فصل ۳

تابع

۱.۳ یادآوری تابع و آشنایی با چند تابع

از کلاس دهم با مفهوم تابع و کاربردهای آن آشنا شده‌اید.دراین بخش به یادآوری و تکمیل این مبحث می‌پردازیم. تکامل تابع و رسیدن به این مرتبه از سادگی و قابل فهم بودن برای دانش‌آموزان ، محصول حدود دو قرن تکامل توسط ریاضیدانان بزرگی چون لایبنیتز ،اویلر و وایرشتراس است.

تعریف ۱.۳. یک تابع از مجموعه‌ی A به مجموعه‌ی B رابطه‌ای است بین این دو مجموعه بطوریکه به هر عضو از A دقیقا یک عضو از B را نسبت می‌دهد.

بطور معمول اولین روش معرفی تابع استفاده از نمودار ون است. دومین راه نمایش یک تابع استفاده از زوجهای مرتب است. یک مجموعه شامل زوج‌های مرتب زمانی معرف یک تابع است که در آن هیچ دو زوج مرتبی با مولفه‌ی اول یکسان وجود نداشته باشد. به عبارت بهتر رابطه‌ی f تابع است هرگاه :

$$\begin{cases} (x,y) \in f \\ (x,z) \in f \end{cases} \Longrightarrow y = z$$

مثال ۱.۳. الف: مقادیر b, a را طوری بیابید تا رابطه‌ی f زیر تابع باشد.

$$f = \left\{(a^۲ + a, ۱), (۰, b + ۴), (۱, a^۲ + ۲b), (۰, a^۲ + b), (\frac{۲ - a}{۴}, a - b)\right\}$$

ب: آیا رابطه‌ی $x = y + y^۳$ که مبین ارتباطی بین دو متغیر y, x است، یک تابع است؟ چرا؟

تست ۱.۳. به ازای کدام مقدار a در رابطه‌ی $|ay + ۱| = ۲x - ۵y$ ، متغیر y تابعی از x است؟

۱) $a = ۳$	۲) $a = ۵$	۳) $a = ۷$	۴) $a = -۶$

یکی دیگر از روش‌های معرفی تابع استفاده از ضابطه‌ی جبری است .اگر $f : A \longrightarrow B$ یک تابع با ضابطه‌ی $y = f(x)$

باشد اغلب آن‌را بصورت زیر خلاصه‌نویسی می کنیم:

$$\begin{cases} f : A \longrightarrow B \\ x \to f(x)\ ,\ y = f(x) \end{cases}$$

در این حالت هم مجموعه‌ی A دامنه‌ی دامنه تابع است،اما B لزوما برد تابع نیست و در واقع $R_f \subset B$ است.

مثال ۲.۳. تابع $\begin{cases} f : \mathbb{R} - \{۰\} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \to \frac{۱}{x} \end{cases}$ مفروض است. ضابطه‌ی تابع چیست؟ آیا می‌توانید با یافتن مقادیر مختلف تابع، نمودار آن‌را حدس بزنید؟

توابع گویا

تعریف ۲.۳. تابع f را گویا گوییم هرگاه ضابطه‌ی آن بصورت $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ باشد، که در آن P, Q توابع چند جمله‌ای هستند. و $Q(x)$ ناصفر است.

به عنوان مثال ساده توابع زیر همگی توابع گویا هستند.

$$f(x) = \frac{۲x}{x+۱} \quad s(x) = \frac{۲}{x^۲+۱} \quad t(x) = ۳ \quad k(x) = \sqrt{۲}x \ \cdots$$

یک فعالیت از کتاب درسی: یکی از معیارهای بررسی موفقیت یک بازیکن بسکتبال، بررسی «عملکرد پرتابهای آزاد» اوست. به این منظور، نسبت پرتابهای آزاد موفق هر بازیکن را به همه پرتاب‌های آزاد حساب میکنند. وحیده که عضو تیم بسکتبال مدرسه است، یک بازیکن موفق است، زیرا در مسابقات امسال، تا امروز، از ۱۰ پرتاب آزاد، ۷ پرتاب او موفق بوده است. بنابراین ۷۰ درصد پرتابهای آزاد او موفق بوده است. او دوست دارد عملکردش بهتر از این باشد.

الف) اگر تا پایان مسابقات همه پرتاب های آزاد وحیده موفق باشد، ضابطه تابع عملکرد پرتابهای آزاد او به کدام صورت زیر است؟

$$f(x) = ۰/۷ + x \qquad f(x) = \frac{x}{۰/۷ + x} \qquad f(x) = \frac{x+۷}{x+۱۰}$$

واضح است که با توجه به موفق بودن پرتاب‌ها بعد از پرتاب دهم باید شانس موفقیت پرتاب‌های وحیده بصورت $\frac{۸}{۱۱}$ و $\frac{۹}{۱۲}$ و الی آخر باشد که این داده‌ها منطبق بر تابع آخری است.

ب) آیا تابع عملکرد پرتاب‌های آزاد وحیده، یک تابع گویاست؟

با توجه به ضابطه‌ی تابع یعنی $f(x) = \frac{x+۷}{x+۱۰}$ پاسخ مثبت است.

پ) توضیح دهید که پس از چند پرتاب آزاد موفق پیاپی دیگر، درصد موفقیت عملکرد وحیده ۸۰ درصد خواهد شد؟

$$f(x) = \frac{x+۷}{x+۱۰} = \frac{۸۰}{۱۰۰} = \frac{۴}{۵} \Rightarrow x = ۵$$

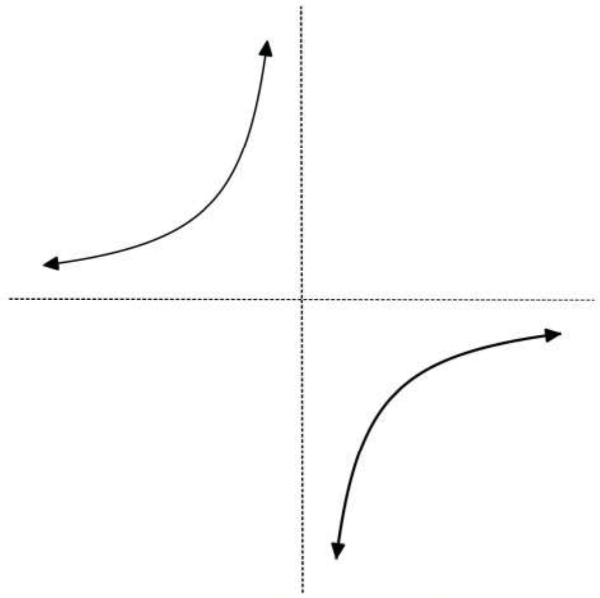
پس از پنج پرتاب موفق، درصد موفقیت وی به ۸۰ درصد خواهد رسید.

