



سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

و...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

<https://t.me/riazisara>



(@riazisara)

مهندس مهرپویان ۰۹۱۰۷۶۰۲۰۲۷

تجارت الکترونیک

این فصل را با ما بخوان
تا ازمایشی...

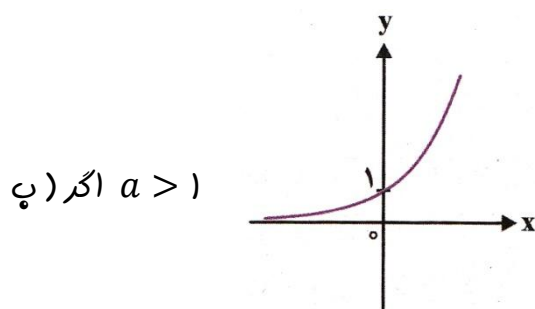
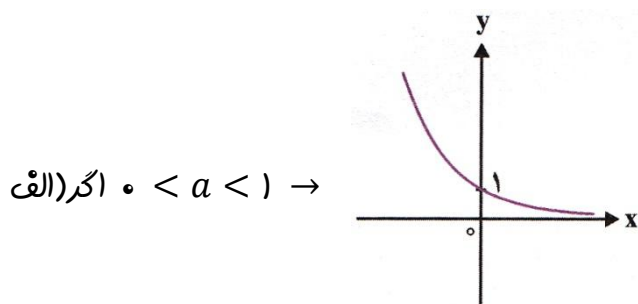
تایع نمائی:

تعریف هر تابع با ضابطه $y = a^x$ که در آن a عددی حقیقی و $a > 0$ و $a \neq 1$ باشد، تابع نمائی نامیده می شود. مانند توابع $y = 3^x$ و $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ و ...

تذکر اگر $a = 1$ باشد، تابع به صورت $y = 1^x = 1$ می شود که تابعی ثابت است و تابع نمائی نیست.

نمودار تابع نمائی و ویژگی های آن:

نمودار توابع نمائی $y = a^x$ به یکی از دو صورت زیر است:



نمودار تابع نمائی و ویژگی های آن:

دامنه تابع $\mathbb{R}$ و برد بازه $(0, +\infty)$ است.

تابع یک به یک بوده و در نتیجه معکوس پذیر است.

نمودار تابع محور y ها را در نقطه ای به عرض a قطع می کند، ولی محور x ها را قطع نمی کند.

به ازای کدام مقادیر k تابع $y = \left(\frac{3-k}{k+1}\right)^x$ نمائی است؟

مثال

برای این که تابع نمائی باشد طبق تعریف باید:

پاسخ

$$\text{اولاً } \frac{3-k}{k+1} > 0 \quad \begin{array}{c|c|c|c} k & -1 & 3 & \\ \hline \frac{3-k}{k+1} & - & + & - \end{array} \longrightarrow k \in (-, 3)$$

(۱)

و

$$\text{ثانیاً } \frac{3-k}{k+1} \neq 1 \rightarrow 3-k \neq k+1 \rightarrow 2k \neq 2 \rightarrow k \neq 1$$

(۲)

از اشتراک (۱) و (۲) مجموعه مقادیر قابل قبول برای k به دست می آید:

$$(1) \cap (2) = (-, 3) - \{1\}$$

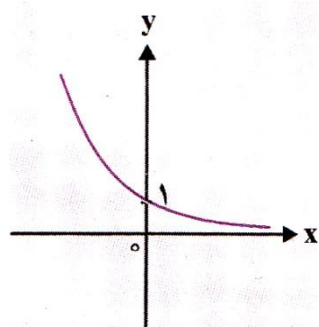
مثال

اگر نمودار تابع $y = (a^2 - 4a + 4)^x$ به صورت نمودار مقابل باشد، حدود و مقادیر

a را به دست آورید.

پاسخ

با توجه به این نمودار، باید داشته باشیم:



$$0 < a^2 - 4a + 4 < 1 \rightarrow 0 < (a-2)^2 < 1$$

$$\rightarrow \begin{cases} (a-2)^2 > 0 \rightarrow a \in \mathbb{R} - \{2\} \\ (a-2)^2 < 1 \rightarrow |a-2| < 1 \rightarrow 1 < a < 3 \end{cases}$$

از اشتراک بازه های به دست آمده حدود مقادیر a به صورت $1 < a < 3$ به دست می آید.

مثال

رسم نمودار $y = 3^x$ و $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ با استفاده از نقطه گذاری.

نکته نمودار تابع با ضابطه های $y = a^x$ و $y = a^{-x}$ ($a \neq 1, a > 0$) نسبت به محور y ها قرینه اند. $y = 3^x$ و $y = (\frac{1}{3})^x$ قرینه اند.

مثال کدام یک از نقاط زیر، روی نمودار تابع با ضابطه $y = 3^x$ قرار دارند؟

الف) $(1, 0)$ ب) $(3, 1)$ پ) $(0, 1)$ ت) $(\sqrt{3}, \frac{1}{3})$ ث) $(3, 1)$ ج) $(-1, \frac{1}{3})$

مثال کدام گزاره صحیح است؟

الف) نقطه $(\frac{1}{\sqrt{5}}, \sqrt{5})$ روی نمودار تابع با ضابطه $y = 5^x$ قرار دارد.

ب) محل تقاطع نمودار تابع با ضابطه $y = 10^x$ با محور y ها، نقطه $(0, 10)$ است.

پ) دامنه توابع با ضابطه های $y = 2^x$ و $y = x^2$ مساوی اند.

ت) محل تقاطع نمودار تابع با ضابطه $y = 6^x$ با محور x ها، نقطه $(6, 0)$ است.

مثال الف) نمودار تابع با ضابطه $y = 3^x$ را رسم کنید و مقدار تقریبی عدد $3^{\sqrt{2}}$ را با توجه به نمودار به دست آورید.

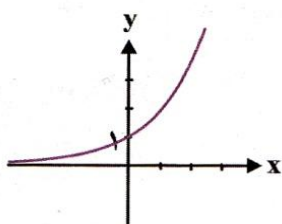
ب) نمودار تابع با ضابطه $y = (\frac{1}{3})^x$ را رسم کنید و مقدار تقریبی $(\frac{1}{3})^0$ را با توجه به نمودار به دست آورید.

مثال فرض کنیم $f(x) = 3^x, g(x) = (\frac{1}{3})^x$ و $h(x) = 10^x$ ، مقادیر زیر را به دست آورید

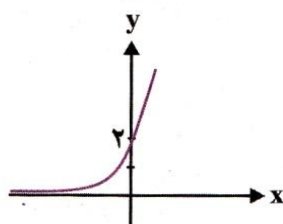
الف) $f(3)$ ب) $g(-1)$ پ) $h(-2)$

تذکر

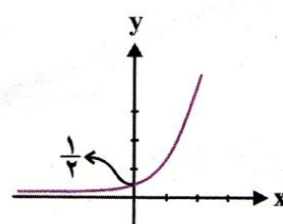
به طور کلی توابعی به فرم $y = ka^x$ نیز توابع نمائی است. شکل های زیر نمودار سه تابع $y = 3^x$ و $y = 2 \times 3^x$ و $y = \frac{1}{3} \times 3^x$ را مشخص م کنند.



$y = 3^x$



$y = 2 \times 3^x$



$y = \frac{1}{3} \times 3^x$

مثال اگر نمودار تابع نمائی $f(x) = k \cdot a^x$ از دو نقطه $(0, \frac{1}{\lambda})$ و $(-2, \frac{1}{64})$ بگذرد، در این صورت مقدار تابع در نقطه ای به طول ۳ واقع بر آن چه قدر است؟

پاسخ

$$\left(0, \frac{1}{\lambda}\right) \in f \rightarrow \frac{1}{\lambda} = k \cdot a^0 \Rightarrow k = \frac{1}{\lambda}$$

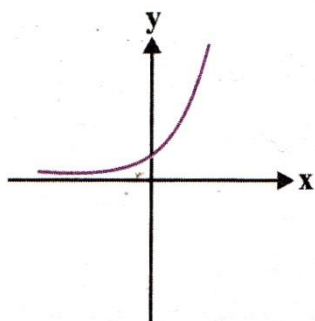
$$\left(-2, \frac{1}{64}\right) \in f \rightarrow \frac{1}{64} = \frac{1}{\lambda} \cdot a^{-2} \Rightarrow \frac{1}{64} = \frac{1}{\lambda a^2} \Rightarrow 64 = \lambda a^2 \Rightarrow a^2 = \lambda \Rightarrow a = \pm \sqrt{\lambda}$$

چون تابع نمائی است، پس $a = \sqrt{\lambda}$ قابل قبول است.

