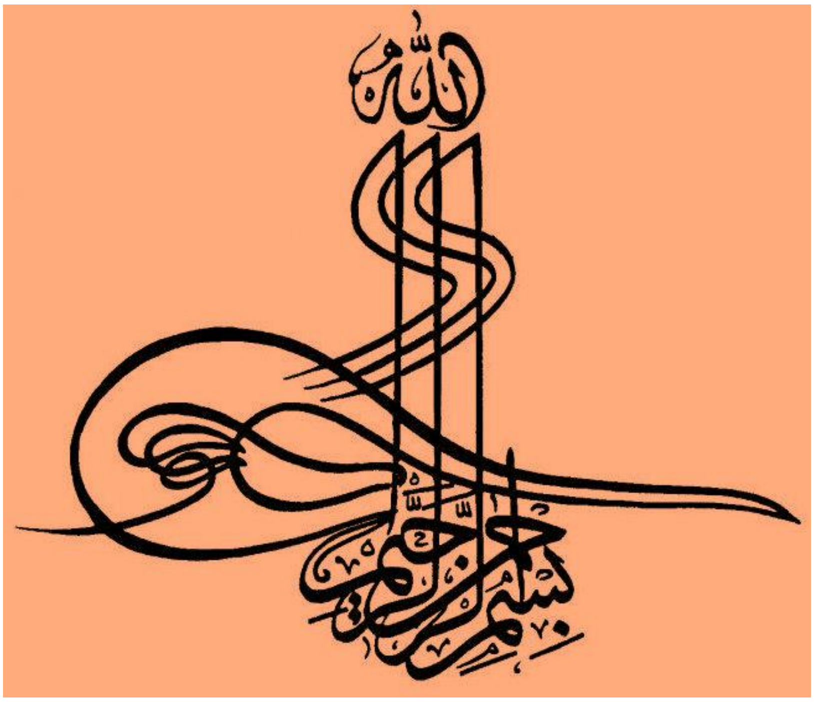


توابع نمایی و لگاریتمی

فصل پنجم ریاضی یازدهم تجربی

طبقه بندی سوالات به صورت موضوعی

نکات کنکوری وسوالات چهار گزینه ای

حل تمامی تمرین ها ، فعالیت ها وکاردر کلاس ها

مؤلف:

حبیب هاشمی

۱۳۹۷

مقدمه

جزوه حاضر که برا ساس مطالب مبحث « توابع نمایی و لگاریتمی و کاربردهای آتها » نگارش شده ا ست، دارای ویژگی های زیر است:

۱- باز کردن مفاهیمی که در کتاب درسی به علت محدودیت حجم، به آن کمتر پرداخته شده است.

۲- مطالب به صورت ساده و روان و به زبان دانش آموز ارائه شده است.

۳- مطالب و نکات، به گونه ایی است که خلأ بین مطالب ارائه شده در کتب درسی و سؤالات مطرح شده در کنکورهای سراسری را پر کند.

۴- در این کتاب با نگاهی عمیق‌تر و جامع‌تر از کتاب درسی، به مطالب پرداخته شده و به همین منظور از مثال‌ها و مسائل حل شده متنوعی بهره گرفته ایم.

۵- ایجاد تعادل نسبی بین مهارت های محاسبات صوری و درک مفهومی.

۶- استفاده از مسائل باز پاسخ.

۷-توجه به دانش قبلی دانش آموزان.

۸- ایجاد اتصال و ارتباط بین جنبه های متفاوت یک مفهوم و نیز بین یک مفهوم و دیگر مفاهیم کتاب.

در پایان امیدواریم که مطالعه ی دقیق این کتاب و بهره گیری از رهنمودهای دبیران فرهیخته و گران قدر بتواند موفقیت تحصیلی شما خوبان را تضمین و تثبیت نماید. ارائه ی نظرات شما دانش پژوهان، دبیران فرهیخته و گران قدر، موجب سپاس و امتنان است.

حبیب هاشمی

تابع نمایی

توان‌های حقیقی

مشابه قوانین مربوط به اعداد توان‌دار با توان‌های گویا و پایه‌های حقیقی مثبت، برای توان‌های حقیقی نیز برقرار است. فرض کنیم x و y دو عدد حقیقی مثبت و r و s دو عدد حقیقی باشند، آن‌گاه:

۱) $x^{o} = ۱$ ۲) $x^{-r} = \frac{۱}{x^{r}}$ ۳) $x^{r} \times x^{s} = x^{r+s}$ ۴) $(x^{r})^{s} = x^{rs}$

۵) $(xy)^{r} = x^{r}y^{r}$ ۶) $\left(\frac{x}{y}\right)^{r} = \frac{x^{r}}{y^{r}} ,(y \neq o)$ ۷) $\frac{x^{r}}{x^{s}} = x^{r-s} ,(x \neq o)$ ۸) $۱^{r} = ۱$

مثال: هریک از عبارت‌های زیر را ساده کنید.

آ) $۳^{۱-\sqrt{۲}} \times ۳^{۱+\sqrt{۲}}$ ب) $۵^{۲\sqrt{۲}} \times ۳^{\sqrt{۸}}$ پ) $\frac{۲^{\sqrt{۲}} \times ۲^{۲\sqrt{۲}}}{۴^{\sqrt{۲}} \times ۴^{۲\sqrt{۲}}}$

پاسخ:

آ) در ضرب اعداد توان‌دار با پایه‌های مساوی، توان‌ها را با هم جمع می‌کنیم

$$۳^{۱-\sqrt{۲}} \times ۳^{۱+\sqrt{۲}} = ۳^{(۱-\sqrt{۲})+(۱-\sqrt{۲})} = ۳^{۲} = ۹ \ :$$

ب) چون $\sqrt{۸} = \sqrt{۴ \times ۲} = ۲\sqrt{۲}$ است.پس توان‌ها باهم برابرند و داریم:

$$۵^{۲\sqrt{۲}} \times ۳^{\sqrt{۸}} = ۵^{۲\sqrt{۲}} \times ۳^{۲\sqrt{۲}} = (۵ \times ۳)^{۲\sqrt{۲}} = ۱۵^{۲\sqrt{۲}}$$

پ) ابتدا هری یک از عبارت‌های صورت و مخرج را به شکل یک عدد توان‌دار می‌نویسیم:

$$۲^{\sqrt{۲}} \times ۲^{۲\sqrt{۲}} = ۲^{\sqrt{۲}+۲\sqrt{۲}} = ۲^{۳\sqrt{۲}} \ , \ ۴^{\sqrt{۲}} \times ۴^{۲\sqrt{۲}} = ۴^{\sqrt{۲}+۲\sqrt{۲}} = ۴^{۳\sqrt{۲}} \rightarrow \text{حاصل} = \frac{۲^{۳\sqrt{۲}}}{۴^{۳\sqrt{۲}}}$$

$$= \left(\frac{۲}{۴}\right)^{۳\sqrt{۲}} = \left(\frac{۱}{۲}\right)^{۳\sqrt{۲}}$$

مثال : هر یک از عبارت‌های زیر را ساده کنید.

آ) $\left(\sqrt{۵}^{\sqrt{۲}}\right)^{\sqrt{۸}}$ ب) $۲^{\sqrt{۳}} \times ۲^{\sqrt{۱۲}}$ پ) $۹^{\sqrt{۲}} \times \left(\frac{۱}{۳}\right)^{-\sqrt{۳۲}}$

ت) $۴^{\sqrt{۲}} \times \sqrt{۳}^{\sqrt{۸}}$ ث) $\left(\sqrt{۲}^{۳-\sqrt{۵}}\right)^{۳+\sqrt{۵}}$ ج) $\frac{۵^{\sqrt{۳}} \times ۱۲^{\sqrt{۳}}}{۱۰^{\sqrt{۱۲}} \times ۱۰^{-\sqrt{۳}}}$

چ) $\frac{\left(۳^{\sqrt{۵}} \times ۱۷^{\sqrt{۵}}\right)}{۲^{-\sqrt{۴۵}} + (o/۲۵)^{\sqrt{۵}}}$ ح) $(۲-\sqrt{۳})^{\sqrt{۲}+۱} \times (۲+\sqrt{۳})^{\frac{۱}{\sqrt{۲}-۱}}$

حل)آ)

$$(a^b)^c = a^{bc} \rightarrow \left(\sqrt{۵}^{\sqrt{۲}}\right)^{\sqrt{۸}} = \sqrt{۵}^{\sqrt{۲}\times\sqrt{۸}} = \sqrt{۵}^{\sqrt{۱۶}} = \sqrt{۵}^{۴} = \left(\left(\sqrt{۵}\right)^{۲}\right)^{۲} = ۵^{۲} = ۲۵$$

ب)

$$a^b \times a^c = a^{b+c} \quad , \quad \sqrt{۱۲} = \sqrt{۴\times۳} = ۲\sqrt{۳} \rightarrow ۲^{\sqrt{۳}} \times ۲^{\sqrt{۱۲}} = ۲^{\sqrt{۳}} \times ۲^{۲\sqrt{۳}} = ۲^{\sqrt{۳}+۲\sqrt{۳}} = ۲^{۳\sqrt{۳}}$$

پ)

$$\sqrt{۳۲} = \sqrt{۱۶\times۲} = ۴\sqrt{۲}, \frac{۱}{۳} = ۳^{-۱} \rightarrow \left(\frac{۱}{۳}\right)^{-\sqrt{۳۲}} = (۳^{-۱})^{-۴\sqrt{۲}} = ۳^{۴\sqrt{۲}}$$

$$۹^{\sqrt{۲}} = (۳^{۲})^{\sqrt{۲}} = ۳^{۲\sqrt{۲}} \rightarrow ۹^{\sqrt{۲}} \times \left(\frac{۱}{۳}\right)^{-\sqrt{۳۲}} = ۳^{۲\sqrt{۲}} \times ۳^{۴\sqrt{۲}} = ۳^{۲\sqrt{۲}+۴\sqrt{۲}} = ۳^{۶\sqrt{۲}}$$

