

سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی
سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور
نمونه سوالات امتحانات ریاضی
نرم افزارهای ریاضیات

و...

(@riazisara)

ریاضی سرا در تلگرام:



<https://t.me/riazisara>

(@riazisara.ir) ریاضی سرا در اینستاگرام:



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

فرزانه بايمانی دبیر ریاضی شهرستان رامهرمز

فصل چهارم : مثلثات

واحدهای اندازه گیری زاویه

روابط تکمیلی بین نسبت های مثلثاتی

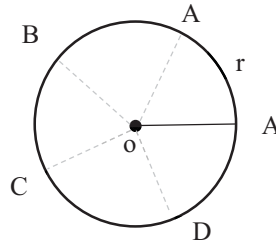
توابع مثلثاتی

فرزانه بایمانی دبیر ریاضی شهرستان رامهرمز

درس اول: واحدهای اندازه گیری زاویه:

یادآوری: دایره مثلثاتی دایره ایست به شعاع یک واحد که خلاف حرکت عقربه های ساعت را جهت مثبت آن در نظر می گیریم.

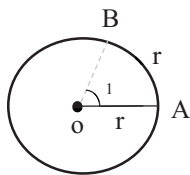
اگر شعاع یک دایره را r در نظر بگیریم و اندازه آن یک نخ برش بدهیم و با شروع از نقطه A و به کمک نخ برش داده شده روی محیط دایره به اندازه شعاع جدا و نقاط بدست آمده را به مبدا وصل کنیم زاویه های مرکزی که حاصل می شود طول کمان روبروی هر یک از آنها با شعاع دایره برابر است. هریک از این زاویه ها یک رادیان گفته می شود.



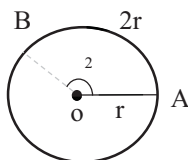
به عبارت دیگر:

تعریف: ۱ رادیان برابر است با اندازه زاویه مرکزی دایره ای که طول کمان روبروی آن با شعاع دایره برابر است:

توجه:



$$1 \text{ رادیان} = \text{اندازه زاویه } \widehat{O_1} \Rightarrow r = \text{طول کمان}$$



$$2 \text{ رادیان} = \text{اندازه زاویه } \widehat{O_2} \Rightarrow 2r = \text{طول کمان}$$

۲

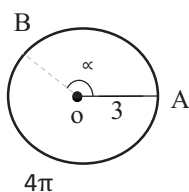
فرزانه بایمانی دبیر ریاضی شهرستان رامهرمز

و به همین ترتیب اگر ادامه دهیم ملاحظه می کنیم که:

$$\alpha = \frac{L}{r} \Rightarrow \alpha = \frac{\text{طول کمان روبروی زاویه}}{\text{شعاع دایره}} = \text{اندازه یک زاویه بر حسب رادیان}$$

که در این رابطه L و r هم واحدند.

مثال: در یک دایره به مرکز O و به شعاع 3 طول کمان بزرگتر مقابل زاویه \widehat{AOB} برابر 4π است. اندازه کوچکتر زاویه \widehat{O} را بدست آورید.



$$2\pi r = \text{محیط دایره} \Rightarrow 6\pi - 4\pi = 2\pi$$

$$\alpha = \frac{L}{r} \Rightarrow \alpha = \frac{2\pi}{3}$$

سوال: دایره ای با شعاع 10 سانتی متر مفروض است. اندازه زاویه مرکزی مقابل به کمان به طول 8 سانتی متر از این دایره چند رادیان است.

سوال: در دایره ای به شعاع 6 سانتی متر کمانی به طول 10 cm توسط زاویه θ بریده شده است اندازه این زاویه را بر حسب رادیان بدست آورید.

فرزانه بایمانی دبیر ریاضی شهرستان رامهرمز

سوال: در دایره به شعاع ۴ واحد طول کمان روبه روی زاویه مرکزی α برابر $\frac{2\pi}{3}$ است. مساحت قطاع نظیر این زاویه چقدر است؟

توجه: قطاع عبارت است از: بخشی از یک قرص یا دایره که به دو شعاع و یک کمان محدود شده است و مساحت آن برابر $\frac{1}{2} r^2 \alpha$ می باشد.

تبدیل واحدها:

اندازه زاویه مرکزی رو به روبه کمان نیم دایره

$(\frac{2\pi}{2} = \pi)$ برابر π رادیان یا 180° درجه $(\frac{360^\circ}{2} = 180^\circ)$ است بنابراین: $\frac{\pi}{180}$ رادیان = یک درجه

که با یک تناسب: 

می توان نتیجه گرفت $R = \frac{D \times \pi}{180}$ و یا آنکه $\frac{R}{\pi} = \frac{D}{180}$ و از این تناسب برای تبدیل واحدها استفاده میکنیم.

سوال: یک موتور سیکلت مسابقه در پیستی به شعاع ۲۰ متر کمانی به اندازه ۳۰ درجه طی کرده است طول کمان طی شده را بدست آورید.

فرزانه بایمانی دبیر ریاضی شهرستان رامهرمز

مثال: مجموع سه زاویه 135 درجه است. اگر اندازه آنها برحسب رادیان به نسبت $2, 3, 4$ باشد بزرگترین این زاویه ها چند رادیان است؟

$$\frac{R}{\pi} = \frac{D}{180} \Rightarrow \frac{R}{\pi} = \frac{135}{180} \Rightarrow \frac{R}{\pi} = \frac{3}{4} \Rightarrow 4R = 3\pi \Rightarrow R = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow 2x + 3x + 4x = \frac{3\pi}{4}$$

$$\Rightarrow 9x = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{\pi}{12} \Rightarrow \text{بزرگترین زاویه} = 4x = 4 \times \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3}$$

سوال: مجموع 3 زاویه 120 درجه است. اگر اندازه آنها برحسب رادیان به نسبت $2, 1, 3$ باشد کوچکترین زاویه چند رادیان است؟

سوال: آیا مثلثی وجود دارد که زوایای آن $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}$ باشد؟ چرا؟

سوال: یک متحرک روی دایره چه زاویه ای بر حسب رادیان بچرخد تا به جای اول خود بازگردد؟

سوال: در یک دایره به مرکز O و شعاع 3 طول کمان بزرگتر مقابل زاویه AOB برابر 4π است طول وتر AB چقدر است؟

فرزانه بایمانی دبیر ریاضی شهرستان رامهرمز

سوال: طول قوسی از دایره برابر ۱۶ متر و اندازه زاویه مرکزی آن 45° است شعاع دایره را حساب کنید. ($\pi \approx 3$)