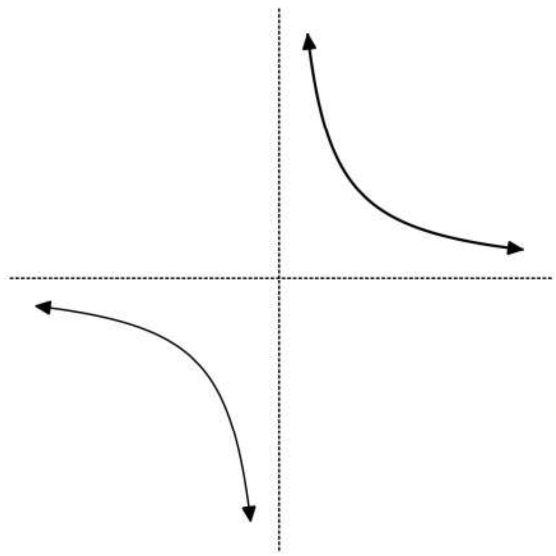
دامنه‌ی توابع گویا تمام مقادیری از x است که به ازای آنها عبارت گویا تعریف شده باشد.

مثال ۳.۳. دامنه‌ی توابع زیر را بیابید.

$$۱)f(x)=\frac{۲x+۲}{x^۲-۱} \qquad ۲)g(x)=\frac{۱+\frac{۱}{x+۱}}{۱-\frac{۳}{x^۲-۱}} \qquad ۳)s(x)=\frac{۳}{x^۴-۱۳x^۲-۳۶}$$

تابع هموگرافیک: تابعی که در فعالیت کتاب درسی مورد بررسی قرار گرفت، یک حالت خاص از تابع گویای است که صورت و مخرج آن دو جمله‌ای درجه اول هستند. صورت کسر می‌تواند فاقد متغیر باشد، اما مخرج حتما دو جمله‌ای درجه اول است. فرم کلی چنین توابعی بصورت: $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ است. نحوه‌ی ترسیم این نوع توابع را در کلاس دوازدهم، با استفاده از مشتق یاد خواهید گرفت. با اینحال به شکل کلی این توابع در زیر اشاره می‌کنیم.





خطوطی که در شکل مشاهده می‌کنید، محورهای مختصات نیستند، در واقع این خطوط بصورت $x=-\frac{d}{c}$, $y=\frac{a}{c}$ هستند. محل برخورد این دو خط یعنی $W(-\frac{d}{c},\frac{a}{c})$ هم مرکز تقارن شکل است. شکل سمت راست مربوط به زمانی است که $ad-bc<۰$ باشدو شکل سمت چپ زمانی که $ad-bc>۰$ است. بعدا در درس مقاطع مخروطی خواهید دید که تابع هموگرافیک، یک حالت خاص از مقطع مخروطی معروفی بنام هذلولی است که به اندازه‌ی ۴۵ درجه دوران یافته است.

توابع رادیکالی

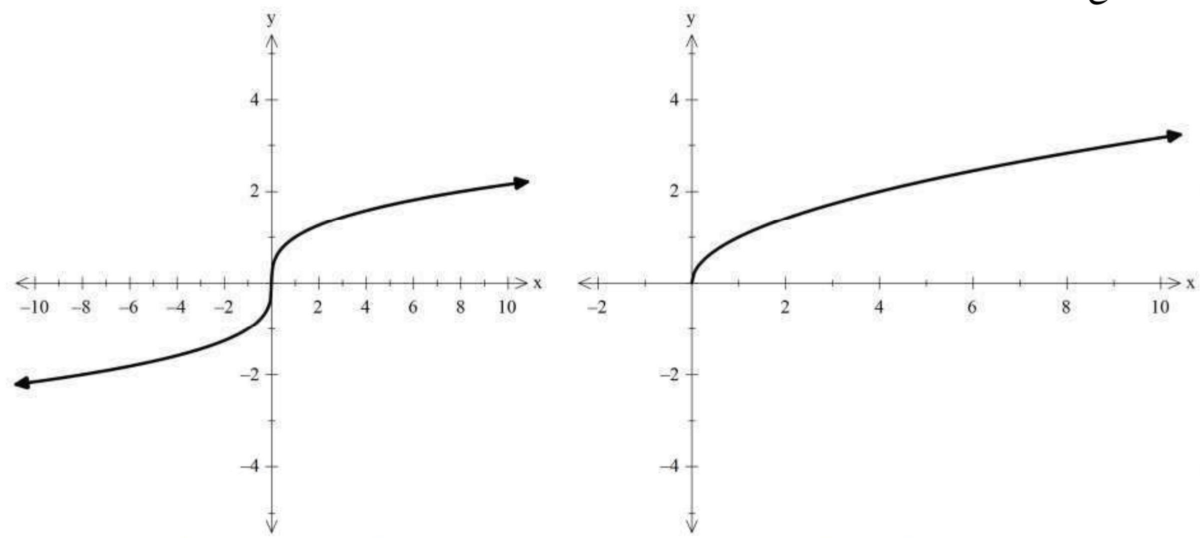
اولین تابع رادیکالی که می‌خواهیم بررسی کنیم تابع:

$$\begin{cases} f:\mathbb{R}^+\longrightarrow\mathbb{R} \\ x\longrightarrow\sqrt{x} \end{cases}$$

با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{x}$ است. این تابع داری دامنه‌ای بصورت $D_f=[۰,+\infty)$ است و برد این تابع برابر است با $R_f=[۰,+\infty)$ است. تابع رادیکالی دیگری که قصد معرفی آن را داریم تابع ریشه سوم است:

$$\begin{cases} f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R} \\ x\longrightarrow\sqrt[۳]{x} \end{cases}$$

ضابطه‌ی این تابع $f(x)=\sqrt[3]{x}$ است. نمودار آن‌را در زیر می‌بینید:



یکی دیگر از نکات مهم در مورد توابع رادیکالی دامنه آنهاست. همان‌طور که می‌دانید، توابع رادیکالی با فرجه‌ی زوج، زمانی تعریف شده است که زیر رادیکال همواره مثبت باشد. چنانچه فرجه فرد باشد، باید عبارت زیر رادیکال با معنی باشد.

مثال ۴.۳. دامنه‌ی توابع زیر را بدست آورید؟

$$1)f(x)=\sqrt{2x+|x-3|} \qquad 2)g(x)=\sqrt[3]{\frac{1}{x^3-x}} \qquad 3)k(x)=\frac{\sqrt{25-x^2}}{\sqrt{x-1}-1}$$

توابع پله‌ای و جزءصحیح

توابع پله‌ای، از توابع خاص هستند که استفاده‌ی قابل توجهی در بسیاری از شاخه‌های علوم مانند حسابداری، مدیریت بازرگانی و ... دارد. مثلا غلظت یک نوع دارو در خون، پس از زمان تزریق بصورت زیر است:

$$D(t)=\begin{cases} 1 & 0\le t<1 \\ \frac{1}{2} & 1\le t<3 \\ \frac{1}{3} & 3\le t<7 \\ \frac{1}{4} & 7\le t<24 \end{cases}$$

اگر نمودار این تابع را رسم کنید، بصورت خطوطی موازی با محور طول‌هاست که البته در هر بازه ممکن است طول پاره‌خط متفاوت باشد. یکی از توابع پله‌ای پرکاربرد، تابع جزءصحیح است که اهمیتی فوق‌العاده دارد.

