ را حل می‌کنیم. اگر تابع نزولی باشد ممکن است همدیگر را قطع کنند و روی خط $y = x$ نباشد.

3) در تابع خطی $y = ax + b$:

الف) $a=1$, $b=0$ ب) اگر $a=-1$, $b\in\mathbb{R}$ در این صورت $f=f^{-1}$.

4) در تابع $y=\frac{ax+b}{cx+d}$:

اگر $a+d=0$ (یا $a=-b$) باشد در این صورت $f=f^{-1}$.

5) تابع چند ضابطه‌ای در صورتی وارون‌پذیر است که دو شرط زیرا را همزمان داشته باشد :

1- تک‌تک ضابطه‌ها در دامنه خود یک‌به‌یک باشند. 2- اشتراک بردها تهی باشد.

بهتر است به‌روش رسمِ تابع چند ضابطه‌ای از یک به یک بودن کلی تابع مطمئن شویم و برای یافتن f^{-1} در تک تک ضابطه‌ها x را برحسب y می‌یابیم.

6) برای یافتن نمودار f^{-1} از روی نمودار تابع f ، قرینه تابع f را بر اساس خط $y=x$ می‌یابیم.

7) اگر تابعی یک به یک نباشد با محدود کردن دامنه آن (تحدید دامنه) می‌توانیم آن را وارون پذیر کنیم.

کار در منزل :

1- تابعی مثال بزنید که یک به یک (وارون‌پذیر) نباشد. توصیفی – نموداری – ضابطه‌ای – زوج مرتبی.

2- آیا تابع $f(x)=\frac{3}{7}x$ و $g(x)=\frac{7}{3}x$ وارون یکدیگرند؟ دو تابع $f(x)=\frac{3}{7}$ و $g(x)=\frac{7}{3}$ چطور؟ چرا؟

3- به کمک رسم نمودار وارون پذیری توابع را بررسی کنید و ضابطه تابع وارون را به‌دست آورید:

الف) $g=\begin{cases}-x+2 & x<1\\ -1-x & x>1\end{cases}$

$$f^{-1} = \frac{5}{8}x + 12 \quad \Rightarrow f = ?$$

ج) $f(x) = 2 - |x+1| \quad ; \quad x > 0$

د) $f(x) = x^2 + 10x + 24 \quad ; \quad x > -5$

د) $y = \sqrt{x-2} - 1$

4- ابتدا نمودار تابع $y = x^2 - 2x + 2$ را رسم کنید و نشان دهید یک به یک نیست. با تحدید دامنه آن را وارون پذیر کنید و ضابطه وارون آن را به‌دست آورید. نمودار f^{-1} را رسم کنید و دامنه و برد آن را بنویسید.

5- مقدار a را طوری تعیین کنید که تابع‌ها یک به یک باشند.

الف) $y = 88x^2 - 200ax + 75$ ب) $y = \begin{cases} x+1 & x > 1 \\ ax-1 & x < 1 \end{cases}$

6- درست و نادرست را تعیین کنید.

الف) وارون تابع $y = -x + \frac{1}{2}$ با خودش برابر است.

ب) در تابع $y = \frac{x+2}{3x}$ ، دامنه f^{-1} برابر $\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\}$ است.

ج) وارون تابع $y = -2$ همان $y^{-1} = \frac{-1}{2}$ است.

د) اگر f و g دو تابع باشند که وارون یکدیگر باشند آنگاه :

$$(fog)(x) = x \;;\; x \in D_g \quad , \quad (gof)(x) = x \quad ; \quad x \in D_f$$

ه) وارون تابع $f(x)\begin{cases} x^2 & x>0 \\ -x^2 & x<0 \end{cases}$ برابر $g(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x>0 \\ -\sqrt{-x} & x<0 \end{cases}$ است.

ز) وارون تابع $y = \frac{2x+3}{x-3}$ باخودش برابر است.

ح) وارون تابع $y = \sqrt{x-2}$ برابر $f^{-1}(x) = x^2 + 2$ است.

7- اگر رابطه $f(x) = \{(3,2),(a,5),(3,a^2-a),(b,2),(-1,4)\}$ تابعی $(1-1)$ باشد دوتایی (a,b) را بیابید.

8- در تابع با ضابطه $f(x) = -x + \sqrt{-2x}$ مقدار f^{-1} را بیابید. (ریاضی۸۸)

9- اگر ضابطه $f(x) = x^2 - x + 1$ باشد ، نمودار f^{-1} الزاما از کدام نقطه می‌گذرد.

1) $(-1,0)$ 2) $(0,-1)$ 3) $(1,0)$ 4) $(0,1)$

10- ضابطه وارون تابع $y = \frac{x}{1+|x|}$ را به‌دست آورید. (تجربی۹۱)

11- ضابطه معکوس تابع $y = 2 - \sqrt{x-1}$ را به‌دست آورید. (تجربی۹۲)

12- تابع با ضابطه $f(x)=2x-|4-2x|$ در بازه‌ای وارون پذیر است. ضابطه f^{-1} در آن بازه را بیابید.
(ریاضی۹۲)

13- ضابطه وارون تابع $y=\begin{cases}\sqrt{x} & x\geq 0\\ -\sqrt{-x} & x<0\end{cases}$ را به‌دست آورید. (تجربی۹۱)

14- ضابطه معکوس تابع $y=\begin{cases}\frac{|x|}{x}\sqrt{|x|} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ به کدام صورت است. (تجربی۹۲)

1) $y=x\sqrt{|x|} \quad x\in\mathbb{R}$

2) $y=x\sqrt{|x|} \quad x\in\mathbb{R}-\{0\}$

3) $y=x|x| \quad x\in\mathbb{R}-\{0\}$

4) $y=x|x| \quad x\in\mathbb{R}$

15- اگر $g(x)$ وارون تابع $f(x)=x+\sqrt{x}$ باشد، مقدار $g(۶)+g(۱۲)=\ ?$ کدام است؟ (تجربی۹۹)

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۱۳ ۴) ۱۴

16- وارون تابع $f(x)=x^3-x+1$ از کدام نقطه عبور می‌کند؟ (تجربی۱۴۰۱)

۱) $(-1,-2)$ ۲) $(\frac{5}{8},\frac{1}{2})$ ۳) $(1,2)$ ۴) $(-\frac{1}{2},\frac{11}{8})$

17- تابع $f(x) = x^2 - 2x - 3\ ;\ x \geq 1$ مفروض است. نمودارهای دو تابع $f^{-1}, g(x) = \frac{x-9}{2}$ با کدام طول متقاطع‌اند؟ (تجربی ۹۸)

۱) ۱۲ ۲) ۱۵ ۳) ۱۸ ۴) ۲۱

اعمال روی تابع

اگر g, f دو تابع با ضابطه‌های $g(x), f(x)$ باشد، اعمال جبری روی توابع را چنین تعریف می‌کنیم.

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x) \qquad D_{f \pm g} = D_f \cap D_g$$

$$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x) \qquad D_{f \times g} = D_f \cap D_g$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \qquad D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\}$$

نکته:

1) $(f)^2(x) = (f \times f)(x) = f(x) \times f(x)$

2) $(kf)(x) = kf(x)$

2- به زبان ساده‌تر برای اعمال جبری روی توابع :

روی دامنه مشترکِ توابع داده شده، عمل جبری گفته شده را روی yهای آنها انجام می‌دهیم.

مثال1- در هر قسمت جواب را بنویسید.

الف) $f = \{(1,2), (4,-5), (7,\sqrt{2})\}$, $g = \{(1,4), (4,0), (7,2), (-4,1)\}$

1) $f+g=\{(1,2+4),(4,-5+0),(7,\sqrt{2}+2)\}$

2) $\frac{3f}{g}=\left\{\left(1,\frac{3\times 2}{4}\right),\left(4,\frac{3\times(-5)}{0}\right),\left(7,\frac{3\times\sqrt{2}}{2}\right)\right\}=\left\{\left(1,\frac{3}{2}\right),\left(7,\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)\right\}$

3) $(f\times g)(4)+g^2(1)=f(4)\times g(4)-g(1)\times g(1)=$

$$(-5)\times(0)-4\times 4=0-16=-16$$

4) $\sqrt{f}=\left\{(1,\sqrt{2}),(4,\sqrt{-5}),\left(7,\sqrt{\sqrt{2}}\right)\right\}=\{(1,\sqrt{2}),(7,\sqrt[4]{2})\}$

مثال 2- اگر $f(x)=\frac{x+2}{x-1}$, $g(x)=\frac{x-7}{x+3}$ باشد، ضابطه و دامنه تابع $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ را بیابید.

ضابطه تابع $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\frac{x+2}{x-1}}{\frac{x-7}{x+3}}=\frac{(x+2)(x+3)}{(x-1)(x-7)}$

$\frac{D_f}{g}=D_f\cap D_g-\{x|g(x)=0\}=\{\mathbb{R}-\{1\}\cap\mathbb{R}-\{-3\})-\{x\left|\frac{x-7}{x+3}=0\right\}=\cdots$

مثال 3- اگر $f(x)=\sqrt{x+6}$, $g(x)=\frac{x+2}{x-5}$ باشند، مقدار $\frac{1}{5}(2f-g)(3)$ را به‌دست آورید.

$\frac{1}{5}\left(2f(3)-g(3)\right)=\frac{1}{5}\left(2\times\sqrt{3+6}-\frac{3+2}{3-5}\right)=\frac{1}{5}\left(2\times 3-\frac{5}{-2}\right)=\frac{1}{5}(6+2/5)=\cdots$

مثال 4- اگر $f(x)=2x-\sqrt{4x^2-1}$, $g(x)=2x+\sqrt{4x^2-1}$ باشند، آنگاه نمودار تابع $(f.g)(x)$ را رسم کنید.

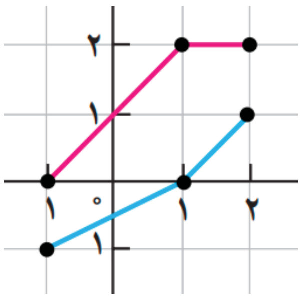
$$(f.g)(x)=f(x)\times g(x)=\left(2x-\sqrt{4x^2-1}\right)\times\left(2x+\sqrt{4x^2-1}\right)$$

$$=4x^2-(4x^2-1)=1$$

$D_{f.g}=D_f\cap D_g=(+\infty,-\frac{1}{2}]\cup\left[-\frac{1}{2},+\infty\right)$

$D_f: 4x^2-1\geq 0\Rightarrow x^2\geq\frac{1}{4}\Rightarrow\cdots$ $\quad$ $D_g: 4x^2-1\geq 0\Rightarrow x^2\geq\frac{1}{4}\Rightarrow$

مثال 5- اگر $f(x)=\sqrt{x}+1$, $h(x)=\sqrt{x}-1$ باشد، نمودار، ضابطه و دامنه $f\times g$, $f\pm g$, $\left(\frac{h}{2g}\right)(1)$ را به‌دست آورید.



مثال 6- نمودارهای دو تابع f (قرمز)، g (سبز) داده شده است.

الف) ابتدا ضابطه توابع g, f را بنویسید.

ب) حاصل $(f\pm g)(x)$ را حساب کنید نمودار های آن را رسم کنید.

ب) حاصل $(f\div g)\left(\frac{3}{2}\right)$ را حساب کنید نمودار های آن را رسم کنید.

مثال7- فرض کنیم $\begin{cases} h: N\to N \\ h(n)=\frac{n}{2} \end{cases}$, $f: A\to N$ به این صورت تعریف شود:

که در آن $A=\{1,2,3,4\}$ $\qquad$ $f=\{(1,-2),(-2,-4),(3,6),(4,A)\}$

ضابطه توابع $(f^2-fg)(x), (f+g)(x)$ را به‌دست آورید.

فصل چهارم

مثلثات

۱- یادآوری سال دهم و رادیان ۲- نسبت‌های مثلثاتی زوایای دیگر ۳- نمودار توابع $cosx$ و $sinx$ $y =$

۱- یادآوری:

در سال گذشته مباحث زیر را یاد گرفتید:

۱) دایره مثلثاتی(دایره واحد) و ویژگی های آن. ۲)نسبت های مثلثاتی در مثلث قائم الزاویه

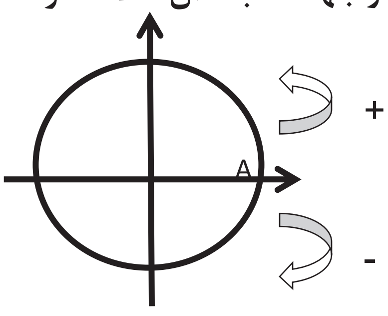
۳) نسبت های مثلثاتی برخی زوایای مهم از قبیل: 0°، 30°، 45°، 60°، 90°، 180°، 270°، 360°

۴) روابط بین نسبت های مثلثاتی ۵) مساحت چند شکل هندسی ۶) شیب خط و $\tan \alpha$

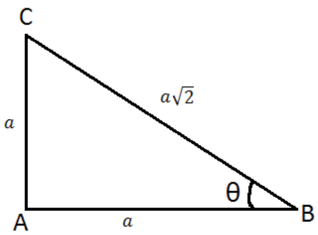
از هر قسمت چند مثال:

مثال۱) دایره مثلثاتی را تعریف کنید.

دایره ای به مرکز مبدا مختصات و شعاع واحد و جهت دار که شروع از A می باشد و جهت مثبت آن خلاف حرکت عقربه‌های ساعت است.



مثال۲) در یک مثلث متساوی الساقین قائم الزاویه ، نسبت های مثلثاتی زاویه ی ساق و قاعده را بیابید.



$$\sin\theta = \frac{AC}{BC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin 45^{\circ}$$

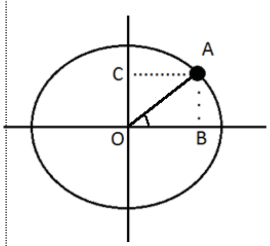
$$\cos\theta = \frac{AB}{BC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45^{\circ}$$

$$\tan\theta = \frac{AC}{AB} = \frac{a}{a} = 1 = \tan 45^{\circ} \rightarrow \cot\theta = 1$$

مثال۳) مقدار عددی عبارت زیر را بدست آورید.

الف) $A = \sin 30 \times \cos 180 + \sin 180 \times \cos 30 = \frac{1}{2} \times (-1) + 0 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} + 0 = -\frac{1}{2}$

ب) $B = \tan 60 + 2\cot 30 - \sin 90 = \sqrt{3} + 2 \times \sqrt{3} - 1 = 3\sqrt{3}$



مثال۴) اگر $\cos\alpha = \frac{2}{5}$ و α در ناحیه چهارم باشد ، سایر نسبت های مثلثاتی را بدست آورید.

می دانیم که در دایره مثلثاتی اگر $A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ باش، آنگاه : $OC = \sin\theta$ و $OB = \cos\theta$ و $OA = 1$

با توجه به مطالب بالا داریم:

$$\cos\alpha = \frac{2}{5} = x \rightarrow x^2 + y^2 = 1 \rightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^2 + y^2 = 1 \rightarrow y^2 = 1 - \frac{4}{25} = \frac{21}{25} \rightarrow |y| = \frac{\sqrt{21}}{5} \rightarrow y$$

$$= \pm\frac{\sqrt{21}}{5} \xrightarrow{\text{ناحیه در چهارم}} y = -\frac{\sqrt{25}}{5}, \tan\alpha = \frac{y}{x} = \frac{-\frac{\sqrt{25}}{5}}{\frac{2}{5}} = -\frac{\sqrt{21}}{2}, \cot\alpha = -\frac{2}{\sqrt{25}}$$

مثال۵) با توجه به دایره مثلثاتی حدود $\cos\theta$ و $\sin\theta$ را بدست آورید.

$-1 \leq \sin\theta \leq 1$ و $-1 \leq \cos\theta \leq 1$

مثال۶) مساحت مثلث متساوی الاضلاع به ضلع ۶ سانتیمتر، چند برابر مساحت شش ضلعی منتظم به ضلع ۴ سانتیمتر است؟

1 $\boxed{S_{\Delta} = \frac{1}{2} \times a \times b \times \sin C} \Longrightarrow \frac{1}{2} \times 6 \times 6 \times \sin 60 = 18 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$

❷ $S_{\hexagon} = 6 \times \left(a^2 \times \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = a^2 \times \frac{3\sqrt{3}}{2} = 16 \times \frac{3\sqrt{3}}{2} = 24\sqrt{3} \quad \Longrightarrow$ ❶, ❷ $\frac{9\sqrt{3}}{24\sqrt{3}}$

مثال ۷) درست و نادرست را تعیین کنید.

الف) $\sin\theta + \cos\theta = 1$ ب) $1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\sin^2\theta}$ ج) $1 - \sin^2\theta = \cos^2\theta$

د) $\tan\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$ ه) $\sin(\propto + \beta) = \sin\propto + \sin\beta$ و) $\sin(90 - \alpha) = \cos\alpha$

ز) $\cos(180 - \alpha) = -\cos\alpha$

در سال یازدهم مباحث زیر را در مورد مثلثات مورد بررسی قرار می‌دهیم.

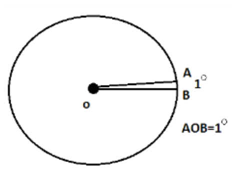
۱) واحدهای زاویه (درجه و رادیان)

۲) نسبت‌های مثلثاتی $\alpha \pm \pi K$ و $\alpha \pm K\frac{\pi}{2}$ و $\alpha + \beta$ بر حسب α و β $(k \in z)$

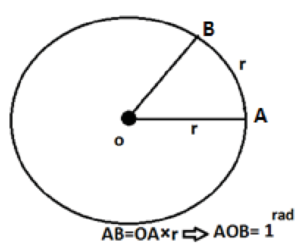
۳) توابع مثلثاتی (تابع سینوس و نمودار آن و ویژگی ها - تابع کسینوس و نمودار آن و ویژگی ها)

۴) برخی کاربردهای مثلثاتی در حل مسائل

۱. واحد های زاویه:

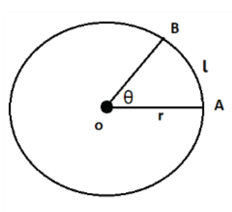


الف) درجه : اگر دایره را به ۳۶۰ قسمت مساوی تقسیم کنیم، به یک قسمت آن درجه گفته می شود.



ب) رادیان : زاویه ای که اندازه ی کمان روبرو به آن برابر شعاع دایره باشد را یک رادیان می گوییم.