مثال: سطح دایره ای $154 m^2$ است. طول قوسی از این دایره را که زاویه مرکزی مقابل به آن 50° درجه باشد را محاسبه کنید.

$$\alpha = 50 \Rightarrow \frac{R}{\pi} = \frac{50}{180} \Rightarrow R = \frac{5\pi}{18}$$

$$S = \pi r^2 \Rightarrow 154 = \pi r^2 \Rightarrow r^2 = \frac{154}{3.14} = 49.38 \Rightarrow r \approx 7$$

$$L = r\alpha \Rightarrow L = 7 \times \frac{5\pi}{18} = \frac{35\pi}{18} = \frac{35 \times 3.14}{18} \approx 6.11$$

سوال: در دایره ای به شعاع ۲، کمان 70° سانتی متر روبه روی زاویه مرکزی 170° می باشد شعاع دایره چند سانتی متر است. ($\pi \approx 3$)

توجه: زاویه بین عقربه های ساعت شمار ودقیقه شمار برحسب درجه از روابط زیر محاسبه میگردد:

$$1) \alpha = 180 - \frac{m}{60} \times 30 \quad 2) \alpha = \left| \frac{11}{2}m - 30h \right|$$

توجه: m نشان دهنده دقیقه و h نشان دهنده ساعت میباشد

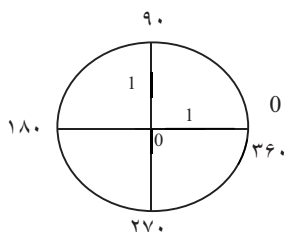
سوال: زاویه بین عقربه های ساعت شمار ودقیقه شمار را در ساعت $2:40'$ برحسب درجه محاسبه کنید.

درس دوم : روابط تکمیلی بین نسبتهای مثلثاتی :

یادآوری ۱: یک دایره مثلثاتی مثل دستگاه مختصات از چهار ناحیه تشکیل شده است که علامت نسبت های مثلثاتی را می توان از روی علامت محورهاباتوجه به آنکه محور y هم محور سینوس و محور x هم محور کسینوس است در چهار ناحیه متوجه شدو از حاصلضرب علامت سینوس و کسینوس علامت تانژانت و کتانژانت رامحاسبه نمود به عنوان مثال در ناحیه چهارم x مثبت و y منفی است یعنی کسینوس مثبت و سینوس منفی است در نتیجه تانژانت و کتانژانت هر دو منفی هستند.

یادآوری ۲: از روی دایره مثلثاتی می توان اندازه نسبتهای مثلثاتی 0° ،

270° ، 180° ، 90° و 360° رامحاسبه کرد.



به عنوان مثال:

90° درجه چون روی محور سینوسهاست

پس: کسینوس آن صفر است و:

$$\sin 90 = 1, \cos 90 = 0 \Rightarrow \tan 90 = \text{تعریف نشده} \Rightarrow \cot 90 = 0$$

یا: 270° چون روی محور سینوس ها و در قسمت منفی هاست پس:

$$\sin 270 = -1, \cos 270 = 0 \Rightarrow \tan 270 = \text{تعریف نشده} \Rightarrow \cot 270 = 0$$

یا 360° : چون روی محور کسینوس هاست پس:

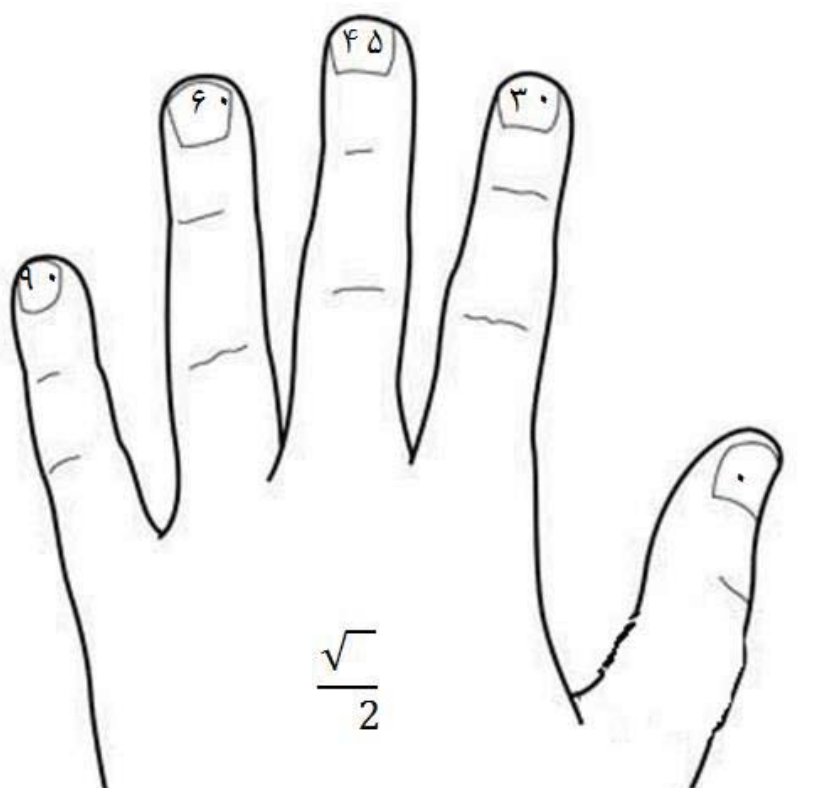
فرزانه بایمانی دبیر ریاضی شهرستان رامهرمز

$$\cos 360=1, \sin 360=0 \Rightarrow \tan 360=0, \cot 360 = \text{تعریف نشده}$$

توجه: \cot عکس \tan می باشد.

یادآوری ۳: اندازه نسبت های مثلثاتی $۰, ۳۰, ۴۵, ۶۰, ۹۰$ را می توان از روی انگشتان دست

نیز محاسبه کرد:



توجه: برای بدست آوردن اندازه نسبتها باید در رادیکال عدد مناسب قرار دهیم. برای سینوس تعداد انگشتان قبل زاویه و برای کسینوس تعداد انگشتان بعد از زاویه را درون رادیکال قرار میدهیم.