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{\lambda} (\sqrt{\lambda})^x = \frac{1}{\lambda} (2\sqrt{2})^x \Rightarrow f(3) = \frac{1}{\lambda} (2\sqrt{2})^3 = 2\sqrt{2}$$

تمرینات تکمیلی:

۱) تابع $y = (-a^x + 3a - 1)^x$ به ازای چه مقادیری از a به شکل روپرو است؟



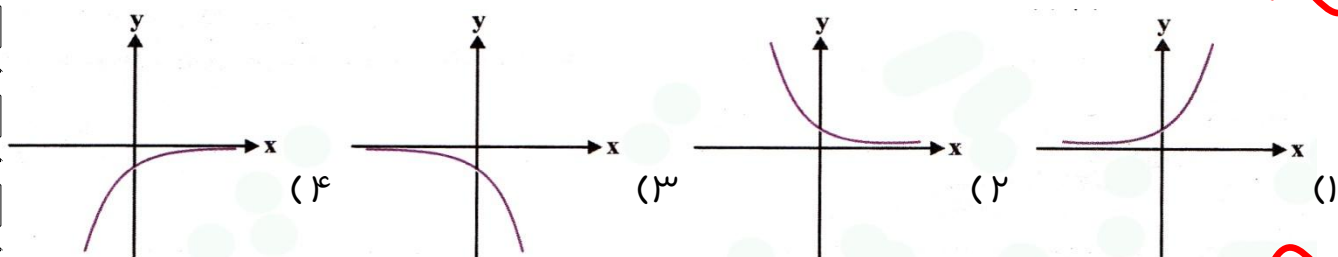
(۱) $a > 1$

(۲) $1 < a < 2$

(۳) $a > 2$

(۴) $a < 0$

۲) نمودار تابع $y = \left(\frac{2}{\sqrt{2}+1}\right)^x$ به کدام صورت است؟



۳) معادله $\cos x = 2^x$ چند جواب دارد؟

(۴) بی شمار

(۳) ۸

(۲) ۴

(۱) ۱

۴) تابع $f(x) = x^2$ مفروض است. اگر $\frac{f(5)-f(3)}{f(3)-f(1)}$ ، آن گاه مقدار a کدام است؟

(۴) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

(۳) ۴

(۲) $\sqrt{2}$

(۱) ۲

۵ در تابع پضابطه $f(x) = k \cdot a^x$ داریم، $f(0) = \frac{3}{2}$ و $f(-2) = \frac{3}{32}$ ، مقدار $f(\frac{3}{2})$

(سراسری تجربی - ۹۱)

کدام است؟ ($a > 0$)

۸ (۴)

۱۲ (۳)

۲۴ (۲)

۶ (۱)

توان حقیقی:

اگر a و b دو عدد حقیقی مثبت و r و s اعداد حقیقی باشند، آن گاه قوانین توان برای اعداد حقیقی همانند اعداد گویا برقرار است. به صورت زیر:

$$\diamond a^0 = 1 \xrightarrow{\text{مثال}} (\sqrt{2})^0 = 1$$

$$\diamond a^{-r} = \frac{1}{a^r} \xrightarrow{\text{مثال}} 2^{-\sqrt{2}} = \frac{1}{2^{\sqrt{2}}}$$

$$\diamond (a^r)^s = a^{r \cdot s} \xrightarrow{\text{مثال}} (2^{\sqrt{2}-\sqrt{2}})^{2+\sqrt{2}} = 2^{(\sqrt{2}-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})} = 2^0 = 1$$

$$\diamond a^r \cdot a^s = a^{r+s} \xrightarrow{\text{مثال}} 2^{\sqrt{3}} \cdot 2^1 = 2^{\sqrt{3}+1}$$

$$\diamond \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s} \xrightarrow{\text{مثال}} \frac{2^5}{2^{\sqrt{2}}} = 2^{5-\sqrt{2}}$$

$$\diamond \left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r} \xrightarrow{\text{مثال}} \left(\frac{2}{5}\right)^{\sqrt{2}} = \frac{2^{\sqrt{2}}}{5^{\sqrt{2}}}$$

$$\diamond a^r \cdot b^r = (ab)^r \xrightarrow{\text{مثال}} (2 - \sqrt{2})^{\sqrt{2}} (2 + \sqrt{2})^{\sqrt{2}} = (2^2 - 2)^{\sqrt{2}} = 2$$

مثال حاصل عبارت $\sqrt[3]{28} + 2\sqrt[3]{8} + 4$ را بیابید.

پاسخ $\left(\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^{\sqrt[3]{8}-2}\right)^{\sqrt[3]{28}+2\sqrt[3]{8}+4} = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^{(\sqrt[3]{8}-2)(\sqrt[3]{28}+2\sqrt[3]{8}+4)} = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^{(\sqrt[3]{8})^3-(2)^3} = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^{8-8}$

$= \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^{0-8} = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^{-8} = (\sqrt[3]{2})^8 = 2$

توجه در حل این مثال از اتحاد $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3$ استفاده کردیم.

تمرینات تکمیلی:

۶ درباره عدد مثبت x می دانیم $x^{\sqrt{2}} = 2$ مقدار x با کدام برابر است؟

$\sqrt[2]{2}^{\sqrt{2}} (1) \quad \sqrt{2}^{\sqrt{2}} (2) \quad \sqrt[2]{2}^{\sqrt{2}} (3) \quad \sqrt[2]{2}^{\sqrt{2}} (4)$

۷ از معادله $x^{\sqrt{3}+1} \times x^{\sqrt{3}-1} = 8$ مقدار x برابر است با:

$\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}} (1) \quad 2^{\sqrt{3}} (2) \quad 2^{\sqrt{3}} (3) \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}} (4)$

۸ حاصل $\left(\sqrt[3]{8}^{\sqrt[3]{18}}\right)^{\sqrt[3]{2}}$ برابر است با:

$\frac{1}{25} (1) \quad 25 (2) \quad \frac{1}{5} (3) \quad 5 (4)$

۹ $\left(\frac{4^{\sqrt{32}}}{2^{\sqrt{8}}}\right)^2 = 2^A$ ، عدد A کدام است؟

۱۲ $\sqrt{2}$ (۴)

۸ $\sqrt{2}$ (۳)

۱۶ (۲)

۸ (۱)

۱۰. حاصل $\frac{(2^{\sqrt{8}})^{\sqrt{8}+1}}{\sqrt{2}^{\sqrt{8}-1}} = 2^A$ برابر است با:

$\sqrt{2}^{2\sqrt{8}}$ (۴)

$2^{2\sqrt{8}}$ (۳)

$\sqrt[8]{2}^6$ (۲)

2^3 (۱)

معادله نمائی:

اگر a عددی حقیقی و مثبت باشد $a \neq 1$ و داشته باشیم $a^x = a^k$ آن گاه $x = k$ است و بالعکس.

مثلاً از تساوی $2^x = 2^5$ می توان نتیجه گرفت $x = 5$ است.

معادله های نمائی زیر را حل کنید.

مثال

الف) $2^{x-3} = 8$

ب) $2^{3n-2} = \frac{1}{32}$

ج) $9^x = 27^{x-4}$

پ) $4^{x-1} = 8^{x+1}$

د) $9^{3y-3} = 27^{y+1}$

ه) $\left(\frac{3}{5}\right)^{x+1} = \frac{25}{9}$

ز) $5^{n-1} = 125^{n+1}$

ح) $4^{3x+2} = \frac{1}{64}$

ط) $125^{x-\frac{1}{3}} = 5^{6x+3}$

ث) $2^{-2x-1} + 4\left(\frac{1}{4}\right)^x - 22 = 0$

نامعادله نمائی: 

$$a^x \geq a^k \Rightarrow \begin{cases} 0 < a < 1 \rightarrow x \leq k \\ a > 1 \rightarrow x \geq k \end{cases}$$

$$3^x \leq 3^2 \Rightarrow x \leq 2$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x \leq \left(\frac{1}{3}\right)^2 \Rightarrow x \geq 2$$

مثال

نامعادله های زیر را حل کنید.