با توجه به این تعریف اندازه ی زاویه ی θ بر حسب رادیان که طول کمان رو به رو به آن زاویه l و شعاع دایره r باشد ، از رابطه زیر بدست می آید:



$$\theta^{rad} = \frac{l}{r} = \frac{AB}{r}$$

نکته: اگر D اندازه زاویه ای بر حسب درجه و R اندازه آن بر حسب رادیان :

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$$

مثال۱) یک رادیان چند درجه است؟

ب) یک درجه چند رادیان است؟

مثال۲) زوایای زیر را بر حسب درجه بدست آورید:

الف) $\frac{\pi}{20}^{rad} \to \frac{D}{180} = \frac{R}{\pi} \to \frac{D}{180} = \frac{\frac{\pi}{20}}{\frac{\pi}{1}} \to \frac{D}{180} = \frac{1}{20} \to D = 9^\circ$

روش دیگر: به جای π ، ۱۸۰ قرار میدهیم. یعنی:

$$\frac{\pi}{20} \Rightarrow \frac{180}{20} = 9^\circ$$

ب) $6^{rad} \Rightarrow \frac{D}{180} = \frac{6}{\pi} \Rightarrow \pi D = 180 \times 6 \Rightarrow D = \frac{180\times 6}{\pi} = 345^\circ$

ج) $15^\circ \Rightarrow \frac{15}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow 15\pi = 180R \Rightarrow R = \frac{15\pi}{180} \to R = \frac{\pi}{12}$

سوال: π برابر ۱۸۰ است یا تقریباً ۳/۱۴؟

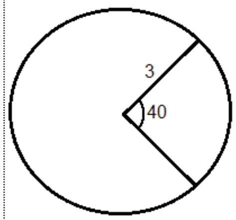
π یک عدد حقیقی گنگ است که تقریب آنرا ۳/۱۴ در نظر می گیریم اما به لحاظ واحد اندازه گیری زاویه خواهیم داشت: π رادیان برابر است با ۱۸۰ درجه. یعنی:

$$\frac{3}{14}^{rad} \simeq \pi^{rad} = 180^\circ$$

نکته: طول کمان AB و مساحت قطاع AOB از دایره به شعاع r از روابط زیر نیز بدست می‌آید:

$$\text{طول کمان} = L = \pi r \frac{\alpha^\circ}{180} \qquad \text{و} \qquad \text{مساحت قطاع} = S = \pi R^2 \frac{\alpha^\circ}{360}$$

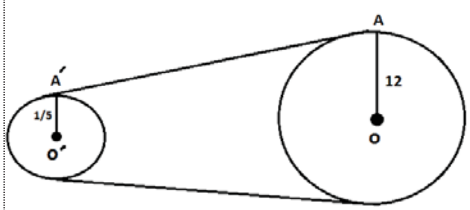
مثال ۲) در شکل روبرو اندازه‌ی زاویه α را برحسب رادیان بدست آورید؛ سپس طول کمان AB و مساحت قطاع کوچک آن را حساب کنید.



$$\frac{40}{180}=\frac{R}{\pi}\Rightarrow 180R=40\pi\Rightarrow R=\frac{40\pi}{180}=\frac{2\pi}{9}^{rad} \quad \text{و} \quad \theta=\frac{l}{\pi}\Rightarrow\frac{2\pi}{9}=\frac{l}{3}\Rightarrow l=\frac{2\pi}{3}$$

مثال۳) در دایره ای به شعاع ۴ س.م توسط زاویه ای θ کمانی به طول ۶ س.م بریده می شود. مقدارθ به رادیان چقدر است؟

مثال۴) در شکل مقابل وقتی قرقره بزرگتر $\frac{\pi}{4}$ رادیان بچرخد ، قرقره کوچکتر چند رادیان می چرخد؟



ابتدا مسافتی که قرقره بزرگتر طی می کند را حساب می کنیم. $l=PP^{\prime}$

$$\theta=\frac{l}{r}\rightarrow\frac{\pi}{4}=\frac{l}{12}\rightarrow l=3\pi=\frac{9}{42}$$

به دلیل متصل بودن دو قرقره به یکدیگر، قرقره‌ی کوچک نیز همین مسافت را طی می کند؛ یعنی در قرقره کوچک داریم:

$$\theta=\frac{l}{r}\rightarrow\theta=\frac{3\pi}{\frac{1}{5}}=\frac{\frac{3\pi}{1}}{\frac{3}{2}}=2\pi\rightarrow\theta=2\pi^{rad}$$

یعنی وقتی قرقره بزرگتر $\frac{1}{8}$ دور ($\frac{\pi}{4}$) میچرخد، قرقره کوچکتر یک دور کامل می چرخد.

نکته: $\boxed{\frac{\theta_1}{\theta_2}=\frac{r_2}{r_1}}$

پس: $\frac{\theta_1}{\theta_2}=\frac{r_2}{r_1}\Rightarrow\frac{\frac{\pi}{4}}{\theta_2}=\frac{\frac{3}{2}}{12}\Rightarrow\theta=2\pi$

مثال۵) اندازه زاویه ای که عقربه ی ساعت شمار از ساعت ۱ بعد از ظهر تا ۴ بعد از ظهر حرکت می کند را بر حسب درجه و رادیان بیان کنید.

عقربه ساعت شمار از ساعت ۱ تا ۴ ، ۳ تا ۵ دقیقه حرکت می کند. هر یک دقیقه ، شش درجه است بنابرین $90=6\times15$ حرکت کرده است.

$$\frac{D}{180}=\frac{R}{\pi}\rightarrow\frac{90}{180}=\frac{R}{\pi}\rightarrow R=\frac{90\pi}{180}=\frac{\pi}{2}rad$$ یعنی $\frac{\pi}{2}$ رادیان حرکت کرده است

مثال۶) زاویه ی بین عقربه های ساعت شمار ودقیقه شمار از چه رابطه ای بدست می آید؟ در ساعت h و M دقیقه

۱) زاویه عقربه شمار با عدد ۱۲: $0.5\ \times(M+60h)=\alpha$

۲) زاویه دقیقه شمار با عدد ۱۲: $6\times \mathrm{M}=\beta$

۳) زاویه ی A بین عقربه‌های ساعت شمار و دقیقه شمار:

$$\boxed{\widehat{A}=\alpha-\beta=5.5M-30h}$$

مثال۷) چه مدت طول می‌کشد تا عقربه دقیقه شمار به اندازه‌ی $\frac{5\pi}{2}$ رادیان دوران کند؟

مثال۸) چرخ و فلکی ۴۰ کابین شماره گذاری شده دارد. اگر در آغاز حرکت از نقطه A خلاف عقربه های ساعت، شما روی کابین ۴ نشسته باشید ، بعد از $\frac{49\pi}{10}$ رادیان دوران ، شما در موقعیت کدام کابین قرار دارید؟

مثال۹) در شکل فاصله ی بین دو تهران و مشهد تقریباً چندکیلومتر است؟(O مرکز زمین)

تهران : A و مشهد : B و $AB=6320$ **و** $A\widehat{O}B=10^{\circ}$

مثال۱۰) در یک مخروط، شعاع ۵ س.م و ارتفاع ۱۲ س.م می باشد. اندازه زاویه قطاع حاصل از شکل گسترده این مخروط چند رادیان است؟

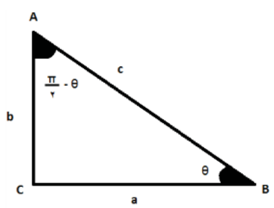
مثال۱۱) طول برف پاک کن جلوی اتومبیلی۳۵ س.م است. اگر برف پاک کن کمانی به اندازه ی ۱۲۰ درجه طی کند:

الف) اندازه کمان بر حسب رادیان چقدر است؟

ب) طول کمان طی شده توسط نوک برف پاک کن چقدر است؟

۲. نسبت های مثلثاتی برخی زوایا:

در سال قبل نسبت های مثلثاتی زوایای ۳۰ ، ۶۰ ، ۴۵ ،۰،۹۰ ، ۱۸۰ ، ۲۷۰ و ۳۶۰ درجه و علامت نسبت ها را در چهار ناحیه یاد گرفتید. جهت یاد آوری:



$$\sin(\theta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

$$\cos(\theta) = \;\dots\dots\dots\dots =$$

نکته: در ناحیه اول دایره ی واحد، زوایا و نسبت‌های مثلثاتی آنها برای سینوس و تانژانت رابطه مستقیم دارند و در کسینوس و کتانژانت رابطه عکس دارند. مثلاً:

$\sin 41° > \sin 30°$ و $\tan 20 > tan 10$ و $cos 90 < \cos 40°$ و $\cot 18° < \cot 17°$

نسبت های مثلثاتی زوایای مهم:

	0	۳۰	۴۵	۶۰	۹۰	۱۸۰	۲۷۰	۳۶۰
Sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0

Cos								
tan								
cot								

مثال: حاصل را بدست آورید.

$$A: \frac{\sin^2 30° - 2\cos^4 30° + \cos 180° - \sin 360°}{\tan^2 60° - 3\cot 60° + \sqrt{3}\tan 45° - \tan 360} = \ ...$$

۳. نسبت‌های مثلثاتی $K\pi \pm \alpha$ (K عددی صحیح است)

۱) زاویه را به صورت مجموع و یا تفاضل مضرب صحیحی از °۱۸۰ و α می‌نویسیم.

۲) مضرب صحیح و ۱۸۰ و علامت را حذف می‌کنیم (πK±) و نسبت را با α می‌نویسیم.

۳) علامت نسبت مثلثاتی زاویه‌ی اصلی سوال را در ناحیه‌ی مربوطه‌اش پشت نسبت مثلثاتی جواب می گذاریم.

مثال:

$\sin 240 = \sin(180 + 60) = -\sin 60 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 240 در ناحیه سوم است

$\cos(3\pi - \alpha) = -\cos\alpha$ $3\pi - \alpha$ در ناحیه دوم است

$\tan(121\pi + \beta) = -\tan\beta$ مضارب زوج π همان 2π هستند و مضارب فرد π همان π هستند

نسبت های مثلثاتی $\frac{k\pi}{2} \pm \alpha$; (K فرد صحیح است)

۱) زاویه را به صورت مجموع و یا تفاضل مضرب صحیح فردی از $\frac{\pi}{2}$ و α می نویسیم.

۲) ($\frac{k\pi}{2} \pm$) را حذف و نسبت مثلثاتی متقابل آن را می نویسیم. یعنی $\cos \leftrightarrow \sin$ و $\cot \leftrightarrow \tan$

۳) علامت نسبت مثلثاتی صورت سوال را با توجه به زاویه‌ی اصلی پشت جواب می‌گذاریم.

مثال: $\sin 250° = \sin(270 - 20°) = -\cos 20°$

$$\cos 130° = \cos(90 + 40°) = -\sin 40°$$

$$\cot(\frac{125\pi}{2} + \alpha) = \left(\frac{124\pi + \pi}{2} + \alpha\right) = \tan\left(62\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot\alpha$$

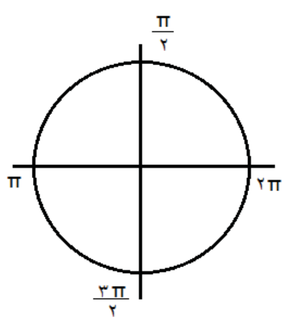
مثال: حاصل؟

الف) $\sin\left(-\frac{7\pi}{3}\right) =$

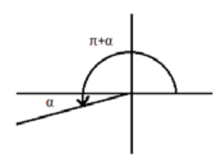
ب) $\cos(135°) + \sin\left(405\pi + \frac{\pi}{6}\right) =$

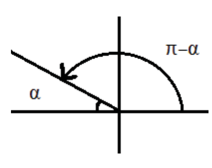
ج) $\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) - sin^3\left(3\pi + \frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{3}\cos\left(\frac{97\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) =$

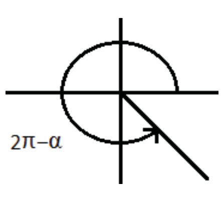
۶. علامت نسبت های مثلثاتی را در چهار ناحیه دستگاه مختصات تعیین کنید:



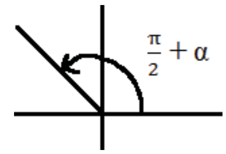
نسبت های مثلثاتی $\pi \pm \alpha$ و $2\pi \pm \alpha$ و بطور کلی $K\pi \pm \alpha$





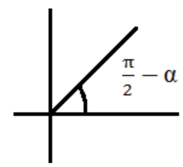


نسبت های مثلثاتی $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ و $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$



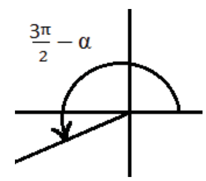
$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) =$ $\qquad$ $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) =$

$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) =$ $\qquad$ $\cot\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) =$



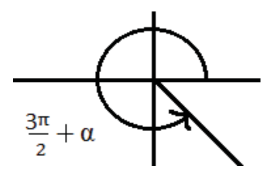
$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha$ $\qquad$ $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin\alpha$

$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cot\alpha$ $\qquad$ $\cot\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \tan\alpha$



$\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) =$ $\qquad$ $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) =$

$\tan\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) =$ $\qquad$ $\cot\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) =$



$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right) = -\cos\alpha$ $\qquad$ $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right) = +\sin\alpha$

$\tan\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right) = -\cot\alpha$ $\qquad$ $\cot\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right) = -\tan\alpha$

۴. بین نسبت های مثلثاتی روابط زیر برقرارند:

A: $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ $\qquad$ $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ $\qquad$ $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$

B: $\tan\theta \,.\, \cot\theta = 1$ $\qquad$ $\tan\theta = \frac{1}{\cos\theta}$ $\qquad$ $\cot\theta = \frac{1}{\sin\theta}$

C: $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ $\qquad$ $cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

D: $1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$ $\qquad$ $1 + \cot^2\theta = \frac{1}{\sin^2\theta}$

مثال۲) ۶ درجه چند رادیان است؟ ۳ رادیان چند درجه است؟

$$\frac{D}{180}=\frac{3}{\pi}\to D=\ \frac{180\times3}{\pi}=172°\frac{6}{180}=\frac{R}{\pi}\to R=\frac{6\pi}{180}\xrightarrow{rad} R=\frac{\pi}{30}\ rad$$

مثال۳) زوایای زیر کاربرد بیشتری دارند. در دایره ی مثلثاتی جایگاه آنها را تعیین کنید.

$\pi=$ $\quad\frac{\pi}{2}=$ $\quad\frac{\pi}{4}=$ $\quad\frac{\pi}{8}=$ $\quad\frac{3\pi}{4}=$

$\frac{7\pi}{4}=$ $\quad\frac{\pi}{3}=$ $\quad\frac{\pi}{6}=$ $\quad\frac{\pi}{12}=$ $\quad\frac{5\pi}{3}=$ $\quad\frac{7\pi}{6}=$

مثال۴) حاصل را بدست آورید.

$$A=\sin\frac{121\pi}{3}+\cos\left(18\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt3}{2}+\frac{\sqrt3}{2}=\sqrt3$$

$$\sin\frac{121\pi}{3}=\sin\left(\frac{120\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(40\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}=\sin60=\frac{\sqrt3}{2}\ ,\cos\left(18\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\cos60$$

$$B{:}\ \sin(\alpha-3\pi)+\tan\left(\frac{11\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha-\cot\alpha$$

$$\sin(\alpha-3\pi)=-\sin\alpha\quad ,\ \tan(\frac{11\pi}{2}+\alpha)=-\cot\alpha$$

مثال۵) اگر $\tan15=\frac{0}{28}$ باشد، حاصل عبارت زیر را بیابید.(زوایا درجه‌اند) (تجربی ۹۴)

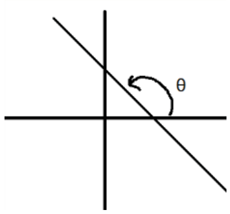
$$A=\frac{\cos285-\sin255}{\sin525-\sin105}=\cdots$$

مثال۶) اگر $\tan\theta=\frac{0}{2}$ باشد ، مقدار $\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)-\cos(\pi+\theta)}{\sin(\pi-\theta)-\sin(3\pi+\theta)}$ را بیابید.(ریاضی ۹۱)

مثال۷. مقادیر ممکن برای x را بیابید. $\cos(40^\circ + x) = sinx$

مثال۸. مقادیر ممکن برای x را بیابید. $\cos(25^\circ + x) = -sinx$

نکته: اگر خط l با محور Ox زاویه ی θ در جهت مثبت مثلثاتی بسازد، در این صورت شیب خط l برابر است با $\tan\theta$ یعنی:



y=mx+b

m= tan θ

مثال۵) خط l با محور Ox زاویه $\frac{5\pi}{6}rad$ می سازد. شیب خط را بدست آورید.

$$m = \tan\frac{5\pi}{6} = \tan\frac{6\pi - \pi}{6} = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\tan\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

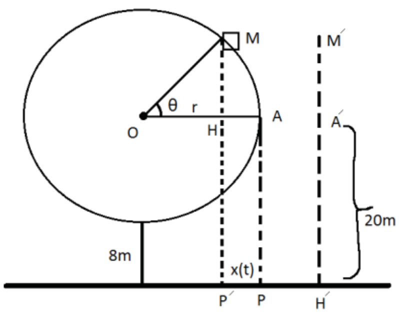
توابع مثلثاتی:

هر تابعی که متغیر در جایگاه زاویه‌ی نسبت مثلثاتی قرار بگیرد را تابع مثلثاتی نامند.

مثال۶) حاصل را بیابید.

$$f(x) = -2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - cos6x + 1$$

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = -2\sin\left(\frac{2\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right) - cos\frac{6\pi}{6} + 1 = -2sin120^\circ - (-1) + 1 = -2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 = \cdots$$



مثال۷) فرض کنید چرخ و فلکی به قطر ۲۴متر داریم که هر ۴ دقیقه یک دور در جهت مثبت می چرخد. اگر پایین ترین نقطه چرخ و فلک ۸ متر بالای زمین باشد و کابین خاصی از چرخ و فلک را در نظر گرفته باشیم که در لحظه ۰ = t در نقطه ی A باشد و روبه بالا در حال حرکت است.الف) در هر لحظه ارتفاع کابین از سطح زمین را مشخص کنید. ۱. پس از گذشت t ثانیه ، کمانی که کابین طی می کند چند رادیان است؟

۲. تابعی بنویسید که ارتفاع کابین را نسبت به زمان نشان دهد.

ارتفاع کابین = M´H´= H´A´+A´M´ $\qquad$ **h(θ)=20+12sinθ**

A´H´=12+8=20 $\quad$ OMH: $\sin\theta = \frac{MH}{OM} = \frac{MH}{12} \Rightarrow MH = 12\sin\theta \qquad \theta = \frac{\pi t}{120}$

جواب الف : $h(t) = 20 + 12\sin\frac{\pi t}{120}$

ب) اگر در لحظه ی t فاصله سایه این کابین روی زمین تا نقطه P را با $x(t)$ نمایش دهیم ، تابع آن:

$$x(t) = PP' = AH = OA - OH = 12 - 12\cos\theta \ , OMH: \quad \cos\theta = \frac{OH}{12} \rightarrow OH = 12\cos\theta$$

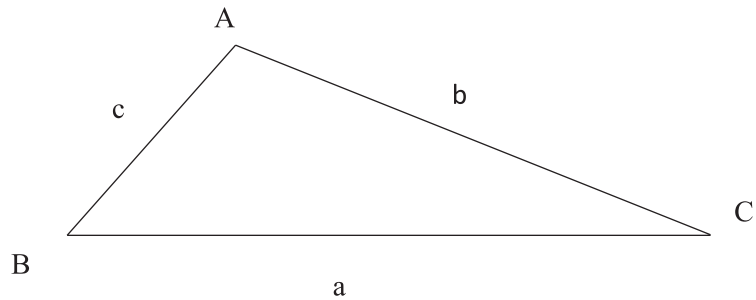
$$\Rightarrow x(\theta) = 12 - 12\cos\theta \ \text{ و } \ \theta = \frac{\pi t}{120} \qquad \Rightarrow \boxed{x(t) = 12 - 12\cos\frac{\pi t}{120}}$$

ج) اگر کابین از نقطه ی A ، زاویه ی $\frac{7\pi}{6}$ رادیان طی کند ، ارتفاع کابین و طول سایه را بیابید.

قانون کسینوس‌ها:

تعمیم یافته ی قضیه ی فیثاغورس در مورد تمام مثلث ها به صورت زیر است که روابط آن به قانون کسینوس ها معروف است.

$$\boxed{\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A} \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos\widehat{B} \\ c^2 &= b^2 + a^2 - 2ba\cos\widehat{C} \end{aligned}}$$



دستور مساحت‌ها:

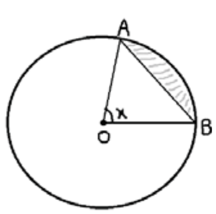
مساحت مثلث ABC با توجه به معلوم بودن طول دو ضلع و زاویه‌ی بین آنها :

$$\boxed{S = \frac{1}{2}ab\sin\widehat{C} = \frac{1}{2}ac\sin\widehat{B} = \frac{1}{2}cb\sin\widehat{A}}$$

قانون سینوسها:

به کمک دستور مساحت‌ها (مساوی قرار دادن رابطه های بالا) رابطه زیر را بدست می‌آید:

$$\frac{\sin\widehat{A}}{a} = \frac{\sin\widehat{B}}{b} = \frac{\sin\widehat{C}}{c}$$



مثال۱۲) وتر AB به سمت مرکز دایره در حال حرکت است. (x برحسب رادیان) الف) تابعی بسازید که مساحت قطاع دایره را بر حسب x نمایش دهد.