تعریف ۳.۳. جزءصحیح عدد حقیقی x را که با نماد $[x]$ نشان می‌دهیم بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$[x]=n \Longleftrightarrow n\le x<n+1$$

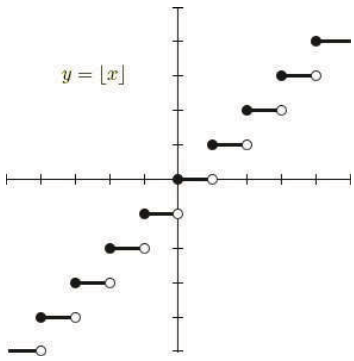
اگرچه شاید تعریف به نظر کمی پیچیده آید اما اساس تعریف ساده است.هر عدد حقیقی یا صحیح است یا نیست.اگر صحیح باشد که جزءصحیح آن برابر خودش است و اگر خیر دارای یک قسمت اعشاری است که اغلب با حرف p نشان می‌دهیم و دراینصورت $0\le p<1$, $x=[x]+p$. مثلا $[3]=3$ ویا $[3/6]+0/6=3+0/6=3/6$.

مثال ۵.۳. حاصل عبارات زیر را بدست آورید.

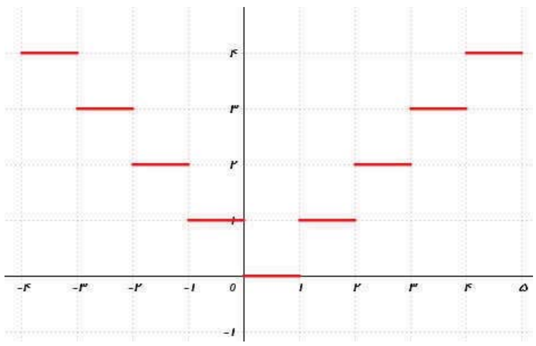
۱) $[-۹۹] =$ ۲) $\left[\frac{۲۱}{۵}\right] =$ ۳) $[\pi] =$

۴) $[-\pi] =$ ۵) $\left[\frac{۱-\sqrt{۸}}{۳}\right] =$ ۶) $[\sqrt{۲}+\sqrt{۳}\,] =$

حال تابع $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{Z}$ را بصورت $f(x)=[x]$ تعریف می‌کنیم. این تابع دارای خواص جالبی است که در ادامه آنها را بررسی می‌کنیم. نمودار این تابع بصورت زیر است. برای رسم نمودار این تابع ابتدا متغیر x را در بازه‌ی $[۰,۱)$ محدود کرده و مقدار $y=[x]=۰$ را بدست می‌آوریم. سپس همین فرآیند را تکرار کرده و به بازه‌های بعدی می‌رویم و نمودار را رسم می‌کنیم.



تست ۲.۳. شکل مقابل نشانگر نمودار کدام یک از توابع زیر است؟



۱) $y=[-x]$ ۲) $y=-[-x]$

۳) $y=|[x]|$ ۴) $y=[|x|]$

خواص مهم جزءصحیح

شاید بتوان خواص جزءصحیح را به بیش از ۱۰ مورد رساند اما به نظر نگارنده این کار لزوما نتایج مثبتی نخواهد داشت. ما چند خاصیت اساسی این تابع را در اینجا معرفی و بررسی می کنیم.

۱. برای هر $x\in\mathbb{R}$ همواره $[x]\in\mathbb{Z}$. (یعنی حاصل جزءصحیح عددی صحیح است)

۲. برای هر $x\in\mathbb{R}$ و هر $n\in\mathbb{Z}$ همواره داریم: $[x+n]=[x]+n$

۳. برای هر $x\in\mathbb{R}$ همواره داریم: $۰\le x-[x]<۱$.

۴. برای هر $x\in\mathbb{R}$ داریم:
$$[x]+[-x]=\begin{cases}۰ & x\in\mathbb{Z}\\ -۱ & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$$

۵. برای هر $x\in\mathbb{R}$ داریم: $x-۱<[x]\le x$.

مثال ۶.۳. معادلات زیر را حل کنید.

$$1)\left[\frac{3x+1}{2}\right]=4 \qquad 2)\left[\frac{x}{2}\right]-\left[-\frac{x}{2}\right]=3 \qquad 3)5[x]=4x$$

مثال ۷.۳. نمودار توابع زیر را رسم کنید.

$$1)y=[2x] \quad , \quad 2)y=\left[\frac{x}{3}\right] \quad , \quad 3)y=x-[x] \quad , \quad 4)y=x+[x]$$

تست ۳.۳. برد تابع $f(x)=\sqrt{x-[x]-\frac{3}{4}}$ برابر کدام گزینه است؟

۱) $[0,\frac{1}{2})$　۲) $[0,\frac{1}{2}]$　۳) $\{0\}$　۴) $[0,1]$

تست ۴.۳. اگر $x^2+x<0$ باشد، حاصل $[x]+[x^2]+[x^3]+[x^4]$ کدامست؟

۱) -2　۲) -1　۳) 0　۴) 1

تساوی دو تابع

تعریف ۴.۳. دو تابع g, f مفروضند. گوییم این دو تابع برابرند، هرگاه دو شرط زیر با هم برقرار باشد:

۱. دامنه دو تابع برابر باشد. یعنی $D_f=D_g$.

۲. برای هر $x\in D_f=D_g$ داشته باشیم: $f(x)=g(x)$.

به‌عنوان یک مثال ساده $g(x)=|x|$ ، $f(x)=\frac{x^2}{|x|}$ برابر نیستند چراکه $D_f=\mathbb{R}-\{0\}\neq D_g=\mathbb{R}$. درحالیکه ضابطه‌ی ایندو برابر است. از طرفی توابع $f(x)=\sqrt{x}, g(x)=2\sqrt{x}$ دامنه‌های برابر دارند، اما ضابطه‌ها برابر نیست.