فرزانه بایمانی دبیر ریاضی شهرستان رامهرمز

$$\sin 30 = \frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2} \text{ (قبل از } 30 \text{ درجه یک انگشت)}$$

$$\cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ (بعد از } 30 \text{ درجه ۳ انگشت)}$$

$$\Rightarrow \tan 30 = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \cot 30 = \sqrt{3}$$

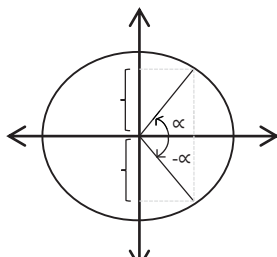
$$\sin 90 = \frac{\sqrt{4}}{2} = \frac{2}{2} = 1, \cos 90 = \frac{\sqrt{0}}{2} = 0 \Rightarrow \tan 90 \text{ تعریف نشده, } \cot 90 = 0$$

سوال: اگر $\cos x = \frac{-4}{5}$ و انتهای کمان روبه رو به زاویه x در ربع دوم باشد سایر نسبتهای مثلثاتی را بدست آورید. (کار در کلاس صفحه ۷۸ کتاب درسی)

سوال: اگر $\tan \alpha = \frac{3}{4}$ و انتهای کمان روبه رو به زاویه α در ربع سوم باشد سایر نسبتهای مثلثاتی را بدست آورید. (توجه: $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$)

نسبت های مثلثاتی زاویه های قرینه

باتوجه به شکل می بینیم که در زاویه های قرینه فقط کسینوس قرینه نمی شود یعنی:



$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

۹

دانلود از سایت ریاضی سرا

فرزانه بایمانی دبیر ریاضی شهرستان رامهرمز

$$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$$

$$\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$$

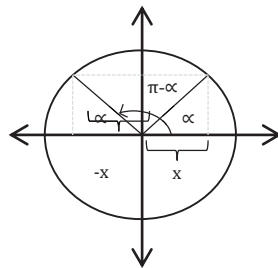
در واقع می توان گفت: کسینوس، منفی زاویه را هضم می کند و سایر نسبت ها، منفی را به پشت نسبت انتقال میدهند.

نسبتهای مثلثاتی زاویه های مکمل:

تعریف: دو زاویه α و β را مکمل گوئیم هرگاه مجموع آنها 180° یا π رادیان شود.

مثال: دو زاویه 60° ($\frac{\pi}{3}$) و 120° ($\frac{2\pi}{3}$) مکمل یکدیگرند

با توجه به شکل مشخص است که فقط سینوس قرینه نمی شود یعنی :



$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$$

$$\tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha$$

$$\cot(\pi - \alpha) = -\cot\alpha$$

در واقع می توان به روش عامیانه گفت: برای بدست آوردن نسبتهای $\pi - \alpha$:

$\pi - \alpha$ در ربع دوم واقع می شود و در این ربع طبق محورها، فقط سینوس مثبت است یعنی عبارت $\boxed{\pi -}$ فقط برای آن است که ما متوجه شویم انتهای کمان روبرو به زاویه مورد نظر در ربع دوم واقع میشود.

نسبتهای مثلثاتی دو زاویه با اختلاف π رادیان :

$$\sin(\underbrace{\pi + \alpha}_{\text{ربع سوم}}) = -\sin\alpha$$

$$\cos(\underbrace{\pi + \alpha}_{\text{ربع سوم}}) = -\cos\alpha$$

فرزانه بایمانی دبیر ریاضی شهرستان رامهرمز

$$\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$$

$$\cot(\pi + \alpha) = \cot \alpha$$

در واقع $\pi +$ نشان میدهد که انتهای کمان در ربع سوم واقع می شود و در این ناحیه باتوجه به علامت محورهای تنازانت و کتانزانت مثبت و دو نسبت دیگر منفی هستند

به عنوان مثال: $\sin(\pi + \frac{\pi}{3})$ می دانیم که اندازه اش از نظر قدر مطلق با اندازه $\sin \frac{\pi}{3}$

برابراست فقط باید علامت آن را تعیین کنیم که $\pi +$ نشان میدهد در ربع سوم است پس

$$\sin(\pi + \frac{\pi}{3}) = -\sin \frac{\pi}{3}$$
 علامت آن منفی است:

سوال: مقدار عددی عبارت A را محاسبه کنید.

$$A: \frac{\sin 120 \cos(-30) - \cos 120}{\sin 135 \cos(-45)}$$

جواب: ۲/۵

سوال: مقدار عددی عبارت p را محاسبه کنید:

$$P: \frac{\sin \frac{4\pi}{3} \cos \frac{2\pi}{3} + \cos \frac{4\pi}{3} \sin \frac{2\pi}{3}}{\cos \frac{5\pi}{4} \cos(-\frac{3\pi}{4}) + \sin \frac{5\pi}{4} \sin(-\frac{3\pi}{4})}$$

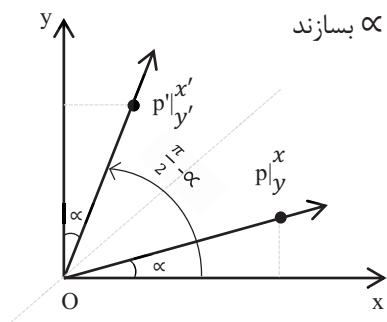
جواب: 0

نسبتهای مثلثاتی زاویه های متمم:

تعریف: دو زاویه α و β را متمم گوئیم هرگاه مجموع آنها 90 درجه ($\frac{\pi}{2}$ رادیان) شود.

مثل دو زاویه $20,70$ یا $30,60$

فرض کنیم نیم خط op با ox و نیم خط op' با oy زاویه α بسازند



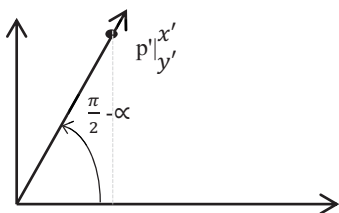
بنابراین نیم خط op' با محور ox زاویه $\frac{\pi}{2} - \alpha$ میسازد

که با توجه به تقارن نسبت به نیمساز ربع اول داریم:

$$x' = y, \quad y' = x, \quad (op = op')$$

از طرفی از سال قبل میدانیم که $\sin \alpha = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}}$ پس:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{y'}{op'} = \frac{x}{op} = \cos \alpha$$



$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{x'}{op'} = \frac{y}{op} = \sin \alpha$$

فرزانه بایمانی دبیر ریاضی شهرستان رامهرمز

و به همین ترتیب بقیه نسبتها بدست می آیند. می توان به طور خلاصه گفت: نسبتهای مثلثاتی $\frac{\pi}{2} - \alpha$ همگی مثبت اند و همچنین نسبت عوض می شود یعنی \sin به \cos و برعکس. همچنین \tan به کتانژانت و برعکس تبدیل میشوند:

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \cos \alpha & \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \sin \alpha \\ \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \cot \alpha & \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \tan \alpha \end{aligned}$$

سوال: هرگاه $\sin 20^\circ = 0/3$ و $\cos 20^\circ = 0/9$ باشد مقادیر $\sin 70^\circ$ ، $\cos 70^\circ$ را بدست آورید.