ت) پایه‌ها و توان‌ها متفاوت‌اند. چون $\sqrt{۸} = ۲\sqrt{۲}$ می‌باشد، توان‌های دو عبارت را یکی می‌کنیم:

$$\sqrt{۳}^{\sqrt{۸}} = \sqrt{۳}^{۲\sqrt{۲}} = \left(\left(\sqrt{۳}\right)^{۲}\right)^{\sqrt{۲}} = ۳^{\sqrt{۲}} \rightarrow ۴^{\sqrt{۲}} \times \sqrt{۳}^{\sqrt{۸}} = ۴^{\sqrt{۲}} \times ۳^{\sqrt{۲}} = (۴\times۳)^{\sqrt{۲}} = ۱۲^{\sqrt{۲}}$$

ث)

$$\left(\sqrt{۲}^{۳-\sqrt{۵}}\right)^{۳+\sqrt{۵}} = \sqrt{۲}^{(۳-\sqrt{۵})\times(۳+\sqrt{۵})} = \sqrt{۲}^{۹-۵} = \sqrt{۲}^{۴} = \left(\left(\sqrt{۲}\right)^{۲}\right)^{۲} = ۲^{۲} = ۴$$

ج) ابتدا صورت و مخرج کسر را به صورت یک عدد توان‌دار می‌نویسیم:

$$۵^{\sqrt{۳}} \times ۱۲^{\sqrt{۳}} = (۵ \times ۱۲)^{\sqrt{۳}} = ۶۰^{\sqrt{۳}} \qquad (۱)$$

$$\sqrt{۱۲} = ۲\sqrt{۳} \rightarrow ۱۰^{\sqrt{۱۲}} \times ۱۰^{-\sqrt{۳}} = ۱۰^{۲\sqrt{۳}} \times ۱۰^{\sqrt{۳}} = ۱۰^{۲\sqrt{۳}-\sqrt{۳}} = ۱۰^{\sqrt{۳}} \qquad (۲)$$

$$(۱),(۲) \rightarrow \text{حاصل کسر} = \frac{۶۰^{\sqrt{۳}}}{۱۰^{\sqrt{۳}}} = \left(\frac{۶۰}{۱۰}\right)^{\sqrt{۳}} = ۶^{\sqrt{۳}}$$

چ)

$$\left(۳^{\sqrt{۵}} \times ۱۷^{\sqrt{۵}}\right) \div ۵۱^{\sqrt{۲۰}} = (۳ \times ۱۷)^{\sqrt{۵}} \div ۵۱^{۲\sqrt{۵}} = ۵۱^{\sqrt{۵}} \div ۵۱^{۲\sqrt{۵}} = ۵۱^{\sqrt{۵}-۲\sqrt{۵}} = ۵۱^{-\sqrt{۵}} \quad (۱)$$

$$\sqrt{۴۵} = \sqrt{۹ \times ۵} = ۳\sqrt{۵} \;, \qquad ۰/۲۵ = \frac{۱}{۴} = ۲^{-۲}$$

$$\rightarrow \text{مخرج کسر} = \left(۲^{-۳\sqrt{۵}} \div (۲^{-۲})^{\sqrt{۵}}\right) = \left(۲^{-۳\sqrt{۵}} \div ۲^{-۲\sqrt{۵}}\right) = ۲^{-۳\sqrt{۵}-(-۲\sqrt{۵})} = ۲^{-\sqrt{۵}} \qquad (۲)$$

$$(۱),(۲) \rightarrow \text{حاصل کسر} = \frac{\sqrt{۲}+۱}{۲^{-\sqrt{۵}}} = \left(\frac{۵۱}{۲}\right)^{-\sqrt{۵}}$$

ح) در دو عبارت داده شده، در ظاهر نه پایه‌ها با هم برابرند و نه توان‌ها، اگر مخرج کسر $\frac{۱}{\sqrt{۲}-۱}$ را گویا کنیم، داریم:

$$\frac{۱}{\sqrt{۲}-۱} = \frac{۱}{\sqrt{۲}-۱} \times \frac{\sqrt{۲}+۱}{\sqrt{۲}+۱} = \frac{\sqrt{۲}+۱}{(\sqrt{۲})^{۲}-۱^{۲}} = \sqrt{۲}+۱$$

$$\rightarrow \text{حاصل عبارت} = \left(۲-\sqrt{۳}\right)^{\sqrt{۲}+۱} \times \left(۲+\sqrt{۳}\right)^{\sqrt{۲}+۱}$$

$$= \left(\left(۲-\sqrt{۳}\right)\left(۲+\sqrt{۳}\right)\right)^{\sqrt{۲}+۱} = (۴-۳)^{\sqrt{۲}+۱} = ۱^{\sqrt{۲}+۱} = ۱$$

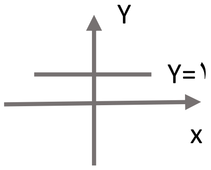
تابع نمایی:

هر تابع با ضابطه‌ی $f(x)=a^x$ که در آن $a \in R$ و $a>o$, $a \neq ۱$ یک تابع نمایی نامیده می‌شود.

مثال: توابع با ضابطه‌های $y=۲^x$ و $y=۳^x$ و $y=\left(\frac{۱}{۲}\right)^x$ و $y=\left(\frac{۱}{۴}\right)^x$ و $y=\left(\sqrt{۵}\right)^x$ نمونه‌ای از توابع نمایی هستند.

مثال : توابع $y=\left(-\sqrt{۲}\right)^x$ و $y=۱^x$ به خاطر آن که در اولی $a=-\sqrt{۲}<o$ و در دومی $a=۱$ می‌باشد، در دسته‌ی توابع نمایی قرار نمی‌گیرند.

تذکر: در تابع نمایی $y=a^x$ عدد ثابت a پایه و توان متغیر است، اما در تابع $y=x^a$ پایه متغیر و توان عدد ثابت است. به‌عنان مثال، تابع $y=۳^x$ یک تابع نمایی با پایه‌ی ۳ و توان x و تابع $y=x^۳$ یک تابع یک جمله‌ای از درجه‌ی ۳ با پایه‌ی x و توان ۳ می‌باشد.



تذکر: در تابع $y=a^x$، اگر $a=۱$ باشد، آن‌گاه ضابطه‌ی تابع به‌صورت $y=۱^x=۱$ در می‌آید که ضابطه‌ی تابع ثابت می‌باشد و نمودار آن به صورت مقابل است:

مثال : کدام یک از توابع زیر، ضابطه‌ی یک تابع نمایی است؟

آ) $y=x^۲$ ب) $y=\left(\frac{۱}{\sqrt{۵}}\right)^x$ پ) $y=\frac{۲}{x}$

ت) $y=۶^{-x}$ ث) $y=\frac{۲^x}{۵^x}$ ج) $y=۲^x+x$

حل) آ) $y=x^۲$ یک تابع یک جمله‌ای از درجه‌ی ۲ است

ب) $y=\left(\frac{۱}{\sqrt{۵}}\right)^x$ ضابطه‌ی یک تابع نمایی می‌باشد.

پ) $y=\frac{۲}{x}$ ضابطه‌ی یک تابع گویا است.

ت) $y = ۶^{-x} = (۶^{-۱})^{x} = \left(\frac{۱}{۶}\right)^{x}$ ضابطه‌ی یک تابع نمایی می‌باشد.

ث) $y = \frac{۲^{x}}{۵^{x}} = \left(\frac{۲}{۵}\right)^{x}$ ضابطه‌ی یک تابع نمایی است.

ج) $y = ۲^{x} + x$ ضابطه‌ی یک تابع نمایی نمی‌باشد.

مثال : حدود a را چنان تعیین کنید که تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = \left(\frac{a+۲}{a-۱}\right)^{x}$ یک تابع نمایی باشد.

مثال : اگر $\frac{a+۲}{a-۱} > o$ و $\frac{a+۲}{a-۱} \neq ۱$ باشد، آن‌گاه f(x) ضابطه‌ی یک تابع نمایی است:

حل)برای حل نامعادله‌ی $\frac{a+۲}{a-۱} > o$ عبارت $p = \frac{a+۲}{a-۱}$ را تعیین علامت می‌کنیم:

$$a + ۲ = o \to a = -۲ \,, a - ۱ = o \to a = ۱$$

A		-۲		۱	
$a+۲$	−	۰	+		+
$a-۱$	−		−	۰	+
P	+	۰	−	تعریف نشده	+

$P > o \to a < -۲$ یا $a > ۱$ (۱)

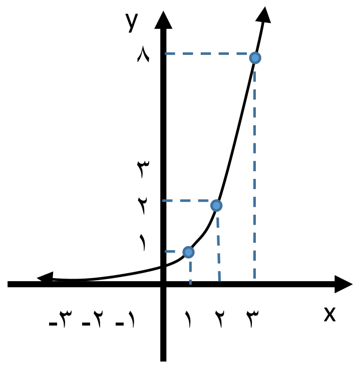
$\frac{a+۲}{a-۱} \neq ۱ \to a + ۲ \neq a - ۱ \to ۲ \neq -۱$ همواره برقرار است (۲)

$(۱),(۲) \to a < -۲$ یا $a > ۱$

نمودار تابع نمایی $y=a^x$ با شرط $a>1$

مثال: نمودار تابع $y=2^x$ را به کمک نقطه‌یابی رسم کنید.