ب) تابع تغییرات وتر بر حسب x را به دست آورید. $AB = \sqrt{2r^2(1 - cosx)}$

$$\text{مساحت قطاع} = \frac{1}{2}r^2x \quad \text{و} \quad \text{مساحت مثلث} = \frac{1}{2}r \times r \times sinx$$

$AB^2 = r^2 + r^2 - 2r.r.cosx \rightarrow AB$
$2r^2cosx \Rightarrow$

$$S = \frac{1}{2}r^2x - \frac{1}{2}r^2sinx \implies$$

$$\boxed{AB = r\sqrt{2(1 - cosx)} \quad \text{و} \quad S(x) = \frac{1}{2}r^2(x - sinx)}$$

با توجه به جدول روبرو نمودار سینوس به شکل زیر است:

مثال: نمودار توابع $y = sinx + 1$ و $g = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ و $t = -sin2x$ و $h = 2sinx$ را رسم کنید.

ویژگی‌ها: (در تمام نکات $k \in \mathbb{Z}$)

۱- دوره تناوب ان $T = \frac{2\pi}{|\text{ضریب ایکس}|}$ یعنی نمودار تابع $y = sinx$ در فاصله 2π تکرار می‌شود.

۲- نمودار، محور طول‌ها را در نقاط $x = k\pi$ قطع می‌کند. در واقع صفرهای تابع $2k\pi$ است.

۳- مقدار ماکزیمم تابع در نقاطی به طول $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ است که برابر با یک است.

۴- مقدار مینیمم تابع در نقاطی به طول $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$ است که برابر با منفی یک است.

مثال: نکات ۱ الی ۴ را در مورد تابع $f(x) = 2sin\left(\frac{x}{5}\right) - 1$ بررسی و تعیین کنید.

رسم نمودار تابع کسینوس

با توجه به جدول روبرو نمودار کسینوس به شکل زیر است:

مثال: نمودار توابع $y = sinx + 1$ و $g = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ و $t = -sin2x$ و $h = 2sinx$ را رسم کنید.

ویژگی‌ها:

۱- دوره تناوب ان $T = \frac{2\pi}{|\text{ضریب ایکس}|}$ یعنی نمودار تابع $y = cosx$ در فاصله 2π تکرار می‌شود.

۲- نمودار، محور طول‌ها را در نقاط $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$ قطع می‌کند. یعنی صفرهای تابع $2k\pi$ است.

۳- مقدار ماکزیمم تابع در نقاطی به طول $x = 2k\pi$ است که برابر با یک است.

۴- مقدار مینیمم تابع در نقاطی به طول $x = (2k+1)\pi$ است که برابر با منفی یک است.

مثال: نکات ۱ الی ۴ را در مورد تابع $f(x) = -\frac{1}{2}cos(-2x) + 1$ بررسی و تعیین کنید.

مثال: به روش رسم نمودار مقدار تقریبی $sin2$ و $sin2^\circ$ و $cos\sqrt{2}^\circ$ و $cos5$ را تعیین کنید.

مثال: به روش رسم مجموعه جواب معادلات را بیابید:

الف) $0 = |cosx| - 1 \quad : \quad [-2\pi, 2\pi]$ ب) $2sinx + 1 = 0 \quad : \quad [-\pi, \pi]$

ج) $4 = sinx + 2 \quad : \quad [-4\pi , 2\pi]$ د) $2cosx - \sqrt{3} = 0 \quad : \quad [-\pi , 2\pi]$

مثال: نمودار توابع زیر را رسم کنید:

الف) $y = -|sinx| + 1 \quad [0 , 2\pi]$ ب) $y = 2\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 1 \quad [-\pi , \pi]$

ج) $y = [sinx] - 1 \quad [-2\pi , 2\pi]$ د) $y = \begin{cases} \sin(-x) & [0 , \pi] \\ -cosx & [-\pi , 0] \end{cases}$

کار در کلاس

۱) نمودارتوابع زیر را رسم کنید:

$A)\ y = \frac{1}{2} + |\cos x| \qquad [0, 2\pi]$

$B)\ y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \qquad [0, 2\pi]$

$C)\ y = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 1$

$D)\ y = -\sin 2x + 1$

۲) درست و نادرست را تعیین کنید.

الف) $\cos x$ یعنی کسینوس زاویه ای از دایره مثلثاتی که اندازه ی آن x درجه باشد.

ب) $\sin\sqrt{2}$ یک عدد حقیقی است. ج) $\sin 2 = \sin 2^{\circ}$

د) اگر $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ باشد ، آنگاه $-1 < \cos x < 0$

هـ) عددی می توان یافت که کسینوس آن $\frac{3}{2}$ باشد.

و) همواره داریم $|\sin x| \le 1$, $|\cos x| \le 1$

ز) $x = -\frac{\pi}{2}$ صفر تابع $y = \cos x$ می باشد و $x = 0$ صفر تابع $y = \sin x$ است.

ح) همواره داریم $(k\epsilon z)$ $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$

ط) $\sin(\pi + \theta) - \sin\theta = 0$ ی) $\sin(\alpha + \alpha) = 2\sin\alpha$

۳) مقدارهای مثلثاتی زیر را بدست آورید.

$$A)\ \sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right) =$$

$$B)\ \tan 225^{\circ} + \cos\left(-\frac{7\pi}{4}\right) =$$

$$C)\ \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{2\pi}{3}\right) =$$

۷) اگر $\sin\alpha - \cos\alpha = \frac{1}{2}$ باشد ، مقدار زیر را بدست آورید. (تجربی ۹۵)

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha\right) = ?$$

۸) اگر $\tan x = \frac{4}{3}$ باشد ، مقدار زیر را بدست آورید. (تجربی ۹۶)

$$\tan\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2} = ?$$

۹) حاصل را بدست آورید. (A: تجربی ۹۴ و B: ریاضی ۹۱)

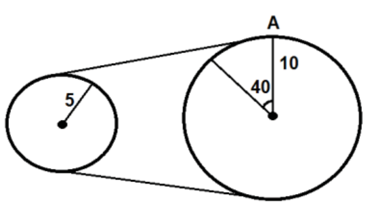
$$A)\ \tan 15 = 0/28 \ \rightarrow \ \frac{\cos 285 - \sin 255}{\sin 525 - \sin 102} = ?$$

$$B)\ \tan \theta = 0/2 \ \rightarrow \ \frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) - \cos(\pi + \theta)}{\sin(\pi + \theta) - \sin(3\pi + \theta)} = ?$$

$$C)\ \frac{\sin 91^\circ + \sin 92^\circ + \cdots + \sin 179^\circ}{\sin 1^\circ + \sin 2^\circ + \sin 3^\circ + \cdots + \sin 89^\circ} =$$

$$D)\ \tan\frac{\pi}{7} + \tan\frac{2\pi}{7} + \tan\frac{3\pi}{7} + \cdots + \tan\frac{6\pi}{7} =$$

۱۰) در شکل اگر نقطه A ، ۴۰ درجه جابه جا شود، چرخ کوچکتر چند درجه جابه جا می‌شود؟



۱۱) نقاط برخورد دو تابع $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ و $y = 1 - |sinx|$ را به کمک رسم نمودار بیابید.

۱۲) مقادیر $\sin 5^\circ$, $\cos 7^\circ$, $\cos 0^\circ$, $\cos 85^\circ$, $\sin 100^\circ$, $\sin 5$ را با رسم نمودار بیابید.

۱۳) زاویه قطاع حاصل از گسترده‌ی مخروطی با شعاع قاعده ۴ و ارتفاع ۱۰واحد چند رادیان است؟

۱۴) حاصل عبارت $A=\frac{\sin x+\cos x}{2}+\frac{|\sin x-\cos x|}{2}$ به ازای $x\epsilon\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ را بدست آورید.

۱۵) مساحت قطاعی از دایره به شعاع ۵ سانتیمتر که طول کمان آن $\frac{3}{2}$ است را بیابید.

۱۶) حاصل را بیابید.

$$A)\ \sin(\pi-x)+\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)+\sin(\pi+x)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=$$

$$B)\ \tan(\alpha-13\pi)\,.\,\cot(87\pi+\alpha)-\cos(16\pi-\alpha)\,.\,\cos(\alpha-36\pi)=$$

$$C)\ \cot 34^{\circ}=1/5\ \rightarrow\ \frac{2\sin 326^{\circ}+3\sin 56^{\circ}}{\cos 304}=$$

۱۷) نمودار توابع زیر را رسم کنید و دوره تناوب آنها را تعیین کنید.

$$A)\ y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$B)\ y=-\cos\frac{x}{3}+1$$

$$C)\ y=cos^2x$$

$[-\pi\ ,2\pi]$ مجموعه جواب x دربازه $\Rightarrow D)\ \frac{1}{2}=cosx+1$ و $\left|2sin\frac{x}{2}\right|=\sqrt{3}$

۱۸) ساده شده کسر رو به رو را بدست آورید. (ریاضی۹۱)

$$\frac{(1+\tan^2 x)(1+\cot^2 x)}{1-\sin^2 \alpha-\cos^4 x}=?$$

۱۹) دامنه ی توابع زیر را بدست آورید. نمودار قسمت (B) و (C) را رسم کنید.

$$A)y=\frac{1}{[\cos \pi x]}$$

$$B)\ y=\frac{\sin x}{\sin x}$$

$$C)\ y=\frac{\cos x}{\cos x}$$

فصل پنجم

توابع نمایی و لگاریتم

۱-تابع نمایی ۲-تابع لگاریتمی و لگاریتم ۳-ویژگی های لگاریتم و معادلات لگاریتمی

۱-توابع نمایی و لگاریتم

در این فصل ابتدا با تابع نمایی و نمودار آن و ویژگی‌های این تابع و کاربردهایی از آن آشنا می‌شویم. سپس با تابع لگاریتم و نمودار آن و قوانین آن و چند مورد از کاربرد لگاریتم را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

الف) **تابع نمایی**: هر تابع با نمایش جبری $f(x)=\mathrm{a}^{\mathrm{x}}$ که در آن $a\neq 1$ و $a>0$ را یک تابع نمایی می‌نامیم.

مثال۱. نمودار تابع $y = 2^x$ را رسم کنید و ویژگی‌های آن را بنویسید.

A) تابع (۱-۱) است. پس وارون دارد

B) این تابع صعودی است (افزایشی است)

C) $D_f = \mathbf{R}$, $\mathbf{R}_f = (0, +\infty)$

مثال ۲. نمودار تابع $y = 2^{-x}$ را رسم کنید و ویژگی‌های آن را بنویسید .

مثال ۳. کدام یک از توابع زیر نمایی نیستند؟ چرا؟

الف) $y = (-2)^x$ ه) $y = \sqrt{2}^x$

ب) $y = \pi^x + 1$ ج) $y = 2 \times 3^{x-1}$ د) $y = 1^x$

مثال ۴. جاهای خالی را پر کنید.

در تابع $f(x) = a^x$:
A **اگر $a > 1$ با افزایش مقدار x مقادیر f .... می یابند.**
B **اگر $0 < a < 1$ با افزایش مقدار x مقادیر تابع f............. می یابند.**

مثال۵. نیمه عمر یک ماده رادیواکتیو ۱۰ ساعت است (یعنی بعد از گذشت ۱۰ ساعت نصف مقدار اولیه آن از دست می رود و این روند ادامه دارد. اگر مقدار اولیه این ماده ۴ گرم باشد.

الف)بعد از گذشت ۴۰ ساعت چه مقدار ماده می ماند؟

ب)بعد از چه مدت ۱۰ گرم از این ماده باقی می‌ماند؟

ج) آیا با گذشت زمان این ماده تمام می شود؟ چرا؟

نکته:

تابع نمایی یک ماده با مقدار اولیه k واحد جرم و نیمه عمر i بعد از گذشت زمان t ، $f(t)$ مقدار ماده باقی می- ماند.مقدار ماده باقی مانده از تابع زیر به دست می‌آید.

$$f(t) = k\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{i}}$$

در این تابع k مقدار اولیه $k =$ مقدار اولیه $t =$ زمان $f(t) =$ مقدار ماده مانده

الف) $t = 40$

$$f(t) = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{j}} \Rightarrow f(40) = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{40}{10}} = 4 \times 2^{-4} = 4 \times \frac{1}{16} = \frac{1}{4} \Rightarrow$$

ب)

$$f(t) = 1 \Rightarrow 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{10}} = 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{10}} = \frac{1}{4} \Rightarrow 2^{-\frac{t}{10}} = 2^{-2} \Rightarrow t = 20$$

ج)خیر، زیرا این تابع نمایی است و مقدار آن به صفر نزدیک می شود اما صفر نمی شود.

مثال6.

الف) نمودار سه تابع $y = 2^x$ و $y = 3^x$ و $y = 5^x$ را رسم کنید و آنها را با هم مقایسه کنید.

ب) نمودار سه تابع $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x , y = \left(\frac{1}{3}\right)^x , y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ را رسم کنید و آنها را با هم مقایسه کنید.

مثال۷. نیمه عمر کربن ۱۴، ۵۷۳۰ سال است مقدار آن بعد از t سال از رابطه $Q(t) = 10\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}}$ به دست می آید.

الف)مقدار اولیه این کربن چقدر است؟ ب)بعد از گذشت ۱۷۱۹۰ سال مقدار این نوع کربن چقدر است؟

ج)بعد از گذشت چند سال مقدار این کربن صفر می شود؟

مثال۸. اگر a و b دو عدد حقیقی مثبت و مخالف ۱ ، x و y دو عدد حقیقی دلخواه باشند حاصل عبارت زیر را بنویسید و مثال بزنید:

1) $a^0 =$ 2) $a^1 =$ 3) $a^x \times a^y =$

4) $a^x \div a^y$ 5) a^{-x} 6) $(a^x)^y =$

7) $(ab)^x =$ 8) $\left(\frac{a}{b}\right)^x =$ 10) $a^{\frac{x}{y}} =$

مثال۹. نامعادله و معادله‌های زیر را حل کنید:

الف) $3^x \times 9^{x+1} = 81 \div 3^{-5}$

ب) $2^{\sqrt{3}+\sqrt{2}} \times 3^{\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}} = 36^{x+\sqrt{3}}$

ج) $8^{2x-1} > \frac{1}{512}$

۱۰. داروها در بدن با ادرار دفع می شوند. فرض کنید ۱۰ میلی گرم از یک نوع دارو در بدن شخصی قرار دارد و مقدار آن پس از t ساعت از رابطه $A(t) = 10 \times (0/8)^t$ به دست می‌آید.

الف)مقدار دارو پس از ۶ ساعت چقدر است؟ ب)چه درصدی دارو در دو ساعت از بین می رود؟

مثال۱۱. درست و نادرست را تعیین کنید:

الف) عدد $\sqrt{8}$ بین 2^2 و 2^3 است.

ب) مقدار تقریبی $2^{\sqrt{7}}$ برابر $5/3$ است.

ج) هر تابع به فرم $y = ka^x \quad ; k \neq 0 , a \neq 1 , a > 0$ رفتار تابع نمایی دارد.

د)رابطه $q(t) = 10 \times \left(\frac{4}{5}\right)^t$ مقدار نمک حل نشده در آب پس از t دقیقه است. پس از ۲ دقیقه مقدار نمک حل نشده در آب $6/4$ گرم است.

ه) $a^x < a^y < a^z \quad : \quad x, y, z \in R$

تمرین در منزل

۱. نمودار توابع زیر را به کمک انتقال رسم کنید

۱) $y = 2^{x+1}$

۲) $y = 2^{-x-1}$

۳) $y = -2^{x}$

4) $y = 2^{x} + 1$

۵) $y = 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{x} + 1$

۲. نمودارهای دو تابع $f(x) = 4^{x}$ و $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x} + \frac{3}{2}$ در نقطه A متقاطع اند. فاصله نقطه A از نقطه $A(-1, 1)$ را بیابید.(ریاضی ۹۶)

۳. نمودارهای توابع $y = (\frac{\sqrt{3}}{3})^{2x}$ و $y = 3^{x} + \frac{8}{3}$ در نقطه A متقاطع اند. فاصله نقطه A از نقطه $A(-1, 1)$ را بیابید. (ریاضی ۹۶)

۴. در تابع $f(x) = ab^{x}$ و $f(0) = \frac{3}{2}$ و $f(-2) = \frac{3}{32}$ و $b > 0$. مقدار ?= $f\left(\frac{3}{2}\right)$ را بیابید.(تجربی ۹۲)

۵. مجموعه جواب را بیابید :

الف) $16^{x^2-\frac{1}{4}} < 8^x$

ب) $9^x - 3^x - 2 = 0$

ج) $2^{x+2} = 12$

۶. رفتار کدام یک از توابع زیر نمایی است؟

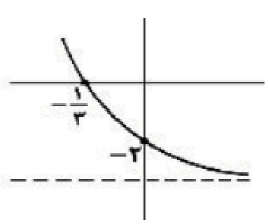
الف) $y = 2x + 1$ ب) $y = x^2 + 1$ ج) $y = \frac{x-2}{x}$ د) $y = \sqrt{2}^x - 1$

۷. جدول مقابل معرفی یک تابع نمایی است. نمایش جبری آن را بنویسید.

x	۰	۱۰	۲۰	۳۰
y	۸۰	۴۰	۲۰	۱۰

۸. اگر نمودار $f(x) = ab^x - 1$ از دو نقطه $A\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ و $B(1, 11)$ بگذرد , $f(-1) = ?$ (تجربی ۹۳)

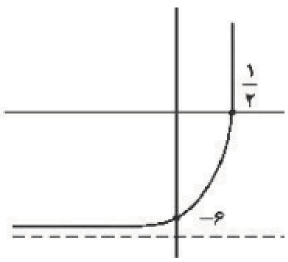
۹. شکل نمودار تابع $f(x) = -4 + 2^{ax+b}$ است. $f\left(-\frac{5}{3}\right) = ?$ (کنکور۹۹)



۱) ۵۴ ۲) ۶۰ ۳) ۴۸ ۴) ۲۸

۱۰. نمودار $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x}-1 & x\le 1\\ 2^x & x>1\end{cases}$ و $g(x)=x^2$ در چند نقطه متقاطع اند؟(قلم چی ۹۵)

۱۱. شکل نمودار تابع $f(x)=-9+\left(\frac{1}{3}\right)^{ax+b}$ است. $f(2)=?$ (کنکور۹۹ خارج)



۱) ۲۳۴ ۲) ۱۰۸ ۳) ۱۸ ۴) ۷۲

۲– تابع لگاریتمی و لگاریتم

تابع $y=a^x$ $(a\neq 1, a>0)$ یک به یک است بنابراین وارون پذیر است. نمودار وارون آن را نسبت به خط $y=x$ رسم می کنیم و آنرا f^{-1} می نامیم و با نماد $y=log_a^x$ معرفی می کنیم.

مثال ۱. وارون توابع $y=3^x$ و $y=\left(\frac{1}{5}\right)^x$ را بنویسید و نمودار آنها را رسم کنید.

$y=3^x \rightarrow$

$y=\left(\frac{1}{5}\right)^x \rightarrow$

مثال ۲. عبارات زیر را با نماد لگاریتم بنویسید:

الف) $7^3 = 343 \quad \rightarrow$

ب) $4^0 = 1 \quad \rightarrow$

ج) $\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81} \quad \rightarrow$

د) $5^1 = 5 \quad \rightarrow$

ه) $2^{-5} = \frac{1}{32} \quad \rightarrow$

و) $\left(\frac{1}{10}\right)^{-3} = 1000 \quad \rightarrow$

مثال ۳. با توجه به یافتن تابع لگاریتمی از روی تابع نمایی دامنه تابع $f(x) = log_{B(x)}^{A(x)}$ را تعیین کنید.

مثال ۴. دامنه توابع زیر را به دست آورید:

الف) $y = log_{(2-x)}^{(x+1)}$

ب) $y = log_{(4-x^2)}^{(x^2-9)}$

ج) $y = \log(x^2 - 2x + 1)$

د) $y = \sqrt{log_{0/5}^{(x+1)}} \ : \ log_{0/5}(x+1) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad 0 < x+1 \leq 1 \rightarrow -1 < x \leq 0 \quad \Rightarrow$

$D_y = (-1\,, 0]$

$y = \sqrt{log_3(2x-4)} \quad : \qquad log_3(2x-4) \geq 0 \ \Rightarrow$

$\Rightarrow \ \left[\frac{2}{5}, \infty\right) \qquad \begin{cases} 2x-4 > 0 \rightarrow x > 2 \\ 2x-4 \geq 1 \ \rightarrow x \geq \frac{5}{2} \end{cases} \ \Rightarrow x \geq 2/5$

مثال۱: نمودار توابع زیر را رسم کنید.