سوال: فرض کنید که $\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ و $\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ نسبتهای مثلثاتی 75° را حساب کنید.

نسبتهای مثلثاتی $\frac{\pi}{2} + \theta$ بر حسب نسبتهای مثلثاتی θ

با توجه به اینکه: $\frac{\pi}{2} + \theta = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ بنابراین:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \sin\left[\pi - \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right] = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta$$

سایر نسبتها به طریق مشابه بدست می آیند و داریم:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos \theta \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin \theta$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\cot \theta \qquad \cot\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\tan \theta$$

فرزانه بایمانی دبیر ریاضی شهرستان رامهرمز

و برای به ذهن سپردن می توان گفت نسبتهای $\theta + \frac{\pi}{2}$ نسبت را عوض می کنند و چون در ربع دوم واقع می شوند در قسمت نتیجه فقط سینوس به مقداری مثبت تبدیل میشود.

سوال: با توجه به آنکه $\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ و $\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ نسبتهای مثلثاتی 105° درجه را محاسبه کنید.

نسبتهای مثلثاتی زوایا با مجموع یا تفاضل $2k\pi$ رادیان (مضارب زوج π رادیان):

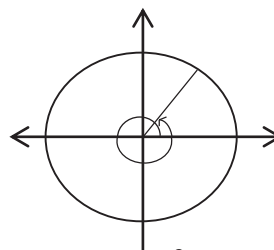
مضارب زوج π رادیان در دورهای دایره مثلثاتی انتهای کمان را به سر جای اول بر میگردانند بنابراین تاثیری ندارند و قابل چشم پوشی هستند به بیان دیگر: نسبتهای 30° درجه و 390° درجه در یک ربع واقع می شوند (زیرا $360 = 390 - 30$) پس دارای نسبتهای مثلثاتی برابر هستند بنابراین در حالت کلی:

$$\sin(2k\pi + \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(2k\pi + \alpha) = \cos \alpha$$

$$\tan(2k\pi + \alpha) = \tan \alpha$$

$$\cot(2k\pi + \alpha) = \cot \alpha$$



$2k\pi$ ما را به ابتدای نقطه شروع میبرد و چون جهت مثبت دایره مثلثاتی خلاف حرکت عقربه های ساعت است $\alpha +$ در ربع اول می افتد و همه نسبتها مثبت می باشند. برای نسبتهای $2k\pi - \alpha$ باز هم همین استدلال را داریم یعنی $2k\pi$ ما را به ابتدای نقطه شروع می برد و چون جهت مثبت دایره مثلثاتی خلاف عقربه های ساعت است $\alpha -$ در جهت عقربه های ساعت حرکت می کند و در ناحیه چهارم می افتد پس داریم:

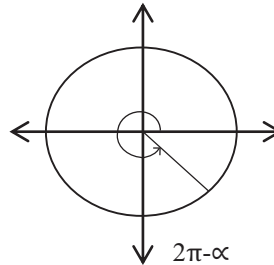
فرزانه بایمانی دبیر ریاضی شهرستان رامهرمز

$$\sin(2k\pi - \alpha) = -\sin\alpha$$

$$\cos(2k\pi - \alpha) = \cos\alpha$$

$$\tan(2k\pi - \alpha) = -\tan\alpha$$

$$\cot(2k\pi - \alpha) = -\cot\alpha$$



مثال: مقدار عبارت $2\sin\frac{11\pi}{3} - \sqrt{3}\tan 420^\circ - 1$ را محاسبه کنید.

$$2\sin(4\pi - \frac{\pi}{3}) - \sqrt{3}\tan(360^\circ + 60^\circ) - 1 =$$

$$2\sin(-\frac{\pi}{3}) - \sqrt{3}\tan 60^\circ - 1 = -2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} \times \sqrt{3} - 1 = -\sqrt{3} - 3 - 1 = -\sqrt{3} - 4$$

سوال: نسبت های مثلثاتی 84° درجه را محاسبه کنید.

توجه: $540^\circ = 3\pi$ و $720^\circ = 4\pi$ و $900^\circ = 5\pi$

سوال: مقدار $y = -1 + \frac{3}{4}\cos(2x - \frac{\pi}{2})$ را به ازای $x = \frac{\pi}{6}$ بدست آورید.

مثال: هرگاه $\cot 15^\circ = 2 + \sqrt{3}$ حاصل کسر $\frac{3\sin 75^\circ + 2\sin 105^\circ}{\cos 165^\circ - \cos 255^\circ}$ را حساب کنید.

$$\frac{3\sin(\frac{\pi}{2} - 15^\circ) + 2\sin(\frac{\pi}{2} + 15^\circ)}{\cos(\pi - 15^\circ) - \cos(\frac{3\pi}{2} - 15^\circ)} = \frac{3\cos 15^\circ + 2\cos 15^\circ}{-\cos 15^\circ + \sin 15^\circ}$$

چون مخرج \cot ، سینوس می باشد بر $\sin 15^\circ$ تقسیم می کنیم:

فرزانه بایمانی دبیر ریاضی شهرستان رامهرمز

$$= \frac{\frac{3\cos 15}{\sin 15} + \frac{2\cos 15}{\sin 15}}{\frac{-\cos 15}{\sin 15} + \frac{\sin 15}{\sin 15}} = \frac{3\cot 15 + 2\cot 15}{-\cot 15 + 1} = \frac{5\cot 15}{-2 - \sqrt{3} + 1} = \frac{5(2 + \sqrt{3})}{-1 - \sqrt{3}}$$

سوال: مقدار عددی عبارت A را محاسبه کنید.

$$A = \frac{\cos 240 + \sin(-150) - \tan(-45)}{\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \tan\left(\frac{11\pi}{6}\right)}$$

صفر

پاسخ:

سوال: اضلاع مجاور یک متوازی الاضلاع دارای اندازه های ۱۲ و ۱۵ سانتی متر است. اندازه یک زاویه آن 150° است. مساحت متوازی الاضلاع را پیدا کنید.