تست ۵.۳. دو تابع $f(x)=\frac{x}{x^2-1}$ و $g(x)=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+1}$ با هم مساویند. مقدار $a+b$ کدامست؟

۱) ۱٫۵　۲) ۱　۳) ۰٫۵　۴) ۲

تست ۶.۳. توابع $f(x)=\tan x$ و $g(x)$ مساویند. ضابطه‌ی $g(x)$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) $\frac{1}{\cot x}$　۲) $\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$　۳) $\frac{\sin x}{\cos x}$　۴) $\frac{1-\cos x}{\sin x}$

تست ۷.۳. درکدام گزینه توابع داده شده برابرند؟

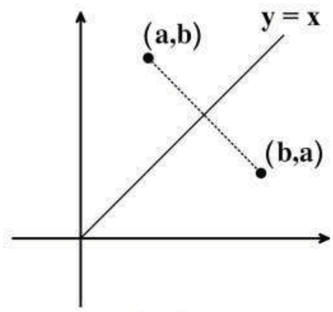
۱) $\begin{cases} f(x) = ۰ \\ g(x) = \left[\frac{x^۲+۱}{x^۲+۲}\right] \end{cases}$

۲) $\begin{cases} f(x) = ۱ \\ g(x) = \left[\frac{x^۲+۱}{x^۲+۲}\right] \end{cases}$

۳) $\begin{cases} f(x) = \sqrt{-x^۲} \\ g(x) = x\sqrt{-x} \end{cases}$

۴) $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^۲ - ۴} \\ g(x) = \sqrt{x - ۲} \times \sqrt{x + ۲} \end{cases}$

۲.۳ توابع یک‌به‌یک و وارون یک تابع



می‌دانیم که هر تابع مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب است. هر زوج مرتب بصورت (a, b) است که اولین مولفه، معرف طول و دومی معرف عرض است. حال اگر جای مولفه‌ها را عوض کنیم، قرینه نسبت به خط $y = x$ حاصل می‌شود. اگر در مورد هر تابعی که بصورت زوج مرتب بیان شده، جای مولفه‌ها را عوض کنیم، یک رابطه جدید بدست می‌آید که البته لزوما تابع نیست، اما وارون رابطه اولی است. اما اگر با این عمل رابطه‌ی جدید تابع نباشد، این عمل چندان جالب نیست. برای اینکه ببینیم مشکل کارکجاست، به نمونه زیر دقت کنید.
دو تابع زیر را درنظر بگیرید:

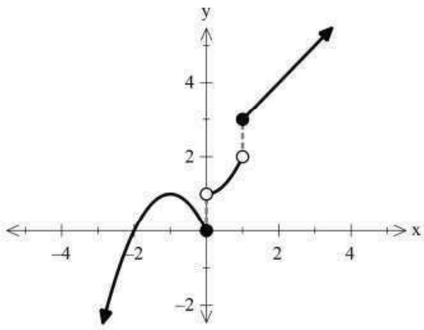
$$\begin{cases} f = \{(۱,۲),(۲,۳),(۳,۴),(۴,۵)\} \\ g = \{(۲,۳)(۵,۳),(۷,۸)\} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f^{-۱} = \{(۲,۱),(۳,۲),(۴,۳),(۵,۴)\} \\ g^{-۱} = \{(۳,۲),(۳,۵),(۸,۷)\} \end{cases}$$

همانطورکه مشاهده می‌کنید، $g^{-۱}$ تابع نیست، چراکه در تابع g دو عرض یکسان داریم یعنی $۵ \longrightarrow ۲,۳$ و همین مشکل‌ساز است. چنین توابعی را باید نامگذاری کنیم.

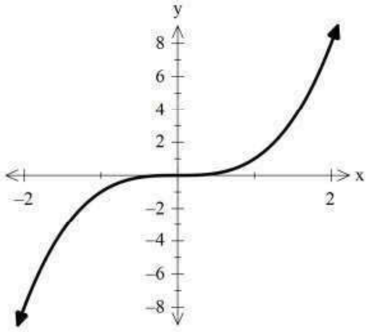
تعریف ۵.۳. یک تابع را یک‌به‌یک گوییم، هرگاه هیچ دو طول متفاوتی به یک عرض نظیر نشوند. به نماد ریاضی:

$$f(a) = f(b) \Longrightarrow a = b$$

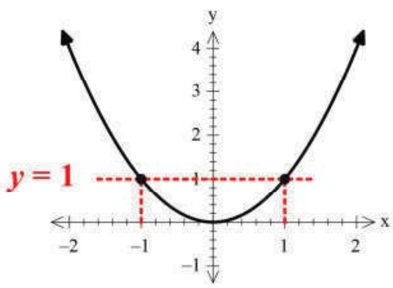
از نظر هندسی، تابعی یک به یک است که هر خط موازی محور طول‌ها نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند. چراکه قطع کردن در دو نقطه یا بیشتر یه این معنی است که به ازای یک عرض (که همان خط موازی محور طول‌هاست) دارای دو یا چند طول متفاوت هستیم.



تابع یک به یک نیست.چرا؟



تابع یک به یک است



$f(-1) = f(1)$

تابع یک به یک نیست

برای بررسی کردن وضعیت یک به یک بودن تابع، درصورت امکان ترسیم، آن‌را رسم نموده و یک به یک بودن آن‌را بررسی می‌کنیم. در غیراینصورت باید از تعریف استفاده کرد. گاهی اوقات تنها با یک مثال نقض، یک به یک بودن تابع رد می‌شود.

مثال ۸.۳. یک به یک بودن توابع زیر را بررسی کنید.

۱. $f(x) = x^2 + x|x|$

۲. $f(x) = x^5 - x + 1$

۳. $f(x) = |x| + \sqrt[3]{x}$

۴. $f(x) = |x-2| + \sqrt{x}$

۵. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

۶. $f(x) = x^3 + x$

تست ۸.۳. اگر تابع $f = \{(3,2), (4m,3), (a-2,2), (m^2+a,3)\}$ یک به یک باشد حاصل $a+m$ کدامست؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

تست ۹.۳. کدام تابع یک به یک است؟

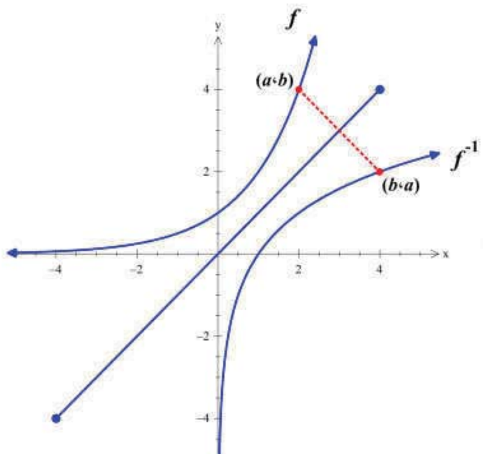
۱) $y = x^3 + 1$

۲) $y = x^3 - x$

۳) $y = x^4$

۴) $y = \begin{cases} x & x \geq 1 \\ 2x & x < 1 \end{cases}$

همانطورکه قبلا توضیح داده شد، در توابع زوج مرتب با تعویض جای مولفه‌های اول و دوم، رابطه‌ی جدیدی حاصل می‌شود که ممکن است تابع نباشد. اما در توابع یک به یک، این مشکل وجود نخواهد داشت. این تابع جدید را وارون تابع اصلی گوییم. پس اگر f یک به یک باشد، معکوس آن نیز تابع است و با نماد f^{-1} نشان داده می‌شود.[1]



در شکل مقابل نمودار تابع f رسم شده است. همچنین خط $y = x$ نیز رسم شده است. با قرینه کردن نمودار f نسبت به نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم، تابع جدید f^{-1} حاصل می‌شود. حال اگر $f(a) = b$ باشد، آنگاه $f^{-1}(b) = a$ خواهد بود. به عبارت بهتر جای دامنه و برد در این دو تابع عوض شده است. به عبارت بهتر $R_f = D_{f^{-1}}$ ویا $D_f = R_{f^{-1}}$ است. این نکته ما را به سمت تکنیکی برای یافتن برد یک تابع سوق می‌دهد. بدین ترتیب که برای یافتن برد یک تابع کافیست وارون آن تابع را یافته و دامنه آن را محاسبه کنیم.

