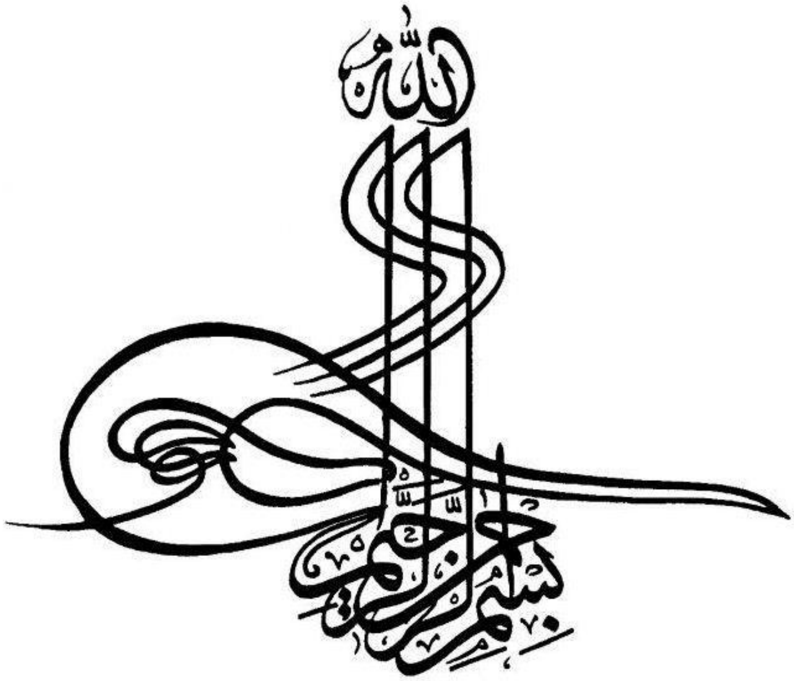


تابع

فصل سوم ریاضی پایه یازدهم تجربی

- طبقه بندی سوالات به صورت موضوعی
- پاسخ کاملا تشریحی
- تمرین هایی برای آمادگی

مؤلف:
حبیب هاشمی

۱۳۹۶

مقدمه

جزوه حاضر که براساس مطالب مبحث « تابع » نگارش شده است، دارای ویژگی های زیر است:

۱- باز کردن مفاهیمی که در کتاب درسی به علت محدودیت حجم، به آن کمتر پرداخته شده است.

۲- مطالب به صورت ساده و روان و به زبان دانش آموز ارائه شده است.

۳- مطالب و نکات، به گونه ایی است که خلأ بین مطالب ارائه شده در کتب درسی و سؤالات مطرح شده در کنکورهای سراسری را پر کند.

۴- در این کتاب با نگاهی عمیق‌تر و جامع‌تر از کتاب درسی، به مطالب پرداخته شده و به همین منظور از مثال‌ها و مسائل حل شده متنوعی بهره گرفته ایم.

۵- ایجاد تعادل نسبی بین مهارت های محاسبات صوری و درک مفهومی.

۶- استفاده از مسائل باز پاسخ.

۷-توجه به دانش قبلی دانش آموزان.

۸- ایجاد اتصال و ارتباط بین جنبه های متفاوت یک مفهوم و نیز بین یک مفهوم و دیگر مفاهیم کتاب.

در پایان امیدواریم که مطالعه ی دقیق این کتاب و بهره گیری از رهنمودهای دبیران فرهیخته و گران قدر بتواند موفقیت تحصیلی شما خوبان را تضمین و تثبیت نماید. ارائه ی نظرات شما دانش پژوهان، دبیران فرهیخته و گران قدر، موجب سپاس و امتنان است.

حبیب هاشمی

درس ۱ بخش ۱ : یاد آوری وآشنایی بیشتر با تابع

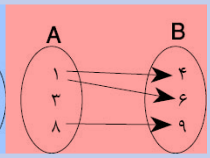
نمایش‌های گوناگون یک تابع

۱) تابع از دید نمودار پیکانی	۲)تابع از نظر زوج مرتب	۳) تابع از دید نمودار مختصاتی	۴) تابع از دید ضابطه:

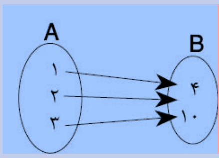
۱) تابع از دید نمودار پیکانی

تشخیص تابع از دید نمودار پیکانی: :

در یک نمودار پیکانی تابع از هر کدام از عضوهای مجموعه اول فقط یک فلش خارج شود (نه یک فلش کمتر و نه یک فلش بیشتر)