مثال

$$3^{-2x+3} \geq \left(\frac{1}{3}\right)^x \quad \text{الف)}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{x^2}{3}+1} \leq 0.09 \quad \text{ب)}$$

تمرینات تکمیلی: 

۱) حاصل ضرب ریشه های معادله $8^{x+2} = 3^{x^2+2}$ کدام است؟

$$-4 \quad \text{۴}$$

$$4 \quad \text{۳}$$

$$-2 \quad \text{۲}$$

$$2 \quad \text{۱}$$

۲) از تساوی $9^{x+4} = (36)^3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$ ، عدد x کدام است؟

$$\frac{3}{2} \quad \text{۴}$$

$$1 \quad \text{۳}$$

$$\frac{1}{2} \quad \text{۲}$$

$$0 \quad \text{۱}$$

۳) جواب نامعادله $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1} > 27$ چیست؟

$$x > -1 \quad \text{۴}$$

$$x < -1 \quad \text{۳}$$

$$x < 1 \quad \text{۲}$$

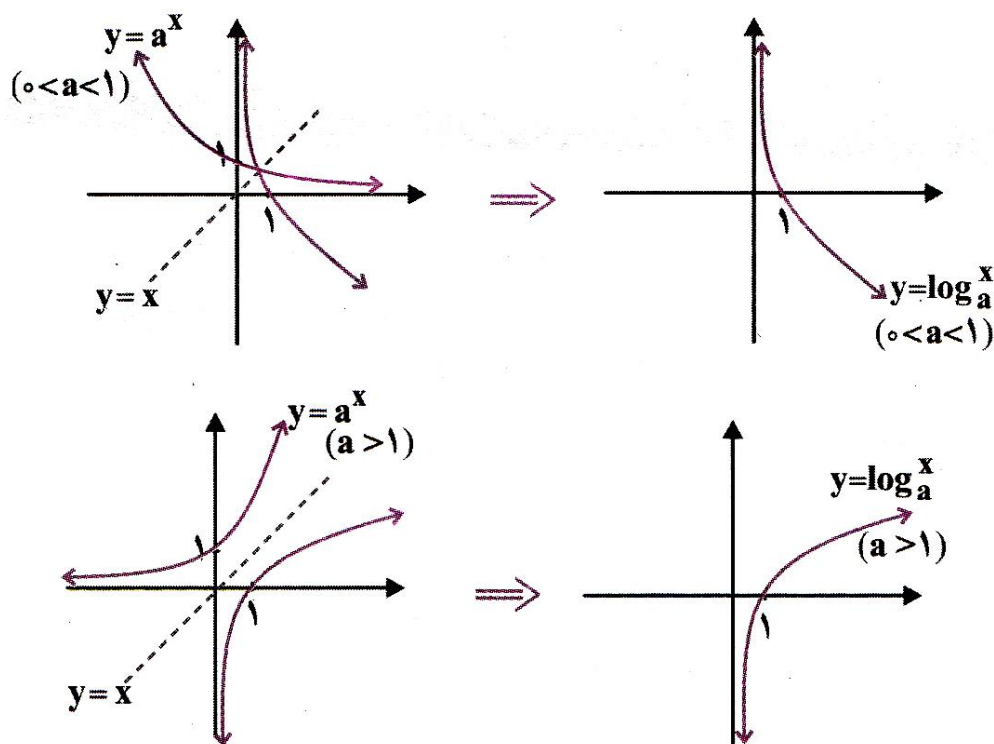
$$x > 1 \quad \text{۱}$$

✓ جواب تمرینات تکمیلی:

سؤال	گزینه صحیح
۱	۲
۲	۲
۳	۴
۴	۲
۵	۳
۶	۱
۷	۲
۸	۳
۹	۴
۱۰	۱
۱۱	۴
۱۲	۱
۱۳	۳

تایع لگاریتمی:

تعریف معکوس تایع نمائی $y = a^x$ را به صورت $y = \log_a x$ نشان می دهیم و می خوانیم « لگاریتم x در مبنای a ».

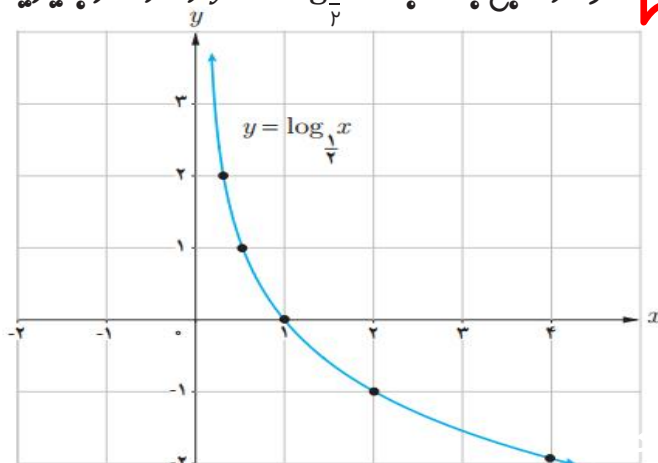


مثال

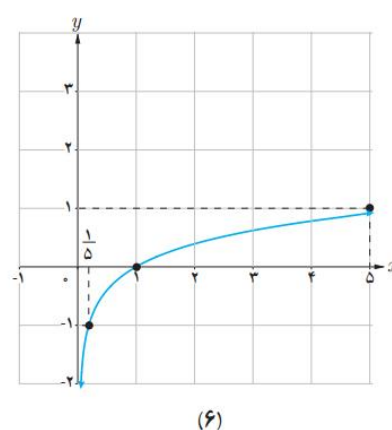
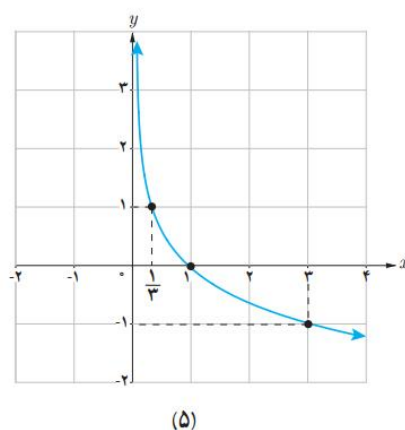
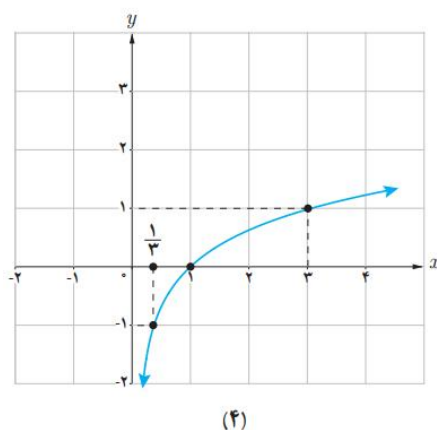
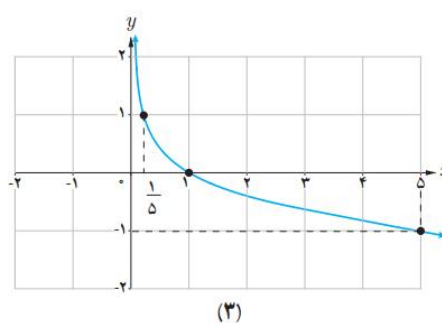
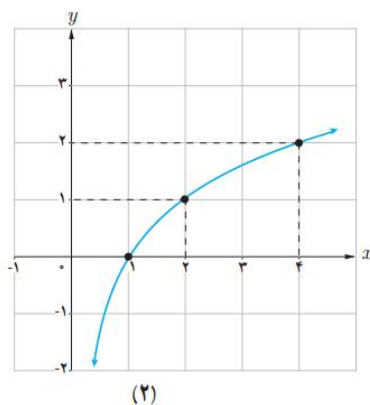
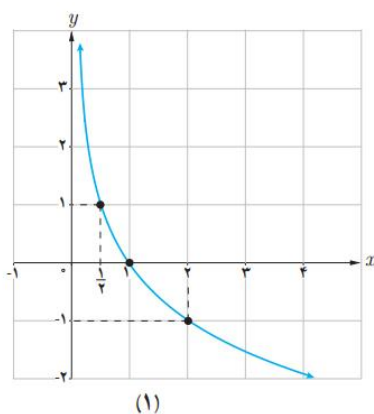
نمودار تایع با ضابطه $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ را در نظر بگیرید. اعداد زیر پین کدام اعداد صحیح قرار دارند؟

الف) $\log_{\frac{1}{2}} 3$

ب) $\log_{\frac{1}{2}} (1/5)$



نمودار چند تابع لگاریتمی در زیر رسم شده است. ضابطه مربوط به هر کدام را بنویسید.