پاسخ

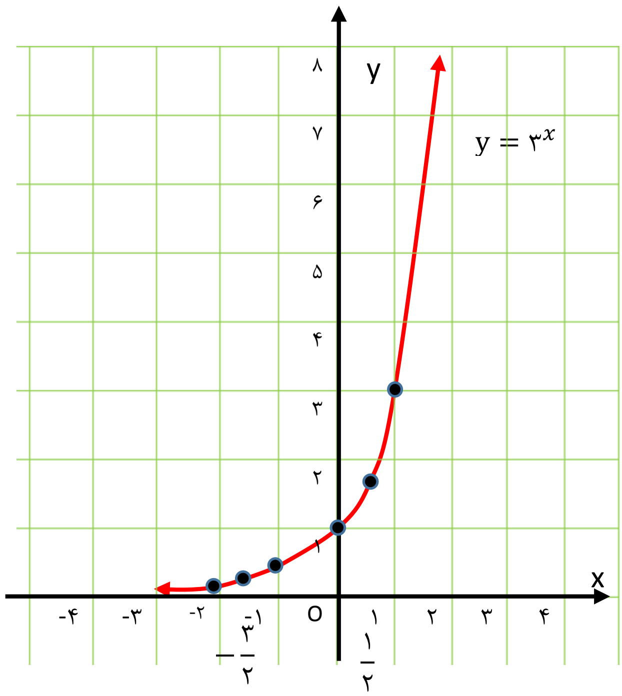


$y=2^x$	x	-۳	-۲	-۱	O	۱	۲	۳
	Y	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	۱	۲	۴	۸

$$x=-3 \to y=2^{-3}=\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}\ , x=-2 \to y=2^{-2}=\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}\ , x=-1 \to y=2^{-1}=\frac{1}{2}$$

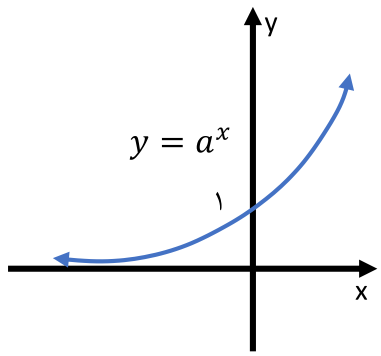
$$x=o \to y=2^o=1\ , x=1 \to y=2^1=2\ , x=2 \to y=2^2=4\ , x=3 \to y=2^3=8$$

مثال: نمودار تابع با ضابطه‌ی $y=3^x$ با استفاده از نقاط جدول زیر رسم شده است.



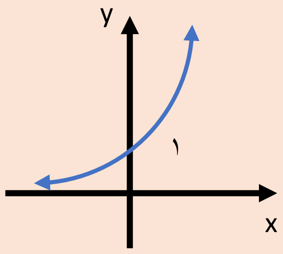
x	$y=3^x$
-2	$o/11$
$-\frac{3}{2}$	$o/19$
-1	$o/33$
o	۱
$\frac{1}{2}$	$1/73$
۱	۳

در حالت کلی تابع نمایی $y = a^x$ اگر $a > ۱$ نمودار تابع به شکل زیر است:



ویژگی‌های تابع نمایی $y=a^x$ با شرط $a>۱$

۱) دامنه‌ی تابع مجموعه‌ی اعداد حقیقی، یعنی IR و برد آن مجموعه‌ی اعداد حقیقی مثبت، یعنی $(0,+\infty)$ می‌باشد.



۲) نمودار تابع به صورت مقابل است.

۳) نمودار تابع، محور yها را در نقطه‌ی $(0,۱)$ قطع می‌کند.

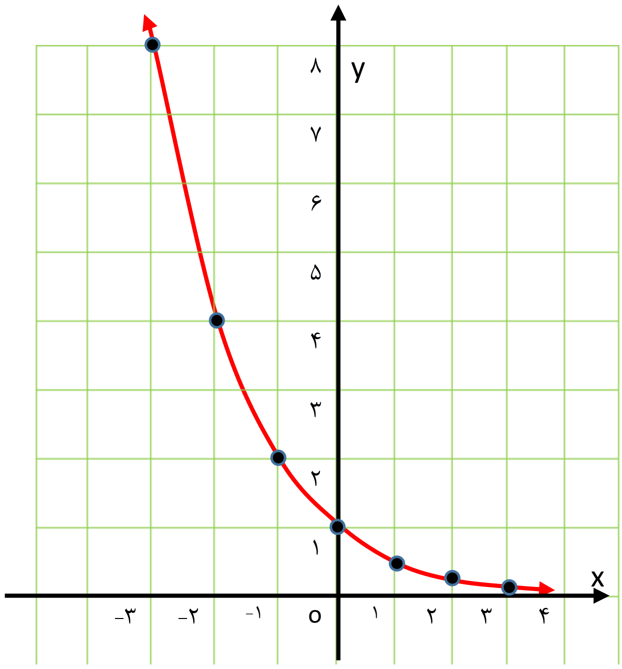
۴) نمودار تابع، محور xها را قطع نمی‌کند.

۵) تابع در دامنه‌ی آن یک به یک است، زیرا تمام خطوط موازی با محور xها نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند.

نمودار تابع نمایی $y=a^x$ با شرط $۰ < a < ۱$

مثال: نمودار تابع $y = \left(\frac{۱}{۲}\right)^x$ را به کمک نقطه‌یابی رسم کنید.

X	-۳	-۲	$-\frac{۱}{۲}$	o	۱	۲	۳
$y = \left(\frac{۱}{۲}\right)^x$	۸	۴	$\sqrt{۲}$	۱	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۸}$

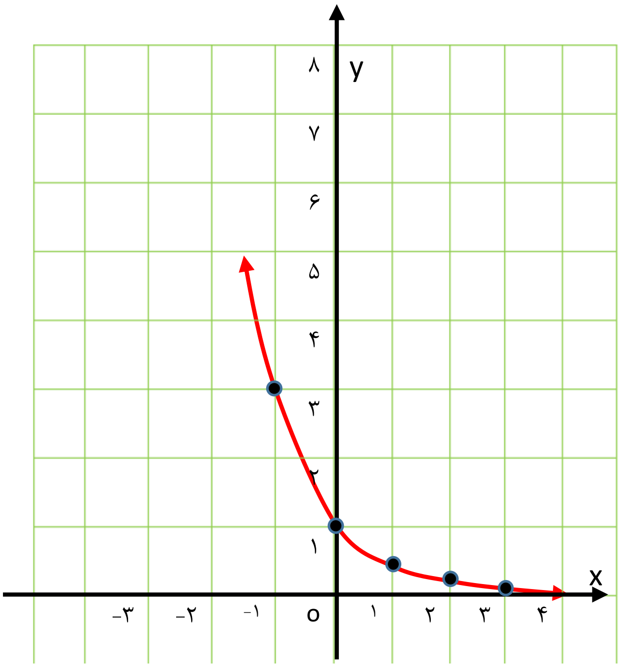


$x = -۳ \to y = \left(\frac{۱}{۲}\right)^{-۳} = ۲^۳ = ۸\,, x = -۲ \to y = \left(\frac{۱}{۲}\right)^{-۲} = ۲^۳ = ۴, x = -۱ \to y = \left(\frac{۱}{۲}\right)^{-۱} = ۲^۱ = ۲$

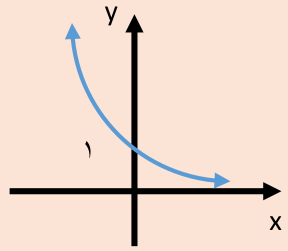
$x = o \to y = \left(\frac{۱}{۲}\right)^{o} = ۱\,, x = ۱ \to y = \left(\frac{۱}{۲}\right)^{۱} = \frac{۱}{۲}, x = ۲ \to y = \left(\frac{۱}{۲}\right)^{۲} = \frac{۱}{۴}\,, x = ۳ \to y = \left(\frac{۱}{۲}\right)^{۳} = \frac{۱}{۸}$

مثال :نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = \left(\frac{۱}{۳}\right)^x$ را رسم کنید.

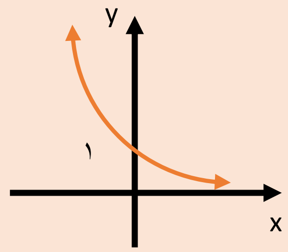
x	$y = \left(\frac{۱}{۳}\right)^x$
۱−	۳
۰	۱
۱	$\frac{۱}{۳}$
۲	$\frac{۱}{۹}$



در حالت کلی تابع نمایی $y = a^x$ اگر $۰ < a < ۱$ نمودار تابع به شکل زیر است:



ویژگی‌های تابع نمایی $y=a^x$ با شرط $۰ < a < ۱$



۱) دامنه‌ی تابع مجموعه‌ی اعداد حقیقی، یعنی IR و برد آن مجموعه‌ی اعداد حقیقی مثبت، یعنی $(0,+\infty)$ می‌باشد.

۲) نمودار تابع به‌صورت روبه‌رو است.