$A)\ y = 2^x$

$B)\ y = \left(\frac{1}{2}\right)^2$

$C)\ y=\log_2 x$

$D)\ y=\log_{\frac{1}{2}} x$

مثال ۵. درست و نادرست را تعیین کنید.

الف) لگاریتم عدد صفر برابر یک است.

ب) $(m,n)\in f(x)=a^x \Leftrightarrow (n,m)\in f^{-1}(x)=log_a^x$

ج) در تابع $f(x)=\sqrt{2}^x$ داریم $f^{-1}(8)=6$

د) نمودار تابع $y=log^{(x+10)}$

ه) $a>b>0 \ \Rightarrow\ log_{\frac{1}{2}}^a > log_{\frac{1}{2}}^b$

تمرین در کلاس

۱. در هر قسمت مقدار a را به دست آورید.

الف) $log_{\frac{1}{2}}^{(x+1)}=3$

ب) $log_{(x-1)}^{64}=3$

ج) $log_2^{32}=x^2+1$

۲. حاصل عبارات زیر را به دست آورید :

الف) $log\, 0/001=\cdots$ ب) $log_{25}^{\frac{1}{5}}=\cdots$

ج) $log_3^{\sqrt{3}} = \cdots$ د) $log_{25} \sqrt[4]{125} = \cdots$

۳. نمودار توابع $y = log_3^x$ و $g = log_{\frac{1}{3}}^x$ را رسم کنید و با یکدیگر مقایسه کنید.

۴. الف) خط $y = 25$ نمودار تابع $y = 5^x$ را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند؟

ب) خط $y = 100$ نمودار تابع $y = (0/1)^x$ را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند؟

ج) خط $y = -4$ نمودار $y = log_{0/5}^x$ را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند؟

د) خط $y = -16$ نمودار تابع $y = 2^x$ را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند؟

ه) نمودار دو تابع $y = 2^{-x}$ و $y = log_{0/5}^x$ یکدیگر را در چه نقطه یا نقاطی قطع می‌کنند؟

۵. نمودار هر یک توابع زیر را به کمک انتقال رسم کنید.

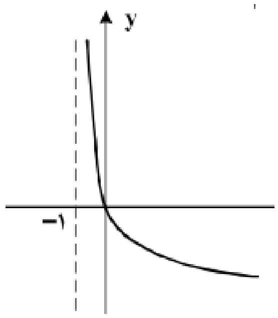
الف) $y = -2^x - 1$

ب) $y = log_3^{(x-2)}$

ج) $y = -\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$

د) $y = 1 - log_{\frac{1}{2}}^x$

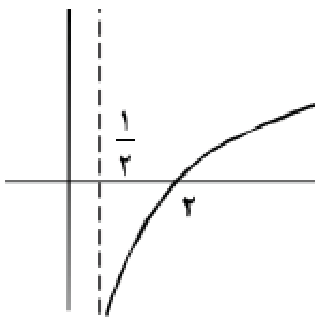
۶. در چه بازه‌ای نمودار تابع $y = 2^x$ بالای نمودار تابع $y = x^2$ قرار دارد؟ (هر نمودار را در یک دستگاه رسم کنید)



۷. شکل روبرو نمودار $y = log_2\, U(x)$ است. $U(x)$ کدام است؟

۱) $x+1$ ۲) $x-1$

۳) $(x+1)^{-1}$ ۴) $1-x$



۷. شکل روبرو نمودار $y = -1 + log_b\,(2x+a)$ است. این منحنی خط $y = 1$ را با کدام طول، قطع می‌کند؟

۱) ۴ ۲) ۵

۳) ۶ ۴) ۷

۸. درست و نادرست را تعیین کنید.

الف) تابع $y = log_{\frac{1}{2}}^{x}$ محور y ها را قطع می‌کند.

ب) از تساوی $log_a^x = \log(y-1)$ نتیجه می‌گیریم که $x - y + 1 = 0$ (با شرط $a \neq 1, a > 0$)

ج) نمودار $y = log_2|x|$ تابعی یک‌به‌یک است. د) با شرط $x > 0$; $logx^2 = log^2x$

۳– ویژگی‌های لگاریتم و حل معادله‌های لگاریتمی

در این مبحث به بیان و اثبات روابط و ویژگی های لگاریتم می پردازیم.

1) $\boxed{a^0 = 1 \implies log_a^1 = 0}$ $(a > 0\,,\ a \neq 1)$: $log_2^1 = 0$

2) $\boxed{a^1 = a \implies log_a^a = 1}$ $(a > 0\,, a \neq 1)$ مثال : $log_5^5 = 1$

$$3)\ log_c(A \times B) = log_c^A + log_c^B$$ $: A > 0\,,\ B > 0\,,\ c > 0, c \neq 1$

اثبات:

$$\left.\begin{array}{l} log_c A = x \Longrightarrow c^x = A \\ log_c B = y \Longrightarrow c^x = B \end{array}\right\} \Longrightarrow A \times B = c^x \times c^y = c^{x+y} \Longrightarrow \dots$$

$$4)\ log_c(\frac{A}{B}) = \log_c A - \log_c B$$ A و B و $C > 0$ و $C \neq 1$

اثبات:

$$\left.\begin{array}{l} log_c A = x \Longrightarrow c^x = A \\ \log_c B = y \Longrightarrow c^y = B \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{A}{B} = \frac{c^x}{c^y} = c^{x-y} \Longrightarrow \dots$$

۵) $log_{10} A = \log A$ اگر لگاریتمی مبنا نداشت، مبنای آن ۱۰ است.

6) $log_c A^m = m \times log_c A$, $log_{c^n} A = \frac{1}{n} \times log_c A$, $log_{c^n} A^m = \frac{m}{n} log_c A$

7) $A^{log_A B} = B$

8) $A^{{log^C}_B} = C^{{log^A}_B}$

9) $\boxed{{log^A}_B \times {log^B}_c \times {log^c}_D = {log^A}_D \quad ; \quad {log^A}_B = \frac{1}{{log^B}_A}}$

مثال۱.حاصل را بنویسید :

الف) $\log 5 = \log\frac{10}{2} = log 10 - log 2 = 1 - log 2 \Longrightarrow log 5 = 1 - log^2$

ب) $log_3 15 = log_3\ 3 \times 5 = log_3 3 + log_3 5 = 1 + log_3 5$

ج) $\log \sqrt[3]{20} = \log 20^{\frac{1}{3}} = \log(10 \times 2)^{\frac{1}{3}} = {}^1/_3\,(\log 10 + \log 2) = {}^1/_3 - {}^1/_3\ log^2$

د) $\log 0/25 = \log\frac{25}{100} = log\frac{1}{4} = log1 - log4 = 0 - \log 2^2 = -2log2$

ه) $\log 1/5 =$

و) $\log\sqrt[5]{50} =$

ز) $\log 2 \times \sqrt{8} =$

ح) $log\frac{\sqrt[3]{20}}{\sqrt{20}} =$

ط) $log_8(9x+1) = ?$ $\Leftarrow$ $(0/4)^{2x-1} = (\frac{125}{8})^{x^2}$ (تجربی۹۸) اگر

مثال۲. اگر $\log 2 \simeq 0/3$, $\log 3 \simeq 0/4$ باشد مقدار عددی عبارت زیر را به دست آورید:

الف) $\boxed{\log(15 \times \sqrt{45}) =}$ $\log(20 \times \sqrt{54}) = ?$

$\text{Log}\,(3^2 \times 5^{\frac{3}{2}}) = \log 3^2 + \frac{3}{2}\log 5 = 2\log 3 + \frac{3}{2}(1 - log2) = 2\log 3 + \frac{3}{2} - \frac{3}{2}log2 =$

$$2 \times 0/4 + \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \times 0/3 = 0/8 + 0/7 \times 1/5 = 0/8 + 1/05 = 1/85$$

$15 \times \sqrt{45} = 3 \times 5 \times (45)^{\frac{1}{2}} = 3 \times 5 \times (3^2 \times 5)^{\frac{1}{2}} = 3 \times 5 \times 3^{2\times\frac{1}{2}} \times 5^{\frac{1}{2}} = \cdots$

$\boxed{\text{ب) } 2log5 + 3log2 - 4log3 = logA \Rightarrow A = ?}$ $2\log 3 - 3\log 4 = ?$

$2log5 + 3log2 - 4log3 = log5^2 + log3^2 - log3^4 = log\frac{25\times 8}{81} = \cdots$

$\boxed{\text{ج) } \log_3 2 \simeq 0/6 \Rightarrow \log_2 12 = ?}$ $\log_5 3 \simeq 0/6 \Rightarrow \log_2 \frac{0}{75} = ?$

$$\mathrm{Log}_2 12 = log_2(2^2 \times 3) = {log^{2^2}}_2 + {log^3}_2 = 2\log_2 2 + \frac{1}{\log_3 2} = \cdots$$

د) $\log_{20} 24 = ? \quad \Rightarrow \frac{\log 24}{log20} = \frac{log^{2^3\times 3}}{log^{2^2\times 5}} = \frac{log^{2^3}+log3}{log^{2^2}+log5} = \frac{2log2+log^3}{2log2+1-log2} = \cdots$

$$\boxed{{log^A}_B = \frac{{log^A}_c}{{log^A}_c}}$$

ه) $\boxed{10^{1/3} = ?}$ $\quad 10^{1/3} = 10^1 \times 10^{0/3} = 10 \times 10^{log^2} = 10 \times 2 = 20$

$$\boxed{A^{{log^B}_A} = B}$$

و) $\boxed{log_2 12 = d \Rightarrow 4^{d-2} = ?}$ (خارج۹۶)

$$log_2 12 = d \Rightarrow 2^d = 12 \Rightarrow \left(2^d\right)^2 = 12^2 \Rightarrow 4^{d-2} = 144 \div 4^2 \Rightarrow \frac{4^d}{4^2} = 9$$

اگر b و a ریشه‌های معادله $\quad x^2 - 10x + 0/1 = 0$ باشد حاصل را بیابید: (تجربی ۸۸)

ز) $loga + logb - \log(b+a) = ?$

$a \times b = \frac{c}{a} = 0/1$ و $a + b = -\frac{b}{a} = 10$

$$loga + logb - \log(a+b) = \log(a \times b) - \log(a+b) = \cdots$$

ح)(تجربی۹۰)$log2 = k \quad \Rightarrow \quad \log(6 - 2\sqrt{5}) + 2\log(1 + \sqrt{5}) = ?$

$$\log(6 - 2\sqrt{5}) + \log(6 - 2\sqrt{5}) = \log(6 - 2\sqrt{5})(6 + 2\sqrt{5}) = \cdots$$

ط) (تجربی۹۰) $log5 = 3k \quad \Rightarrow \quad log\sqrt[3]{1/6} = ?$

۱۰- درست و نادرست را تعیین کنید:(تمام لگاریتم ها تعریف شده‌اند)

الف) $\log(A+B) = \log A \times \log B$

ب) $\frac{logA}{logB} = log\frac{A}{B}$

د) $2 < log153 < 3$

ج) $log^n A = logA^n$

ه) $log_B \sqrt[n]{A^m} = log_{n_B} A^m$

ح) $\log 3_{0/5} < 0$

و) $log^3{}_2 \times log^2{}_3 = 1$

ز) $10^{1-2log3} = \frac{1}{1/8}$

ط) $log^{(x^2+1)} > 0$

۲- اگر $log2 = a$ و $log3 = b$ و $log7 = c$ باشد حاصل را بدست آورید:

الف) $log_8\sqrt{49} = ?$

ب)(تجربی۸۱): $log_b a = \frac{3}{2} \implies log_{\sqrt{b}} ab^2 =$

ج)(تجربی۸۶) $log^3 + log\sqrt[4]{3} = log(81)^k \implies log_2\frac{5}{k} = ?$

د)(ریاضی۹۰) $log_8 2\sqrt[3]{0/25} = A \implies log_4(\frac{1}{A} - 1) = ?$

۳- تابع $f(x) = \log_3(ax+b)$ فقط برای مقادیر $x \in (-\frac{1}{2}$ و $+\infty)$ با معنی است. اگر $f(4) = 2$ باشد آن گاه $f\left(-\frac{4}{9}\right) = ?$ (ریاضی۹۰)

۴- نمودار $f(x) = -2 + (\frac{1}{2})^{Ax+B}$ نمودار $y = x^2 - x$ را در دو نقطه به طول های 2 و 1 قطع می کند.؟ $f(3) =$ (ریاضی۹۷)

حل معادله و نامعادله های لگاریتمی

۱- برای حل معادله $log_{\mathrm{B}}\mathrm{A(x)} = \mathrm{C}$ کافی است مطابق تعریف لگاریتم به معادله توانی تبدیل کنیم و x را بیابیم یعنی :

$$\mathrm{log_B A(x)} = C \quad \Longrightarrow \quad B^C = A(x)$$

۲- برای حل معادله شامل لگاریتم ابتدا به کمک قوانین لگاریتم دو طرف تساوی را تبدیل به یک لگاریتم می کنیم یعنی $log_c A(x) = log_c B(x)$ ، حتما باید بر مبناها برابر باشند و ضریب نداشته باشند. سپس لگاریتم ها را از دو طرف حذف می کنیم و مقدار x را می یابیم.

۳- در هر دو قسمت (1) و (2) جوابی از x قابل قبول است که باعث صفریا منفی شدن عبارت جلوی لگاریتم نمی شود.

مثال ۱- در هر قسمت مجموع جواب معادله‌های زیر را بدست آورید :

الف) $log_2(2x+1) = 3 \Longrightarrow 2^3 = 2x+1 \Rightarrow \cdots$

ب) $log_3(x+5) = 1 + \log_3(3x+1)$

$$log_3(x+5) = log_3^3 + log_3(3x+1) \;\Rightarrow\; \log(x+5) = log_3^{3(3x+1)} \;\Rightarrow$$

ج) (تجربی ۹۳) $log_{\mathrm{x}}(\mathrm{x}^2+4) = 1 + \mathrm{log}_{\mathrm{x}}^5 \;\Rightarrow\; \mathrm{log}_2^{\mathrm{x}} = ?$

$$log_x(x^2+4) = log_x^x + log_x^5 \;\Rightarrow\; log_x(x^2+4) = log5x_x \;\Rightarrow\; x^2+4 = 5x \;\Rightarrow\; x^2 - 5x + 4 = 0 \;\Rightarrow\; (x-1)(x-4) = 0 \begin{cases} x = 1 \longrightarrow \text{غ ق ق} \\ x = 4 \longrightarrow \text{م ج} \end{cases} \Rightarrow$$

د) (خارج ۹۳) $log_x(3x+8) = 2 - log_x(x-6) \;\Rightarrow\; log_4^x = ?$

ه) (خارج ۸۹) $log_2^x = 1 + log_2(y+1) \quad , \quad x^2 - y^2 = 32 \;\Rightarrow\; log_4(x+y) = ?$

$$log_2^x = 1 + log_2(y+1) \;\Rightarrow\; log_2^x = log_2^2 + log_2(y+1) \;\Rightarrow$$

$$log_2^x = log_2 2(y+1) \Rightarrow x = 2y+2 \Longrightarrow x = 2y+2$$

$$x^2 - y^2 = 32 \Longrightarrow (2y-2)^2 - y^2 = 32 \Longrightarrow 4y^2 + 8y + 4 - y^2 = 32 \Longrightarrow 3y^2 + 8y - 28$$

$$\Rightarrow (y+2)(3y+2) = 32 \Rightarrow 4 \times 8 = 32 \Rightarrow y+2 = 4 \Rightarrow y = 2 \longrightarrow x = 2 \times 2 + 2 = 6 \longrightarrow x = 6 \Rightarrow log_4(2+6) = log_4^8 == \frac{3}{2} log_2^2 = \frac{3}{2} \times 1$$

و) (تجربی ۹۱) $logx + \log(x-1) = 1 + log2 \Rightarrow x^2 + x =?$

$$logx + \log(x-1) = 1 + log2 \Rightarrow \log x(x-1) = log20 \Rightarrow$$

$$x(x-1) = 20 \Rightarrow x^2 - x - 20 = 0 \quad (x-5)(x+4) = 0 \longrightarrow$$

$$x = -4, 5 \longrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + x \\ 25 + 5 \end{cases} = 30$$

ز) (تجربی ۸۳) $log\frac{2}{x} + \log(1+x) = 1 \Rightarrow log_8^x =?$

تمرین در کلاس

۱.مجموعه جواب معادله های زیر را به دست آورید.

الف) $log_2(5x+1) + log_2^x = 1$ (تجربی۸۰)

ب) $4\sqrt{2} = 4^x \;,\; 1 + log\sqrt{x+1} = logy \Rightarrow y =?$ (تجربی۸۵)

ج) (تجربی ۹۶) $\begin{cases} 2^{x-1} \times 4^{x+y} \\ log y = 2log^3 + log x \end{cases} \Rightarrow y = ?$

د) (ریاضی۹۵) $log_2(2x^2+1) - \log_2(x+2) = 1 \Rightarrow \log_8(2x-1) = ?$

ه) $log_2(x^2-x-6) - log_2(x-3) = \log_2(2x-5) \Rightarrow \log_4 \sqrt[3]{x+1}$

و) $log_b^a + 3log_b^n = 3log_b(n-1) \Rightarrow x = ?$ $(n \in N$ ، $b > 0,\ b \neq 1)$

ز) $log_x^{(3x+8)} = 2 - log_x^{(x-6)} \Longrightarrow \log_{32} x = ?$

ح) $\log(y-x) + \log(4x+y) = 2$ و $\log(y+2) = 1 \Longrightarrow x = ?$

ط) $(\log_2 m)^2 - \log_2 m^2 = 8$

ز) $\left(2^x - 3^{2\log_3 8}\right)\left(4^x - 5^{\log_{25} 8}\right) = 0$

2. دامنه تعریف توابع را به دست آورید.

الف) $y = \sqrt{log_{\frac{1}{5}}(2x+1)}$

ب) $y = \sqrt{1 - \log(x^2 + 3x)}$

ج) $y = log_{(1-x^2)}(x^2 - 4)$

د) $y = \sqrt{log_2 \frac{x-2}{x+2}}$

ز) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - log_{\frac{1}{3}}(x-1)}}$

مثال۲: درست و نادرست را تعیین کنید.

A) $\log_2 x + \log_2 y = \log_2 xy$

$B)$ $\log_2 x \div \log_2 y = \log_2 x - \log_2 y$

C) $\log_2 3^2 \times 2 = 2 \log_2 6$

$D)$ $\log 5 = 1 - \log 2$

مثال۳: اگر $\log_2(x^2 - 4) = 2 + \log_2(x - 1)$ حاصل $\log_3(2x - 1)$ را بیابید.

مثال۴: دامنه توابع زیر را بیابید.

$f(x) = \sqrt{\log_2 (\log_{\frac{1}{2}}(2x - 1))}$ $\qquad g(x) = \log_{(2x+1)}(1 - x^2)$

3. کدام راه حل درست است؟چرا؟

الف)
$$\begin{cases} 1) \quad log_3^x = 243 \ \Rightarrow\ 3^x = 243 \ \Rightarrow\ x = 5 \\ \qquad\qquad\qquad \text{یا} \\ 2) \quad log_3^x = 243 \qquad \Rightarrow\ 3^{243} = x \end{cases}$$

ب)
$$\begin{cases} 1)\ \log(2x-1) = 0 \ \Rightarrow\ log2x - log^1 = 0 \ \Rightarrow\ log2x = 1 \ \Rightarrow\ x = \frac{1}{2} \\ \qquad\qquad log_A^1 \boxed{= 0} \\ 2)\ \log(2x-1) = 0 \ \Rightarrow\ 2x - 1 = 10 \ \Rightarrow\ 2x = 11 \ \Rightarrow x = \frac{11}{2} \end{cases}$$

کاربردهای لگاریتم

در این مبحث با چهار نوع کاربرد لگاریتم در قالب مثال هایی آشنا می شویم:

۱. آهنگ رشد یا زوال جمعیت　　　　۲. اندازه گیری بزرگی زمین لرزه

۳. میزان باقیمانده ماده‌ای که نیمه عمر دارد　　　　۴. محاسبه PH یک محلول.