[1] عبارت f^{-1} را وارون f بخوانید و اساسا این تابع هیچ ارتباطی با تابع $\frac{1}{f}$ ندارد.

نکته ۱.۳. برای یافتن ضابطه‌ی تابع وارون در معادله‌ی $y = f(x)$ ابتدا متغیر x را بر حسب y محاسبه کرده و سپس جای آنها را در آخر عوض می‌کنیم. برای یافتن شکل تابع وارون از روی نمودار کافیست، قرینه تابع را نسبت به خط $y = x$ بیابیم.

مثال ۹.۳. وارون توابع زیر را بدست آورید.

۱. $f(x) = \frac{۳-۵x}{۷}$

۲. $f(x) = x^۳ + ۳x^۲ + ۳x + ۲$

۳. $f(x) = x + ۴\sqrt{x} + ۱$

۴. $f(x) = x + \sqrt{x^۲ + ۱}$

۵. $f(x) = x + [x]$

۶. $f(x) = x^۲ + ۶x - ۲ \,,\ x < -۳$

تست ۱۰.۳. ضابطه‌ی تابع وارون تابع $f(x) = \begin{cases} ۲x - ۱ & x < ۰ \\ ۴x + ۱ & x \geq ۰ \end{cases}$ کدامست؟

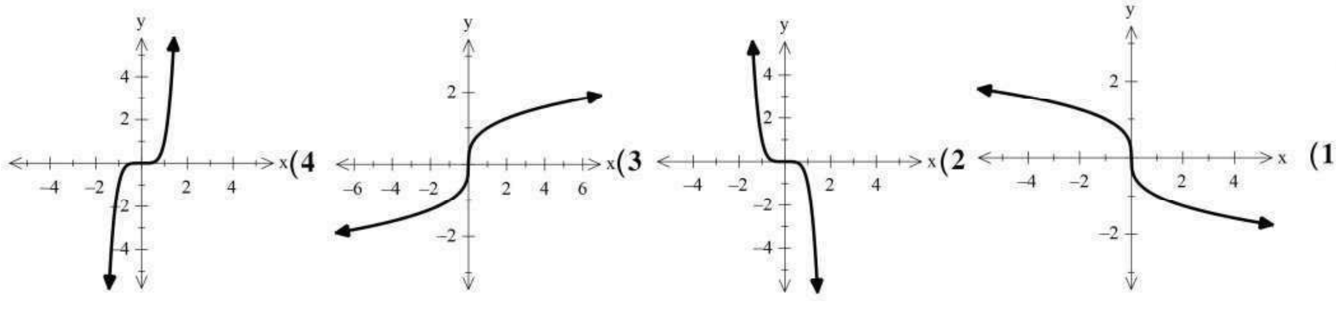
$۱) y = \begin{cases} \frac{۱}{۲}(x+۱) & x < ۰ \\ \frac{۱}{۴}(x-۱) & x \geq ۰ \end{cases}$

$۲) y = \begin{cases} \frac{۱}{۲}(x-۱) & x < ۰ \\ \frac{۱}{۴}(x+۱) & x \geq ۰ \end{cases}$

$۳) y = \begin{cases} \frac{۱}{۲}(x-۱) & x < -۱ \\ \frac{۱}{۴}(x+۱) & x \geq -۱ \end{cases}$

$۴) y = \begin{cases} \frac{۱}{۲}(x+۱) & x < -۱ \\ \frac{۱}{۴}(x-۱) & x \geq ۱ \end{cases}$

تست ۱۱.۳. اگر $f(x) = x|x|$ باشد، نمودار تابع $y = f^{-۱}(x)$ کدامست؟



تست ۱۲.۳. ضابطه‌ی تابع وارون تابع $f(x) = x^۲ - x|x|$ در بزرگترین بازه‌ای که در آن وارون‌پذیر است، کدامست؟

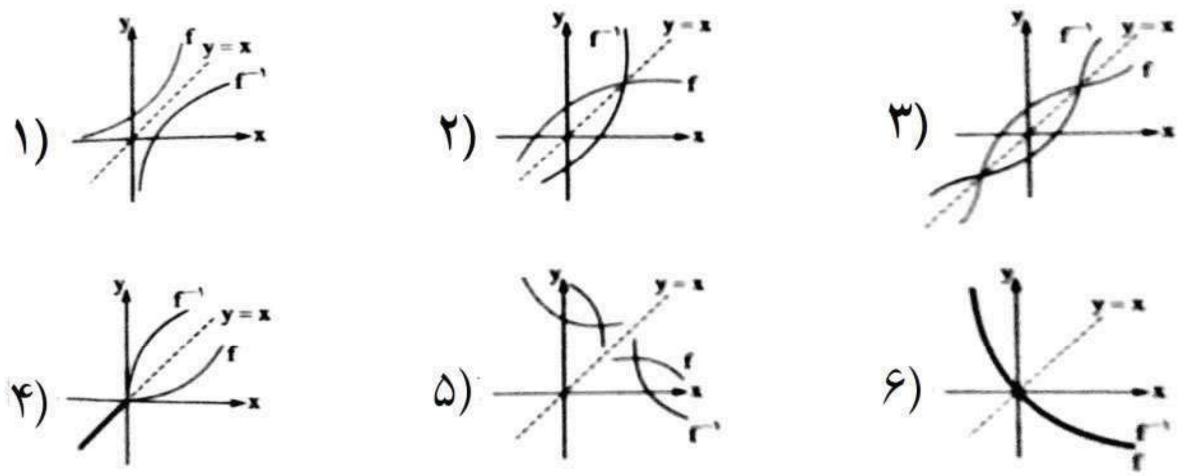
$۱) f^{-۱}(x) = -\frac{۱}{۲}\sqrt{۲|x|} \,,\ x \geq ۰$

$۲) f^{-۱}(x) = -\frac{۱}{۲}\sqrt{۲|x|} \,,\ x \leq ۰$

$۳) f^{-۱}(x) = -\frac{۱}{۲}\sqrt{|x|} \,,\ x \geq ۰$

$۴) f^{-۱}(x) = -\frac{۱}{۲}\sqrt{|x|} \,,\ x \leq ۰$

نقاط تقاطع یک تابع و وارونش: برای یافتن نقاط برخورد یک تابع با وارونش به شکل زیر دقت کنید:



۱. اگر تابع اکیدا صعودی باشد، نمودار $f, f^{-۱}$ یا یکدیگر را قطع نمی‌کنند یا اگر قطع کردند، نقطه برخوردشان روی $y = x$ است. مانند شکل‌های ۱ و ۲ و ۳ و ۴ .