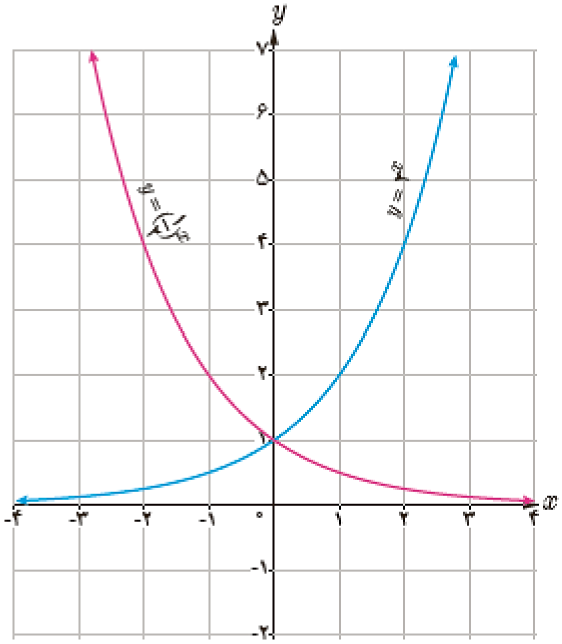
۳) نمودار تابع محور yها را در نقطه‌ی (۰,۱) قطع می‌کند.

۴) نمودار تابع محور xها را قطع نمی‌کند.

۵) تابع در دامنه‌ی آن یک به یک است، زیرا تمام خطوط موازی با محور xها نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند.

قرینه یک نمودار نسبت به محور y ها

مثال: نمودار توابع با ضابطه‌های $y=۲^x$ و $y=\left(\frac{۱}{۲}\right)^x$ را در نظر بگیرید.



الف)نمودارهای این دو تابع نسبت به کدام محور yها قرینه‌اند.

ب) با جایگذاری $-x$ به جای x در تابع با ضابطه‌ی $y=۲^x$ به تابع با ضابطه‌ی $y=۲^{-x}$ یا همان $y=\left(\frac{۱}{۲}\right)^x$ دست می‌یابیم

نتیجه : نمودر توابع $y=f(x)$ و $y=f(-x)$ نسبت به محور y ها قرینه هستند.

به زبان ساده تر:اگر x رابه $-x$ تبدیل کنیم نمودار نسبت به محور y ها قرینه می شود.

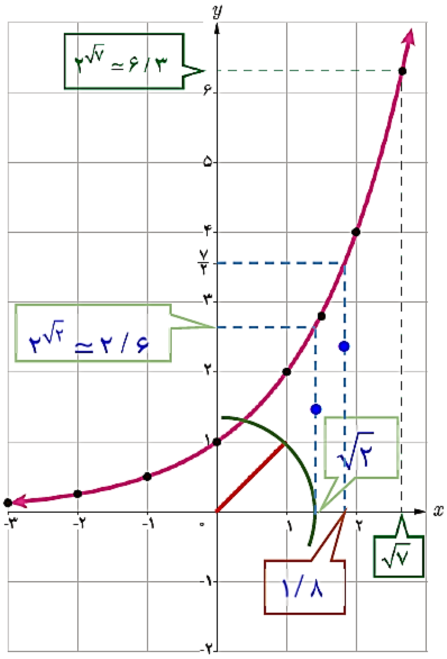
نمودار توابع با ضابطه‌های $y=a^x$ و $y=a^{-x}$ $(a>o$ و $a\neq ۱)$ نسبت به محور yها قرینه‌اند.

مثال: دو تابع نمایی بنویسید دیگری که نسبت به محور yها قرینه باشند

$y=۳^x$, $y=۳^{-x}=\left(\frac{۱}{۳}\right)^x$ و $y=\left(\frac{۲}{۵}\right)^x$, $y=\left(\frac{۲}{۵}\right)^{-x}=\left(\frac{۵}{۲}\right)^x$

چند مثال کاربردی

مثال : در شکل مقابل نمودار تابع نمایی با ضابطه‌ی $y = ۲^x$ رسم شده است.



الف) عدد $\sqrt{۲}$ را روی محور Xها مشخص کنید و به کمک نمودار، مقدار $۲^{\sqrt{۲}}$ را به‌صور تقریبی به‌دست آورید.

$$۲^{\sqrt{۲}} = ۲/۶$$

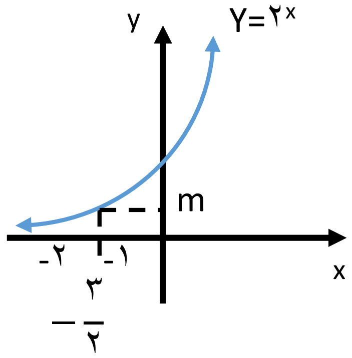
ب) عدد $\sqrt{۷}$ را روی محور Xها مشخص کنید و به کمک نمودار، مقدار $۲^{\sqrt{۷}}$ را به‌صور تقریبی به‌دست آورید.

$$۲^{\sqrt{۷}} = ۶/۳$$

پ)عدد $\frac{۷}{۲}$ روی محور Yها مشخص شده است. با استفاده از نمودار، مقدار تقریبی عددa را روی محور طول‌ها به‌دست آورید؛ به طوری که $۲^a \cong \frac{۷}{۲}$.

$$\frac{۷}{۲} \cong ۲^{۱/۸}$$

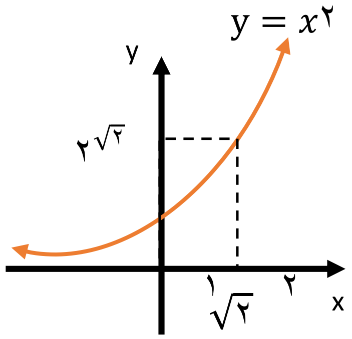
مثال : نمودار تابع $y=۲^x$ به صورت مقابل است:



آ) عدد $۲^{\sqrt{۲}}$ را روی محور yها مشخص کنید.

ب) عدد m برابر چه عددی است؟

حل)آ) عدد $\sqrt{۲}$ را روی محور xها مشخص می‌کنیم و از آن خطی



به موازات محور yها رسم می‌کنیم تا نمودار را قطع کند.

تصویر این نقطه از نمودار بر روی محور yها عدد $۲^{\sqrt{۲}}$ است :

ب) تصویر نقطه‌ی مشخص شده روی محور xها

عدد $-\frac{۳}{۲}$ است. تصویر آن روی محور yها برابر $۲^{-\frac{۳}{۲}}$

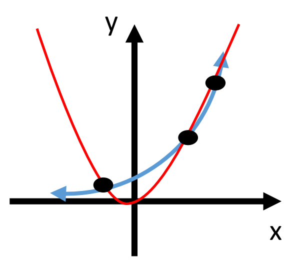
می‌باشد. پس: $m = ۲^{-\frac{۳}{۲}} = \frac{۱}{۲^{\frac{۳}{۲}}} = \frac{۱}{\sqrt{۲^۳}} = \frac{۱}{\sqrt{۸}} = \frac{\sqrt{۸}}{۸} = \frac{۲\sqrt{۲}}{۸} = \frac{\sqrt{۲}}{۴}$

مثال:آ) نمودار توابع $f(x)=x^۲$ و $g(x)=۲^x$ را در یک دستگاه رسم کنید.

ب) معادله‌ی $۲^x=x^۲$ چند ریشه‌ی حقیقی دارد؟

حل آ)

X	-۱	۰	۱	۲	۴	۵
$y = x^۲$	۱	۰	۱	۴	۱۶	۲۵
$y = ۲^x$	$\frac{۱}{۲}$	۱	۲	۴	۱۶	۳۲



ب) دو نمودار همدیگر را در سه نقطه قطع می‌کنند، لذا معادله‌ی $۲^x=x^۲$ دارای سه ریشه‌ی حقیقی است.

معادلات نمایی

معادله‌ای را که در آن متغیر (مجهول)در توان قرار گرفته باشد، معادله‌ی نمایی می‌نامند.

برای حل معادلات نمایی از خاصیت یک‌به‌یک بودن تابع نمایی استفاده می‌کنیم.

اگر a یک عدد حقیقی مثبت مخالف ۱ باشد و داشته باشیم $a^u=a^v$ آنگاه u=v و برعکس

نتیجه: برای حل معادلات نمایی ابتدا به کمک تجزیه اعداد و قوانین توان کاری می کنیم پایه ها با هم برابر شوند سپس توان ها را مساوی هم قرار می دهیم و معادله را حل می کنیم

مثال : معادله‌های نمایی مقابل را حل کنید.

الف) $۳^{۲x-۳} = ۸۱ \to ۳^{۲x-۳} = ۳^۴ \to ۲x - ۳ = ۴ \to x = \frac{۷}{۲}$

ب) $۴^{۲x-۱} = ۸^{x-۱} \to (۲^۲)^{۲x-۱} = (۲^۳)^{۲x+۱} \to ۴x - ۲ = ۳x + ۳ \to x = ۵$

پ) $۵^{۲n-۱} = ۱۲۵^{۲n+۱} \to ۵^{۳n-۱} = ۵^{۶n+۳} \to ۳n - ۱ = ۶n + ۳ \to n = -\frac{۴}{۳}$

مثال : هر یک از معادلات نمایی زیر را حل کنید.

آ) $۲^{۳x-۱} = \frac{۱}{۳۲}$ ب) $۷^{x+۱} \times ۴۹^{۲x-۱} = \left(\frac{۱}{۷}\right)^{x+۸}$

پاسخ:

آ) $\frac{۱}{۳۲} = \frac{۱}{۲^۵} = ۲^{-۵} \to ۲^{۳x-۱} = ۲^{-۵} \to ۳x - ۱ = -۵ \to ۳x = -۵ + ۱ = -۴ \to x = -\frac{۴}{۳}$

ب) هریک از عبارت‌ها را به‌صورت یک عبارت توان‌دار با پایه‌ی ۷ می‌نویسی:

$۴۹^{۲x-۱} = (۷^۲)^{۲x-۱} = ۷^{۲(۲x-۱)} = ۷^{۴x-۲}, (\frac{۱}{۷})^{x+۸} = (۷^{-۱})^{x+۸} = ۷^{-x-۸}$

$$۷^{x+۱} \times ۴۹^{۲x-۱} = \left(\frac{۱}{۷}\right)^{x+۸} \to ۷^{x+۱} \times ۷^{۴x-۲} = ۷^{-x-۸} \to ۷^{(x+۱)+(۴x-۲)} = ۷^{-x-۸} \to$$

$$۷^{۵x-۱} = ۷^{-x-۸} \to ۵x - ۱ = -x - ۸ \to ۵x + x = -۸ + ۱ \to ۶x = -۷ \to x = -\frac{۷}{۶}$$

مثال : هر یک از معادلات نمایی زیر را حل کنید.