مثال با توجه به مطالبی که تا به حال خوانده اید، جملات زیر را تکمیل کنید.

- دامنه تابع با ضابطه $y = \log_a x$ ($a > 1$)، مجموع اعداد حقیقی مثبت و برد آن است.

- دامنه تابع با ضابطه $y = \log_a x$ ($0 < a < 1$)، بازه و برد آن است.

- نمودار توابع فوق، محور x ها را در نقطه قطع می کند و محور y ها را قطع نمی کند.

درس دوم: تابع لگاریتمی و ویژگی های آن

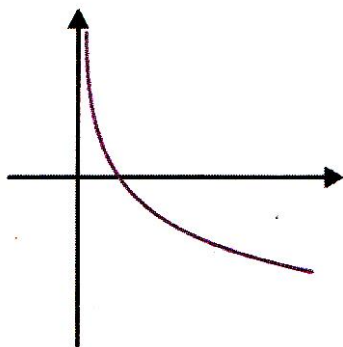
- این دو تابع، یک به یک زیرا خطوط موازی محور x ها، نمودار آنها را حداکثر در نقطه قطع می کند.

- وارون تابع نمایی، تابع است و وارون تابع لگاریتمی، تابع است.

مثال دامنه تابع $y = \log_{f-x} \frac{x-2}{5}$ را بیابید.

تمرینات تکمیلی:

۱) تابع $f(x) = \log_{a-a^2} x$ به صورت روپرو است، مقادیر a کدام است؟



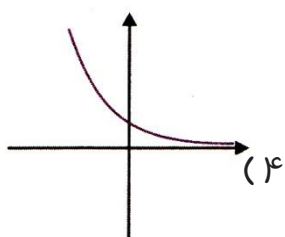
$$(0, 1) \cup (1, 2) \quad (1)$$

$$a > 2 \quad (2)$$

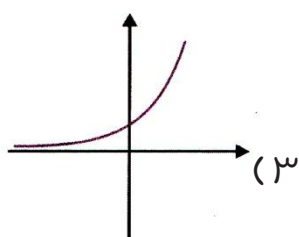
$$a < 0 \quad (3)$$

$$a < 2 \quad (4)$$

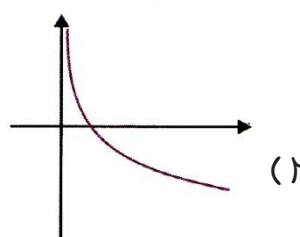
۲) نمودار تابع $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ به کدام یک از شکل های زیر شبیه است؟



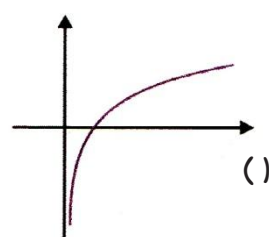
(۴)



(۳)



(۲)



(۱)

درس دوم : تابع لگاریتمی و ویژگی های آن

دانلود از سایت ریاضی سرا

www.riazisara.ir

مهندس مهرپویان ۰۹۱۰۷۶۰۲۰۲۷

دامنه تابع با ضابطه $\log_{10} \frac{x+2}{1-x}$ کدام است؟

۳

(۴) $(-2, 1)$

(۳) $[-2, 1)$

(۲) $[-2, 1]$

(۱) $(-2, 1]$

دامنه تابع $\log_x (2-x)$ کدام است؟

۴

(۴) $(0, 2) - \{1\}$

(۳) $(0, 2)$

(۲) $(2, +\infty)$

(۱) $(0, +\infty) - \{1\}$

اگر $f(x) = \sqrt{1-x}$ و $g(x) = \log_{10} x + 3$ چند عدد صحیح عضو دامنه $\frac{f}{g}$

۵

است؟

(۴) ۴

(۳) ۳

(۲) ۲

(۱) ۱

اگر $0 < a < 1$ باشد، دو تابع $y = \log_a x$ و $y = a^x$ در چند نقطه و در کدام

۶

ناحیه متقاطع اند؟

(۲) یک نقطه در ناحیه اول

(۱) یک نقطه در ناحیه دوم

(۴) غیر متقاطع اند

(۳) دو نقطه در ناحیه اول

نمودار توابع $y = \sqrt{2^x}$ و $y = \log_{\sqrt{2}} x$ در چند نقطه با یک دیگر متقاطع اند؟

۷

(۴) غیر متقاطع اند

(۳) ۴ نقطه

(۲) ۲ نقطه

(۱) ۱ نقطه

تبدیل لگاریتم به نمایی و برعکس:

$$\log_a x \Leftrightarrow x = a^y$$

مثال جدول زیر را مانند نمونه تکمیل کنید.

$$10^3 = 1000 \rightarrow \log_{10} 1000 = 3$$

$$\log_8 1 = 0 \rightarrow 8^0 = 1$$

$$9^{\frac{1}{2}} = 3 \rightarrow \log_9 3 = \dots\dots\dots$$

$$\log_2 \left(\frac{1}{16}\right) = -4 \rightarrow 2^{-4} = \dots\dots\dots$$

$$4^2 = 64 \rightarrow \log_4 64 = \dots\dots\dots$$

$$\log_5 125 = 3 \rightarrow 5^3 = \dots\dots\dots$$

$$2^5 = 32 \rightarrow \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

$$\log_{\frac{1}{3}} 27 = -3 \rightarrow \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

$$2^{-2} = \dots\dots\dots \rightarrow \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

$$\log_{\frac{1}{5}} 125 = \dots\dots\dots \rightarrow \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

$$3^{-4} = \dots\dots\dots \rightarrow \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

$$\log_{\frac{1}{2}} 16 = \dots\dots\dots \rightarrow \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

تذکره لگاریتم در مبنای ۱۰ را لگاریتم اعشاری می نامند در این حالت معمولاً مبنای آن نمی نویسیم

یعنی به جای نوشتن $\log_{10} a$ می نویسیم $\log a$.

ویژگی های لگاریتم: 

$$۱) \log_a 1 = 0$$

$$۲) \log_a a = 1$$

$$۳) \log_a \frac{1}{a} = -1$$

$$۴) \log_c ab = \log_c a + \log_c b$$

$$۵) \log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b$$

$$۶) \log_b a^n = n \log_b a$$

$$۷) \log_{b^m} a^n = \frac{n}{m} \log_b a$$

$$۸) \log_b a = \frac{1}{\log_a b}$$

$$۹) \log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$$

$$۱۰) a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$$

$$۱۱) a^{\log_a b} = b$$

$$۱۲) \log_b a \times \log_c b = \log_c a$$

اگر $\log 2 \approx 0.3$ و $\log 3 \approx 0.48$ ، مقادیر تقریبی اعداد زیر را به دست آورید.

مثال

1) $\log 12$

$$۲) \log 0.75 = \dots\dots\dots$$

$$۳) \log \sqrt{5} = \dots\dots\dots$$

$$۴) \log \frac{25}{18} = \dots\dots\dots$$

$$۵) \log \sqrt[3]{6} = \dots\dots\dots$$

$$۶) \log \frac{\sqrt{27}}{\sqrt[4]{5}} = \dots\dots\dots$$

حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

مثال

الف) $\log_5 \sqrt[5]{49}$

ب) $\log_3 27^{\frac{1}{2}}$

پ) $-\log_5 125$

ت) $3 \log_9 \sqrt{1000}$

درس دوم: تابع لگاریتمی و ویژگی های آن

دانلود از سایت ریاضی سرا

www.riazisara.ir

مهندس مهرپویان ۰۹۱۰۷۶۰۲۰۲۷

اگر $f(x) = 3 - 2 \log_2 \left(\frac{x}{2} - 5 \right)$ ، مقدار $f(42)$ را به دست آورید.

مثال

الف) اگر نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \log_a x$ از نقطه $(2, 2)$ عبور کند، مقدار a را به دست آورید.

مثال

ب) اگر نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \log_a x$ از نقطه $(-\frac{1}{2}, -4)$ عبور کند، مقدار a چقدر است؟

اگر $2 \approx 0.3 \log 2$ مقدار تقریبی اعداد زیر را به دست آورید.