مثال۱. تابع جمعیت جهان در انتهای هر سال به صورت $g(x) = 0/008 \times (1/01376)^x$ برآورد می شود .

الف)جمعیت جهان در سال ۲۰۱۶ تقریبا چقدر است؟

$$g(2016) = 8 \times 10^{-3} \times (1/01376)^{2016} = 7385074512$$

ب) درچه سالی جمعیت جهان به ۸ میلیارد خواهد رسید؟

۸ میلیارد $= g(t) = 8 \times 10^9$

$$8 \times 10^{-3} \times (1/01376)^t = 8 \times 10^9 \ \Rightarrow\ (1/01376)^t = 10^{12} \quad \Rightarrow$$

$$\log(1/01376)^t = log_{10}^{10^{12}} \quad \Rightarrow$$

$$t\log(1/01376) = 12 \;\Rightarrow\; t = \frac{12}{\log(1/01376)} = \frac{12}{0/005935} = 2021$$

یعنی حدودا در سال ۲۰۲۱ جمعیت جهان به ۸ میلیارد می‌رسد.

مثال۲. جمعیت یک نوع باکتری برحسب زمان از رابطه $f(t) = 80 \times e^{0/03t}$ به دست می آید.

(t برحسب سال) در واقع ۸۰ مقدار اولی، ۳٪ نرخ رشد جمعیت در هر سال، $e \cong 2,718$ است.

الف)بعد از گذشت ۱۵ سال جمعیت چه قدر خواهد بود؟

$$f(15) = 80 \times e^{\frac{3}{100}\times 15} \quad = 80 \times (2718)^{0/45} =$$

ب) بعد از گذشت چه زمانی سه برابر جمعیت اولیه را خواهیم داشت. $(log_e^3 \simeq 1/1)$

سه برابر مقدار اولیه (۸۰) یعنی ۲۴۰.

$$f(t) = 80e^{0/3t} \;\Rightarrow\; 240 = 80e^{0/3t} \;\Rightarrow\; 3 = e^{0/3t} \;\Rightarrow$$

$$log_e^3 = log_e^{e^{0/3t}} \;\Rightarrow\; log_e^3 = 0/3\,t \;\Rightarrow\; 1/1 = 0/3\,t \;\Rightarrow\; t = \frac{1/1}{0/3} = \frac{11}{3}$$

یعنی حدود ۳ سال و ۸ ماه جمعیت سه برابر خواهد شد.

نکته: اساس کار در مسایل رشد و زوال استفاده از رابطه $f(t) = kx^{\frac{t}{i}}$ است.

مثال۳. در لحظه شروع کشت ۱۰۰۰۰ باکتری داریم.اگر ضریب رشد $k = 0/4$ باشد، پس از چند دقیقه ۳۰۰۰۰ باکتری وجود دارد؟$(log_e^3 = 1/1)$. تعداد باکتری ها در دو دقیقه اول چقدر است؟

نکته: مقدار انرژی آزاد شده برحسب ارگ(Erg) از رابطه زیر حاصل می شود:

$$\log E = 1/5M + \frac{11}{8}$$

مثال۴. ریشتر، مقیاسی برای اندازه‌گیری بزرگی زمین لرزه و نماد میزان انرژی آزاد شده در زلزله است. اگر بزرگی زمین لرزه برابر M در مقیاس ریشتر باشد.

الف)مقدار انرژی آزاد شده در یک زلزله $5/2$ ریشتری چقدر است؟

ب)اگر در یک زلزله $10^{17/8}$, ارگ انرژی آزاد شده باشد, زلزله چند ریشتری بوده است؟

ج) اگر یک ریشتر به یک زلزله M ریشتری افزوده شود,چه مقدار انرژی آزاد شده بیشتر می گردد؟

مثال۵. مقدار انرژی آزاد شده در یک زلزله $6/2$ ریشتری را محاسبه کنید.

مثال۶. اگر انرژی آزاد شده در یک زلزله $10^{19/3}$ ارگ باشد، بزرگی زلزله در واحد ریشتر چقدر است؟

مثال۷. نیمه عمر یک ماده هسته‌ای حدود ۲۰ سال است. اگر جرم نمونه‌ای از این ماده ۲۵ میلی گرم باشد، الف)رابطه بین t و مقدار جرم باقیمانده را بنویسید.

ب)بعد از گذشت چند سال جرم باقی مانده $2/5$ میلی‌گرم است.

ج)جرم باقی مانده بعد از گذشت چند ۶۰ سال چقدر است؟

د)بعد از گذشت چند سال جرم باقی مانده $0/5$ میلی‌گرم است؟

مثال۸. نیمه عمر یک نوع ماده هسته ای 40 سال است. نمونه ای از این ماده ۱۲۸ میلی گرم جرم دارد. جرمی که پس از ۳۰۰ سال باقی می‌ماند چقدر است؟

مثال۹. نیمه عمر ماده‌ای شش روز و جرم اولیه آن یک گرم است.

الف)جرم $m(t)$ را که پس از t روز باقی می‌ماند بیابید

ب)طی چند روز این جرم به $0/01$ گرم کاهش می‌یابد.

نکته: **طبق تعریف، PH معیاری از میزان اسیدی، بازی (قلیایی)یا خنثی بودن یک محلول است و از رابطه زیر به دست می‌آید:**

$$PH = -log_{10}[H_3O^+]$$

در این رابطه $[H_3O^+]$ غلظت یون هیدرونیوم را نشان می دهد.

مثال۱۰.الف) PH هر یک از محلول های زیر را به دست آورید:

۱)در آب پرتقال غلظت یون هیدرونیوم $[H_3O^+]$ برابر $2/9 \times 10^{-2}$ مول بر لیتر است.

($log29 \cong 1/39$))در شربت معده غلظت یون هیدرونیوم برابر $2/5 \times 10^{-11}$ مول بر لیتر است.

($log25 \cong 1/39$

۳)در آب خالص غلظت یون هیدرونیوم برابر 1×10^{-7} مول بر لیتر است.

اسیدی $\mathrm{PH} < v$, بازی $PH > v$, خنثی $PH = v$

فصل ششم

حد و پیوستگی

۱- مفهوم حد و حدهای یکطرفه ۲- همسایگی و قضایای حد ۳- اعمال جبری روی حد ۴- رفع ابهام صفر صفرم ۵- پیوستگی در یک نقطه و پیوستگی در یک بازه

در این فصل با موضوع‌های زیر آشنا شده و به بررسی آنها می پردازیم.

1)مفهوم و فرایندهای حدی(به کمک رسم نمودار و مسائل مفهومی و همسایگی یک نقطه)

2) حدهای یک طرفه : (حد چپ و راست) 3) قضایای حد: (به کمک حدگیری می آیند)

4) محاسبه حد توابع کسری: (رفع ابهام÷)   5) پیوستگی: (در یک نقطه و در یک بازه)

۱. مفهوم حد

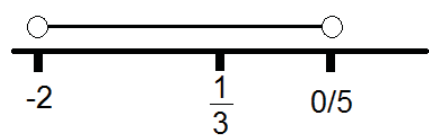
برای پی بردن به مساحت دایره از مفهوم کمک گرفته شده است بدین صورت که:

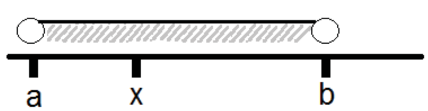
تعداد اضلاع زیاد شود   مساحت شش ضلعی   مساحت مثلث متساوی الاضلاع

ساحت به دایره نزدیک تر می ش $a^2 \times \frac{3\sqrt{3}}{2}$ $a^2 \times \frac{\sqrt{3}}{4}$

تعریف همسایگی:

اگر x_0 یک عدد حقیقی باشد هر بازه باز شامل x_0 را یک همسایگی x_0 می‌گوییم. به لحاظ شهودی یعنی :





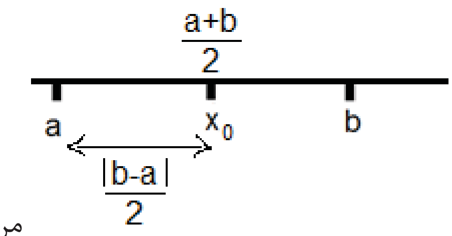
(۰/۵ و ۲−) یک همسایگی $\frac{1}{3}$ است.$\frac{1}{3} \in \left(-2,\frac{0}{5}\right)$

(a,b) یک همسایگی x_0 است هرگاه $x_0 \in (\mathbf{a},\mathbf{b})$

الف) اگر x_0 را از بازه حذف کنیم ؛ مجموعه $(a,b)-\{x_0\}$ را همسایگی محذوف x_0 می نامیم.

ب) اگر x_0 وسط بازه ی (a,b) باشد ، همسایگی متقارن x_0 نامیده می شود و می توان نوشت:

$$\mathbf{x_0}\epsilon(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \Rightarrow \mathbf{x_0}\,\text{همسایگی متقارن}\,(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \rightarrow \left\{x \mid \left|x-\frac{a+b}{2}\right| < \frac{|b-a|}{2}\right\}$$



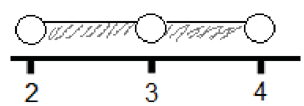
$\varepsilon = \frac{|b-a|}{2} =$ شعاع همسایگی $\delta = \frac{a+b}{2} =$ مرکز همسایگی

ج) اگر x_0 در همسایگی متقارن، حذف شود ؛ $(a,b)-\{x_0\}$ را همسایگی محذوف x_0 می گوییم.

$$(a,b)-\{x_0\} = \{x|\ 0<|x-\delta|<\varepsilon\ ;\ \delta=\frac{a+b}{2}\ ,\varepsilon=\frac{|b-a|}{2}$$

مثال) $\{3\} - (2,4)$ یک همسایگی متقارن محذوف به مرکز 3 و شعاع 1 می باشد.

$(2,4)-\{3\} = \{x|\ |x-3|<1$



همسایگی راست و همسایگی چپ:

د) اگر $r>0$ باشد، در این صورت بازه‌ی $(a,a+r)$ را یک همسایگی راست a و بازه‌ی

$(a+r,a)$ را یک همسایگی چپ a می‌نامیم. مانند بازه‌ی $\left(1,\frac{1}{02}\right)$ که یک همسایگی راست عدد یک و بازه‌ی $\left(-\frac{0}{98},1\right)$ که یک همسایگی چپ عدد یک است.

مثال۲) مجموعه جواب $\left\{x\ |\ \frac{1}{|x-2|}>1\right\}$ همسایگی متقارن محذوف به مرکز چه عدد و شعاع چه عددی است؟

مثال۳) با رسم توابع $y=\sqrt{x+1}$ و $y=\sqrt{\frac{1}{2}-x}$ ، همسایگی‌های چپ و راست را در نقاط بارز نمودار تشریح کنید.

مثال ۴) عدد $x=2$ در تابع $y=\frac{1}{[x]-2}$ چه نوع همسایگی دارد؟ عدد $x=3$ چه نوع همسایگی دارد؟

به طور کلی:

بازه‌ی باز $(a-\delta, a+\delta)-\{a\}$ را یک همسایگی متقارن محذوف a گوییم و می‌نویسیم:

$$(a-\delta, a+\delta)-\{a\}=\{x\,;0\ <|x-a|<\delta\}$$

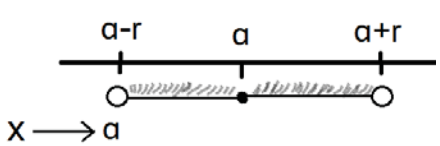
همچنین $a<x<b$ یک همسایگی به مرکز $\frac{a+b}{2}$ و شعاع $\frac{|a-b|}{2}$ است.

مثال ۱-کدام برای همسایگی متقارن محذوف نادرست است؟

1) $\{x\,;\ |x-a|<\delta\}$ 2) $(a-\delta, a+\delta)-\{a\}$

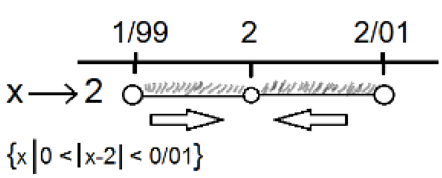
3) $(a-\delta, a)\cup(a, a+\delta)$ 4) $\frac{1}{|x-a|}>\frac{1}{\delta}$

تعریف و معرفی چند اصطلاح و نماد



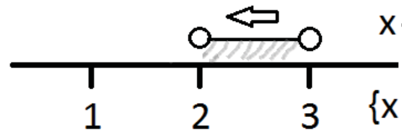
میل کردن (نزدیک شدن) : $x \to a$ **می خوانیم : متغیر x به سمت عدد a میل می کند. (نزدیک می شود.) در این حالت x از دو طرف a ، می تواند به a نزدیک شود.**

مثال)

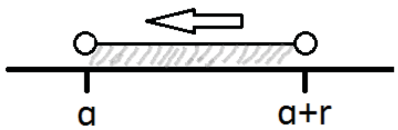


$x \to a^+$: می خوانیم x از سمت راست به عدد a نزدیک می شود. به عبارت دیگر $a < x$ است.

مثال : $x \to 2^+$

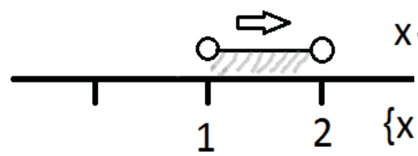


$\{x | 2<x<2+r\}$

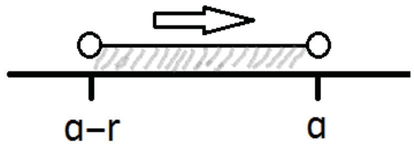


$x \to a^-$: می خوانیم x از سمت چپ به عدد a نزدیک می شود. به عبارت دیگر $a > x$ است.

مثال : $x \to 2^-$



$\{x | 2-r<x<2\}$



حد تابع f در نقطه مانند a

فرض کنیم تابع f با ضابطه f(x) در یک همسایگی عدد a (به جز احتمالا خود a) تعریف شده باشد.

می‌گوییم: حد تابع f وقتی x به a نزدیک میشود برابر عدد حقیقی $\mathcal{L}$ است هرگاه با نزدیک شدن متغیر x به عدد a ($x \neq a$) مقادیر y تابع f به عدد $\mathcal{L}$ ($\mathcal{L} \in \mathbb{R}$) نزدیک میشود و ان را به صورت روبرو می‌نویسیم:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \mathcal{L}$$

نکته: شرط لازم در بحث وجود حد تابع f در نقطه a ، وجود حداقل یک همسایگی محذوف a می باشد و به عبارت دیگر اگر تابع در $x = a$ هیچ همسایگی نداشته باشد، تابع در a حد ندارد.

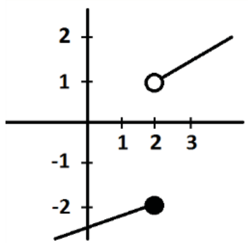
تعریف حد چپ و راست:

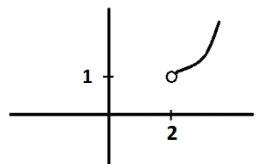
فرض کنیم تابع f در همسایگی چپ نقطه‌ی a تعریف شد باشد. می‌گوییم : حد چپ تابع f در نقطه‌ی a برابر عدد $\mathcal{L}$ است. هرگاه x را از سمت چپ به اندازه کافی به a نزدیک کنیم، آنگاه مقادیر $f(x)$ به عدد $\mathcal{L}$ نزدیک می شود و آنرا با نماد روبرو می نویسیم: $\lim_{x \to a^-} f(x) = \mathcal{L}$

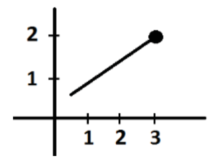
به طور مشابه برای حد راست داریم: $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \mathcal{L}$ یعنی اگر x را به اندازه‌ی کافی از سمت راست به a نزدیک کنیم، آنگاه مقادیر $f(x)$ به عدد $\mathcal{L}$ نزدیک می‌شود.

نکته : برای تعیین حد یک تابع از روی نمودار ابتدا عدد a (که به ان نزدیک میشویم) را روی محور xها مشخص کرده و بررسی می‌کنیم که از سمت چپ و راست آن yان به چه عددی نزدیک می‌شود. مانند: $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = 2$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 1$

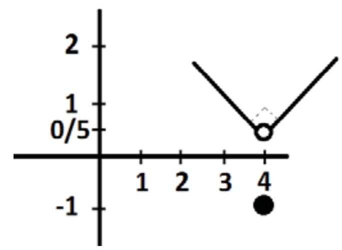






در ۲حد ندارد $\Leftarrow \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -2$ و $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 1$

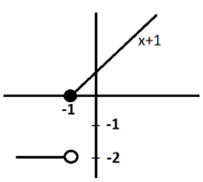
$\Leftrightarrow$ در ۴حد نیم دارد $\Leftarrow \lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = \frac{0}{5}$ و $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = \frac{0}{5}$



قضیه: شرط کافی برای اینکه حد تابع f در نقطه a برابر $\mathcal{L}$ باشد این است که حد راست تابع f در نقطه a برابر حد چپ تابع f در نقطهa برابر $\mathcal{L}$ باشد به عبارت دیگر :

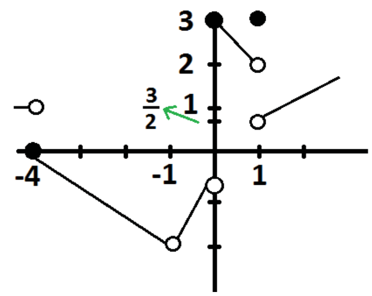
$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = \mathcal{L} \iff \lim_{x\to a^+} f(x) = \mathcal{L}\ ,\ \lim_{x\to a^-} f(x) = \mathcal{L}}$$

مثال: آیا تابع f با ضابطه‌ی زیر در نقطه $x = -1$ حد دارد؟ $f(x) = \begin{cases} x+1 & x \geq -1 \\ -2 & x < -1 \end{cases}$



$\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x) = 0$ و $\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x) = -2 \Rightarrow \lim\limits_{x\to(-1)} f(x) =$ موجود نیست

مثال: نمودار تابع $f(x)$ به صورت زیر است. حدها را بیابید.



A) $\lim_{x\to(-4)} f(x) =$

B) $\lim_{x\to 0} f(x^2-x) =$

C) $f(1)+\lim_{x\to 1^-} f(x) =$

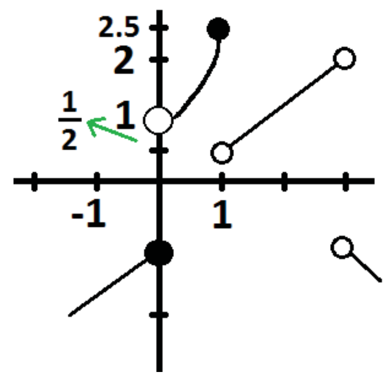
D) $\lim_{x\to -1} f(f(x)) =$

E) $\lim_{x\to \frac{1}{2}} f(x) =$

F) $\lim_{x\to -1} f(x-1) =$

تمرین در کلاس

۱. با توجه به نمودار تابع f در روبه رو ، حاصل را بدست آورید.



A) $f(1)-\lim_{x\to 2} f(x) =$

B) $\lim_{x\to 1^-} f(x) =$

C) $\lim_{x\to 0^-} f(x)+\lim_{x\to 1^+} f(x) =$

D) $\lim_{x\to 0^+} fof(x) =$

E) $\lim_{x\to 0} f(1-x^2) =$

E) $\lim_{x\to 3} f(x) =$

2. تابع روبرو مفروض است: $f(x)=\begin{cases}2x+1 & x>1\\ 4-x & x<1\end{cases}$

الف) نمودار تابع f را رسم کنید.

ب) حد تابع f را در نقاط $x=-1\,,x=1$ بررسی کنید.

ج) مقادیر f را در این دو نقطه در صورت وجود بنویسید.

۳. $f(x)=[x]+[-x]$

الف) حد تابع f را در نقاط $x=-2\,,x=\sqrt{3}$ تعیین کنید.