توجه: مساحت متوازی الاضلاع برابر است با: قاعده \times ارتفاع. البته میتوانی از فرمول مساحت مثلث که سال قبل خواندید هم حل کنید.

پاسخ: ۹۰

سوال: اگر $\tan 23^\circ = a$ باشد حاصل $\frac{3\sin 157 + 2\cos 113}{\cos 383 - \cos 67}$ را بر حسب a بیابید.

پاسخ: $\frac{a}{1-a}$

مثال: ثابت کنید:

$$\tan(a - 5\pi)\cot(a + 7\pi) - \cos(6\pi - a)\cos(a - 6\pi) = \sin^2 a$$

$$\tan[-(5\pi - a)]\cot(7\pi + a) - \cos(6\pi - a)\cos[-(6\pi - a)]$$

$$= -\tan(\pi - a)\cot(\pi + a) - \cos(-a)\cos(-a)$$

۱۶

فرزانه بایمانی دبیر ریاضی شهرستان رامهرمز

$$= \tan a \cot a - \cos^2 a = \frac{\sin a}{\cos a} \times \frac{\cos a}{\sin a} - \cos^2 a = 1 - \cos^2 a = \sin^2 a$$

توجه: میتوانستیم مستقیم به جای $\tan a \cot a$ عدد ۱ قرار دهیم چون \tan و \cot عکس یکدیگرند.

توجه: $\tan(5\pi - a) = \tan[4\pi + \pi - a] = \tan(\pi - a)$ چون دوره‌های زوج π بی تاثیر است.

تذکر: روابط زیر را برای نسبت های مثلثاتی با مجموع یا تفاضل $\frac{3\pi}{2}$ رادیان داریم:

$$\begin{array}{ll} \sin\left(\frac{3\pi}{2} - a\right) = -\cos a & , \quad \sin\left(\frac{3\pi}{2} + a\right) = -\cos a \\ \cos\left(\frac{3\pi}{2} - a\right) = -\sin a & , \quad \cos\left(\frac{3\pi}{2} + a\right) = \sin a \\ \tan\left(\frac{3\pi}{2} - a\right) = \cot a & , \quad \tan\left(\frac{3\pi}{2} + a\right) = -\tan a \\ \cot\left(\frac{3\pi}{2} - a\right) = \tan a & , \quad \cot\left(\frac{3\pi}{2} + a\right) = -\cot a \end{array}$$

درس سوم: توابع مثلثاتی:

توابع $y = \sin x$ و $y = \cos x$ از ساده ترین توابع مثلثاتی هستند که به ازای هر مقدار x مقدارهای آنها تعریف شده اند و دامنه این توابع تمام \mathbb{R} است و با تغییر x مقداری که برای $\sin x$ و $\cos x$ بدست می آید اعدادی بین -1 و 1 هستند به عبارت دیگر برد این توابع $[-1, 1]$ است.

رسم تابع سینوس: چون $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ و همچنین

فرزانه بایمانی دبیر ریاضی شهرستان رامهرمز

$$\sin(x-2\pi) = \sin x$$

$$(\sin(x-2\pi) = \sin[-(2\pi-x)] = \sin x \text{ (زیرا)}$$

← ناحیه چهارم و سینوس منفی است بنابراین: $- \times - = +$

بنابراین مقدار تابع سینوس با اضافه کردن (کم کردن) 2π رادیان به کمان (از کمان) تغییری نمی کند در نتیجه نمودار تابع را در بازه $[0, 2\pi]$ رسم می کنیم و در سایر بازه ها مثل $[2\pi, 4\pi]$ یا $[-2\pi, 0]$ یا $[-4\pi, -2\pi]$... همین نمودار تکرار می شود.

مثال: نمودار $y = 2\sin x + 1$ را رسم کنید.

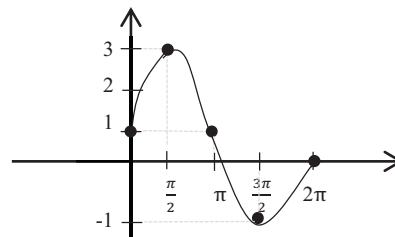
جدول اولیه نمودار سینوس که در همه نمودارها ثابت است را ابتدا مینویسیم و سپس

تغییرات مربوط را اعمال می کنیم.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	1	0	-1	0

در این جدول مقادیر x در واقع همان مقادیر اصلی روی دایره مثلثاتی هستند پس اگر مقادیر در خاطرمان نباشد می توانیم از دایره مثلثاتی کمک بگیریم

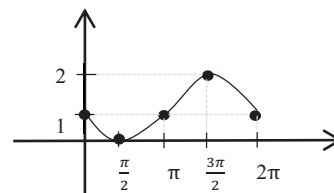
x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	1	0	-1	0
$\times 2$	0	2	0	-2	0
y^{+1}	1	3	1	-1	1



مثال: نمودار $y = -\sin x + 1$ را رسم کنید.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	1	0	-1	0
$\times -$	0	-1	0	1	0
y^{+1}	1	0	+1	2	1

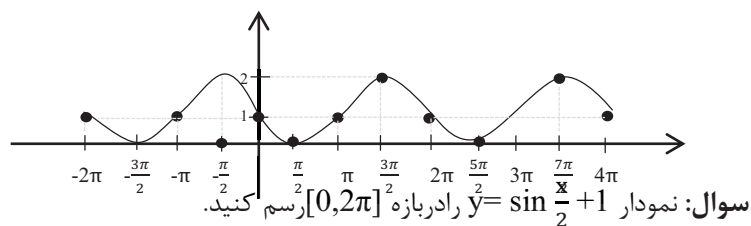
۱۸



فرزانه بایمانی دبیر ریاضی شهرستان رامهرمز

توجه: در واقع نمودار سینوس، قرینه و به اندازه یک واحد عمودی به سمت بالا منتقل شده است.

تذکر: اگر بخواهیم این نمودار را در بازه بزرگتری رسم کنیم نیازی به مقدار دادن نیست همین نمودار در بازه های قبل و بعد از بازه $[0, 2\pi]$ تکرار می شود:



سوال: نمودار $y = 1 - \frac{1}{2} \sin x$ را در بازه $[0, 2\pi]$ رسم کنید.

سوال: نمودار $y = 2 \sin(x - \frac{\pi}{3})$ را رسم کنید.