مثال

الف) $\log 5 = ?$

ب) $\log 0.25 = ?$

ج) $\log \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{5}} = ?$

حاصل هر یک از عبارات زیر را به دست آورید:

مثال

الف) $\log 2^4 - \frac{1}{2} \log 9 + \log 125 = ?$

ب) $\log_2 \frac{8}{9} + \log_2 \frac{9}{16} + \log_2 \frac{16}{11} + \dots + \log_2 \frac{31}{32} = ?$

اگر $\log_5 4 = k$ باشد حاصل $\log 25$ را بر حسب k بدست آورید.

مثال

تمرینات تکمیلی: ☒

مقدار عددی تابع $\log_2 8 + \log_8 2$ با کدام برابر است؟

۸

$\frac{10}{3} \quad (4)$

$\frac{13}{3} \quad (3)$

$-\log 2 \quad (2)$

$3 \log 2 \quad (1)$

درس دوم: تابع لگاریتمی و ویژگی های آن

۹ حاصل $\frac{\log_7 49 + \log_7 5}{\log_3 \sqrt{3}}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) -۱ (۴) -۲

۱۰ نمودار تابع $y = \log_{\frac{1}{2}}(ax + b)$ محور x ها را در نقطه ای به طول -۱ و نیمساز ناحیه ی چهارم

را در نقطه ای به عرض -۱ قطع کرده است. b کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور - ۹۴)

- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) ۲ (۳) $\frac{5}{2}$ (۴) ۳

۱۱ اگر $\log 2 = a$ و $\log 3 = b$ ، آن گاه حاصل $\log \frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}$ چه قدر است؟

- (۱) $\frac{a}{2} + \frac{b}{2}$ (۲) $\frac{b}{2} - \frac{a}{2}$ (۳) $\frac{a}{2} - \frac{b}{2}$ (۴) $-\frac{a+b}{2}$

۱۲ با فرض $\log_b a = 4$ ، مقدار $\frac{\log a}{\log b}$ چه قدر است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۱۳ از دو معادله $\log_3 x + \log_3 y = 2$ و $x^2 + y^2 = 46$ ، لگاریتم $(x + y)$ در پایه ۴، کدام

است؟

- (۱) $1/5$ (۲) ۲ (۳) $2/5$ (۴) ۳

۱۴ حاصل عبارت $(\log 5)^2 + (\log 2)(\log 5)$ کدام است؟

- (۱) $\log 5$ (۲) $\log 2$ (۳) ۱ (۴) ۲

۱۵ عبارت زیر با کدام برابر است؟

$$A = \log \left(\tan \frac{\pi}{3} \right) + \log \left(\tan \frac{3\pi}{4} \right) + \log \left(\tan \frac{5\pi}{6} \right) + \log \left(\tan \frac{7\pi}{12} \right)$$

۴ (۴)

۰ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۱۶ اگر $\log_a x = \frac{2}{3}$ ، $\log_b x = \frac{3}{4}$ باشد، $\log_{ab} x$ کدام است؟ (سنجش ریاضی - ۹۲)

$\frac{6}{17}$ (۴)

$\frac{12}{17}$ (۳)

$\frac{17}{12}$ (۲)

$\frac{17}{6}$ (۱)

۱۷ اگر $x = \sqrt{a}^{\log_a b}$ باشد، آنگاه حاصل $\log_b x$ کدام است؟

۲ (۴)

۱ (۳)

$\frac{1}{2}$ (۲)

$\frac{1}{4}$ (۱)

معادلات لگاریتمی: ☒

$$\log_a x = b \xleftrightarrow{a > 0, a \neq 1} x = a^b \quad , \quad \log_a x = \log_a k \xleftrightarrow{a > 0, a \neq 1} x = k$$

مثال معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

۱) $\log_3 x = 2 \rightarrow x = 3^2 = 9$

۲) $\log_5 (x+6) = \log_5 (2x-3) \rightarrow x+6 = 2x-3 \rightarrow x=9$ که $x=9$ برای هر دو لگاریتم قابل قبول است.

$$۳) \log_5(x+6) + \log_5(x+2) = 1 \rightarrow \log_5[(x+6)(x+2)] = 1$$

$$\rightarrow (x+6)(x+2) = 5 \rightarrow x^2 + 8x + 12 = 5$$

$$\rightarrow x^2 + 8x + 7 = 0 \rightarrow (x+7)(x+1) = 0 \rightarrow x = -7 \text{ یا } x = -1$$

توجه کنید که $x = -7$ قابل قبول نیست؛ از اینرو تنها جواب $x = -1$ قابل قبول است که در معادله اصلی صدق می کند.

معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

مثال

$$۱) \log_5 x = 3 \dots\dots\dots$$

$$۲) \log_7(2x+1) = 3 \dots\dots\dots$$

$$۳) \log_7(x+1) + \log_7(x+4) = 2 \dots\dots\dots$$

$$۴) \log_7 243 = 2x+1 \dots\dots\dots$$

$$۵) \log_7(x-1) = 4 \dots\dots\dots$$

$$۶) \log(2x) - \log(x-3) = 1 \dots\dots\dots$$

$$۷) 2\log_7(x-1) = 3 \dots\dots\dots$$

معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

مثال

$$\text{الف) } \log_7(p^2 - 2) = \log_7 p$$

$$\text{ب) } \log_5(x+1) + \log_5(x-1) = 1$$

$$\text{پ) } 3\log_7 a - \log_7 5 = \log_7 25$$

$$\text{ت) } \log_{\frac{1}{10}}(x^2 - 21) = -2$$

درس دوم: تابع لگاریتمی و ویژگی های آن

مثال معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

الف) $\log(x+6) - \log(4-x) = \log(-x)$ ب) $\log_a x^2 - 30 - \log_b x = 0$

ج) $\log_2 \log_3 \log_4(x-1) = 0$

مثال اگر $\log_x 3 + \log_x(2x+9) = 2$ آنگاه $\log_9 \sqrt{x}$ کدام است؟

مثال از معادلات $\log x = \log 2 + \log y$ و $2^x \times 8^y = 4$ مقدار x کدام است؟

تمرینات تکمیلی:

۱۸ از معادله لگاریتمی $\log_3(2x^2+1) - \log_3(x+2) = 1$ مقدار لگاریتم $\log_3(2x-1)$ در

(سراسری تجربی - ۹۵)

پایه ۸، کدام است؟

(۱) $-\frac{2}{3}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{2}{3}$

۱۹ از تساوی $\log_x(3x+8) = 2 - \log_x(x-6)$ مقدار لگاریتم x در پایه ۴، کدام

(سراسری خارج از کشور تجربی - ۹۳)

است؟

(۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $-\frac{2}{3}$

۲۰ معادله $\log_{16} x^2 + 3x = \sin \frac{5\pi}{2}$ چند جواب دارد؟

(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۰

۲۱) از تساوی $\log_x(x^2 + 4) = 1 + \log_x 5$ ، مقدار لگاریتم x در پایه ۲، کدام است؟

(سراسری تجربی - ۹۳)

- (۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) ۲

۲۲) اگر $2\log(x+1) = \log(2x+10)$ ، حاصل $\log_{\frac{1}{x}} x\sqrt{3}$ چه قدر است؟

- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) ۳ (۳) -3 (۴) $-\frac{3}{2}$

۲۳) از تساوی $\log(2x-1) + \frac{1}{2}\log x^2 = \log 3$ ، مقدار لگاریتم $\frac{x}{3}$ در مبنای ۴ کدام است؟

(سراسری ریاضی خارج از کشور - ۸۸)

- (۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{3}$

۲۴) از معادله لگاریتمی $\log(x^2 - x - 6) - \log(x - 3) = \log(2x - 5)$ ، مقدار لگاریتم

$\sqrt[3]{x+1}$ در پایه ۴، کدام است؟ (سراسری خارج از کشور تجربی - ۹۵)

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) ۱

۲۵) از دو معادله $2^x + 2^x = 72$ و $\log(x+1) + \log(2y+x^2) = \log 4$ ، مقدار y کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹

۲۶) در تساوی $\log x - 1 = (\log 2)^2 - (\log 5)^2$ ، مقدار x کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۱۰

مجموع جواب های معادله $(\log_5 x)^2 - 10 \log_5 x + 6 = 0$ کدام است ؟

۲۷

۱۷۵ (۴)