آ) $۶^{۲x-۴} = \frac{۱}{۳۶^{۳}}$ ب) $۲۵^{۳x-۱} = ۱۲۵^{x+\frac{۲}{۳}}$ پ) $۳^{۴x} = \left(\frac{۳^{\sqrt{۸}}}{۹^{-\sqrt{۱۸}}}\right)^{۲}$

ت) $۴^{x^۲-۲۸} = \left(\frac{۱}{۱۶}\right)^{۲x}$ ث) $۲^{۳x+۲} - ۵۱۲ = o$ ج) $۳^{x+۲} \times \left(\frac{۱}{۹}\right)^{x-۱} = \sqrt{۲۷^{۲x}}$

چ) $۳^{x} + ۳^{x+۱} + ۳^{x+۲} = ۳۵۱$

حل)

ا) عبارت‌های دو طرف تساوی را با پایه‌های یکسان می‌نویسیم:

$$\frac{۱}{۳۶^{۶}} = \frac{۱}{(۶^{۶})^{۳}} = \frac{۱}{۶^{۶}} = ۶^{-۶} \to ۶^{۲x-۴} = ۶^{-۶} \to ۲x - ۴ = -۶ \to ۲x = -۲ \to x = -۱$$

ب)

$$۲۵^{۳x-۱} = (۵^{۲})^{۳x-۱} = ۵^{۶x-۲}$$

$$۱۲۵^{x+\frac{۲}{۳}} = (۵^{۳})^{x+\frac{۲}{۳}} = ۵^{۳\left(x+\frac{۲}{۳}\right)} = ۵^{۳x+۲}$$

معادله : $۵^{۶x-۲} = ۵^{۳x+۲} \to ۶x - ۲ = ۳x + ۲ \to ۶x - ۳x = ۲ + ۲ \to ۳x = ۴ \to x = \frac{۴}{۳}$

پ) عبارت سمت راست معادله را به‌صورت یک عدد توان‌دار با پایه‌ی ۳ می‌نویسیم:

$$۳\sqrt{۸} = ۳^{\sqrt{۴\times۲}} = ۳^{۲\sqrt{۲}}$$

$$۹^{-\sqrt{۱۸}} = (۳^{۲})^{-\sqrt{۹\times۲}} = (۳^{۲})^{-۳\sqrt{۲}} = ۳^{-۶\sqrt{۲}}$$

$\to$ حاصل سمت راست $= \left(\frac{۳^{۲\sqrt{۲}}}{۳^{-۶\sqrt{۲}}}\right)^{۲} = \left(۳^{۲\sqrt{۲}+۶\sqrt{۲}}\right)^{۲} = \left(۳^{۸\sqrt{۲}}\right)^{۲} = ۳^{۱۶\sqrt{۲}}$

معادله: $۳^{۴x} = ۳^{۱۶\sqrt{۲}} \to ۴x = ۱۶\sqrt{۲} \to x = ۴\sqrt{۲}$

ت) با توجه به پایه‌های دو طرف معادله، عبارت سمت راست را به‌صورت یک عبارت توان‌دار با پایه‌ی ۴ می‌نویسیم:

$$\left(\frac{۱}{۱۶}\right)^{۲x} = (۴^{-۲})^{۲x} = ۴^{-۴x}$$

معادله: $۴^{x^۲-۲x} = ۴^{-۴x} \rightarrow x^۲ - ۲x = -۴x \rightarrow x^۲ + ۲x = o \rightarrow x(x+۲) = o$

$$\rightarrow \begin{cases} x = o \\ x = -۲ \end{cases}$$

ث)

$$۲^{۳^{x+۲}} - ۵۱۲ = o \rightarrow ۲^{۳^{x+۲}} = ۵۱۲ = ۲^۹$$

$$\rightarrow ۳^{x+۲} = ۹ = ۳^۲ \rightarrow x + ۲ = ۲ \rightarrow x = o$$

ج)

$$۳^{x+۲} =\times \left(\frac{۱}{۹}\right)^{x+۱} = ۳^{x+۲} \times (۳^{-۲})^{x-۱} = ۳^{x+۲} \times ۳^{-۲xx+۲} = ۳^{-x+۴} \qquad (۱)$$

$$\left(\sqrt{۲۷}\right)^{۲x} = \left(\sqrt{۳^۳}\right)^{۲x} = \left(۳^{\frac{۳}{۲}}\right)^{۲x} = ۳^{۳x} \qquad (۲)$$

$(۱),(۲) \rightarrow$ معادله: $۳^{-x+۴} = ۳^{۳x} \rightarrow ۳x = -x + ۴$

$$\rightarrow ۳x + x = ۴ \rightarrow ۴x = ۴ \rightarrow x = ۱$$

چ) در سمت چپ معادله از ۳^x فاکتور می‌گیریم $(a^{b+c}=a^b \times a^c)$

$$۳^x + ۳^{x+۱} + ۳^{x+۲} = ۳^x(۱ + ۳^۱ + ۳^۲) = ۱۳ \times ۳^x = ۳۵۱$$

$$\rightarrow ۳^x = \frac{۳۵۱}{۱۳} = ۲۷ = ۳^۳ \rightarrow x = ۳$$

مثال: دامنه‌ی هریک از توابع زیر را به‌دست آورید.

$$f(x) = \frac{۳^x}{۴^x - ۱۲۸}$$

حل) با حذف ریشه‌ی معادله‌ی $۴^x-۱۲۸=o$ از IR دامنه‌ی تابع f به‌دست می‌آید:

$$۴^x-۱۲۸=o \to ۴^x=۱۲۸ \to (۲^۲)^x=۲^۷ \to ۲^{۲x}=۲^۷$$
$$\to ۲x=۷ \to x=\frac{۷}{۲} \to D_f=IR-\left\{\frac{۷}{۲}\right\}$$

نکته:برخی از معادلات نمایی را می‌توان با تغییر متغیر، به‌صورت یک معادله‌ی درجه دوم نوشت و سپس آن را حل کرد.

مثال:ریشه‌های معادله‌ی $۳^{۲x}-۱۰\times۳^x+۹=o$ را به‌دست آورید.

پاسخ : چون $۳^{۲x}$ را می‌توان به‌صورت $(۳^x)^۲$ نوشت، معادله به صورت مقابل درمی‌آید.

$(۳^x)^۲-۱۰\times۳^x+۹=o$ با فرض $A=۳^x$ معادله به صورت زیر در می‌آید

$$A^۲-۱۰A+۹=o \to (A-۱)(A-۹)=o \to A=۱ \text{ یا } A=۹ \to \begin{cases} A=۳^x=۱=۳^o \to x=o \\ A=۳^x=۹=۳^۲ \to x=۲ \end{cases}$$

مثال:ریشه‌های معادله‌ی $۵^{۲x}-۴\times۵^x-۵=o$ را به‌دست آورید.

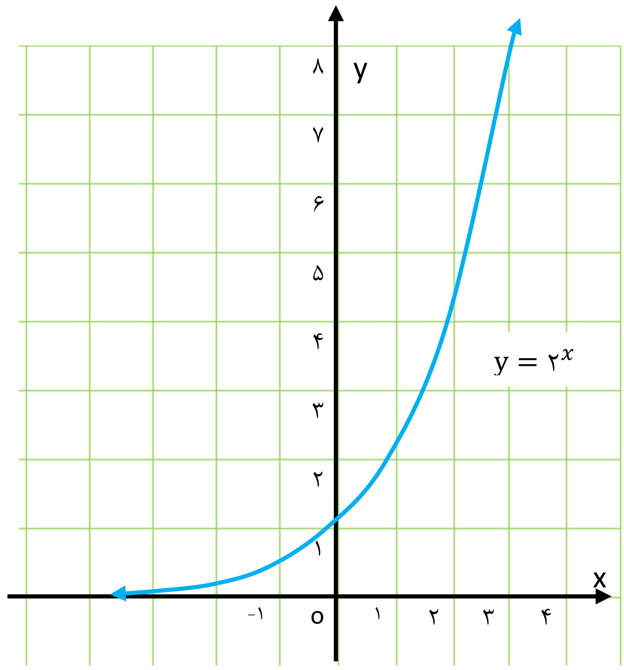
حل) چون $۵^{۲x}=(۵^x)^۲$ می‌باشد، با تغییر متغییر $A=۵^x$ معادله به‌صروت زیر بر حسب A درمی‌آید:

$$A^۲-۴A-۵=o \to (A-۵)(A+۱)=o \to \begin{cases} A=۵ \\ A=-۱ \end{cases}$$

معادله‌ی $A=۵^x=-۱$ جوب ندارد، زیرا حاصل تابع نمایی عددی مثبت است اما اگر $A=۵^x=۵$ آن‌گاه $x=۱$ می‌باشد.