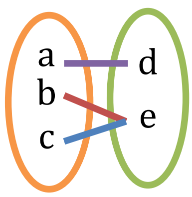


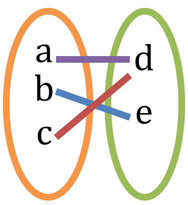
تابع نیست

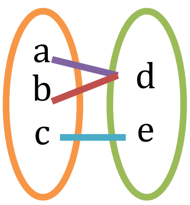


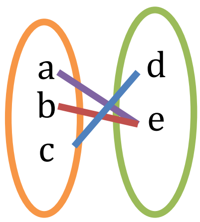
تابع است

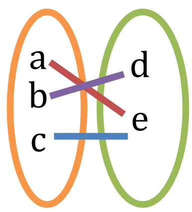
مثال: همهٔ تابع های از مجموعه $A=\{a,b,c\}$ به مجموعه $B=\{d,e\}$ را بنویسید (از نمودار پیکانی کمک بگیرید)

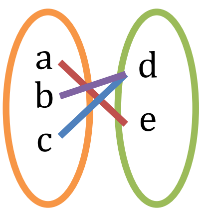


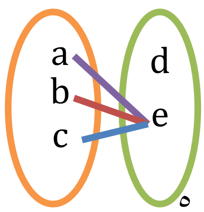


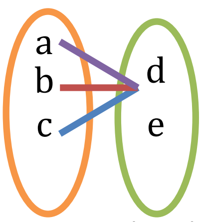












۲)تابع از دید زوج مرتبی

تشخیص تابع از روی زوج مرتب:

یک تابع f از مجموعه A به مجموعه ی B را می توانیم با مجموعه ای از زوج مرتب ها نشان بدهیم که مؤلفه اول هر زوج مرتب عضوی از A و مؤلفه ی دوم هر زوج عضوی از B باشد این زوج مرتب ها باید دو ویژگی داشته باشد

۱) برای هر $x \in A$ زوج مرتبی با مؤلفه اول x در f وجود داشته باشد(یعنی از مجموعه اول حتما فلشی خارج شود)

۲) در f هیچ دو زوج مرتبی متمایزی با مؤلفه اول یکسان وجود نداشته باشد (یعنی از مجموعه اول فقط یک فلش خارج شود)

نکته : اگر زوج مرتب‌های $(x, y).(x, y')$ متعلق به تابع f باشند، داریم:

$(x, y'), (x, y) \in f \Rightarrow y = y'$

تذکر: این بدان معنی است که اگر دو زوج مرتب که دارای مؤلفه‌های اول یکسان باشند باید مؤلفه‌های دوم آن نیز با هم برابر باشند.

مثال: $A = \{۱,۲,۳\}$ و $B = \{۱,۳,۵,۷\}$ آن گاه کدام گزینه تابعی از A به B را نشان نمی دهد؟

۱) $f = \{(۱,۳), (۳,۵), (۲,۷)\}$

۲) $f = \{(۱,۳), (۱,۵), (۳,۱)\}$

۳) $f = \{(۱,۱), (۲,۱), (۳,۱)\}$

۴) $f = \{(۱,۵), (۲,۱), (۳,۷)\}$

جواب: گزینه ۲ چون دو زوج مرتب (۱,۳) ,(۱,۵) دارای مختص اول برابرند اما مختص دوم برابر نیستند.

مثال : اگر $A = \{۷,۸,۹\}$ و $B = \{۱,۳,۵\}$ آن گاه کدامیک از روابط زیر تابعی از A به B را نشان می دهد

$f_۱ = \{(۷,۳), (۸,۵), (۹,۱)\}$

$f_۲ = \{(۷,۵), (۸,۳)\}$

$f_۳ = \{(۷,۳), (۸,۵), (۸,۱)\}$

$f_۴ = \{(۷,۱), (۸,۵), (۹,۴)\}$

۱) $f_۱$

۲) $f_۱ , f_۲$

۳) $f_۱ , f_۲ , f_۳$

۴) $f_۱ , f_۴$

$f_۲$: برای هر $x \in A$ زوج مرتبی با مؤلفه اول x در f وجود داشته باشد(یعنی از مجموعه اول حتما فلشی خارج شود)

چون $۹ \in A$ ولی زوج مرتبی با مؤلفه اول ۹ در f وجود ندارد پس تابع نیست.

$f_۳$:دارای مختص اول برابر هستند پس تابع نیست .

$f_۴$: چون برد آن $\{۱,۵,۴\}$ است در صورتی که باید از $\{۱,۳,۵\}$ تشکیل شده باشد .