ب) حدتابع f را در نقطه $x=a\ \ (a\in\mathbb{R})$ در صورت وجود تعیین کنید.

۴. با رسم نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} -2 & x \in \mathbb{Z} \\ x+3 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$ در بازه‌ی $[-4\,,5]$ حد توابع زیر را بنویسید.

A) $\lim_{x\to 2} f(x) =$

B) $\lim_{x\to (-4)^+} f(x) =$

C) $\lim_{x\to \frac{4}{3}} f(x) =$

D) $\lim_{x\to -\sqrt{3}} f(x) =$

۵. الف) دامنه تابع $f(x) = \sqrt{x^2 - x}$ را تعیین کنید.

ب) حد تابع f را در نقاط $x = 0$, $x = 1$ بررسی کنید.

۶. الف) دامنه تابع $f(x) = \frac{x}{[x]-1}$ را بدست آورید.

ب) حد تابع f را در نقاط $x = 3$, $x = 1$ بررسی کنید.

قضایای حد

۱) قضیه:

الف) حد تابع ثابت $f(x) = c$ $(c \in \mathbb{R})$ در هر عدد دلخواه a برابر مقدار ثابت است.

یعنی: $\lim_{x\to a} c = c$

ب) حد هر تابع همانی $i(x) = x$ در هر عدد دلخواه a برابر a است.

یعنی : $\lim_{x\to a} x = a$

مثال:

A) $\lim_{x\to 7}(-5) = -5$ B) $\lim_{x\to -3}(x) = -3$

۲) **قضیه:** اگر دو تابع f و g در نقطه $x = a$ حد داشته باشند

و $\lim_{x\to a} g(x) = \mathcal{L}_2$ و $\lim_{x\to a} f(x) = \mathcal{L}_1$، آنگاه:

الف) مجموع و تفاضل و ضرب این دو تابع در نقطه $x = a$ حد دارد و داریم:

$$\lim_{x\to a}(f \pm g)(x) = \lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x) = \mathcal{L}_1 \pm \mathcal{L}_2$$

$$\lim_{x\to a}(f \times g)(x) = \lim_{x\to a}(f(x) \times g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \times \lim_{x\to a} g(x) = \mathcal{L}_1 \times \mathcal{L}_2$$

ب) تابع $\frac{f}{g}$ به شرط آنکه $\mathcal{L}_2 \neq 0$ در $x = a$ حد دارد و داریم:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{\mathcal{L}_1}{\mathcal{L}_2}$$

نتایج قضیه۲:

A) $\lim_{x\to a} kf(x) = k \times \lim_{x\to a} f(x) = \mathrm{k} \times \mathcal{L}$

B) $\lim_{x\to a} f^n(x) = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)^n$

C) $\lim_{x\to a}\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\lim_{x\to a} f(x)}$; $(\lim f(x) \neq 0)$

نکته: برای استفاده از قضیه 2، ابتدا باید بررسی شود که حد توابع f و g در نقطه a موجود باشد.

۳) قضیه: هر چند جمله ای مانند $p(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x^1 + b_0$ در هر نقطه دلخواه a حد دارد و مقدار حد با مقدار چند جمله‌ای در نقطه $x = a$ برابر است. یعنی :

$$\lim_{x\to a}(b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0) = b_n a^n + b_{n-1}a^{n-1} + \cdots + b_1 a + b_0$$

۴) قضیه: اگر تابع f در همسایگی محذوف a نامنفی باشد و در این نقطه حد داشته باشد، آنگاه

$$\lim_{x\to a}\sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x\to a} f(x)}$$

به طور کلی برای هر عدد طبیعی n ، اگر $\sqrt[n]{f(x)}$ در یک همسایگی a تعریف شده باشد،آنگاه

$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$$

۵) قضیه: برای هر عدد حقیقی a داریم: $\lim_{x\to a}\sin x = \sin a \quad , \quad \lim_{x\to a}\cos x = \cos a$

مثال ها:

۱) توابع $f(x) = \begin{cases} 3 - x^2 & x < 1 \\ x + 1 & x \geq 1 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & x < 1 \\ 1 - x & x \geq 1 \end{cases}$ مفروض‌اند. پاسخ حدها را بدست آورید.

A) $\lim_{x\to 1}(f+g)(x) =$

B) $\lim_{x\to 0}(f\times g)(x) =$

C) $\lim_{x\to 2}\left(\frac{f}{g}\right)(x) =$

$$D)\ \lim_{x\to(-1)}(2f-g)(x)=$$

۲) مقدار حد های زیر را بدست آورید.

$$A)\ \lim_{x\to(-\sqrt{2})}(-x^3)=-\left(-\sqrt{2}\right)^3=-\left(-\sqrt{8}\right)=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

$$B)\ \lim_{x\to(-2)}\frac{x^2-|x|+1}{3x+1}=\frac{(-2)^2-|-2|+1}{3(-2)+1}=\frac{4-2+1}{-6+1}=\frac{3}{-5}$$

$$C)\ \lim_{x\to(\sqrt{2})}\frac{x-[x]}{2-x}=\frac{\sqrt{2}-\left[\sqrt{2}\right]}{2-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$D)\ \lim_{x\to\pi}\frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{-\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{4}}=\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$E)\ \lim_{x\to\pi}\frac{|\sin x|}{x-\frac{\pi}{2}}=\frac{|\sin\pi|}{\pi-\frac{\pi}{2}}=\frac{0}{\frac{\pi}{2}}=0$$

$$F)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sin x-x^2-2\pi\cos 2x}=\sqrt{\sin\frac{\pi}{2}-(\frac{\pi}{2})^2-2\pi\cos 2\left(\frac{\pi}{2}\right)}=\cdots$$

۳) فرض کنید f یک تابع باشد ؛ بطوریکه $\lim_{x\to2}f(x)=5$ و $\lim_{x\to4}f(x)=5$ ، آیا می توان گفت که f تابعی ثابت است؟ چرا؟

۴) تابع g را به گونه‌ای تعریف کنید که داشته باشیم:

$$\lim_{x\to3}\frac{g(x)+x}{x^2-2}=2$$

۵) اگر $f(x) = 3 \lim_{x\to(-2)}$ باشد، حاصل حدهای زیر را بیابید.

$$A)\ \lim_{x\to 2}\frac{f(x)-3}{x^2} =$$

$$B)\ \lim_{x\to 2}\frac{f(x)+1}{f(x)} =$$

۶) الف) اگر حد تابع f در $x = a$ موجود باشد اما تابع g در a حد نداشته باشد، در مورد وجود تابع g+f و g−f چه می‌توان گفت؟

ب) اگر توابع f و g در $x = a$ حد نداشته باشند، در مورد حد تابع g±f در a چه می‌توان گفت؟

۷) تابع f با ضابطه‌ی رو برو در نقطه $x = -2$ حد دارد. مقدار a را بدست آورید.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+[x]}{|x|} & x < -2 \\ \sqrt{-2x}+2a & x > -2 \end{cases}$$

۸) تابع g در مجموعه اعداد حقیقی حد دارد. مقادیر a و b را بیابید.

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - ax & |x| > 1 \\ \dfrac{b}{x}+[x] & |x| < 1 \end{cases}$$

۹) الف) توابع f و g مثال بزنید بطوریکه $(f+g)$ در $x=2$ حد داشته باشد اما حداقل یکی از f یا g در $x=2$ حد نداشته باشد.

ب) توابع f و g را چنان مثال بزنید که در در $x=3$ حد نداشته باشند اما g×f در $x=2$ حد داشته باشد.

محاسبه حد توابع کسری (رفع ابهام $\frac{0}{0}$)

برای محاسبه حد f با ضابطه $f(x)$ در نقطه $x=a$، عدد a را در تابع f جایگزین می‌کنیم:

اگر بعد از محاسبه به یک عدد حقیقی رسیدیم، جواب حدِ تابع است.

اگر تابع به صورت $\frac{f}{g}$ باشد و با جایگذاری $x=a$ به کسر $\frac{0}{0}$ رسیدیم به طوریکه صفرهای به دست آمده در صورت و مخرج بسیار نزدیک به صفر باشند، با حالت مبهم رو برو هستیم که باید رفع ابهام شود. منظور از رفع ابهام $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ این است که به کمک ترفندهایی مناسب که در مثال‌ها خواهد آمد، عامل $(x-a)$ را در صورت و مخرج ایجاد کرده و آنها را حذف کنیم و بعد از حذف$(x-a)$ عمل جایگذاری a و محاسبه را دوباره انجام دهیم تا به یک عدد حقیقی برسیم که جواب حد است.

مثال۱: حاصل حدها را بیابید. ۱. به کمک تجزیه(مزدوج، جمله مشترک، چاقو لاغر و فاکتورگیری)

A) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x-4}=\frac{4^2-16}{4-4}=\frac{16-16}{0}=\frac{0}{0}.$ مبهم $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x-4}=\lim\limits_{x\to 4}\frac{(x+4)(x-4)}{x-4}=4+4=8$

B) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^3-27}{9x-3x^2}=\cdots$

C) $\lim\limits_{x\to 8}\frac{x^2-x-72}{3x^2+11x-104}=\cdots$

D) $\lim\limits_{x\to 14^-}\frac{x^2-196}{|x-14|}=\cdots$

E) $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{[x]-x}{|x-1|}=\cdots$

۲. حذف رادیکال به کمک ضرب مزدوج   مثال: حدها را بیابید.

$$F)\ \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x^2-5x+6}\times\frac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x+1}+2}=\lim_{x\to 3}\frac{x+1-4}{(x+3)(x-2)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}=\frac{1}{4}$$

$$G)\ \lim_{x\to 2}\frac{x-\sqrt{x+2}}{2x-x^2}=\cdots$$

$$H)\ \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-x}{x-x^2}=\cdots$$

$$I)\ \lim_{x\to 8}\frac{\sqrt[3]{x}-2}{x^2-64}=\cdots$$

$$J)\ \lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{sin^3x-1}{sin^2x-1}=\cdots$$

مثال۲: حدهای زیر را بیابید.

۱) $\lim\limits_{x\to 3}(-5)=\cdots$ ۲) $\lim\limits_{x\to 3}x=\cdots$ ۳) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{-x^3-20}{9x+3x^2}=\cdots$ ۴) $\lim\limits_{x\to -1}(-x^2+1)=\cdots$

۵) $\lim\limits_{x\to 3}(-5)=\cdots$ ۶) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{[x]}{x}=\cdots$ ۷) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^4}{x+3x^2}=\cdots$ ۸) $\lim\limits_{x\to -1}\left(\frac{-x^2+1}{x+1}\right)=\cdots$

۹) $\lim\limits_{x\to 3}(-5x)=\cdots$ ۱۰) $\lim\limits_{x\to 3}[x]=\cdots$ ۱۱) $\lim\limits_{x\to -9}\frac{x^3+243}{x^2-81}=\cdots$

۱۲) $\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\sqrt{1-x}\right)=\cdots$ ۱۴) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}(tan2x-cot4x)=\cdots$

۱۴) $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{6}}sin7x=\cdots$ ۱۵) $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{8}}(sin2x-cos2x)=\cdots$

۱۶) $\lim\limits_{x\to -\frac{3}{2}} (x-[x]) = \cdots$

۱۷) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-6x+8}{x^2-3x+2} = \cdots$

مثال۳: بارسم تابع ساده قدرمطلق، جزء صحیح، رادیکالی و گویا حد تابع را در نقاط خاص و معمولی آن بررسی کنید.

مثال۴.

الف) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{2-\sqrt[3]{3x+2}}{5x^2-18x+16} = \cdots$

ب) $\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{x^2-4}{x^3-[x^3]} = \cdots$

ج) $\lim\limits_{x\to -8} \frac{x^2+10x+16}{12+6\sqrt[3]{x}} = \cdots$

پیوستگی:

الف) پیوستگی در یک نقطه $(x=a)$

تعریف پیوستگی: تابع f را در $x=a$ پیوسته گوییم هرگاه : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

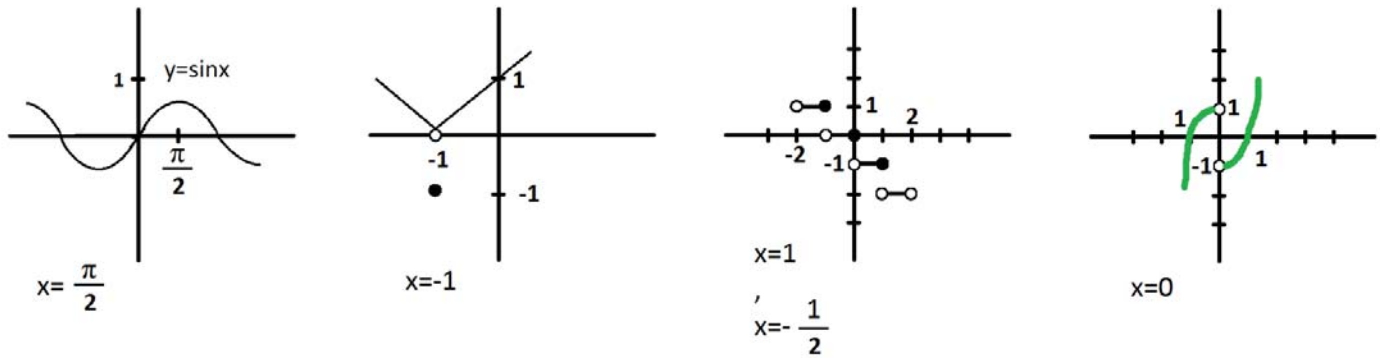
به عبارت دیگر برای پیوسته بودن تابع f در نقطه $x=a$ باید سه شرط زیر همزمان برقرار باشد:

1) $f(a) = A$ موجود و تعریف شده	2) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \mathcal{L}$, $\mathcal{L} \in \mathbb{R}$

3) $A = \mathcal{L}$: حد در (۲) = مقدار در (۱)

نکته: اگر حداقل یکی از سه شرط گفته شده برقرار نباشد، می‌گوییم f در $x = a$ پیوسته نیست.

مثال: پیوستگی توابع زیر را در نقاط مشخص شده بررسی کنید.



مثال: توابع $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ و $g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & x \neq 1 \\ -2 & x = 1 \end{cases}$ مفروض‌اند.

پیوستگی توابع را در $x = 1$ بررسی کنید. $f(1) = \frac{1^2-1}{1-1} = \frac{0}{0}$ موجود نیست بنابراین f در $x = 1$ پیوسته نیست

① $g(1) = -2$

$$\lim_{x\to1} g(x) = \lim_{x\to1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)} = 1 + 1 = 2 \quad \to ②$$

③ $g(1) \neq \lim_{x\to1} g(x)$ پس g در $x = 1$ پیوسته نیست.

تعریف پیوستگی راست و چپ:

تابع f در $x = a$ را از راست پیوسته می‌گوییم (پیوستگی راست دارد) هرگاه: $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$

تابع g در $x = a$ از چپ پیوسته است (پیوستگی چپ دارد) هرگاه:

$$\lim_{x\to a^-} g(x) = g(a)$$

مثال: پیوستگی تابع ها را در نقاط تعیین شده بررسی کنید.

الف) تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{|x|}{x} & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$ در نقطه $x=0$:

① $f(0)=1$

بنابراین f در $x=0$ پیوسته نیست. اما
چون حد راست $=f(0)$ است، f
در $x=0$ پیوستگی راست دارد.

② $$\lim_{x\to 0} f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1\\ \lim\limits_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=-1\end{cases}$$

③ $f(0)\neq \lim\limits_{x\to 0} f(x)$

ب) تابع $g(x)=(x-2)[x]$ در نقطه $x=2$:

① $g(2)=(2-2)[2]=0\times 2=0$

② $$\lim_{x\to 2} g(x)=\lim_{x\to 2}(x-2)[x]$$
$$=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^+}(x-2)[x]=(2-2)[2^+]=0\times 2=0\\ \lim\limits_{x\to 2^-}(x-2)[x]=(2-2)[2^-]=0\times 1=0\end{cases}\rightarrow \lim_{x\to 2} g(x)=0$$

③ $g(2)=\lim\limits_{x\to 2} g(x)=0 \quad \rightarrow$ تابع g در $x=2$ پیوسته است.

ج) تابع $h(x)=\begin{cases}-x^2+2x & x<-1\\ -3 & x=-1\\ \cos(\pi-x\pi) & x>-1\end{cases}$ در نقطه $x=-1$:

① $h(-1)=-3$

② $\lim\limits_{x\to(-1)^-} h(x)=-(-1)^2+2(-1)=-1-2=-3$, $\lim\limits_{x\to(-1)^+} h(x)=\cos(\pi+\pi)=\cdots$

h در ۱- حد ندارد. درنتیجه h در (۱-) پیوسته نیست؛ اما پیوستگی چپ دارد.

ب) پیوستگی در یک بازه:

A) تابع f را بر بازه‌ی باز (a,b) پیوسته گوییم هرگاه در بازه‌ی (a,b) پیوسته باشد.

B) تابع f را بر بازه‌ی بسته $\left[a,b\right]$پیوسته گوییم هرگاه :

۱. تابع در هر نقطه بازه (a,b) پیوسته باشد.

۲. تابع در $x = a$ پیوستگی راست داشته باشد.

۳ .تابع در $x = b$ پیوستگی چپ داشته باشد.

C) پیوستگی تابع f بر بازه‌ی $(a,b]$ و $[a,b)$ نیز به طور مشابه تعریف می شود.

مثال:۱. تابع $f(x) = \sqrt{x-1}$ بر بازه ی $[1,2]$ پیوسته است. چرا؟

۲. تابع $f(x) = [x]$ بر بازه $(0,1)$ پیوسته است اما بر بازه $[0,1]$ پیوسته نیست. همچنین بر بازه $[0,1)$ نیز پیوسته است. چرا؟

مثال: پیوستگی تابع $f(x) = [x] + [-x]$ را در مجموعه ی $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ بررسی کنید.

$$f(x) = [x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$a \in \mathbb{R} - \mathbb{Z} \rightarrow \begin{cases} f(x) = [a] + [-a] = -1 \\ \lim_{x \to a} f(x) = -1 \\ f(a) = \lim_{x \to a} f(x) \end{cases} \Longrightarrow$$

$a \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ ؛ در هر نقطه دلخواه از مجموعه پیوسته است. بنابراین f در $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ پیوسته است.

مثال۱: تابع $f(x)=\begin{cases} \tan\frac{(2x+1)\pi}{2} & x\le 1 \\ \frac{|x^2-x-2|}{a(1-x)} & 1<x<5 \\ b(x-[-x]) & x\ge 5 \end{cases}$ در بازه $[1,5]$ پیوسته است. مقدار $ba=?$ (کنکور ۱۴۰۱)

مثال۲: تابع $f(x)=\begin{cases} \frac{8+x^3}{|x+2|} & x\ne -2 \\ a & x=-2 \end{cases}$ در $x=-2$ ازچپ پیوسته است. مقدار $a=?$ (کنکور ۹۸)

کار در منزل

۱) تابع با ضابطه ی $f(x)=\begin{cases} x^2-bx-1 & x<2 \\ ax+b & x>2 \end{cases}$ با شرط $f(2)=5$ ، روی مجموعه اعداد حقیقی پیوسته است. مقدار a را بیابید.(تجربی۹۱)

۲) به ازای کدام مقدار a ، تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} 3x-[x] & x<2 \\ a & x=2 \\ x+2 & x>2 \end{cases}$ در $x=2$ پیوسته است؟ (تجربی۹۲)

۳) به ازای چه مقدار a ، تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{\pi}{x} & 1 \le x \le 6 \\ a + \cos^2\frac{\pi x}{36} & x > 6 \end{cases}$ **روی مجموعه‌ی عددهای حقیقی بزرگتر از ۱ پیوسته است؟ (تجربی۹۴)**

۴) به ازای چه مقدار a ، تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & 0 < x < a \\ 1 - \frac{x}{4} & x \ge a \end{cases}$ **در دامنه اش پیوسته است؟ (ریاضی۹۵)**

۵) تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} ax - a + 2 & x \le 1 \\ \frac{x-1}{x-\sqrt{x}} & x > 1 \end{cases}$ **به ازای کدام مقدار a در** $x = 2$ **پیوسته است؟ (تجربی۹۶)**

۶) تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} [x] + [-x] & x \notin \mathbb{Z} \\ a & x \in \mathbb{Z} \end{cases}$ **به ازای کدام مقدار a روی مجموعه عددهای حقیقی پیوسته است؟ (ریاضی۹۶)**

۷) تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2x}{2x-\pi} & x \ne \frac{\pi}{2} \\ a & x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$ **به ازای کدام مقدار a روی بازه** $[0, 2\pi]$ **پیوسته است؟ (تجربی۹۲)**

۸) تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} \frac{\cos 3x}{\cos x} & 0 \le x < \frac{\pi}{2} \\ \sin 5x - a & \frac{\pi}{2} \le x \le 2\pi \end{cases}$ **به ازای کدام مقدار a روی بازه** $[0, 2\pi]$ **پیوسته است؟ (تجربی۹۴)**

۹) اگر $f(x) = [x] + [-x]$ **و** $g(x) = \begin{cases} f(x) & x \notin \mathbb{Z} \\ f(x) - 1 & x \in \mathbb{Z} \end{cases}$ **باشد، آنگاه تعداد نقطه‌های ناپیوستگی تابع g روی بازه ی** $[-4, 4]$ **کدام است؟ (ریاضی۹۲)**

۱۰) تابع $f(x)=[3x]$ روی بازه ی $(1,4)$ در چند نقطه ناپیوسته است؟

۱۱) تابع $f(x)=[x]$ روی بازه ی $(k,-2)$ پیوسته است. کمترین مقدار k را بیابید.