مقایسه توابع نمایی با پایه های مساوی

مثال: با توجه به نمودار تابع $y = ۲^x$ اعداد زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.



$$۲^{-۱}\ ,\quad ۲^{-o/۴}\ ,\quad ۲^{۵}\ ,\quad ۲^{o/۳}\ ,\quad ۲^{\frac{۵}{۲}}\ ,\quad ۲^{\frac{۳}{۲}}\ ,\quad ۲^{\sqrt{۵}}$$

پاسخ

$$۲^{-۱} < ۲^{-o/۴} < ۲^{o/۳} < ۲^{\frac{۳}{۲}} < ۲^{\sqrt{۵}} < ۲^{\frac{۵}{۲}} < ۲^{۵}$$

سوال : اگر $u < v$ باشد، چه رابطه‌ای بین ۲^u و ۲^v برقرار است؟

پاسخ:

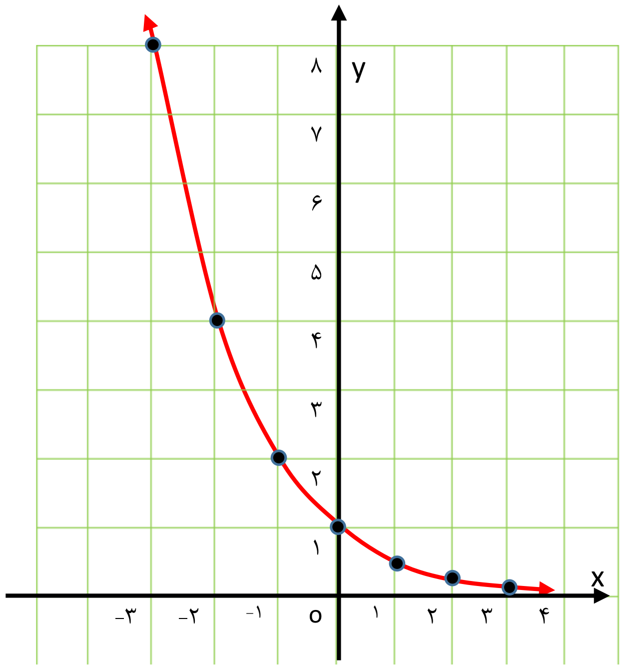
$$۲^u < ۲^v$$

نتیجه : در توابع نمایی اگر $a > ۱$ باشد آنگاه داریم:

$$a^u < a^v \leftrightarrow u < v$$

به زبان ساده تر در حالتی که پایه ها بزر گتر از ۱ باشند با حذف پایه ، جهت نامعادله عوض نمی شود.

مثال: با توجه به نمودار تابع $y = (\frac{1}{2})^x$ اعداد زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.



$$(\frac{1}{2})^{-3} \,,\; (\frac{1}{2})^{-0/4} \,,\; (\frac{1}{2})^{-2} \,,\; (\frac{1}{2})^{0/3} \,,\; (\frac{1}{2})^{3} \,,\; (\frac{1}{2})^{\frac{3}{2}} \,,\; (\frac{1}{2})^{-\sqrt{5}}$$

پاسخ

$$(\frac{1}{2})^{3} < (\frac{1}{2})^{\frac{3}{2}} < (\frac{1}{2})^{0/3} < (\frac{1}{2})^{-0/4} < (\frac{1}{2})^{-2} < (\frac{1}{2})^{-\sqrt{5}} < (\frac{1}{2})^{-3}$$

سوال : اگر $u > v$ باشد، چه رابطه‌ای بین $(\frac{1}{2})^u$ و $(\frac{1}{2})^v$ برقرار است؟

پاسخ:

$$(\frac{1}{2})^u < (\frac{1}{2})^v$$

نتیجه : در نامعادلات نمایی $1 > a > 0$ باشد آنگاه داریم:

$$a^u < a^v \leftrightarrow u > v$$

به زبان ساده تر در حالتی که پایه ها بین ۰ و ۱ باشند با حذف پایه ، جهت نامعادله عوض می شود.

مثال: در جاهای خالی علامت > یا = یا < قرار دهید.

آ) $3^{-\frac{1}{4}} \square 3^{-\frac{2}{5}}$ ب) $2^{-\frac{3}{4}} \square 2^{-\frac{5}{7}}$ پ) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{7}{3}} \square \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{8}{5}}$

ت) $\left(\frac{1}{\pi}\right)^{-\frac{1}{2}} \square \left(\frac{1}{\pi}\right)^{-\frac{2}{5}}$ ث) $\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{8}{3}} \square \left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{9}{4}}$ ج) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{-2} \square \left(\frac{\sqrt{12}}{4}\right)^{-3}$

حل)

آ) $a = 3 > 1 \,, \frac{1}{4} < \frac{2}{5} \rightarrow 3^{\frac{1}{4}} < 3^{\frac{2}{5}}$

ب) $a = 2 > 1 \,, -\frac{3}{4} < -\frac{5}{7} \rightarrow 2^{-\frac{3}{4}} < 2^{-\frac{5}{7}}$

پ) $o < a = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1 \,, \frac{7}{3} > \frac{8}{5} \rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{7}{3}} < \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{8}{5}}$

ت) $o < a = \frac{1}{\pi} < 1 \,, -\frac{2}{5} > -\frac{1}{2} \rightarrow \left(\frac{1}{\pi}\right)^{-\frac{2}{5}} < \left(\frac{1}{\pi}\right)^{-\frac{1}{2}}$

ث) $a = \frac{7}{5} > 1 \,, \frac{8}{3} > \frac{9}{4} \rightarrow \left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{8}{3}} > \left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{9}{4}}$

ج) $a = \frac{\sqrt{12}}{4} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} < 1 \,, -2 > -3$

$$\rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{-2} < \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{-3} \rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{-2} < \left(\frac{\sqrt{12}}{4}\right)^{-3}$$

مثال : اگر x<y در جاهای خالی علامت مناسب قرار دهید.

الف) $3^x \boxed{<} 3^y$ ب) $4^x \boxed{<} 4^y$

پ) $\left(\frac{1}{3}\right)^x \boxed{>} \left(\frac{1}{3}\right)^y$ ت) $\left(\frac{1}{4}\right)^x \boxed{>} \left(\frac{1}{4}\right)^y$

حل نامعادلات نمایی

برای حل نامعادلات نمایی ابتدا کاری می کنیم که پایه ها با هم مساوی شود سپس پایه ها را حذف می کنیم و جهت نامعادله را به کمک قوانین زیر تعیین می کنیم:

قانون ۱:در حالتی که پایه ها بزر گتر از ۱ باشند جهت نامعادله عوض نمی شود.

قانون ۲ : در حالتی که پایه ها بین ۰ و ۱ باشند جهت نامعادله عوض می شود.

مثال: نا معادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $o/۵^{(-x+۱)} < ۲۵۶$

ب) $۹^{۲-x} > \frac{۱}{۲۴۳}$

حل الف)

$$(o/۵)^{-x+۱} < ۲۵۶ \to \left(\frac{۱}{۲}\right)^{-x+۱} < ۲^{۸} \to ۲^{x-۱} < ۲^{۸}$$

$$\xrightarrow{a=۲>۱} x-۱ < ۸ \to x < ۱+۸ \to x < ۹$$

ب)

$$۹^{۲-x} > \frac{۱}{۲۴۳} \to (۳^{۲})^{۲-x} > \frac{۱}{۳^{۵}} \to ۳^{۴-۲x} > ۳^{-۵}$$

$$\xrightarrow{a=۲>۱} ۴-۲x > -۵ \to ۲x < ۴+۵ \to x < \frac{۹}{۲} \to x < ۴/۵$$

مثال:دامنه‌ی هریک از توابع زیر را به‌دست آورید.

$$g(x) = \sqrt{۸^{x} - \frac{۱۶}{۴^{x}}}$$

حل) با حل نامعادله‌ی $۸^{x} - \frac{۱۶}{۴^{x}} \geq o$ دامنه‌ی تابع g به‌دست می‌آید:

$$۸^x-\frac{۱۶}{۴^x}\geq o\rightarrow ۸^x\geq \frac{۱۶}{۴^x}\rightarrow (۲^۳)^x\geq \frac{۲^۴}{(۲^۲)^x}\rightarrow ۲^{۳x}\geq ۲^{۴-۲x}$$

$$\xrightarrow{a=۲>۱} ۳x\geq ۴-۲x\rightarrow ۳x+۲x\geq ۴\rightarrow ۵x\geq ۴\rightarrow x\geq \frac{۴}{۵}$$

$$\rightarrow D_g=[\frac{۴}{۵},+\infty)$$

مرور درس

مثال: کدام یک از عبارت‌های زیر درست و کدام یک نادرست است؟

آ) محل تقاطع نمودار تابع $y=۲^x$ با محور yها نقطه‌ی (o,۲) است.

ب) دامنه‌ی توابع $y=۲^x$ و $y=x^۲$ یکسان است.

پ) اگر $\left(\frac{۱}{۲}\right)^x>\left(\frac{۱}{۲}\right)^y$ آن‌گاه x>y

ت) نقطه‌ی (-۱،۳) روی نمودار $f(x)=\left(\frac{۱}{۳}\right)^x$ قرار دارد.

ث) دامنه و برد تابع نمایی $y=a^x$ برابر IR می‌باشد.

ج) نمودار توابع $y=۴^x$ و $y=\left(\frac{۱}{۴}\right)^x$ نسبت به خط y=x قرینه‌ی یکدیگرند.

حل)آ) نادرست است، زیرا نمودار $y=۲^x$ محور yها را در نقطه‌ای به عرض یک قطع می‌کند:

$$x=o\rightarrow y=۲'=۱$$

ب) درست است، زیرا دامنه‌ی تابع نمایی $y=۲^x$ و تابع درجه‌ی دوم $y=x^۲$ برابر IR می‌باشد.