مثال : به ازای کدام مقدار m رابطه ی $R = \{(۱,۵), (-۲,۴), (۴,۷), (-۲, m^۲ - ۳m), (m+۵,۹)\}$ تابع است؟

۱) -۴ ۲) -۱ ۳) ۴ ۴) ۱

$$(-۲,۴),(-۲,m^۲-۳m) \Rightarrow m^۲-۳m=۴ \to m^۲-۳m-۴=۰ \to \begin{matrix} m=۴ \\ m=-۱ \end{matrix}$$

$$\text{if } m=۴ \Rightarrow R=\{(۱,۵),(-۲,۴),(۴,۷),(-۲,۴),(۹,۹)\} \to$$
$$\text{if } m=-۱ \Rightarrow R=\left\{(۱,۵),(-۲,۴),\underline{(۴,۷)},(-۲,۴),\underline{(۴,۹)}\right\} \to \times$$

تمرین : رابطه ی $\{(۳,m^۲),(۲,۱),(-۲,m),(۳,m+۲),(m,۴)\}$ به ازای کدام مقدار m یک تابع است؟(سراسری تجربی ۸۵)

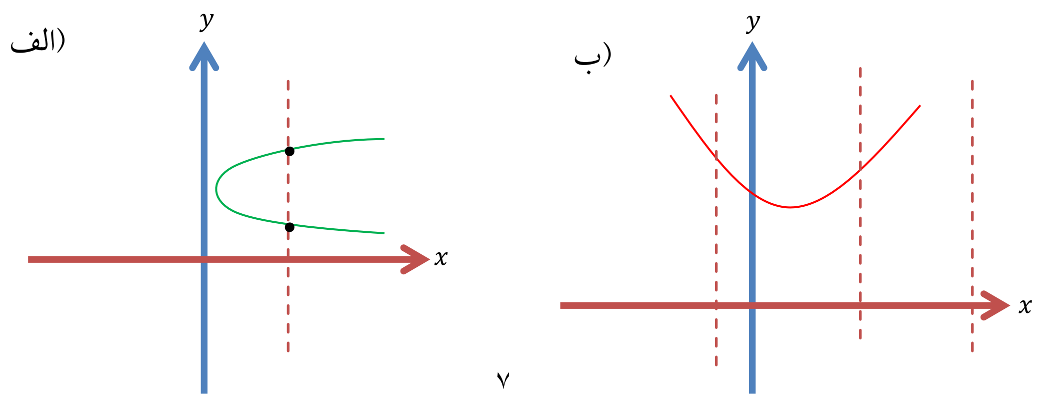
۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) هیچ مقدار m

۳) تابع از دید نمودار مختصاتی

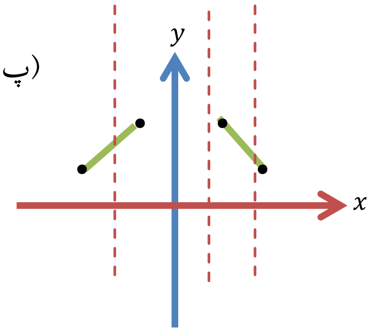
تشخیص تابع از روی نمودار مختصاتی

اگر هر خط قائم رسم کنیم و نمودار را در بیش از یک نقطه قطع کند تابع نیست (یعنی یا باید قطع نکند یا اگر قطع کرد در یک نقطه قطع کند تا تابع شود)

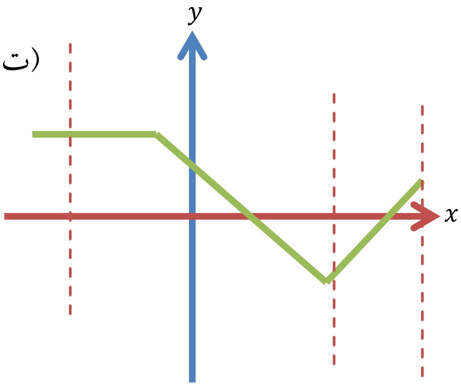
مثال : کدامیک از اشکال زیر یک تابع است؟



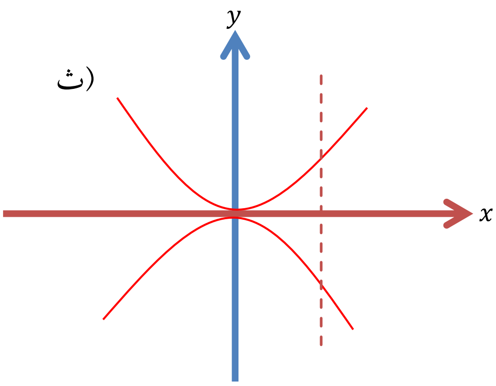
پ)