توجه: مقدار تابع $y = \sin x$ برای $x = k\pi$ (مضارب صحیح π) برابر صفر است.

سوال: به ازای چه مقادیر از θ مقدار تابع $y = \sin 3\theta$ صفر می شود؟

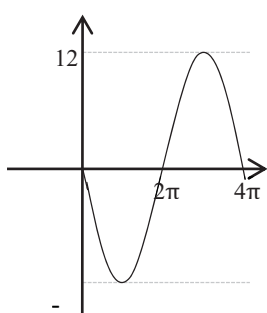
توجه: در تابع $y = a \sin kx$ ماکسیمم (بیشترین) مقدار تابع $|a|$ و منیمم مقدار تابع $-|a|$ می باشد.

توجه: بازه ای که نمودار اصلی در آن رسم می شود و در سایر بازه ها این نمودار تکرار می گردد در واقع دوره تناوب تابع سینوس است که اگر تابع را به صورت $y = a \sin kx$ بنویسیم دوره تناوب آن از رابطه $\left| \frac{2\pi}{k} \right|$ بدست می آید.

سوال: دوره تناوب $y = 2 \sin 3x$ را بدست آورید.

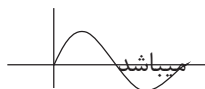
توجه: می توان با کمک بدست آوردن ماکسیمم و منیمم و دوره تناوب و نقاطی که در آن نقاط (در فاصله منیمم و ماکسیمم) تابع صفر می شود نمودار را رسم نمود اما معمولاً برای حدس زدن معادله یک نمودار از آنها استفاده می شود به مثال زیر دقت کنید:

مثال: معادله منحنی زیر را بنویسید.



طبق شکل دوره تناوب 4π است

$$\frac{2\pi}{k} = 4\pi \Rightarrow 2\pi = 4\pi k \Rightarrow k = \frac{1}{2}$$



چون نمودار اصلی سینوس به صورت

فرزانه بایمانی دبیر ریاضی شهرستان رامهرمز

بنابراین مقدار a را برابر ۱۲ - میگیریم پس معادله به صورت زیر می باشد.

$$y = a \sin kx \Rightarrow y = -12 \sin \frac{1}{2} x$$

سوال: نمودار $y = \sin(-x)$ را رسم کنید و از روی نمودار آن $y = 2\sin x$ را رسم نمائید.

توجه: در نمودار $y = b \sin x$ مقدار $b > 1$ سبب کشیدگی عمودی و مقدار $0 < b < 1$ سبب جمع شدن عمودی می شود همچنین برای مقادیر $b < 0$ نمودار نسبت به محور طول ها قرینه می شود و با توجه به اندازه اش از نظر قدر مطلق یکی از دو حالت قبل اتفاق می افتد.

رسم تابع کسینوس: باز هم داریم:

$$\cos(x-2\pi) = \cos[-(2\pi-x)] = \cos(2\pi-x) = \cos x$$

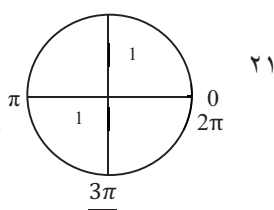
$$\cos(x+2\pi) = \cos(2\pi+x) = \cos x$$

یعنی مقدار تابع کسینوس با اضافه کردن (کم کردن) 2π رادیان به کمان (از کمان) تغییری نمی کند در نتیجه نمودار تابع را در بازه $[0, 2\pi]$ رسم می کنیم و در سایر بازه ها مثل $[2\pi, 4\pi]$ یا $[-2\pi, 0]$... همین نمودار تکرار می شود.

جدول اولیه نمودار کسینوس که در همه نمودار ها هست و تغییرات مربوط روی آن اعمال می شود به صورت زیر است:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
cosx	1	0	-1	0	1

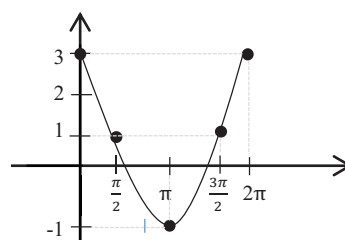
تذکر: در صورت فراموش کردن مقادیر ، می توان از دایره مثلثاتی کمک گرفت.



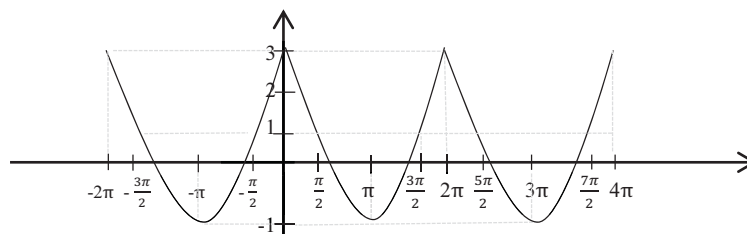
فرزانه بایمانی دبیر ریاضی شهرستان رامهرمز

مثال: $y=2 \cos x+1$ را رسم کنید. (تمرین ۲ شماره ۲ صفحه ۹۳ کتاب درسی)

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
cosx	1	0	-1	0	1
$\times 2$	2	0	-2	0	2
$y+1$	3	1	-1	1	3



توجه: اگر بخواهیم این نمودار را در بازه بزرگتری رسم کنیم همین نمودار را در بازه قبل و بعد بازه $[0, 2\pi]$ تکرار می کنیم:



سوال: نمودار $y = \cos \frac{x}{2} - 1$ را رسم کنید.

فرزانه بایمانی دبیر ریاضی شهرستان رامهرمز

سوال: نمودار $y = -\cos x + 1$ را رسم کنید.

توجه: مقدار تابع $y = \cos x$ به ازای $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ برابر صفر است.

سوال: به ازای چه مقادیری از θ مقدار تابع

$$y = 3\cos 2\theta + 1$$

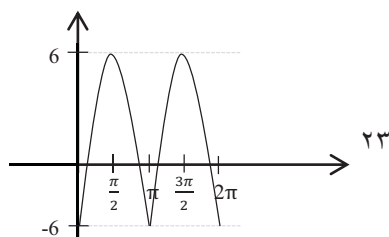
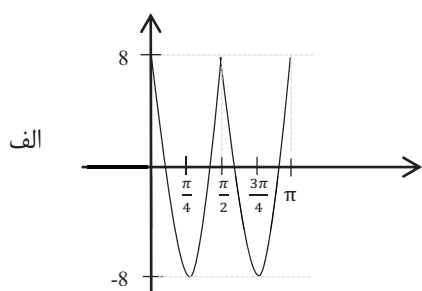
صفر می شود؟

توجه: تابع $y = a\cos kx$ یک نمودار کسینوسی است که بیشترین مقدار آن $|a|$ و کمترین

مقدار آن $-|a|$ و مثل تابع سینوس دوره تناوب آن از $\left|\frac{2\pi}{k}\right|$ بدست می آید.