پ) نادرست است، زیرا پایه‌ی عددی بین صفر و یک است و داریم:

$$\left(\frac{۱}{۲}\right)^x>\left(\frac{۱}{۲}\right)^y\leftrightarrow x<y$$

ت) درست است، زیرا با قرار دادن عدد ۱- به جای x در ضابطه‌ی تابع داریم:

$$x=-۱\rightarrow y=\left(\frac{۱}{۳}\right)^{-۱}=۳$$

ث) نادرست است، زیرا دامنه‌ی تابع نمایی برابر IR است ولی برد آن (o,∞) می‌باشد.

ج) نادرست است، زیرا نمودار تابع $y=a^x$ و $y=a^{-x}$ $(a>o , a\neq ۱)$ نسبت به محور yها قرینه‌ی همدیگرند

مثال:اگر $f(x)=\sqrt{۲x+۱}$ و $g(x)=\left(\frac{۱}{۲}\right)^x$ دو تابع باشند، مقادیر $g(-۳)$ و $g\left(f^{-۱}(۳)\right)$ را به‌دست آورید.

حل) با قرار دادن عدد ۳- به جای x در ضابطه‌ی $g(x)=\left(\frac{۱}{۲}\right)^x$ مقدار g(-۳) به دست می‌آید:

$$g(-۳)=\left(\frac{۱}{۲}\right)^{-۳}=۲^۳=۸$$

برای محاسبه‌ی مقدار $g(f^{-۱}(۳))$ ابتدا مقدار $f^{-۱}(۳)$ را به‌دست می‌آوریم

$$f^{-۱}(۳)=b\rightarrow f(b)=۳\,,f(x)=\sqrt{۲x+۱}\rightarrow f(b)=\sqrt{۲b+۱}=۳$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسانیم}}۲b+۱=۹\rightarrow ۲b=۸\rightarrow b=۴\rightarrow g\left(f^{-۱}(۳)\right)=g(b)=g(۴)=\left(\frac{۱}{۲}\right)^۴=\frac{۱}{۱۶}$$

تابع لگاریتمی و ویژگی‌های آن

یاد آوری : اگر دو تابع f و f^{-1} وارون یکدیگر باشند. آن‌گاه:

الف) دامنه‌ی تابع f با برد تابع f^{-1} و برد تابع f با دامنه‌ی تابع f^{-1} برابر است. یعنی:

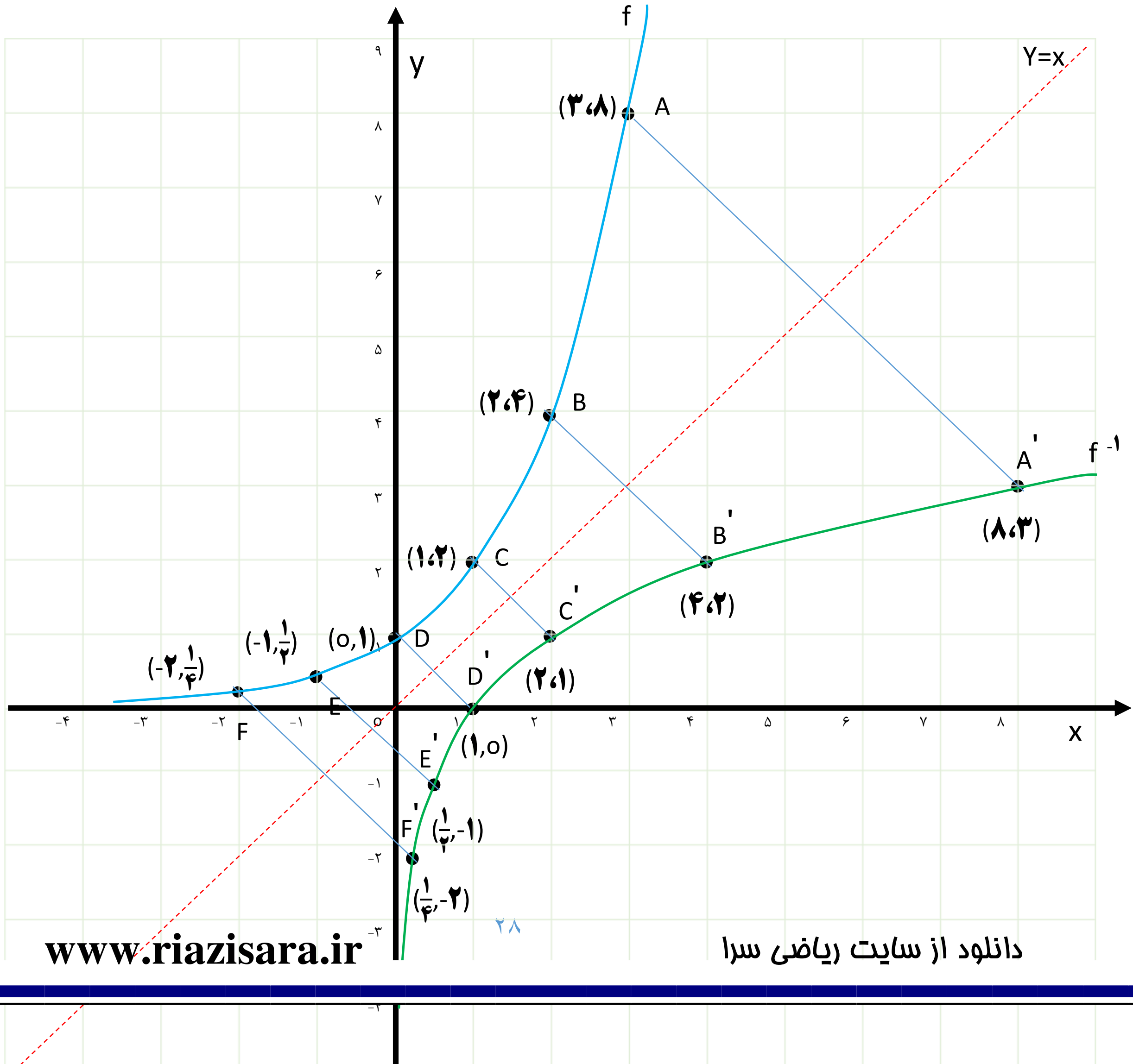
$D_{f^{-1}} = R_f \quad , \qquad R_{f^{-1}} = D_f$

ب) اگر $f(a) = b$ آن‌گاه $f^{-1}(a) = b$

پ) با قرینه کردن نمودار f نسبت به خط $y = x$ نمودار f^{-1} به‌دست می‌آید.

تابع لگاریتمی

در درس اول با تابع نمایی با ضابطه‌ی $f(x) = ۲^x$ و نمودار آن آشنا شدیم. همان‌طور که مشاهده کردیم، تابع نمایی یک‌به‌یک است، بنابر این وارون پذیر است. نمودار تابع f و وارون آن، تابع f^{-1} در دستگاه مختصات زیر رسم شده است که نسبت به خط y=x قرینه اند.



دامنه‌ی تابع f مجموعه‌ی اعداد حقیقی $(D_f=R)$ است. و برد آن مجموعه‌ی اعداد حقیقی نا منفی $\left(R_f = (o,+\infty)\right)$ است.

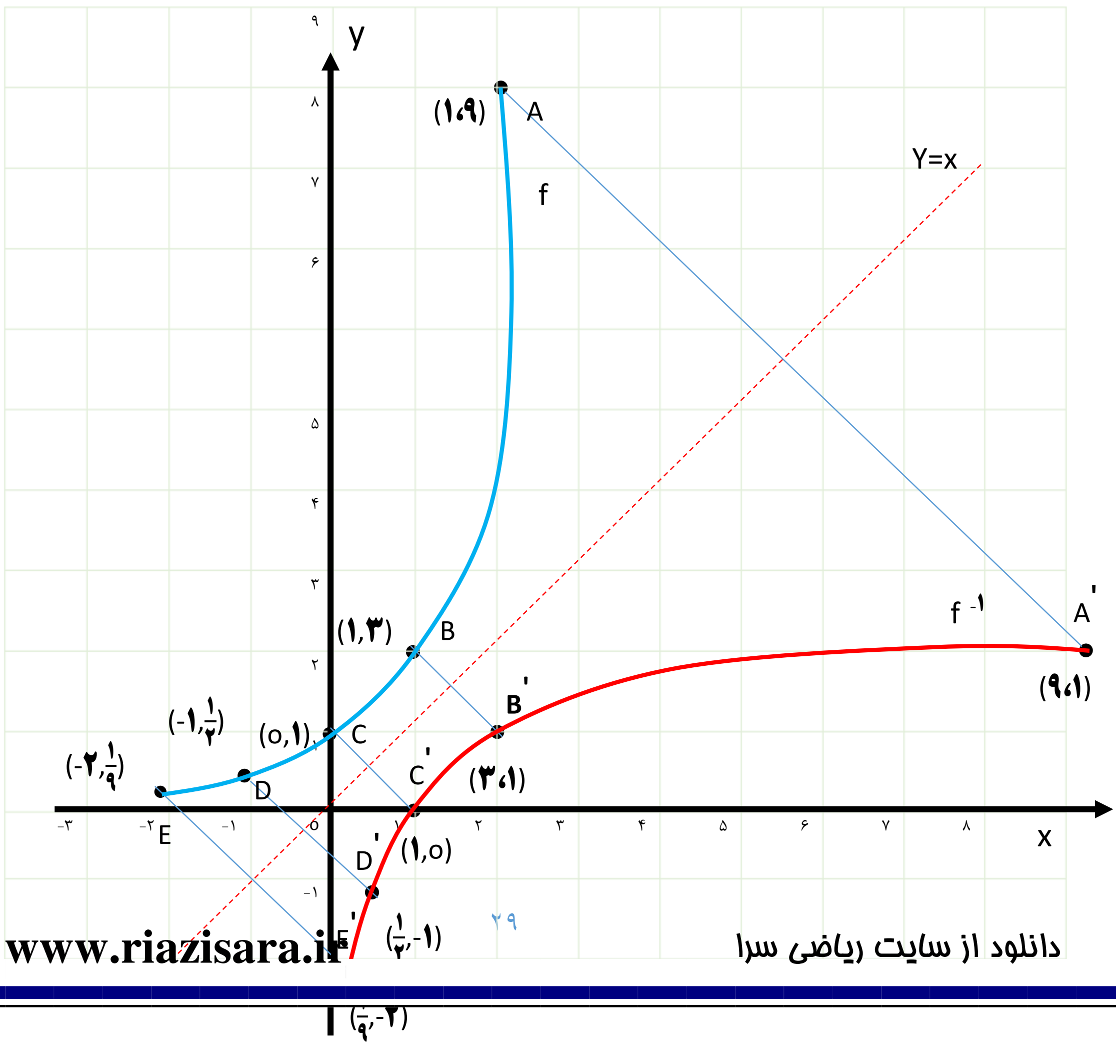
دامنه‌ی تابع f^{-1} مجموعه‌ی اعداد حقیقی نا منفی $\left(D_{f^{-1}} = (o,+\infty)\right)$ است. و برد آن مجموعه‌ی اعداد حقیقی $\left(R_{f^{-1}} = R\right)$ است.