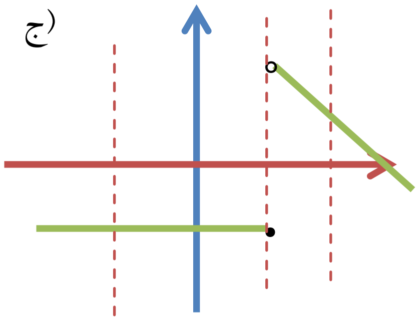
ت)



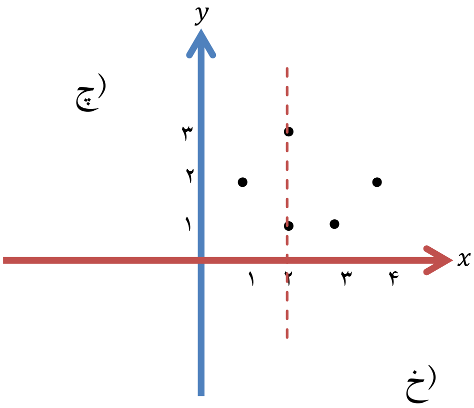
ث)



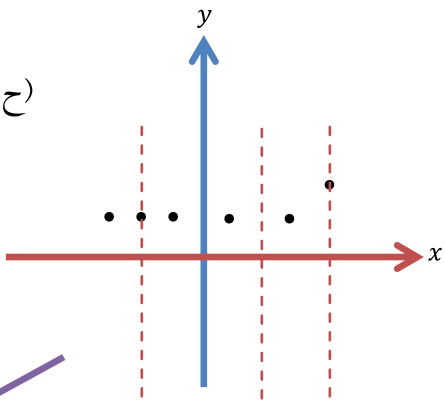
ج)



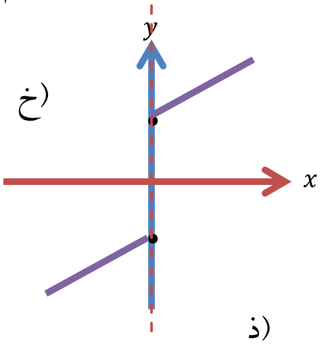
چ)



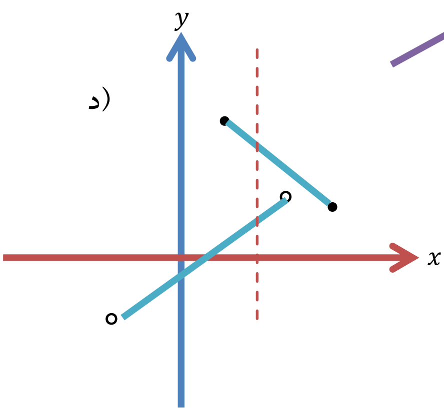
ح)



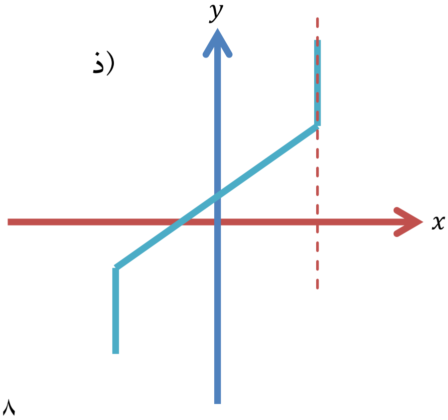
خ)



د)



ذ)



۴)تابع از نظر ضابطه (معادلات و توابع) :

معادلاتی که دارای دو متغیر مانند x و y هستند یک رابطه را نشان می دهند؛ مثلاً معادلهٔ $x + y = ۲$ شامل همه زوج های مرتبی است که مجموع مؤلفه های آنها برابر ۲ است. نمودار این معادله یک خط است . این معادله را به صورت $y = -x + ۲$ یا $f(x) = -x + ۲$ نیز نمایش می دهند. بسیاری از توابع با یک معادله بیان می شوند، اما الزاماً یک معادله با دو متغیر بر حسب x و y یک تابع را مشخص نمی کند.

مثال: الف) در معادله $-x^۲ + y = ۴$ ، y را بر حسب x به دست آورید. آیا y تابعی از x است؟

حل: داریم $y = x^۲ + ۴$. این معادله یک سهمی را مشخص می کند که همان تابع $f(x) = x^۲ + ۴$ است.