۲. اگر تابع اکیدا نزولی باشد، یا دو نمودار متقاطع نیستند یا روی خط $y = x$ متقاطع هستند یا در نقاط دیگری یکدیگر را قطع می‌کنند که نسبت به خط $y = x$ متقارن هستند. مثل شکل ۵ و ۶ .

۳. ممکن است دو نمودار در بی‌شمار نقطه یکدیگر را قطع کنند، مثل شکل ۴ .

تست ۱۳.۳. نمودار تابع $f(x) = x^{۳} + x - ۸$ و نمودار وارونش، در چند نقطه متقاطع هستند؟

۱(۱   ۰(۲   ۲(۳   ۳(۴

تست ۱۴.۳. اگر رابطه‌ی $f = \{(۳, ۲), (a, ۵), (۳, a^{۲} - a), (b, ۲), (-۱, ۴)\}$ یک تابع یک به یک باشد، دوتایی (a, b) کدامست؟

$(-۱, ۱)$(۱ $(-۱, ۳)$(۲ $(۲, ۱)$(۳ $(۲, ۳)$(۴

تست ۱۵.۳. اگر دو خط $ax + by = ۸, ۲x - ۳y = b$ نسبت به $y = x$ متقارن باشند، حاصل $a + b$ کدامست؟

± ۳(۱ ± ۲(۲ $۲, -۳$(۳ $-۲, ۳$(۴

تست ۱۶.۳. درتابع با ضابطه‌ی $f(x) = -x + \sqrt{-۲x}$ مقدار $f^{-۱}(۴)$ کدام است؟

-۸(۱ -۵(۲ -۲(۳   ۴)تعریف نشده

تست ۱۷.۳. ضابطه‌ی تابع معکوس تابع $f(x) = ۲ - \sqrt{x - ۱}$ به کدام صورت است؟

۱) $y = -x^{۲} + ۴x - ۵ \ , \ x \geq ۱$

۲) $y = x^{۲} - ۴x + ۵ \ , \ x \geq ۱$

۳) $y = -x^{۲} - ۴x + ۵ \ , \ x \leq ۲$

۴) $y = x^{۲} - ۴x + ۵ \ , \ x \leq ۲$

تست ۱۸.۳. ضابطه‌ی وارون تابع $y=\begin{cases}\sqrt{x} & x\geq ۰\\ -\sqrt{-x} & x<۰\end{cases}$ کدامست؟

۱) $y=x|x|, x\in\mathbb{R}$ ۲) $y=-x^{۲}, x<۰$ ۳) $y=\pm x^{۲}, x\in\mathbb{R}$ ۴) $y=\pm x|x|, x\in\mathbb{R}$

تست ۱۹.۳. ضابطه‌ی وارون تابع $y=\begin{cases}\frac{|x|}{x}\sqrt{|x|} & x\neq ۰\\ ۰ & x=۰\end{cases}$ کدامست؟

۱) $y=x\sqrt{|x|}, x\in\mathbb{R}$ ۲) $y=x\sqrt{|x|}, x\neq ۰$ ۳) $y=x|x|, x\neq ۰$ ۴) $y=x|x|, x\in\mathbb{R}$

تست ۲۰.۳. تابع $f(x)=x^{۲}+۲x+۱$ با دامنه‌ی $(-۱,+\infty)$ مفروض است. نمودارهای $f, f^{-۱}$ در چند نقطه متقاطع هستند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) غیرمتقاطع

تست ۲۱.۳. تابع $f(x)=۲x-|۴-۲x|$ در بازه‌ای وارون‌پذیر است. ضابطه‌ی $f^{-۱}(x)$ در آن بازه کدامست؟

۱) $\frac{۱}{۴}x+۱, x\geq ۴$ ۲) $\frac{۱}{۴}x-۱, x\leq ۴$ ۳) $\frac{۱}{۴}x-۱, x\geq ۴$ ۴) $\frac{۱}{۴}x+۱, x\leq ۴$

تست ۲۲.۳. ضابطه‌ی وارون تابع $f(x)=\frac{x}{۱+|x|}$ کدامست؟

۱) $y=\frac{x}{|x|-۱}, |x|>۱$ ۲) $y=\frac{|x|-۱}{x}; |x|<۱$

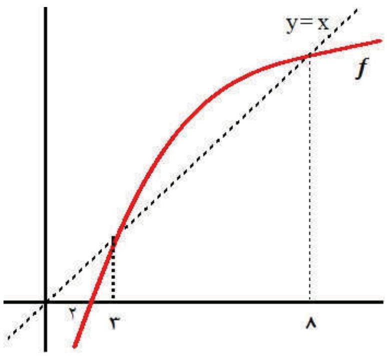
۳) $y=\frac{x}{۱-|x|}, |x|<۱$ ۴) $y=\frac{۱-|x|}{|x|}, |x|>۱$

تست ۲۳.۳. در تابع $x^{۲}\neq ۱$, $f(x)=\frac{|x|}{x}\sqrt{۱-x^{۲}}$ و $f(۰)=۰$ ضابطه‌ی تابع وارون کدام است؟

۱) $f(x)$ ۲) $-f(x)$ ۳) $x.f(x)$ ۴) $-x.f(x)$

تست ۲۴.۳. شکل مقابل نمودار تابع $y=f(x)$ و نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم است. دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $y=\sqrt{x-f^{-۱}(x)}$ کدامست؟

۱) $(۰,۲]$ ۲) $[۲,۳]$ ۳) $[۲,۸]$ ۴) $[۳,۸]$



تست ۲۵.۳. اگر تابع $f(x)=\frac{x}{\sqrt{۱+x^{۲}}}$ باشد، ضابطه‌ی تابع $f^{-۱}(\sin x)$ کدامست؟

۱) $\tan x$ ۲) $\cot x$ ۳) $\frac{|\cos x|}{\sin x}$ ۴) $\frac{\sin x}{|\cos x|}$

۳.۳ اعمال جبری بر توابع

توابع g, f با دامنه‌های D_g, D_f مفروضند. به کمک این دو تابع می‌توان توابع جدیدی ساخت. مثلا تابع $f+g$ تابعی است که هر x را به $f(x)+g(x)$ تصویر می‌کند. البته یک مشکل کوچک هم وجود دارد! ممکن است این x خاص در دامنه یکی از توابع باشد، اما در دامنه دیگری نباشد. به همین دلیل برای انتخاب این x باید شرط کنیم که $x \in D_f \cap D_g$ تا مشکلی پیش نیاید.

$$\boxed{\begin{array}{ll} (f+g)(x)=f(x)+g(x) & x \in D_f \cap D_g \\ (f-g)(x)=f(x)-g(x) & x \in D_f \cap D_g \\ (f\times g)(x)=f(x)\times g(x) & x \in D_f \cap D_g \end{array}}$$

اما در تقسیم دو تابع باید دقت بیشتری کرد. مخرج یک کسر نباید صفر شود. پس داریم:

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)} \qquad x \in (D_f \cap D_g)-\{x \mid g(x) \neq ۰\}}$$

مثال ۱۰.۳. توابع $\begin{cases} f=\{(۱,۲),(۲,۳),(۳,۴),(۴,۵),(۵,۶),(۶,۷),(۷,۸)\} \\ g=\{(۱,۰),(۳,۵),(۴,۴),(۵,۵),(۷,۲),(-۲,۳),(۸,۱)\} \end{cases}$ مفروضند. با محاسبه دامنه‌ی مناسب، توابع $f \pm g, \frac{۳f}{g}, f \times g, f^۲$ را بصورت زوج مرتب نمایش دهید.