(۱) با توجه به نقاط f و f^{-1} در نمودار، جدول زیر را تکمیل کنید.

$f(-۲) = \frac{۱}{۴}$	$f(-۱) = \frac{۱}{۲}$	$f(o) = ۱$	$f(۲) = ۴$
$f^{-۱}\left(\frac{۱}{۴}\right) = -۲$	$f^{-۱}\left(\frac{۱}{۲}\right) = -۱$	$f^{-۱}(۱) = o$	$f^{-۱}(۴) = ۲$

مثال: نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = ۳^x$ در دستگاه مختصات زیر رسم شده است.

(۱) با توجه به نقاط نمودار f، نمودار f^{-1} را رسم کنید.



(۲) با توجه به نقاط f و f^{-1} در نمودار قبل، جاهای خالی را تکمیل کنید.

$f(۲) = ۹$	$f(۱) = ۳$	$f(o) = ۱$	$f(-۲) = \frac{۱}{۹}$
$f^{-۱}(۹) = ۲$	$f^{-۱}(۳) = ۱$	$f^{-۱}(۱) = o$	$f^{-۱}\left(\frac{۱}{۹}\right) = -۲$

(۳) دامنه و برد دو تابع f و f^{-1} را به‌دست آورید.

دامنه‌ی تابع f مجموعه‌ی اعداد حقیقی $(D_f=R)$ است. و برد آن مجموعه‌ی اعداد حقیقی نامنفی $\left(R_f = (o,+\infty)\right)$ است.

دامنه‌ی تابع f^{-1} مجموعه‌ی اعداد حقیقی نا منفی $\left(D_{f^{-۱}} = (o,+\infty)\right)$ است. و برد آن مجموعه‌ی اعداد حقیقی $\left(R_{f^{-۱}} = R\right)$ است.

با توجه به مطالب فوق، وارون تابع با ضابطه‌ی $f(x) = ۳^x$ را به‌صورت $f^{-۱}(x) = \log_۳ x$ نشان می‌دهیم و آن را لگاریتم x در مبنای ۳ می‌نامیم به عبارت دیگر توابع نمایی و لگاریتمی وارون یکدیگرند.

(۴) با توجه به نمودار توابع نمایی و لگاریتمی، دامنه و برد آنها را به‌طور کلی بنویسید.

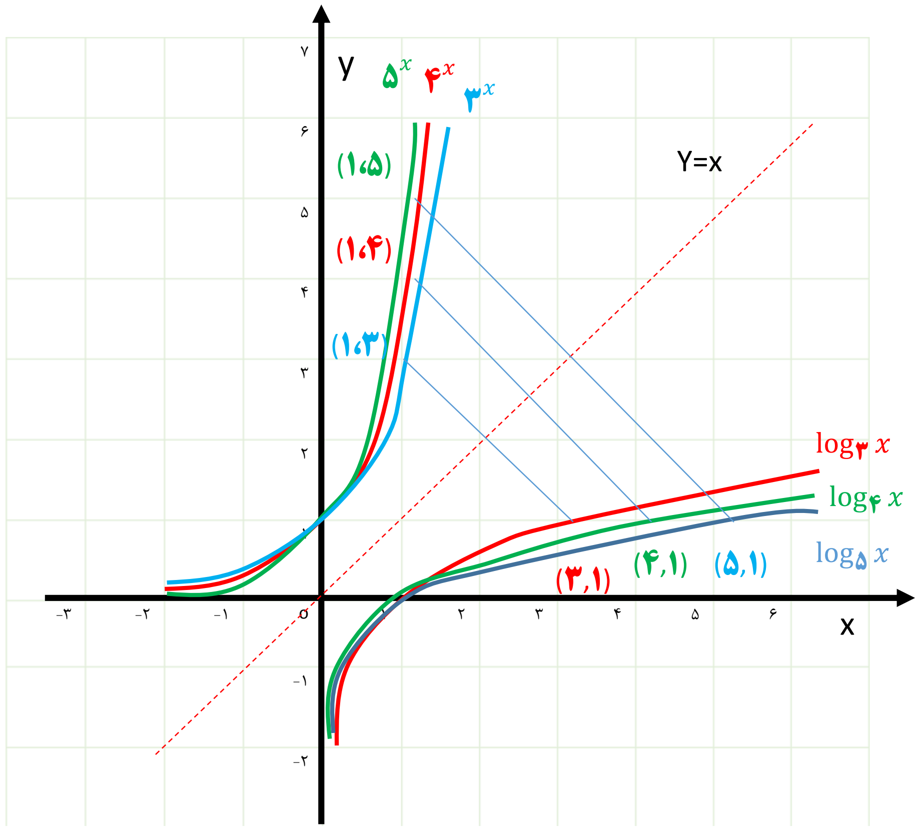
اگر $(a \in R, a > o , a \neq ۱)$ $f(x) = a^x$ آنگاه $D_f = R$ و $R_f = (o,+\infty)$

اگر $(a \in R , a > o , a \neq ۱)$ $f^{-۱}(x) = \log_a x$ آنگاه $D_{f^{-۱}} = (o,+\infty)$ و $R_{f^{-۱}} = R$

وارون تابع نمایی با ضابطه‌ی $f(x) = a^x$ را به‌صورت $f^{-۱}(x) = \log_a x$ نشان می‌دهیم و آن را لگاریتم x در مبنای a می‌نامیم. به عبارت دیگر برای هر عدد حقیقی مثبت a $(a \neq ۱)$ داریم:

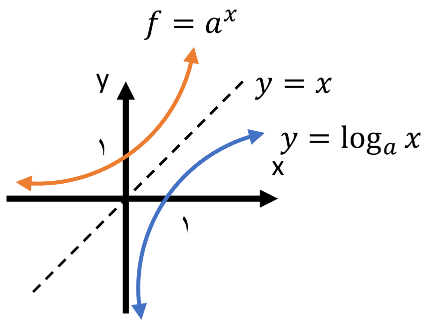
$$f(x) = a^x \leftrightarrow f^{-۱}(x) = \log_a x$$

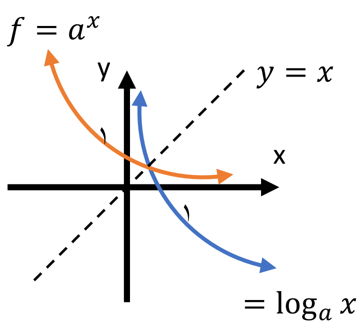
مثال: در شکل زیر، نمودار شش تابع رسم شده است که دو به دو وارون یکدیگرند. برای توابعی که ضابطه‌ی آنها نوشته شده، ضابطه‌ی وارون آنها را روی نمودار مربوطه بنویسید و دامنه و برد هر تابع را مشخص کنید.



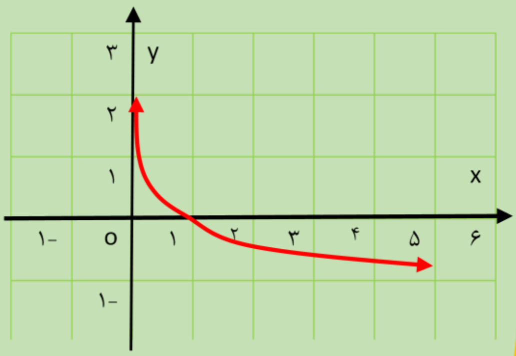
$(o < a < ۱)$

$(a > ۱)$

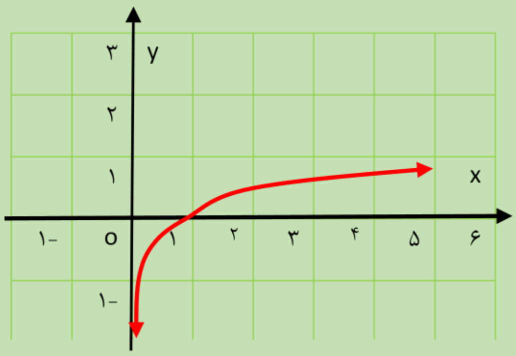




نمودار تابع لگاریتمی در حالت کلی، مشابه نمودارهای زیر است.



$Y = \log_a x$
$(o < a < ۱)$



$Y = \log_a x$
$(a > ۱)$