۱۵۰ (۳)

۱۲۵ (۲)

۱۲۰ (۱)

اگر α و β ریشه های معادله $\log_3 x \cdot \log_3 3x = 30$ باشد، آن گاه حاصل $\frac{\alpha}{\beta}$ کدام است ؟

۲۸

($\alpha > \beta$)

۱۱۳ (۴)

۱۱۱ (۳)

۳۹ (۲)

۳۲ (۱)

از تساوی $\log_5 x \times \log_x 5x = 3$ ، مقدار لگاریتم $\log_3(x + 2)$ کدام است ؟

۲۹

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

جواب تمرینات تکمیلی: ☒

سؤال	گزینه صحیح	سؤال	گزینه صحیح
۱	۱	۱۶	۴
۲	۲	۱۷	۲
۳	۴	۱۸	۴
۴	۴	۱۹	۳
۵	۳	۲۰	۲
۶	۲	۲۱	۴
۷	۲	۲۲	۴
۸	۴	۲۳	۱
۹	۴	۲۴	۲
۱۰	۱	۲۵	۳
۱۱	۳	۲۶	۳
۱۲	۴	۲۷	۳
۱۳	۱	۲۸	۳
۱۴	۳	۲۹	۳
۱۵	۳		

درس سوم : نمودارها و کاربردهای توابع نمائی و لگاریتمی
 دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir
 مهندس مهرپویان ۰۹۱۰۷۶۰۲۰۲۷

مثال نمودار توابع $y = 2^x - 3$ و $y = 2 + \log x$ را با انتقال رسم کنید.

مثال نمودار توابع $y = 2^{x-1}$ و $y = \log(x+1)$ را با انتقال رسم کنید.

مثال نمودار توابع $y = 2^{-x}$ و $y = \log(-x)$ و $y = -\log x$ را با استفاده از بازتاب رسم کنید.

مثال نمودار تابع $y = |1 - 2^{-x}|$ را رسم کنید.

مثال نمودار هر تابع را به ضابطه آن نظیر کنید.

الف) $k(x) = -\log_2 x$

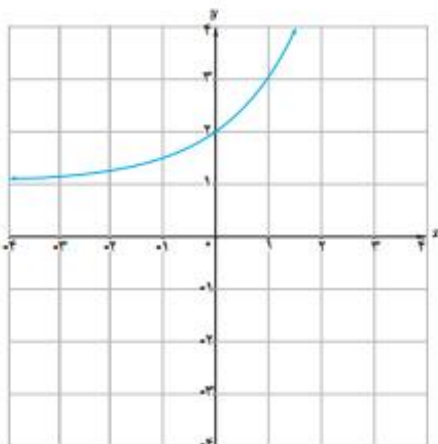
ت) $g(x) = \log(x-1)$

ب) $l(x) = 2 + \log x$

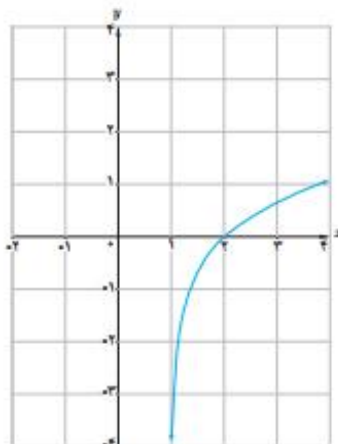
ت) $j(x) = 2^{(x-1)}$

ب) $h(x) = -(\frac{1}{2})^x$

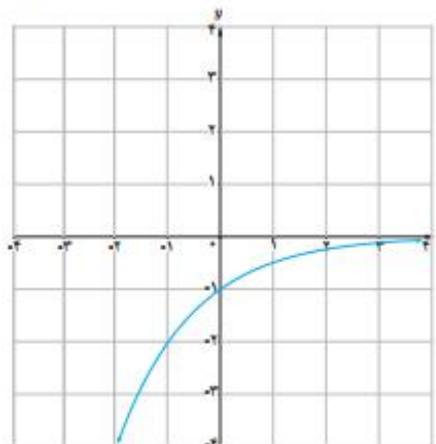
ج) $f(x) = 2^{x+1}$



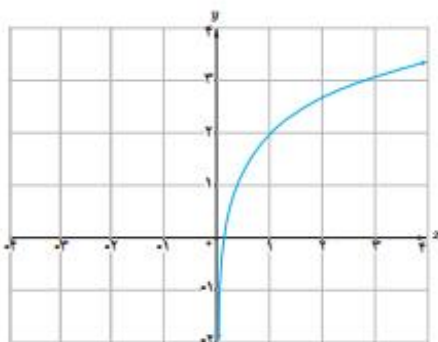
(۱)



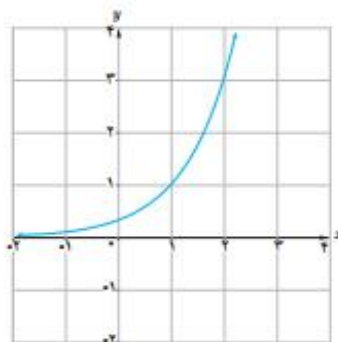
(۲)



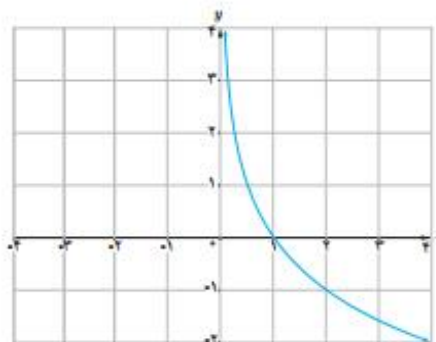
(۳)



(۴)



(۵)



(۶)

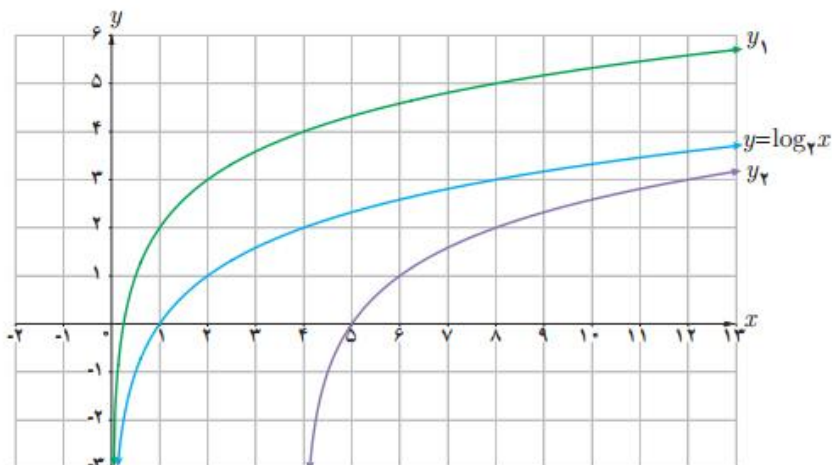
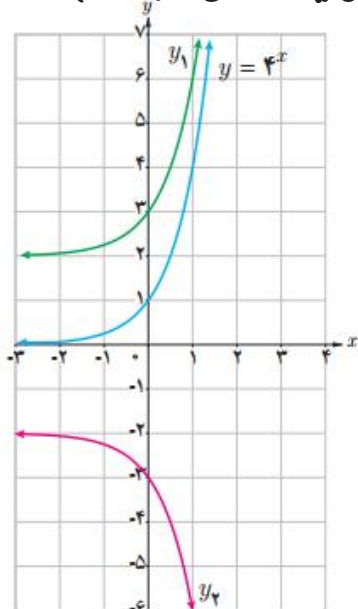
درس سوم : نمودارها و کاربردهای توابع نمائی و لگاریتمی

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

مهندس مهرپویان ۰۹۱۰۷۶۰۲۰۲۷

مثال

در شکلهای زیر، نمودار یک تابع نمایی و یک تابع لگاریتمی و انتقال یافته های آنها رسم شده است. ضابطه توابع انتقال یافته را بنویسید.