اگر ضابطه‌ی توابع را داشته باشیم به شکل معمول آنها را جمع یا تفریق ویا ضرب و تقسیم می‌کنیم و قبل از آن توجه داریم که باید، دامنه مشترک را محاسبه کرده باشیم. همچنین یافتن دامنه تابعی که بصورت مجموع چند تابع است هم از همین نکته پیروی می‌کند. مثلا دامنه تابع $f(x)=\sqrt{۱-x}+\sqrt{x+۱}$ برابر اشتراک دامنه توابع موجود در این جمع هست. یعنی $D_f=(-\infty,۱)\cap(-۱,+\infty)=[-۱,۱]$.

تست ۲۶.۳. اگر $f(x)=x\sqrt{x^۲+۵}$ و $g(x)=|۲x-۱|$ باشد، حاصل $(f\times g)(-۲)$ کدامست؟

۱) ۱۰   ۲) -۱۰ ۳) ۳۰   ۴) -۳۰

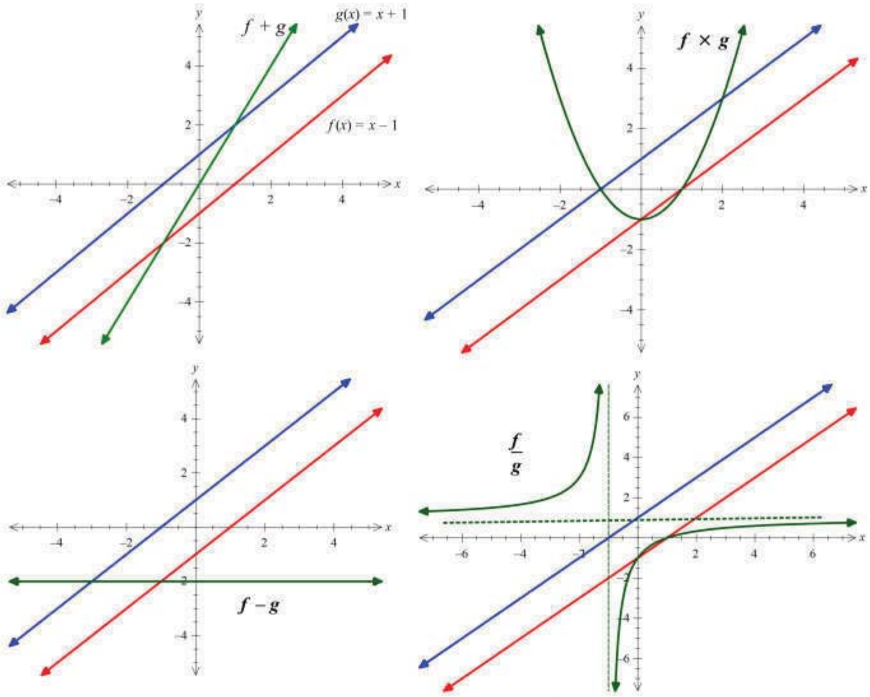
تست ۲۷.۳. اگر $f(x)=\sqrt{x+۱}$ و $g(x)=\frac{x+۱}{x-۲}$ مقدار $(۲f-g)(۳)$ کدامست؟

۱) -۱ ۲) ۰   ۳) ۱   ۴) ۲

تست ۲۸.۳. اگر $f(x)=|۳x-۵|$ و $g(x)=\sqrt{\frac{۱}{۲}x+۲}$ مقدار $(f+g)(\frac{۱}{۲})$ کدامست؟

۱) ۲   ۲) ۳   ۳) ۴   ۴) ۵

در شکل زیر دو تابع $f(x) = x - ۱, g(x) = x + ۱$ در یک دستگاه رسم شده‌اند که بصورت دو خط موازی هستند. در همان دستگاه چهار عمل اصلی روی این توابع انجام شده است و حاصل نشان داده شده است. در واقع این نمودارهای حاصل را می‌توان با یافتن نقاطی روی دو تابع و جمع (تفریق،ضرب یا تقسیم) کردن عرض‌ها، عرض تابع جدید را یافت که البته نیاز به دقت بالا و محاسبات دقیق دارد.



تست ۲۹.۳. اگر $f(x) = \sqrt{۴ - x^۲}, g(x) = \sqrt{۳x - x^۲}$ باشد، دامنه تعریف $\dfrac{f}{g}$ کدامست؟

۱) $(۰, ۳)$ ۲) $(۰, ۲)$ ۳) $(۰, ۲]$ ۴) $[۰, ۲]$

تست ۳۰.۳. اگر $f(x) = x^۲ - ۲x, g(x) = -x^۲ + x + ۲$ باشد، دامنه‌ی تابع $\dfrac{f}{۲f + g}$ برابر کدامست؟

۱) $R - \{۱, ۲\}$ ۲) $R - \{-۱, ۲\}$ ۳) $R - \{۱, -۲\}$ ۴) R

۴.۳ رسم نمودار توابع

در این قسمت می خواهیم ترسیم نمودار توابع به کمک انتقال را بررسی کنیم.به این معنی که با فرض اینکه نمودار $y = f(x)$ در دسترس ما باشد نمودار توابعی چون $f(x \pm a)$ و یا $f(x) \pm a$ و امثالهم را چگونه رسم کنیم. با این نوع ترسیم در سال های اول و دوم کمابیش آشنا هستید. در اینجا فهرستی از انتقال‌ها و انبساط و انقباض‌ها بر تابع را بررسی می کنیم.در موارد زیر همواره فرض بر اینست که $a > ۰$.

۱. برای ترسیم $f(x - a)$ کافیست نمودار f را در جهت مثبت به اندازه‌ی a واحد انتقال دهیم. برای $f(x + a)$ انتقال در جهت منفی به اندازه‌ی a واحد است.

۲. برای ترسیم $f(x)+a$ کافیست نمودار f به اندازه‌ی a واحد در جهت مثبت محور عرض ها به بالا انتقال داده شود. برای $f(x-a)$ جابجایی در جهت منفی محور عرضهاست.