ب) آیا در معادله $x - y^۲ = ۴$ ، y تابعی از x است؟

حل: اگر y را بر حسب x به دست آوریم داریم: $y = \pm\sqrt{x - ۴}$ به ازای $x = ۵$ داریم: $y = \pm ۱$. یعنی نقاط $(۵,۱)$ و $(۵,-۱)$ روی نمودار قرار دارند. بنابراین، چون این معادله دارای مولفه های اول یکسان است یک تابع را نمایش نمی دهد.

تشخیص تابع از روی ضابطه:

معمولاً به x می دهیم اگر برای y بیشتر از یک مقدار بدست آمد ضابطه ی داده شده تابع نیست (معمولاً سه عدد ۰,۱,۱− را امتحان می کنیم اگر برای یکی از این سه عدد دو مقدار یا بیشتر برای y بدست آیدتابع نیست.)

تذکر:هرسه عدد ۰,۱,۱− رابه جای x قرار می دهیم بایستی برای y یا جوابی نداشته باشیم یا اگر جواب داشتیم فقط یک جواب باشد دراین صورت تابع است.

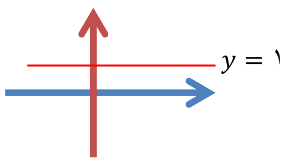
تذکر:اگربرای یکی از این سه عدد دو مقدار یا بیشتر برای y به دست آمد تابع نیست و نیازی به جایگذاری بقیه اعداد نداریم.

مثال: کدامیک از روابط زیر تابع است؟

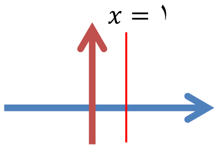
۱) $y^۲ - x^۲ = ۰ \xRightarrow{x=۱} y = \pm ۱ \quad \times$

۲) $y^۳ - x = ۰ \Longrightarrow$ $x = ۱ \longrightarrow y = ۱$ ، $x = -۱ \longrightarrow y = -۱$ ، $x = ۰ \longrightarrow y = ۰$

۳) $y = ۱$



۴) $x = ۱$



۵) $x^۲ + y^۲ = ۰ \Longrightarrow$ $x = ۱ \longrightarrow y =$ جواب ندارد ، $x = -۱ \longrightarrow y =$ جواب ندارد ، $x = ۰ \longrightarrow y = ۰$

۶) $x^۲ + y^۲ = ۱ \xRightarrow{x=۰} y = \pm ۱ \quad \times$

۷) $x^۲ + y^۲ = -۱ \Longrightarrow$ $x = ۱ \longrightarrow y =$ جواب ندارد ، $x = -۱ \longrightarrow y =$ جواب ندارد ، $x = ۰ \longrightarrow y =$ جواب ندارد

(مجموع دو عبارت نامنفی همواره نامنفی است.) رابطه تهی تابع است.

۸) $y^۳ - ۳y^۲ + x = ۰ \xRightarrow{x=۰} y = ۰, \pm ۳ \quad \times$

۹) $xy^۲ - x = ۱ \xRightarrow{x=۱} y = \pm\sqrt{۲} \quad \times$

۱۰) $y^۲ + ۲y = x - ۱ \xRightarrow{x=۱} y = ۰, -۲ \quad \times$

مقدار تابع از روی ضابطه:

مثال : با استفاده از یک تابع خطی و با در دست داشتن طول استخر بازو (از آرنج تا شانه) می توان طول قد یک انسان بزرگ سال را برآورد کرد:

تابع خطی برای مردان $M(x) = ۲/۸۹x + ۷۰ \ / \ ۶۴$

تابع خطی برای زنان $F(x) = ۲/۷۵x + ۷۱/۴۸$

که در آنها x طول استخوان بازو بر حسب سانتی متر است .

الف) اگر طول استخوان بازوی یک مرد ۳۵ سانتی متر باشد، طول قد او چقدر است؟

$$M(۳/۵) = ۲/۸ \times ۳۵ + ۷۰/۶۴ = ۱۷۱ \ / \ ۷۹$$

ب) اگر قد یک مرد ۱۸۵ سانتی متر باشد، طول استخوان بازوی او چقدر است؟

$$۱۸۵ = ۲/۸۹ \times x + ۷۰ \times ۶۴ \qquad , x = \frac{۱۸۵ - ۷۰ \ / \ ۶۴}{۲ \ / \ ۸۹} = \frac{۱۱۴ \ / \ ۳۶}{۲ \ / \ ۸۹} \simeq ۳۹/۵۷ \, cm$$