مثال

کدام یک از ضابطه ها به کدام یک از نمودارها تعلق دارند ؟

۱) $y = \log_3 (x - 1)$

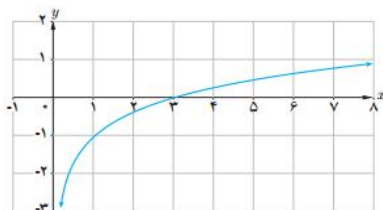
۲) $y = 3^x + 1$

۳) $y = 1 - 3^x$

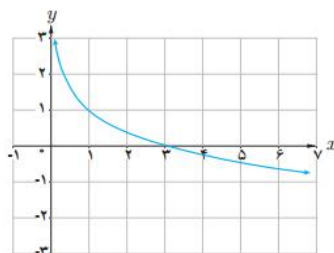
۴) $y = \log_3 x - 1$

۵) $y = 1 - \log_3 x$

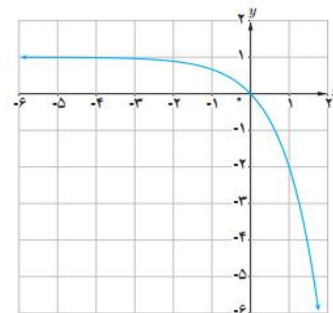
۶) $y = 3^{(x-1)}$



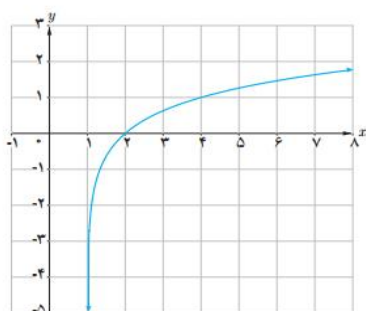
(الف)



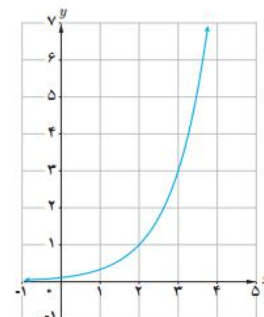
(ب)



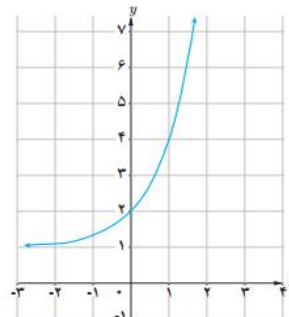
(پ)



(ت)



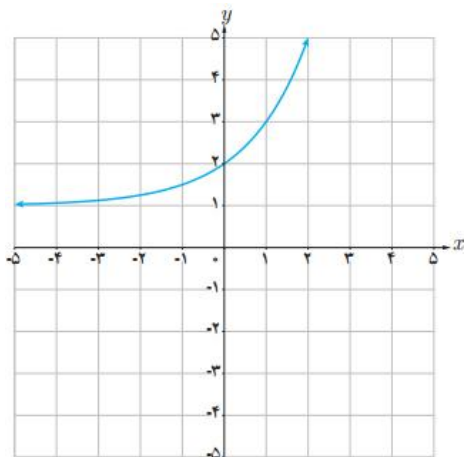
(ث)



(ج)

درس سوم: نمودارها و کاربردهای توابع نمائی و لگاریتمی
 دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir
 مهندس مهرپویان ۰۹۱۰۷۶۰۲۰۲۷

مثال در دستگاه مختصات روبرو نمودار تابع با ضابطه $y = a + 2^{(x-b)}$ رسم شده است.



a و b را به دست آورید.

مثال فرض می کنیم $g(x) = 4^x + 2$. الف $g(-1)$ را به دست آورید. ب اگر $g(x) = 66$ مقدار x چقدر است؟

مثال نمودار تابع با ضابطه $y = 4^x - 1$ را در بازه $[-2, 2]$ رسم کنید.

مثال نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف $y = -2^{-x} + 1$ ب $y = -\log_2(x - 1)$

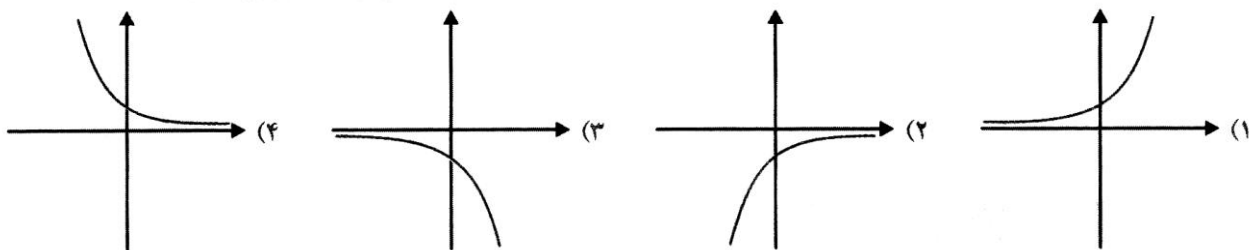
مثال نمودار تابع $f(x) = \log_2(1 - x)$ را ابتدا در امتداد محور x ها دو واحد به چپ و سپس در

امتداد محور y ها ۳ واحد به پایین انتقال می دهیم ضابطه تابع جدید را بنویسید.

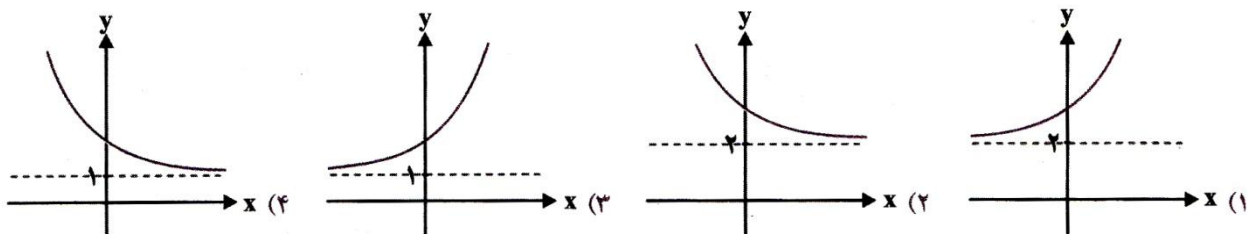
مثال فاصله نقطه تقاطع نمودارهای دو تابع $y = 27^x$ و $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}$ از مبدأ مختصات کدام است؟

تمرینات تکمیلی:

۱) نمودار تابع $f(x) = (\frac{1}{2})^{-x}$ کدام است؟



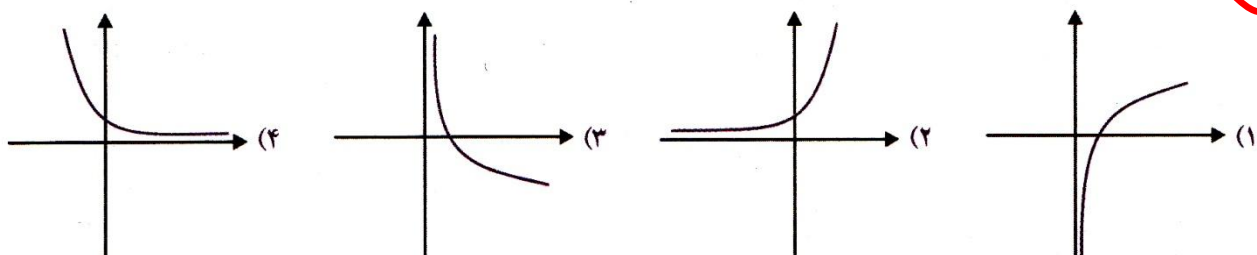
۲) نمودار تابع $y = 2^{x-1} + 2$ کدام است؟



۳) نمودار تابع $y = 2^{2x} - 2$ از کدام ناحیه یا نواحی عبور نمی کند؟

(۱) اول و چهارم (۲) سوم و چهارم (۳) دوم (۴) از هر ۴ ناحیه عبور می کند.