سوال: اگر دوره تناوب $y = 2\cos kx$ برابر $\frac{3\pi}{2}$ باشد مقدار k را محاسبه کنید.

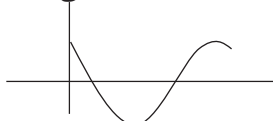
سوال: معادله منحنی های زیر را بنویسید.



فرزانه بایمانی دبیر ریاضی شهرستان رامهرمز

ب

توجه: نمودار اصلی کسینوس به صورت زیر می باشد . $(y = \cos x)$



سوال: نمودار $y = -\cos x$ را رسم کنید و از روی آن $1 - \cos x$ را رسم کنید.

نکات کلیدی:

(۱) در نسبت های مثلثاتی سینوس و کسینوس می توان مضرب های زوج π را حذف کرد ولی اگر مضربهای فرد π را حذف کنیم باید پس از حذف یک علامت منفی جلوی نسبت مثلثاتی قرار دهیم. $\sin(3\pi-\alpha)=\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$, $\sin(3\pi+\alpha)=-\sin\alpha$, $\sin(4\pi+\alpha)=\sin\alpha$, $\sin(4\pi-\alpha)=\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$

(۲) در نسبت های مثلثاتی تانژانت و کتانژانت تمام مضرب های صحیح π را می توان حذف کرد.

$$\tan(2\pi+\alpha)=\tan\alpha, \tan(3\pi+\alpha)=\tan\alpha$$

$$\tan(2\pi-\alpha)=\tan(-\alpha)=-\tan\alpha, \tan(3\pi-\alpha)=\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$$

(۳) اگر زاویه مثلثاتی شامل مضرب های صحیح π باشد نسبت مثلثاتی تغییر نمی کند.

(۴) اگر زاویه مثلثاتی شامل مضرب های $\frac{\pi}{2}$ و $\frac{3\pi}{2}$ باشد نسبت های مثلثاتی تغییر می کند بدین صورت که سینوس به کسینوس و تانژانت به کتانژانت و برعکس تغییر می یابند و برای علامت با فرض حاده بودن زاویه α ، ربعی که زاویه مثلثاتی در آن واقع است را روی دایره مثلثاتی پیدا کرده و علامت نسبت مثلثاتی آنرا مشخص نموده و جلوی نسبت مثلثاتی جدید قرار می دهیم.

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha \quad \text{ربع سوم}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=+\cos\alpha \quad \text{ربع دوم}$$

(۵) تابع $f(x)=\sin x$ از مبدأ مختصات می گذرد ولی تابع $f(x)=\cos x$ از نقطه $(0,1)$ میگذرد.

فرزانه بایمانی دبیر ریاضی شهرستان رامهرمز

۶) $\cos x$ در نقاط $x=0$ و $x=2\pi$ دارای بیشترین مقدار و در نقطه $x=\pi$ دارای کمترین مقدار است همچنین به ازای $x=\frac{\pi}{2}$ و $x=\frac{3\pi}{2}$ دارای مقداری برابر صفر است (در دوره تناوب 2π)

۷) $\sin x$ در نقطه $x=\frac{\pi}{2}$ دارای بیشترین مقدار و در نقطه $x=\frac{3\pi}{2}$ دارای کمترین مقدار است همچنین به ازای مقادیر $x=0$ و $x=\pi$ و $x=2\pi$ دارای مقداری برابر صفر است (در دوره تناوب 2π)

۸) دوره تناوب $\sin x$ و $\cos x$ برابر با 2π است در حقیقت 2π کوچکترین زاویه ای است که اگر به α اضافه شود \sin و \cos آن تغییر نمی کند. $\sin(\alpha+2k\pi)=\sin\alpha$

۹) دوره تناوب $\tan x$ و $\cot x$ برابر با π است در حقیقت π کوچکترین زاویه ای است که اگر به α اضافه شود \tan و \cot آن تغییر نمی کند.

$$\tan(\alpha+k\pi)=\tan\alpha \quad \cot(\alpha+k\pi)=\cot\alpha \quad (k \in \mathbb{Z})$$

۱۰) دوره تناوب $y=a \sin bx+c$ و $y=a \cos bx+c$ برابر است با: $\frac{2\pi}{|b|}$

۱۱) دوره تناوب $y=a \tan bx+c$ و $y=a \cot bx+c$ برابر است با: $\frac{\pi}{|b|}$

۱۲) اگر عددی پشت \sin و \cos ضرب شود دوره تناوب تغییری نمی کند زیرا اعدادی که بیرون تابع ضرب یا تقسیم یا جمع و تفریق می شوند فقط روی برد تابع تاثیر می گذارند و روی دامنه بی تاثیر هستند بنابراین روی دوره تناوب هم اثری ندارند.

۱۳) توابعی به صورت $y = \sin^{2n+1}x$ و $y = \cos^{2n+1}x$ که دارای توان فرد هستند دوره تناوب همان $T=2\pi$ است ولی برای $y = \sin^{2n}x$ و $y = \cos^{2n}x$ و $y = |\sin x|$

$y = |\cos x|$ دوره تناوب نصف می گردد و برابر $T=\pi$ است.

۱۴) توابع \tan و \cot با هر توان طبیعی (چه زوج و چه فرد) دوره تناوب همان $T=\pi$ است.

فرزانه بایمانی دبیر ریاضی شهرستان رامهرمز

(۱۵) برای تبدیل درجه به رادیان به روش سریع عدد داده شده را در $\frac{\pi}{180}$ ضرب می کنیم.

(۱۶) برای تبدیل رادیان به درجه به روش سریع زاویه داده شده را در $\frac{180}{\pi}$ ضرب می کنیم.

(۱۷) تابع \sin تابعی فرد است یعنی اگر X را به $-X$ تبدیل کنیم قرینه تابع \sin بدست می آید.

(۱۸) تابع \cos تابعی زوج است یعنی اگر X را به $-X$ تبدیل کنیم تابع تغییر نمی کند.