تست : اگر $f(x) = \sqrt{۲ - x - x^۲}$ مقدار $f\big(f(-۱)\big)$ کدام است؟

۱) تعریف نشده ۲) صفر ۳) یک ۴) $\sqrt{۲}$

$$\begin{cases} f\big(f(-۱)\big) = f\big(\sqrt{۲}\big) = \sqrt{۲ - \sqrt{۲} - (\sqrt{۲})^۲} = \sqrt{۲ - \sqrt{۲} - ۲} = \sqrt{-\sqrt{۲}} \\ f(-۱) = \sqrt{۲ - (-۱) - (-۱)^۲} = \sqrt{۲ + ۱ - ۱} = \sqrt{۲} \end{cases}$$

تست : اگر $f(x) = \sqrt{x + ۲|x|}$ مقدار $f\big(f(-۱۴۴)\big)$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۸۸)

۱) تعریف نشده ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۲

$$\begin{cases} f(f(-۱۴۴)) = f(۱۲) = \sqrt{۱۲ + ۲|۱۲|} = \sqrt{۱۲ + ۲۴} = \sqrt{۳۶} = ۶ \\ f(-۱۴۴) = \sqrt{-۱۴۴ + ۲|-۱۴۴|} = \sqrt{-۱۴۴ + ۲۸۸} = \sqrt{۱۴۴} = ۱۲ \end{cases}$$

مثال : اگر $f(x) = ۳ + \sqrt{۲x}$ آن گاه $f(۸)$ کدام است ؟ (سراسری تجربی ۸۶)

۱) ۵ ۲) ۲ ۳) ۷ ۴) ۸

$$f(۸) = ۳ + \sqrt{۲ \times ۸} = ۳ + \sqrt{۱۶} = ۳ + ۴ = ۷$$

تابع چند ضابطه‌ای:

هرگاه رابطه‌ای با چند ضابطه بیان شد در صورتی آن رابطه تابع است که دارای شرایط زیر باشد:

۱) تک تک آن ضابطه‌ها در دامنه‌ی تعریفشان، تابع باشد.

۲) اشتراک دو به دو ضابطه‌ها تهی باشد.

۳) در صورتی که اشتراک فاصله‌های مطرح شده تهی نباشد (دامنه‌های آن‌ها) به ازای عضوهای آن فاصله مشترک y های تولید شده دو ضابطه با هم برابر باشند.

با بیان ریاضی رابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} f_1(x) & x \in D_1 \\ f_2(x) & x \in D_2 \\ f_3(x) & x \in D_3 \end{cases}$ یک تابع است هرگاه:

۱) $f_1(x)$ و $f_2(x)$ و $f_3(x)$ خود در فاصله‌های D_1, D_2 و D_3 تابع باشند.

۲) $D_1 \cap D_2 = D_2 \cap D_3 = D_1 \cap D_3 = \phi$

۳) اگر $D_1 \cap D_2 = [a, b]$ باشد به ازای هر عضو مانند t از فاصله‌ی $[a, b]$ رابطه‌ی $f_1(t) = f_2(t)$ برقرار باشد.

مثال : اگر $f(x) = \begin{cases} x^۲ - ۱ & x \le ۵ \\ ۲x + a & x \ge ۵ \end{cases}$ یک تابع باشد آن گاه مقدار a کدام است؟

۱) ۱۴ ۲) ۱۵ ۳) ۳۴ ۴) ۴

$$x^۲ - ۱ = ۲x + a \xRightarrow{x=۵} ۵^۲ - ۱ = ۲(۵) + a \Rightarrow a = ۱۴$$

مثال: $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x \le 1 \\ ax + b & 1 \le x \le 2 \\ x^3 & x \ge 2 \end{cases}$ ضابطه‌ی یک تابع باشد مقدار ab کدام است؟

در نقاط $x = 1$ و $x = 2$ تابع دارای دو ضابطه است بنابراین باید مقدار تابع در این نقاط با هر یک از ضابطه‌ها یکسان باشد پس:

$$\begin{matrix} x = 1 \Rightarrow f(x) = (1)^2 - 1 = 0 = a + b \\ x = 2 \Rightarrow f(x) = (2)^3 = A = 2a + b \end{matrix} \Rightarrow a = -8,\ b = -8 \Rightarrow a.b = (8)(-8) = -64$$

مقدار توابع چند ضابطه ای:

مثال : اگر $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{\sqrt{۱-x}} & x<۱\\ ۲x-\frac{۳}{۴} & x\geq ۱\end{cases}$ آن گاه حاصل $f\left(f\left(\frac{۳}{۴}\right)\right)$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۵}{۴}$ ۴) $\frac{۹}{۴}$

$$\begin{cases} f\left(f\left(\frac{۳}{۴}\right)\right)=f\left(\frac{۳}{۲}\right)=۲\left(\frac{۳}{۲}\right)-\frac{۳}{۴}=۳-\frac{۳}{۴}=\frac{۹}{۴}\\ f\left(\frac{۳}{۴}\right)=\frac{\frac{۳}{۴}}{\sqrt{۱-\frac{۳}{۴}}}=\frac{\frac{۳}{۴}}{\sqrt{\frac{۱}{۴}}}=\frac{\frac{۳}{۴}}{\frac{۱}{۲}}=\frac{۶}{۴}=\frac{۳}{۲}\end{cases}$$

تست : در تابع با ضابطه ی $f(x)=\begin{cases}x-\sqrt{x+۴} & x>۳\\ ۲x+۳ & x\leq ۳\end{cases}$ مقدار $f(f(۵))+f(f(۱))$ کدام است؟

(سراسری تجربی ۹۰)

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

$$\begin{cases} f(f(۱))=f(۵)=۵-\sqrt{۵+۴}=۵-۳=۲\\ f(۱)=۲(۱)+۳=۵\end{cases} \qquad \begin{cases} f(f(۵))=f(۲)=۲(۲)+۳=۷\\ f(۵)=۵-\sqrt{۵+۴}=۵-\sqrt{۹}=۵-۳=۲\end{cases}$$

مثال: تابع f در همهٔ شرایط زیر صدق می کند. F را رسم کنید و ضابطهٔ آن را بنویسید.

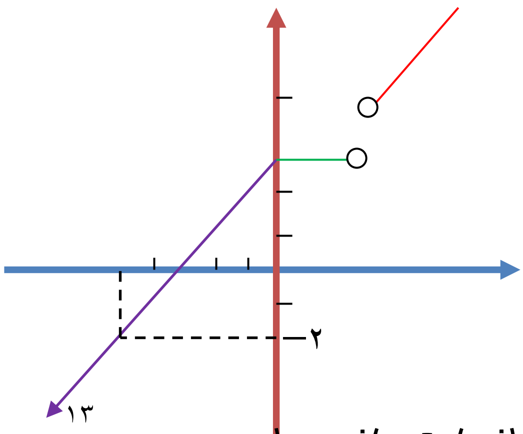
الف) دامنه f مجموعه اعداد حقیقی است و $f(۲)=۳$ و $f(-۵)=-۲$

ب) f در بازه $[۰,۲]$ ثابت است.

پ) تابع f به هر عدد بزرگ تر از ۲ مربع آن را نسبت می دهد.

ت) تابع f برای اعداد منفی، خطی است و نمودار آن محور x ها را در نقطه ای به طول ۳- قطع می کند.

$$f(x)=\begin{cases}x^۲ & x>۲\\ ۳ & ۰\leq x\leq ۲\\ x+۳ & x<۰\end{cases}$$



درس ۱ بخش ۲: انواع توابع

توابع گویا

هر تابع به شکل $f(x)=\frac{p(x)}{Q(x)}$ را یک تابع گویا می نامیم ، که در آن $P(x)$ و $Q(x)$ چند جمله ای هستند و چند جمله ای $Q(x)$ صفر نیست.

توابع زیر همگی گویا هستند:

$$f(x)=\frac{۵}{x+۲}\qquad g(x)=\frac{\frac{۱}{۳}x-۴}{x^{۲}-۷x+۱}\qquad h(x)=\frac{\sqrt{۵}x+۲}{x^{۳}+۱}$$

دامنه ی توابع گویا

دامنه یک تابع گویا مجموعهٔ همهٔ مقادیری است که به ازای آنها، عبارت جبری گویای نمایش دهندهٔ ضابطهٔ تابع، تعریف شده باشد؛ مثلاَ دامنه تابع $f(x)=\frac{۵}{x+۲}$ مجموعهٔ $R-\{-۲\}$ است. دامنه f را با D_f نمایش می دهیم.

قرار داد: اگر ضابطهٔ تابعی داده شده باشد اما دامنهٔ آن صریحاَ گفته نشده باشد، بزرگترین مجموعه ای که آن تابع در آن قابل تعریف است، به عنوان دامنه در نظر گرفته می شود.

برای تعیین دامنه ی توابع گویا باید ریشه های مخرج کسر را بیابیم و آنها را از R حذف کنیم

$$D_f=R-\{\text{ریشه های مخرج}\}$$

مثال: دامنه توابع زیر را به دست آورید.