۴) نمودار تابع $y = (\log_4 3)^x$ به کدام صورت است؟

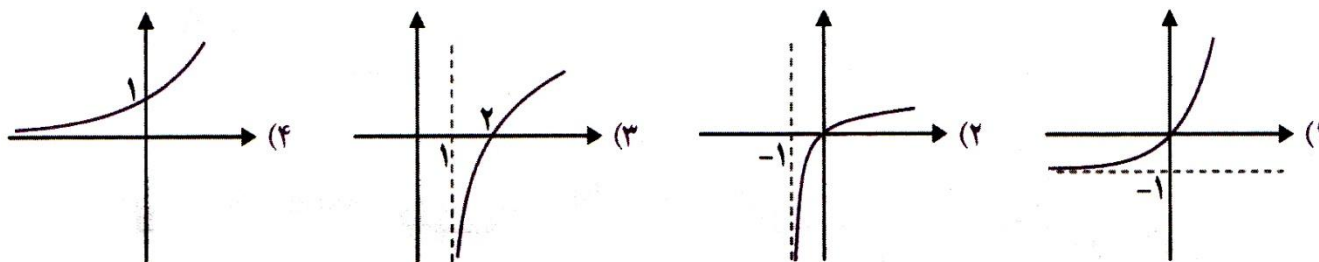


سوم: نمودارها و کاربردهای توابع نمائی و لگاریتمی

۵

مهندس مهرپویان ۰۹۱۰۷۶۰۲۰۲۷

نمودار $y = \log_3(x-1)$ در کدام گزینه آمده است؟

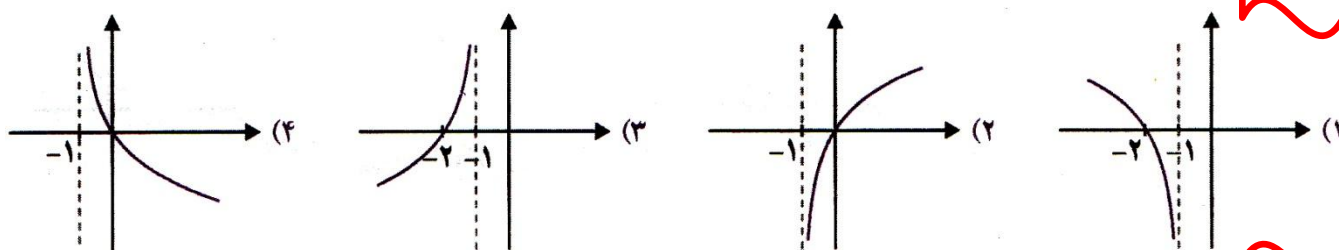


۶ نمودارهای دو تابع $f(x) = \log_2 \frac{1}{x}$ و $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ نسبت به هم چگونه اند؟ (سراسری)

خارج از کشور تجربی - (۹)

(۱) $f(x)$ بالاتر (۲) $g(x)$ بالاتر (۳) منطبق اند (۴) فقط در یک نقطه متقاطع

۷ نمودار تابع $y = -\log(-x-1)$ کدام است؟



۸ با کدام انتقال نمودار $y = 8 \times 2^{x+1} - 1$ به نمودار $y = 2^{x+1} + 2$ تبدیل می شود؟

(۲) واحد به چپ و ۳ واحد به پایین

(۱) ۳ واحد به چپ و ۳ واحد به بالا

(۴) واحد به راست و ۳ واحد به پایین

(۳) ۳ واحد به راست و ۳ واحد به بالا

۹ با کدام انتقال نمودار $y = \log_3(x-1)$ به نمودار $y = \log_3 9x$ منتقل می شود؟

درس سوم: نمودارها و کاربردهای توابع نمائی و لگاریتمی
 دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir
 مهندس مهرپویان ۰۹۱۰۷۶۰۲۰۲۷

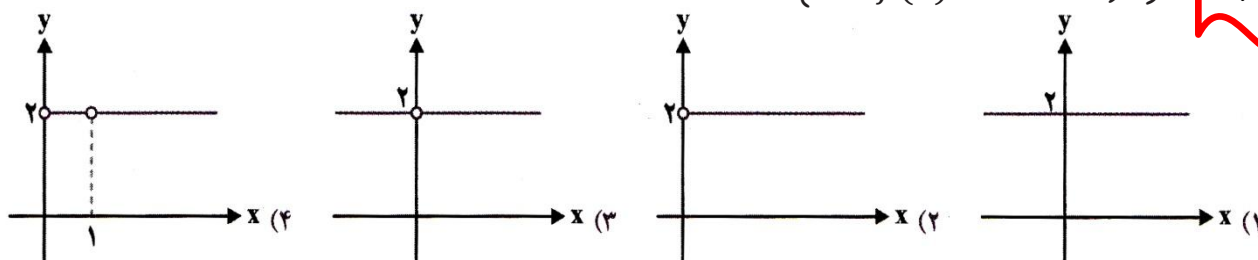
(۲) واحد به راست و ۹ واحد به بالا

(۱) واحد به چپ و ۲ واحد به بالا

(۴) واحد به راست و ۲ واحد به بالا

(۳) واحد به چپ و ۹ واحد به بالا

۱۰) نمودار $f(x) = x^{\log x}$ کدام است؟



۱۱) نمودارهای دو تابع $f(x) = 3^{ax+b}$ و $g(x) = (\frac{1}{9})^x$ ، در نقطه ای به طول ۱- متقاطع

هستند. اگر $f(2) = \frac{1}{3}$ باشد، مقدار $f^{-1}(27)$ کدام است؟ (سراسری ریاضی - ۹۵)

۳ (۴)

۱ (۳)

-۲ (۲)

-۳ (۱)

۱۲) نمودار تابع $y = 3 - \log_2(x+4)$ ، محورهای مختصات را در دو نقطه $(a, 0)$ و $(0, b)$

قطع می کند. حاصل $a+b$ کدام است؟

۲۷ (۴)

۲۸ (۳)

۶۲ (۲)

۹۳ (۱)

۱۳) فاصله نقطه تلاقی دو منحنی به معادلات $y = 2^x$ و $y = (\sqrt{2})^{x+1}$ ، از نقطه $A(0, 4)$ ، کدام

است؟ (سراسری خارج از کشور تجربی - ۹۳)

۳ (۴)

۱ (۳)

-۲ (۲)

-۳ (۱)

✓ کاربرد توابع نمائی و لگاریتمی:

✓ محاسبه میزان انرژی آزاد شده در زلزله:

اگر بزرگی زلزله ای در مقیاس ریشتر برابر M باشد، انرژی آزاد شده آن زلزله برابر E در واحد

$$\log E = 11/8 + 1/5 M$$

(Erg) است که از رابطه زیر به دست می آید:

مثال در سال ۱۳۶۹ زلزله ای با قدرت $7/2$ ریشتر منطقه رودبار را لرزاند. انرژی آزاد شده در این

زلزله مهیب چه قدر بوده است؟

$$\log E = 11/8 + 1/5 (7/2) = 22/6 \Rightarrow 10^{22/6} (Erg)$$

پاسخ

مثال انرژی آزاد شده توسط زلزله ای حدود $10^{21/7}$ (Erg) است. قدرت زلزله در مقیاس ریشتر چه

قدر بوده است؟

$$\log 10^{21/7} = 11/8 + 1/5 M = 21/7 \log 10 = 11/8 + 1/5 M$$

پاسخ

$$\Rightarrow 21/7 = 11/8 + 1/5 M \Rightarrow 9/9 = 1/5 M \Rightarrow \frac{9/9}{1/5} \approx 6/6 \text{ ریشتر}$$

تمرینات تکمیلی:

۱۴) انرژی آزاد شده زلزله با قدرت ۶ ریشتر چند برابر انرژی آزاد شده زلزله با قدرت ۴ ریشتر است؟

۱۰۰۰ (۴)

۸۰ (۳)

۱۰۰ (۲)

۱۵۰ (۱)

۱۵) انرژی آزاد شده در یک زلزله حدوداً ۵/۵ ریشتری حدوداً چند ارگ است؟

۲۰ (۴)

۱۰۵ (۳)

۱۰۰ (۲)

۱۰۵ (۱)

مثال) اشریشیا کلی (Escherichia coli) یا به طور اختصار E.coli نوعی باکتری است که به طور

طبیعی در دستگاه گوارش زندگی می کند و تکثیر آن به صورت نمایی است. عوامل مختلفی مانند زیاد شدن آن باعث بیماری می شود. نوع خاصی از این بیماری با ۱۰۰ باکتری شروع می شود و هر باکتری در مدت نیم ساعت به دو قسمت تقسیم می شود. اندازه هر توده باکتری بعد از t ساعت از رابطه زیر به دست می آید:

$$p(t) = 100 \times 2^{2t} \quad (0 \leq t \leq 16)$$

با فرض اینکه هیچ کدام از باکتری ها از بین نروند، تعداد باکتری ها در یک توده پس از ۳ ساعت برابر است با:

$$p(3) = 100 \times 2^6 = 6400$$