۱۲) تابع $f(x)=\frac{x+1}{x^2-mx+1}$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته است. حدود m را تعیین کنید.

۱۳) بزرگترین بازه ای که تابع $f(x)=\sqrt{2-|x+1|}$ روی آن پیوسته است را بیابید.

۱۴) تابع $f(x)=(-1)^{[x]}\times\sin\frac{\pi x}{2}$ در نقطه های $x\in\mathbb{Z}$ از نظر پیوستگی چگونه است؟ (ریاضی۹۳)

۱۵) تابع $f(x)=[x^2]$ روی بازه ی $(2,2+k)$ پیوسته است. بیشترین مقدار k را بیابید.

۱۶) تابع $f(x)=\begin{cases}4 & x^2=|x|\\ x+2 & x^2\neq|x|\end{cases}$ در چند نقطه از دامنه اش ناپیوسته است؟

فصل هفتم   آمار و احتمال

در این فصل ابتدا احتمال دهم یادآوری می‌گردد و سپس دو قسمت احتمال شرطی و پیشامدهای مستقل مورد بررسی قرار می‌گیرد. در پایان آمار توصیفی شامل شاخص‌های مرکزی(میانگین و میانه) و شاخص‌های پراکندگی(دامنه تغییرات، واریانس، انحراف از معیار و ضریب تغییرات) و ویژگی‌های آنها معرفی می‌گردند.

یادآوری:

اصطلاحات زیر را تعریف کنید و برای هر کدام مثالی بیاورید:

۱. پدیده تصادفی:

۲. فضای نمونه‌ای:

۳. پیشامد تصادفی:

۴. اجتماع و اشتراک دو پیشامد:

۵. تفاضل و تفاضل متقارن دو پیشامد:

۶. متمم یک پیشامد:

۷. پیشامدهای ناسازگار:

۸. رابطه محاسبه احتمال وقوع یک پیشامد:

۹. رابطه محاسبه احتمال اجتماع یا اشتراک دو پیشامد A و B :

$$\binom{12}{2} = \frac{12!}{2!(12-2)!} = \frac{12\times 11}{2} = 66$$

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$$

$$\binom{5}{2} = \binom{5}{3} = 10$$

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}$$

$$\binom{12}{2} = \binom{11}{2} + \binom{11}{1}$$

۱. احتمال شرطی:

منظور از «احتمال A به شرط B» یعنی احتمال وقوع پیشامد A، به شرط آنکه بدانیم پیشامد B رخ داده است و با $P(A|B)$ نمایش می‌دهیم.

$$P(A|B) = \frac{n(A\cap B)}{n(B)} = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

در احتمال شرطی فضای نمونه‌ای تقلیل(کاهش) می‌یابد.

مثال۱: در یک مسابقه کشتی احتمال این که کشتی‌گیر دچار صدمه جسمی شده و کشتی را به پایان برساند برابر $0/8$ است. احتمال این که دچار صدمه نگردد برابر $0/9$ است. اگر بدانیم او صدمه ندیده است، با چه احتمالی کشتی را به پایان می‌رساند؟

مثال۲: اعدا ۱ تا ۹ را روی نه کارت می‌نویسیم و سه کارت را به تصادف انتخاب می‌کنیم. مطلوب است احتمال این که هر سه عدد فرد باشد به شرط آن که مجموع آنها فرد باشد.

مثال۳: احتمال این که یک تیم والیبال اصلی‌ترین رقیبش را ببرد $\frac{1}{5}$ است. احتمال قهرمانی این تیم در حال حاضر $\frac{1}{3}$ و در صورتی که اصل‌ترین رقیبش را ببرد به $\frac{1}{2}$ افزایش می‌یابد. به چه احتمالی حداقل یکی از دو اتفاق قهرمان شدن یا بردن رقیب اصلی رخ می‌دهد.

نکته: اگر A و B و C سه پیشامد باشند:

$$P(A|B) \times P(B) = P(B|A) \times P(A)$$

$$P(A'|B) = 1 - P(A|B)$$

$$\frac{P(A|B)}{P(A)} = \frac{P(B|A)}{P(B)}$$

$$A, B \text{ ناسازگار} \Rightarrow P((A \cup B)|C) = P(A|C) + P(B|C)$$

۲. پیشامدهای مستقل

پیشامد A از پیشامد B مستقل است، هرگاه

وقوع A بر احتمال وقوع B تاثیر نگذارد. به عبارت دیگر یعنی:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

نکته: اگر دو پیشامد A و B مستقل باشند آنگاه

۱. دو پیشامد A' و B' نیز مستقل‌اند، به عبارت دیگر : $P(A' \cap B') = P(A') \times P(B')$

۲. دو پیشامد A' و B نیز مستقل‌اند، به عبارت دیگر : $P(A' \cap B) = P(A') \times P(B)$

۳. دو پیشامد A و B' نیز مستقل‌اند، به عبارت دیگر : $P(A \cap B') = P(A) \times P(B')$

۴. دو پیشامد A و B مستقل نیستند اگر و تنها اگر : $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$

مثال۱: خانوده‌ای دارای سه فرزند است. الف) چقدر احتمال دارد هر سه فرند دختر باشند؟ ب) دو فرزند پسر باشد.

مثال۲: فرض کنید احتمال قهرمانی تیم فوتبال ایران در جام جهانی $0/3$ و احتمال قهرمانی تیم والیبال ایران در آسیا برابر $0/7$.است. با چه احتمالی:

الف) حداقل یکی از این تیم‌ها قهرمان خواهد شد.

ب) فقط یکی از این تیم‌ها قهرمان می‌شود.

ج) هیچکدام قهرمان نمی‌شوند.

د) فقط والیبال قهرمان می‌شود.

مثال۳: دو تاس آبی و قرمز می‌اندازیم. چقدر احتمال دارد:

الف) مجموع اعداد رو شده ۷باشد.

ب) مجموع اعداد رو شده ۸ باشد.

ج) آیا پیشامد این که مجموع دو تاس ۷ شود و پیشامد این که پرتاب اولین تاس ۲ ظاهر شود مستقل از یکدیگرند؟

د)) آیا پیشامد این که مجموع دو تاس ۸ شود و پیشامد این که پرتاب اولین تاس ۳ ظاهر شود مستقل از یکدیگرند؟

مثال۴: احتمال این که آراد در درس ریاضی قبول شود دو برابر احتمال آن است که دوستش در این درس قبول شود. اگر احتمال اینگه حداقل یکی از آنها در درس ریاضی قبول شود برابر $0/625$ باشد، آراد با چه احتمالی در این درس قبول خواهد شد.

نکته:

۱- سه پیشامد A و B و C را مستقل می‌گوییم هرگاه:

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B) \text{ و } P(A\cap C)=P(A)\times P(C) \text{ و } P(B\cap C)=P(B)\times P(C)$$

$$\text{و}\quad P(A\cap B\cap C)=P(A)\times P(B)\times P(C)$$

۲- اگر سه پیشامد A و B و C دو به دو مستقل باشند آنگاه: $P(A\cap B\cap C)=P(A)\times P(B)\times P(C)$

۳- تساوی $P(A\cap B\cap C)=P(A)\times P(B)\times P(C)$ الزاما نتیجه نمی‌دهد که A و B و C دو به دو مستقل اند.

۴- اگر دو پیشامد A و B مستقل باشند می توان برای احتمال اجتماع آنها از رابطه زیر کمک گرفت:

$$P(A\cup B)=P(((A\cup B)')')=P((A'\cap B')')=1-P(A'\cap B')=1-P(A')\times P(B')$$

چند تست:

کنکور ۹۸

احتمال موفقیت فردی، در آزمون اول ۰/۷ و در آزمون دوم ۰/۶ است. اگر این فرد در آزمون اول موفق شود، احتمال موفقیت وی در آزمون دوم ۰/۸ است. با کدام احتمال، لااقل در یکی از این دو آزمون، موفق می‌شود؟

۱) ۰/۷۴ ۲) ۰/۷۶ ۳) ۰/۸۲ ۴) ۰/۸۴

کنکور ۱۴۰۱

احتمال اینکه یک کشتی‌گیر رقیب اصلی خود را ببرد $\frac{۱}{۵}$ و احتمال کسب مدال طلا برای او $\frac{۱}{۳}$ بوده و درصورتی‌که اصلی‌ترین رقیب خود را ببرد به $\frac{۱}{۲}$ افزایش خواهد یافت. با کدام احتمال، این کشتی‌گیر قهرمان می‌شود یا رقیب اصلی خود را می‌برد؟

۱) $\frac{۴}{۱۵}$ ۲) $\frac{۱۱}{۳۰}$ ۳) $\frac{۱۳}{۳۰}$ ۴) $\frac{۷}{۱۵}$

سراسری تجربی ۹۶ – خارج از کشور

احتمال قبولی فرد A در یک آزمون ۰/۸۴ و احتمال قبولی فرد B در همان آزمون ۰/۷۵ است . با کدام احتمال لااقل یکی از آنان در این آزمون قبول می شوند ؟

۱) ۰/۹۲ ۲) ۰/۹۴ ۳) **۰/۹۶** ۴) ۰/۹۸

روش اول : هر گاه در مسائل احتمال **لااقل یکی** داشتیم از فعل ممتم استفاده می کنیم .

$$P(A') = \frac{۱۶}{۱۰۰} \times \frac{۲۵}{۱۰۰} = \frac{۴}{۱۰۰} \longrightarrow P(A) = ۱ - \frac{۴}{۱۰۰} = \frac{۹۶}{۱۰۰}$$

روش دوم : قانون جمع احتمال ها ، چون دو پیشامد A و B مستقل هستند، بنابراین داریم :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A).P(B) = \frac{۸۴}{۱۰۰} + \frac{۷۵}{۱۰۰} - (\frac{۸۴}{۱۰۰} \times \frac{۷۵}{۱۰۰}) = ۰/۹۶$$

سراسری تجربی ۸۵

در آزمایشگاهی ۷ موش نگهداری می شوند که بر روی ۳ موش ، آزمون مهارت انجام شده است . اگر ۲ موش از بین آنان تصادفی انتخاب شوند ، با کدام احتمال ، لااقل بر روی یکی از آن دو ، آزمون انجام شده است ؟

۱) $\frac{۱۰}{۲۱}$ ۲) $\frac{۴}{۷}$ ۳) $\frac{۵}{۷}$ ۴) $\frac{۱۶}{۲۱}$

روش اول : تعریف احتمال

$$n(S) = \binom{۷}{۲} = \frac{۷ \times ۶}{۲} = ۲۱ \qquad n(A) = \binom{۳}{۱} \times \binom{۴}{۱} + \binom{۳}{۲} \times \binom{۴}{۰} = ۱۵ \longrightarrow P(A) = \frac{۵}{۷}$$

روش دوم : پیشامد متمم

$$n(A') = \binom{۴}{۲} = ۶ \longrightarrow P(A') = \frac{۶}{۲۱} = \frac{۲}{۷} \qquad P(A) = ۱ - \frac{۲}{۷} = \frac{۵}{۷}$$

سراسری تجربی ۸۵ – خارج از کشور

در یک خانوادهٔ دو فرزندی ، می دانیم یکی از فرزندان پسر است . با کدام احتمال ، این خانوادهٔ فرزند دختر دارد ؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

نکته : در احتمال شرطی ، شرط باعث از بین رفتن تعدادی از عضوهای فضای نمونه ای اصلی می شود که در این صورت باید فضای نمونه ای جدیدی بسازیم .

چون می دانیم یکی از فرزندان پسر است پس احتمال شرطی است و فضای نمونه ای جدید را می نویسیم و احتمال را حساب می کنیم .

$$S = \{bb, bg, gb\} \qquad A = \{bg, gb\} \longrightarrow P(A) = \frac{۲}{۳}$$

سراسری تجربی ۸۲

خانواده ای دارای چهار فرزند است . می دانیم که دو فرزند اول آن ها پسر است . احتمال آن که دو فرزند دیگر این خانواده دختر باشد ، کدام است ؟

۱) $\frac{۳}{۱۶}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۵}{۱۶}$ ۴) $\frac{۳}{۸}$

چون جنسیت فرزندان مستقل از یکدیگر می باشند لذا جنسیت دو فرزند اول که پسر هستند هیچ تأثیری در فرزندان سوم و چهارم ندارد بنابراین احتمال این که فرزندان سوم و چهارم دختر باشند به صورت زیر است :

چون ترتیب فرزندان بیان شده از اصل ضرب استفاده می کنیم . $P(gg) = P(g) \times P(g) = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۴}$

سراسری تجربی ۸۴

احتمال اینکه از چهار فرزند یک خانواده ، دو فرزند پسر و دو فرزند دختر باشند ، کدام است ؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ **۳) $\frac{۳}{۸}$** ۴) $\frac{۷}{۱۶}$

نکته : اگر خانواده ای دارای n فرزند باشد ، احتمال آن که دقیقاً k فرزند پسر یا دقیقاً k فرزند دختر باشند برابر است با : $\frac{\binom{n}{k}}{۲^n}$ لذا داریم : $P=\frac{\binom{۴}{۲}}{۲^۴}=\frac{۶}{۱۶}=\frac{۳}{۸}$

روش اول :

$n(S)=۲^۴=۱۶ \qquad A=\{(bbgg),(bggb),(ggbb),(gbgb),(bgbg),(gbbg)\}$

$P(A)=\frac{۶}{۱۶}=\frac{۳}{۸}$

روش دوم :

جایگشت های تکراری bbgg

$n(A)=\frac{۴!}{۲!۲!}=۶ \longrightarrow P(A)=\frac{۶}{۱۶}=\frac{۳}{۸}$

روش سوم :

$P(x=۲)=\binom{۴}{۲}\left(\frac{۱}{۲}\right)^۲\left(\frac{۱}{۲}\right)^۲=۶\times\frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{۴}=\frac{۳}{۸}$

تست‌های کنکور و ...

۱ ۱۰ نفر در یک صف ایستاده‌اند. با کدام احتمال دو فرد موردنظر از آن‌ها، در کنار هم نیستند؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$

۳) $\frac{۴}{۵}$ ۴) $\frac{۹}{۱۰}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۲ پنج کتاب زبان فارسی و ۳ کتاب زبان انگلیسی، به تصادف در یک قفسه کنار هم چیده شده‌اند. با کدام احتمال کتاب‌های هم‌زبان، کنار هم قرار می‌گیرند؟

۱) $\frac{۱}{۱۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲۱}$

۳) $\frac{۱}{۲۸}$ ۴) $\frac{۱}{۵۶}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۳ دو تاس را باهم می‌ریزیم. با کدام احتمال جمع دو عدد روشده، یک عدد اول است؟

۱) $\frac{۵}{۱۲}$ ۲) $\frac{۴}{۹}$

۳) $\frac{۵}{۹}$ ۴) $\frac{۷}{۱۲}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۳

۴ در آزمایشگاهی ۵ موش سفید و ۶ موش سیاه موجود است. به تصادف ۳ موش از بین آن‌ها خارج می‌کنیم. با کدام احتمال لااقل یکی از موش‌ها سفید است؟

۱) $\frac{۸}{۱۱}$ ۲) $\frac{۹}{۱۱}$

۳) $\frac{۲۸}{۳۳}$ ۴) $\frac{۲۹}{۳۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

۵ چهار دانش‌آموز یک کلاس که بر یک نیمکت نشسته باشند، با کدام احتمال ماه تولد حداقل دو نفر آنان یکسان است؟

۱) $\frac{۱۹}{۴۸}$ ۲) $\frac{۴۱}{۹۶}$

۳) $\frac{۲۳}{۴۸}$ ۴) $\frac{۵۵}{۹۶}$

۶ در پرتاب دو سکه و یک تاس با هم، احتمال این‌که حداقل یک سکه رو و عدد تاس مضرب ۳ باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۱۲}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$

۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

۷ در ظرفی ۴ مهرهٔ سفید و ۵ مهرهٔ سیاه موجود است. به تصادف ۳ مهره از ظرف خارج می‌کنیم. با کدام احتمال مهره‌های خارج شده همرنگ‌اند؟

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۳}{۱۴}$

۳) $\frac{۲}{۹}$ ۴) $\frac{۵}{۱۴}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

۸ از ۱۲ کتاب که ۵ عدد آن‌ها در مورد ادبیات و ۷ عدد آن‌ها در مورد تاریخ است به‌طور تصادف ۵ کتاب انتخاب کرده‌ایم. احتمال اینکه ۳ کتاب ادبیات و ۲ کتاب تاریخ انتخاب شده باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۱۵}{۶۶}$ ۲) $\frac{۱۷}{۶۶}$

۳) $\frac{۳۵}{۱۳۲}$ ۴) $\frac{۳۷}{۱۳۲}$

۹ دو تاس را انداخته‌ایم، اگر حاصل‌جمع شماره‌های روشده کمتر از ۶ باشد، احتمال آنکه شمارهٔ یکی از تاس‌های روشده ۲ باشد کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۵}$

۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۵}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۱

۱۰ اعداد ۹ ,… ,۲ ,۱، بر روی ۹ کارت یکسان نوشته شده است. به‌تصادف دو کارت از بین آن‌ها بیرون می‌آوریم، با کدام احتمال مجموع عدد این دو کارت برابر ۱۱ است؟

۱) $\frac{۱}{۱۲}$ ۲) $\frac{۱}{۹}$

۳) $\frac{۱}{۸}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$

۱۱ در دو پیشامد مستقل A و B، اگر $P(A \cap B) = ۰/۱$، $P(A \cup B) = ۰/۶$ و با فرض $P(B') > P(B)$، احتمال وقوع پیشامد B کدام است؟

۱) ۰/۴ ۲) ۰/۳

۳) ۰/۲ ۴) ۰/۲۵

۱۲ A و B دو پیشامد از یک فضای نمونه‌ای هستند. اگر $P(A)=۰/۴$، $P(B|A)=۰/۲۵$ و $P(B)=۰/۳$ باشد، $P(B|A')$، کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$

۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۵}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

۱۳ احتمال موفقیت عمل جراحی برای شخص A برابر ۰/۹ و برای شخص B برابر ۰/۸ می‌باشد. با کدام احتمال، لااقل عمل جراحی برای یکی از این دو نفر، موفقیت‌آمیز است؟

۱) ۰/۹۲ ۲) ۰/۹۴

۳) ۰/۹۶ ۴) ۰/۹۸

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۱۴ در دو پیشامد مستقل A و B، اگر $P(A\cap B)=۰/۶$ و $P(A\cap B')=۰/۲$، آنگاه $P(A\cup B')$ کدام است؟

۱) ۰/۷ ۲) ۰/۷۵

۳) ۰/۸۵ ۴) ۰/۹

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

۱۵ نمرات مهارت برای کارگر (A) : ۱۶، ۱۵، ۱۴، ۱۳ و ۱۲ و برای کارگر (B) : ۱۶/۵، ۱۶، ۱۵/۵، ۱۳ و ۱۱/۵ بوده است. دقت عمل کدام بیشتر است؟

۱) A ۲) B

۳) یکسان ۴) اظهارنظر نمی‌توان کرد.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

آمار توصیفی

۱. شاخص‌های مرکزی:

الف) میانگین: جمع تمام داده‌ها تقسیم بر تعداد آنها.