۳. برای رسم نمودار تابع $kf(x)$ که در آن $k\in\mathbb{R}\neq ۰$ عرض نقاط روی نمودار f را در k ضرب می کنیم. توجه داریم که اگر $|k|<۱$ باشد تابع منقبض می‌شود و اگر $|k|>۱$ باشد تابع منبسط می‌شود.(منظور انبساط و انقباض عرض تابع است)

۴. برای رسم نمودار $f(kx)$ ابتدا با توجه به دامنه‌ی تابع f دامنه‌ی تابع $f(kx)$ را بدست اورده و در دامنه جدید نقطه به نقطه نمودار $f(kx)$ را ترسیم می کنیم. توجه داریم‌که در این مورد هم بسته به مقدار $|k|>۱\ ,\ |k|<۱$ انبساط یا انقباض در جهت محور طولها برای تابع رخ می دهد.

۵. برای رسم نمودار $|f(x)|$ کافیست نمودار خود f را رسم کرده و آن قسمت از نمودار را که زیر محور طولهاست را به بالای محور طولها قرینه کنیم.

۶. برای رسم نمودار $f(|x|)$ کافیست ابتدا نمودار f را برای $x>۰$ ترسیم کرده و حاصل را نسبت به محور عرض‌ها قرینه کنیم. این دو قسمت نمودار تابع $f(|x|)$ هستند.

۷. در حالت کلی $|y|=f(x)$ ممکن است معرف تابع نباشد.منتها برای رسم نمودار چنین روابطی ابتدا قدرمطلق را حذف کرده و در دو حالت $y>۰\ ,\ y<۰$ نمودار رابطه را رسم می کنیم.

مثال ۱۱.۳. به کمک نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}$ نمودار توابع زیر را رسم کنید.

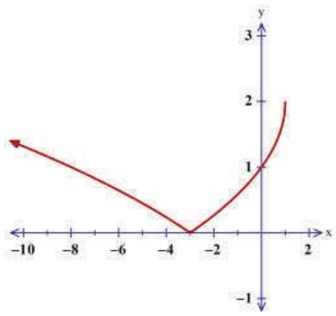
۱)$y=\sqrt{x-۲}$ ۲)$y=\sqrt{x+۳}$ ۳)$y=\sqrt{x}+۴$

۴)$y=۲\sqrt{x}-۳$ ۵)$y=\sqrt{۴x-۴}$ ۶)$y=\sqrt{۱۰-۴x}$

۷)$y=\sqrt{|x|}$ ۸)$y=\sqrt{|x+۱|}$ ۹)$y=|\sqrt{x}-۱|$

تست ۳۱.۳. نمودار شکل مقابل مربوط به کدام تابع است؟

۱)$|۱-\sqrt{x}|$ ۲)$|۲-\sqrt{۱-x}|$ ۳)$|۱-\sqrt{۱-x}|$ ۴)هیچکدام



تمرین: چند تست از کنکور سراسری

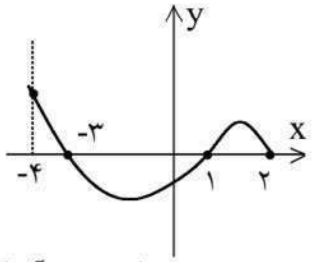
۱- دو تابع f و g بر روی اعداد حقیقی تعریف شده‌اند. در کدام حالت، دو تابع مساوی‌اند؟

۱) $f(x) = ۲\text{Log}x \ , \ g(x) = \text{Log}x^{۲}$ ۲) $f(x) = \frac{\sqrt{x^{۲}}}{|x|} \ , \ g(x) = ۱$

۳) $f(x) = \left(\sqrt{x}\right)^{۲} \ , \ g(x) = x$ ۴) $f(x) = \frac{x}{|x|} \ , \ g(x) = \frac{|x|}{x}$

دبیرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی - ۸۹

۲- شکل روبه‌رو نمودار تابع $y = f(x)$ است. دامنه‌ی تابع $\sqrt{xf(x)}$ ، کدام است؟



۱) $[۰, ۲]$
۲) $[-۳, ۲]$
۳) $[-۴, -۳] \cup [۱, ۲]$
۴) $[-۳, ۰] \cup [۱, ۲]$

دبیرستان - سراسری - ریاضی - ۹۲ (سراسری - آزاد)

۳- اگر $f(x) = \sqrt{x + |x + ۲|}$، دامنه‌ی تابع $f(-x)$ کدام است؟

۱) $x \leqslant -۱$ ۲) $x \geqslant -۱$ ۳) $x \leqslant ۱$ ۴) $x \geqslant ۱$

دبیرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی. - ۹۲

۴- برد تابع با ضابطه‌ی $f(x) = (x + |x|)\sqrt{\frac{۲ - x}{x}}$ ، کدام است؟

۱) $(۰ , ۱]$ ۲) $[۰ , ۲]$ ۳) $[۱ , ۲]$ ۴) $(۱ , ۳)$

دبیرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی - ۹۲

۵- اگر $f(x) = x - [x]$ ، آن‌گاه برد تابع $g(x) = f(۲x - ۳) - ۲f(x)$ کدام است؟

۱) $[-۱ , ۰]$ ۲) $[۰ , ۱]$ ۳) $\{-۱ , ۰\}$ ۴) $\{۰ , ۱\}$

دبیرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی - ۹۲

۶- اگر $f(x) = ۱ - \left(\frac{۱}{۲}\right)^{x}$ باشد، دامنه تابع $y = \sqrt{xf(x)}$ ، کدام بازه است؟

۱) $[-۱ , ۱]$ ۲) $(-\infty , ۰)$ ۳) $(-\infty , +\infty)$ ۴) $(۰ , +\infty)$

دبیرستان - سراسری - ریاضی - ۹۳ (سراسری - آزاد)

۷- دو تابع f و g به صورت مجموعه‌ی زوج‌های مرتب بیان شده‌اند. در حالت کلی کدام رابطه ممکن است تابع نباشد؟

۱) $f \cup g$ ۲) $f \cap g$ ۳) $f - g$ ۴) fog

دبیرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی - ۸۵

۸- رابطه‌ی $\left\{\left(۳,m^{۲}\right) , (۲,۱) , (-۲,m) , (۳,m+۲),(m,۴)\right\}$ به ازای کدام مقدار m، یک تابع است؟

۱) ۲- ۲) ۱- ۳) ۲ ۴) هیچ‌مقدار m

دبیرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی. - ۸۵

۹- دامنه‌ی تابع $f(x) = \sqrt{۱ - \text{Log}(x-۱)}$ به کدام صورت است؟

۱) $(۱ , ۲]$ ۲) $[۲,۱۰]$ ۳) $[۱ , ۱۱)$ ۴) $(۱ , ۱۱]$

دبیرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی. - ۸۶