(۱۹) تانژانت در دامنه تعریفش همواره صعودی است همچنین در بازه $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ تابعی فرد می باشد

(۲۰) کتانژانت در دامنه تعریفش همواره نزولی است همچنین در بازه $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ تابعی فرد می باشد.

(۲۱) دامنه تانژانت $\mathbb{R} - \{k\pi + \frac{\pi}{2}\}$ است زیرا: $\tan x = 0$ و $\cos x = 0 \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}$

$$\frac{\sin x}{\cos x}$$

(۲۲) دامنه کتانژانت $\mathbb{R} - \{k\pi\}$ است زیرا: $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ و $\sin x = 0 \rightarrow x = k\pi$

فرزانه بایمانی دبیر ریاضی شهرستان رامهرمز

تست:

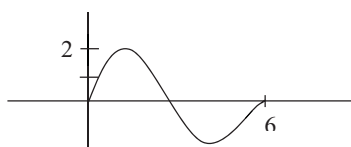
(۱) حاصل عبارت $\frac{\cos 285 - \sin 255}{\sin 525 - \sin 105}$ با فرض $\tan 15^\circ = 0/28$ کدام است؟ (کنکور تجربی ۹۴)

(۱) $-\frac{16}{9}$ (۲) $-\frac{9}{16}$ (۳) $\frac{9}{16}$ (۴) $\frac{16}{9}$

پاسخ: گزینه ۱

(۲) شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $y = a \sin(b\pi x)$ است. $a+b$ کدام است؟ (کنکور تجربی

خارج ۹۳)



(۱) $\frac{4}{3}$ (۲) $\frac{5}{3}$ (۳) $\frac{7}{3}$ (۴) $\frac{8}{3}$

باتوجه به نمودار دوره تناوب برابر ۶ می باشد

و طبق فرمول برابر $\frac{2\pi}{|b\pi|}$ که مساوی است با $\frac{2}{|b|}$

$$\frac{2}{|b|} = 6 \Rightarrow |b| = \frac{1}{3}$$

طبق شکل $a=2$ بنابراین $a+b=2+\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$ و a و b هر دو می توانند منفی هم باشند که

جواب $-\frac{7}{3}$ می شود که در گزینه ها نیست)

توجه: b و جواب دارداما چون نمودار فرم نمودار مثبت است a و b نمیتوانند علامتهای متفاوت داشته باشند.

(۳) حاصل عبارت $\frac{\sin 250 + \sin 700}{\cos 560 - \cos 110}$ با فرض $\tan 20^\circ = 0/4$ کدام است؟ (کنکور تجربی خارج ۹۴)

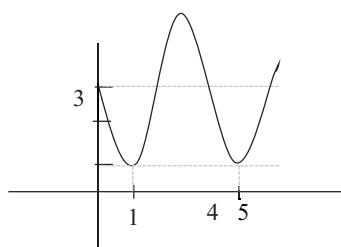
فرزانه بایمانی دبیر ریاضی شهرستان رامهرمز

$$\frac{5}{8} \text{ (۴)} \quad \frac{7}{3} \text{ (۳)} \quad \frac{3}{4} \text{ (۲)} \quad -\frac{3}{4} \text{ (۱)}$$

پاسخ: گزینه ۳

۴) شکل زیر قسمتی از نمودار $y = a + \sin(b\pi x)$ می باشد. مقدار y در نقطه $x = \frac{25}{3}$ کدام است؟ (کنکور تجربی ۹۳)

$$-۳,۵ \text{ (۴)} \quad ۳,۵ \text{ (۳)} \quad -۲,۵ \text{ (۲)} \quad ۲,۵ \text{ (۱)}$$



باتوجه به شکل در $x=0$ داریم $y=3$

اگر (۳ و ۰) را در معادله بگذاریم

نتیجه می گیریم $a=3$

$$\frac{2\pi}{|b\pi|} = 4 \Rightarrow |b| = \frac{1}{2} \Rightarrow y = 3 + \sin\left(-\frac{\pi}{2}x\right) \xrightarrow{x=\frac{25}{3}} y = 2/5$$

(نمودار قرینه فرم اصلی \sin است پس $b = -\frac{1}{2}$)

$$\text{(۵) حاصل عبارت } \sin\left(\frac{17\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{-17\pi}{6}\right) + \tan\left(\frac{19\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{-11\pi}{6}\right)$$

فرزانه بايمانی دبیر ریاضی شهرستان رامهرمز

کدام است؟ (۱) $\frac{-1}{4}$ (۲) $\frac{-1}{2}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{2}$ (کنکور تجربی ۹۸) پاسخ: گزینه ۳

فرزانه بایمانی دبیر ریاضی شهرستان رامهرمز

تمریناتی برای تلاش بیشتر:

(۱) عبارت زیر را ساده کنید.

$$\cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7}$$

پاسخ نهایی: صفر

(۲) در مثلث $\triangle ABC$ با فرض $A=120^\circ$ نشان دهید $\tan 3B + \tan 3C = 0$

توجه کنید که جمع زاویه های داخلی هر مثلث 180° درجه است $B+C$ را محاسبه کنید و سپس در ۳ ضرب کنید و سپس B را یکطرف و ...

(۳) حاصل عبارت $\frac{\sin 80^\circ + \cos 10^\circ}{\cos 80^\circ + \sin 10^\circ} \times \cos 80^\circ$ را محاسبه کنید.

پاسخ نهایی: $\cos 10^\circ$ همه را بر اساس 10° درجه بنویسید

(۴) حاصل عبارت زیر را ساده کنید.

$$A = \frac{2 \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{8}\right) + \cos \frac{9\pi}{8}}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{8}\right) + 2 \sin\left(\frac{17\pi}{2} + \frac{\pi}{8}\right)}$$

استعدادهای درخشان شهید بهشتی

اهواز خرداد ۹۷

(۵) اگر $\tan \alpha = \frac{2}{3}$ باشد مقدار $\frac{\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \sin(3\pi + \alpha)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) + \cos(\alpha - \pi)}$ را محاسبه کنید. پاسخ نهایی:

۵ راهنمایی: پس از ساده کردن، تک تک جملات را بر $\cos \alpha$ تقسیم کنید

(۶) درستی تساوی زیر را بررسی کنید.

$$\frac{-2\cos 100^\circ + \cos 350^\circ - \sin 460^\circ}{\cos 80^\circ - 4\sin 280^\circ + \sin 190^\circ} = \frac{1}{2} \tan 10^\circ$$

رابطه درست است. همه را بر اساس 10° درجه بنویسید.