ویژگی‌ها:

۱. اگر تمام داده‌ها را در a ضرب کرده و با b جمع کنیم، میانگین نیز با عدد a ضرب و با عدد b جمع می‌شود.

۲. اگر داده‌ها دنباله حسابی باشند، داده وسط میانگین است.

۳. ب) میانه:

داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم سپس: اگر تعداد داده‌ها فرد باشد، داده وسط میانه است.

اگر تعداد داده‌ها زوج باشد، میانگین دو داده وسط میانه است.

مثال: میانه؟

ویژگی:

۱. اگر تمام داده‌ها را در عدد a ضرب کرده و با عدد b جمع کنیم، میانه نیز با عدد a ضرب و با عدد b جمع می‌شود.

۲. اگر داده‌ها دنباله حسابی باشند، میانه همان میانگین است.

۲. شاخص‌های پراکندگی

الف) دامنه تغییرات: (ساده‌ترین شاخص پراکندگی) تفاضل کوچکترین داده از بزرگترین داده. $R = b - a$

ویژگی‌ها:

۱- به معنای نداشتن تعادل بین داده‌ها است.

۲- کم یا زیاد بودن مقدار عددی پراکندگی بسته به نوع موضوع، مناسب یا نامناسب است.

مثلا: در موضوع درآمدِ افراد: پراکندگی زیاد، نشان دهنده اقتصاد بیمار است و نامطلوب است و

در یک آزمون استخدامی: پرکندگی زیادِ نمرات داوطلبین، دلیل درستی آزمون است و مطلوب است.

مثال: دامنه تغییرات یکی از آزمون‌ها ریاضی کلاس را بدست آورید و تفسیر کنید.

ب) واریانس: میانگین مربع تفاضلات میانگین داده‌ها از تک تک داده‌ها. به عبارت دیگر:

۱. میانگین داده‌ها را می‌یابیم. ۲. تک تک داده‌ها را منهای میانگین کرده و حاصل را به توان دو می‌رسانیم. ۳. میانگین حاصل‌های شماره ۲ را حساب کرده که واریانس است و با σ^2 نمایش می‌دهند. به زبان ریاضی:

$$\boxed{\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n}}$$

مثال: واریانس داده‌های ۱و ۲و۳و۴و۵ را بیابید.

نکته:

۱. اگر تمام داده‌ها را در عدد a ضرب کرده و با عدد b جمع کنیم، واریانس در عدد a^2 ضرب می‌شود اما عدد b در آن هیچ تاثیری ندارد. به عبارت دیگر:

$$\boxed{\sigma^2{}_{(ax_i+b)} = a^2\sigma^2}$$

۲. می‌توان واریانس را از رابطه روبرو نیز بدست آورد:

$$\boxed{\sigma^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2}$$

۳. واحد واریانس، توان دوم واحد دادها است.

مثال: واریانس داده‌های ۲/۱و ۴/۱و ۶/۱ و ۸/۱ را بیابید.

پ) انحراف از معیار

جذر واریانس را انحراف از معیار می‌گویند. در واقع واحد انحراف از معیار با واحد داده‌ها برابر است.

مثال: انحراف از معیار ارقام شماره تلفن همراهتان را بیابید.

نکته:

۱. اگر تمام داده‌ها را در عدد a ضرب کرده و با عدد b جمع کنیم، انحراف از معیار در عدد $|a|$ ضرب می‌شود اما عدد b در آن هیچ تاثیری ندارد. به عبارت دیگر:

$$\boxed{\sigma_{(ax_i+b)} = |a|\sigma}$$

ت) ضریب تغییرات

آن را با $c.v$ نمایش می‌دهند و برابر است با نسبت انحراف از معیار به میانگین. به عبارت دیگر: $c.v = \frac{\sigma}{\bar{x}}$

معمولا آن را با درصد بیان می‌کنند و مهمترین ویژگی‌اش آن است که به واحد اندازه‌گیری بستگی ندارد. مثلا برای مقایسه میزان پراکندگی قد و وزن دانش‌آموزان ییک کلاس مناسب است.

مثال:

وزن دو فرد میانسال ۷۵ و ۷۴ کیلوگرم و وزن دو نوزاد ۲/۵ و ۳/۵ کیلوگرم است. میزان پراکندگی را در این دو دسته بررسی کنید.

ویژگی‌ها:

۱. اگر تمام داده‌ها در عدد a ضرب شود ضریب تغییرات تغییری نمی‌کند و اگر تمام داده‌ها با عدد مثبت b جمع شود، ضریب تغییرات کاهش می‌یابد.

۲. ضریب تغییرات برای داده‌های مثبت بکار می‌رود.

مثال: اگر مجموع ده داده برابر ۲۵ و مجموع مربعات آنها برابر ۲۵۰۰ باشد واریانس و ضریب تغییرات را بیابید.

ث) چارک‌ها

چارک اول: با Q_1 نمایش می‌دهند و برابر است با: میانه‌ی نیمه اول داده‌ها.

چارک دوم (همان میانه است) : با Q_2 نمایش می‌دهند و عبارت است از میانه‌ی داده‌ها.

چارک سوم : با Q_3 نمایش می‌دهند و عبارت است از میانه‌ی نیمه دوم داده‌ها.

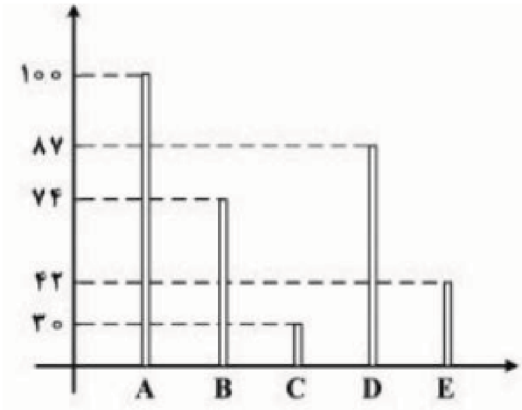
مثال: چارک‌ها را در داده‌های زیر به دست آورید.

۱۲و ۱۰و ۳و ۱۱و ۱۵و ۱۰و ۱۳و ۱۰و ۸و ۵و ۱۲و ۱۳و ۱۴

تست‌های کنکور:

سراسری تجربی – ۹۶

۱ – نمودار میله ای روبه رو ، تعداد کارکنان با مهارت فنی ، در ۵ گروه متمایز است . در نمایش آن با نمودار دایره ای ، زاویهٔ مربوط به گروه B ، چند درجه است ؟



۱) ۷۵

۲) ۸۰

۳) ۸۴

۴) ۸۴

سراسری تجربی – ۹۶

۲ – ضریب تغییرات ، در داده های آماری زیر ، با فراوانی تجمعی داده شده ، کدام است ؟

مرکز دسته	۶	۸	۱۰	۱۲	۱۴
فراوانی تجمعی	۷	۱۶	۳۳	۴۴	۵۰

۱) ۰/۱۶ ۲) ۰/۱۸ ۳) ۰/۲۴ ۴) ۰/۲۸

سراسری تجربی ۹۶ – خارج از کشور

۳ – داده های آماری با نمودار ساقه و برگ داده شده است . اگر این داده ها در ۵ طبقه دسته بندی شوند ، درصد فراوانی نسبی دسته وسط ، کدام است ؟

ساقه	برگ							
۱	۱	۱	۲	۴	۵	۷	۹	
۲	۰	۰	۱	۱	۳	۴	۵	۸
۳	۱	۲	۲	۲	۴	۶	۷	۸

۱) ۱۶

۲) ۱۸

۳) ۲۰

۴) ۲۴

سراسری تجربی ۹۶ – خارج از کشور

۴ – ضریب تغییرات ، در داده های آماری زیر ، کدام است ؟

۱) ۰/۱۰

۲) ۰/۱۵

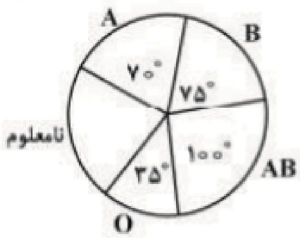
۳) ۰/۲۰

۴) ۰/۲۵

مرکز دسته	۱۲	۱۴	۱۶	۱۸	۲۰
فراوانی مطلق	۷	۹	۱۷	۱۱	۶

سراسری تجربی – ۹۵

۵ - نمودار دایره ای روبه رو ، متناسب با تعداد کارکنان سازمانی با گروه خونی متمایز است . گروه خونی ۳۲ نفر از آنان تعیین نشده اند . چند نفر از آنها ، دارای گروه خونی B هستند .



۱) ۲۵
۲) ۳۰
۳) ۳۶
۴) ۴۰

سراسری تجربی – ۹۵

۶ - میانگین طول اضلاع مربع هایی ۱۵ واحد با ضریب تغییرات ۰/۲ محاسبه شده است . میانگین مساحت این مربع ها ، کدام است ؟

۱) ۲۲۹ ۲) ۲۳۲ ۳) ۲۳۴ ۴) ۲۳۶

سراسری تجربی ۹۵ – خارج از کشور

۷ - در نمودار جعبه ای ۲۳ دادهٔ آماری ، میانگین دنباله های سمت چپ و سمت راست به ترتیب ۲۱/۶ و ۳۳ و میانگین داده های داخل و روی جعبه ۲۵ می باشد . میانگین کل این داده ها کدام است ؟

۱) ۲۵/۸ ۲) ۲۶ ۳) ۲۶/۱ ۴) ۲۶/۲

سراسری تجربی ۹۵ – خارج از کشور

۸ – در ۳۰ داده ی آماری ، مجموع تمام داده ها برابر ۲۴۰ و مجموع مربعات این داده ها ۲۱۹۰ می باشد . ضریب تغییرات کدام است ؟

۱) ۰/۲۲۵ ۲) ۰/۲۷۵ ۳) ۰/۳۲۵ ۴) ۰/۳۷۵

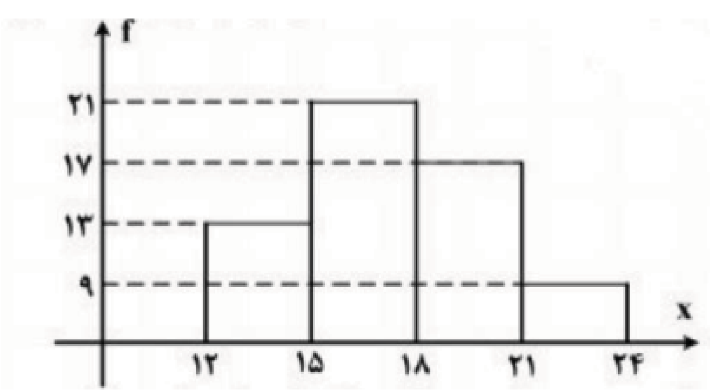
سراسری تجربی ۹۵ – خارج از کشور

۸ – در ۳۰ داده ی آماری ، مجموع تمام داده ها برابر ۲۴۰ و مجموع مربعات این داده ها ۲۱۹۰ می باشد . ضریب تغییرات کدام است ؟

۱) ۰/۲۲۵ ۲) ۰/۲۷۵ ۳) ۰/۳۲۵ ۴) ۰/۳۷۵

سراسری تجربی - ۹۴

۹ - از داده های آماری با نمودار مستطیلی مقابل ، سه داده ۱۴ و ۱۶ و ۱۶ حذف شده است . در نمودار دایره ای داده های جدید ، بزرگترین زاویه مرکزی نظیر دسته ها چند درجه است ؟



۱) ۹۰°
۲) ۱۰۵°
۳) ۱۲۰°
۴) ۱۳۵°

سراسری تجربی - ۹۴

۱۰ - داده های آماری به صورت نمودار ساقه و برگ نشان داده شده است . در نمودار جعبه ای ، تفاضل میانه از میانگین چند درجه است ؟

ساقه	برگ
۵	۰ ۱ ۱ ۲ ۴ ۴ ۶ ۷ ۹ ۹
۶	۰ ۰ ۲ ۳ ۳ ۵ ۵ ۶
۷	۱ ۱ ۲ ۲ ۴ ۷ ۸

۱) ۰

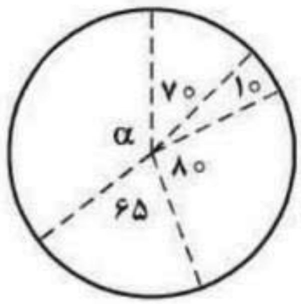
۲) ۰/۵

۳) ۱

۴) ۱/۵

سراسری تجربی ۹۴ – خارج از کشور

۱۱ - افراد یک جامعه به ۵ گروه سنّی تقسیم شده اند که نمودار دایره ای آنها با زاویه مرکزی برحسب درجه رسم شده است . گروه سنّی با زاویه مرکزی α ، شامل چند درصد این جامعه است ؟



۱) ۲۳

۲) ۳۲/۵

۳) ۳۶

۴) **۳۷/۵**

سراسری تجربی ۹۴ – خارج از کشور

۱۲ – میانگین اضلاع مربع هایی برابر ۸ و میانگین مساحت آنها ۶۵/۴۴ می باشد . ضریب تغییرات در طول اضلاع این مربع ها ، کدام است ؟

۱) ۰/۱۲ ۲) **۰/۱۵** ۳) ۰/۲ ۴) ۰/۲۵

سراسری تجربی - ۹۳

۱۳ – در یک شرکت داروئی ، جدول توزیع کارکنان را با نمودار دایره ای نشان می دهیم . زاویه مربوط به کارکنان ارشد چند درجه است ؟

دکترا	ارشد	کارشناسی	کاردانی	دیپلم	نوع مدرک
۳۰	۱۲۰	۱۸۰	۹۰	۳۰	تعداد

۱) 84°

۲) 92°

۳) **96°**

۴) 105°

سراسری تجربی - ۹۳

۱۴ - در ۲۵ داده آماری ، میانگین و انحراف معیار به ترتیب ۳۰ و ۸ می باشد . اگر داده های ناجور ۱۰ ، ۱۵ ، ۴۵ ، ۵۰ از بین آنها حذف شوند ، واریانس داده های باقی مانده کدام است ؟

۱) ۱۴/۷۲ ۲) ۱۴/۸۱ ۳) ۱۵/۳۳ ۴) **۱۶/۶۶**

سراسری تجربی ۹۳ – خارج از کشور

۱۶ – میانگین و انحراف معیار ۱۸ داده آماری به ترتیب ۲۵ و ۳ می باشد . اگر داده های ۲۰ ، ۲۷ ، ۲۸ به آنان افزوده شود ، واریانس ۲۱ داده جدید کدام است ؟

۱) ۹/۲۵ ۲) ۹/۳۶ **۳) ۹/۵۲** ۴) ۹/۶۳

سراسری تجربی - ۹۲

۱۷ - در جدول فراوانی تجمعی زیر ، میانگین کدام است ؟

مرکز دسته	۷	۸	۹	۱۰	۱۱
فراوانی تجمعی	۸	۲۴	۴۴	۶۸	۸۰

۱) ۹/۲
۲) ۹/۳
۳) ۹/۴
۴) ۹/۵

سراسری تجربی - ۹۲

۱۸– در ۱۵۰ داده آماری با میانگین ۱۲ ، به دو برابر هر یک از داده ها ۳ واحد اضافه می کنیم تا داده های جدیدی حاصل شود . ضریب تغییرات داده های جدید چند برابر ضریب تغییرات داده های قبلی است ؟

۱) $\frac{۷}{۹}$ ۲) $\frac{۵}{۶}$ **۳) $\frac{۷}{۸}$** ۴) $\frac{۸}{۹}$

سراسری تجربی ۹۲ – خارج از کشور

۲۰ – میانگین محیط مربع هائی برابر ۸۴ و میانگین مساحت این مربع ها ۴۹۰ می باشند . ضریب تغییرات در طول ضلع این مربع ها کدام است ؟

۱) ۰/۲۵ ۲) ۰/۲۷ ۳) ۰/۲۸ **۴) ۰/۳۳**

سراسری تجربی - ۹۱

۲۱ – جمع آوری داده ها به کدام طریق مورد قبول نیست ؟

۱) مصاحبه ۲) مشاهده ۳) انجام آزمایش **۴) پرسش هدایت کننده**

سراسری تجربی - ۸۷

۳۹ – در توزیع فراوانی داده های پیوسته ، کدام نمودار مناسب تر است ؟

۱) مستطیلی ۲) **چندبر فراوانی** ۳) میله ای ۴) دایره ای

سراسری تجربی - ۸۷

۴۰ – دو نفر در یک آزمایشگاه ، در ۵ روز متوالی همزمان شروع به کار کرده اند .امتیازات دقّت کاری آنان ، مطابق جدول زیر است . دقّت کاری کدام بیشتر است ؟

نفر اول	۷	۹	۸	۹	۷
نفر دوم	۱۰	۸	۶	۷	۹

۱) **نفر اول**

۲) نفر دوم

۳) یکسان

۴) نیاز به اطلاعات بیشتر

سراسری تجربی ۸۷ – خارج از کشور

۴۱ – واریانس داده های آماری دسته بندی شده در جدول مقابل کدام است ؟

مرکز دسته	۱	۳	۵	۷	۹
فراوانی	۲	۷	۳	۵	۳

۱) ۵/۴

۲) ۵/۶

۳) ۶/۲

۴) **۶/۴**

سراسری تجربی ۸۶ – خارج از کشور

۴۶ – مجموع ۴۰ داده ی آماری برابر ۱۰۰ و مجموع مربعات این داده ها ۳۴۰ می باشد . انحراف معیار کدام است ؟

۱) ۱/۲۵ ۲) **۱/۵** ۳) ۲/۲۵ ۴) ۲/۵

سراسری تجربی - ۸۵

۴۸– در ۶۰ داده ی آماری ، میانگین ۳ و انحراف معیار ۱/۲ محاسبه شده است . اگر به تمام داده ها ۹ واحد اضافه شود ، ضریب تغییرات داده های جدید کدام است ؟

۱) ۰/۱ ۲) ۰/۲ ۳) ۰/۳ ۴) ۰/۴

سراسری تجربی ۸۵ – خارج از کشور

۴۹ – در داده های ۱۸,۱۴,۱۶,۲۰,۲۴,۱۵,۱۴,۱۲,۲۶,۲۱,۲۰,۲۵

میانگین « داده های بزرگتر از چارک اول و کوچکتر از چارک سوم » کدام است ؟

۱) ۱۸/۲۵ ۲) **۱۸/۳۳** ۳) ۱۸/۶۶ ۴) ۱۸/۷۵

سراسری تجربی ۸۵ – خارج از کشور

۵۰ – جدول زیر مقادیر انحراف از میانگین داده های آماری دسته بندی شده را مشخص می کند . فراوانی مطلق در دسته ششم چقدر است ؟

۱) ۱۴ ۲) ۱۵ ۳) ۱۶ ۴) **۱۷**

انحراف از میانگین	۳	۲	۱	۰	۱-	۲-	۴-
فراوانی مطلق	۳	x	۸	۴	۹	۱۱	۵

سراسری تجربی - ۸۴

۵۱ – هشت دادهٔ آماری با میانگین ۱۵ و واریانس ۴ مفروض است . اگر دو دادهٔ ۱۲ و ۱۸ به آنها اضافه شود ، واریانس ۱۰ دادهٔ حاصل ، کدام است ؟

۱) ۴ ۲) ۴/۵ ۳) ۴/۸ ۴) **۵**

سراسری تجربی ۸۴ – خارج از کشور

۵۲ – میانگین چند داده برابر ۵۷ است . ابتدا از هر داده ۱۲ واحد کم و سپس داده های حاصل را سه برابر کرده ایم .

میانگین داده های نهائی کدام است ؟

۱) ۴۵ ۲) ۷۰ ۳) **۱۳۵** ۴) ۱۵۹

پیروز خواهید شد، مهم آن است که با چه رتبه‌ای؟