۱) مثال $f(x)=\dfrac{x-۱}{۲-x} \to ۲-x=۰ \to x=۲ \to D_f=R-\{۲\}$

۲) مثال $f(x)=\dfrac{-۳x}{x^۲+۱} \Rightarrow x^۲+۱=۰ \longrightarrow x^۲=-۱ \longrightarrow$ ریشه ندارد $\Rightarrow D_y=R-\{\ \}=R$

۳) مثال $f(x)=\dfrac{۲x+۳}{x^۲+x-۱۲} \quad (x+۴)(x-۳)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=-۴ \\ x=۳ \end{cases}, D_f=R-\{-۴,۳\}$

۴) مثال $y=\frac{x-۳}{x^۲-۵x+۴} \to x^۲-۵x+۴=۰ \to x=۱,۴ \to D_y=R-\{۱,۴\}$

۵) مثال $y=\frac{x^۲-۱}{x^۳-۴x} \Rightarrow x^۳-۴x=۰ \longrightarrow x(x^۲-۴)=۰ \Rightarrow x=۰,\pm۲ \Rightarrow D_y=R-\{۰,\pm۲\}$

۶) مثال $y=\frac{۴x-۲}{|x|-۳} \Rightarrow |x|-۳=۰ \Rightarrow |x|=۳ \Rightarrow x=\pm۳ \Rightarrow D_y=R-\{\pm۳\}$

۸) مثال $y=\frac{۱}{|x|+۱} \Rightarrow |x|+۱=۰ \Rightarrow |x|=-۱$ جواب ندارد $D_y=R-\{\ \}=R$

مثال: اگر دامنه ی تابع $y=\frac{۴x+۱}{x^۲+(m+۱)x+۱}$ مجموعه اعداد حقیقی باشد حدود مقادیر m کدام است؟

۱) $-۳<m<۱$ ۲) $۱<m<۳$

۳) $-۳<m<-۱$ ۴) $-۳\leq m\leq ۱$

مخرج $\Delta<۰ \Rightarrow (m+۱)^۲-۴(۱)(۱)<۰ \Rightarrow m^۲+۲m+۱-۴<۰ \Rightarrow m^۲+۲m-۳<۰ \Rightarrow$

m	-∞		-۳		۱		+∞
		+	۰	$\underbrace{-}_{\text{جواب}}$	۰	+	

$\Rightarrow -۳<m<۱$

دامنه تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ برابر $R-\{۰\}$ است، اما ممکن است دامنه را به مجموعه های دیگر محدود کنیم .

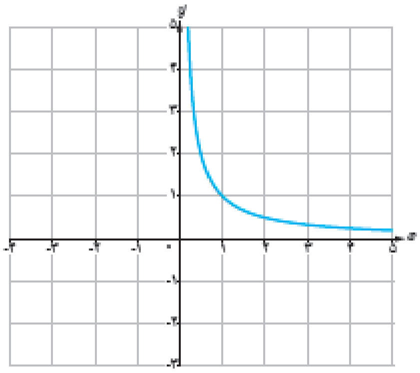
مثال :مشخص کنید که هر نمودار زیر متناظر با کدام تابع است؟

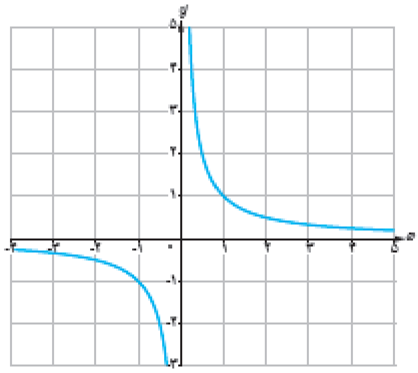
(الف) $\begin{cases} D_f = N \\ f(x) = \frac{۱}{x} \end{cases}$

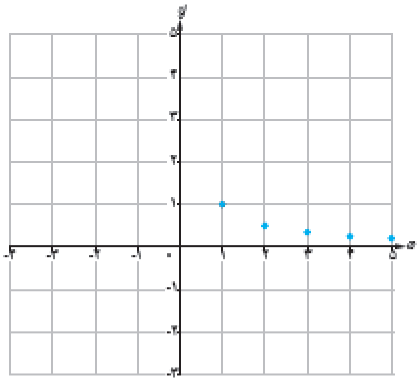
(ب) $\begin{cases} D_g = R^+ \\ g(x) = \frac{۱}{x} \end{cases}$

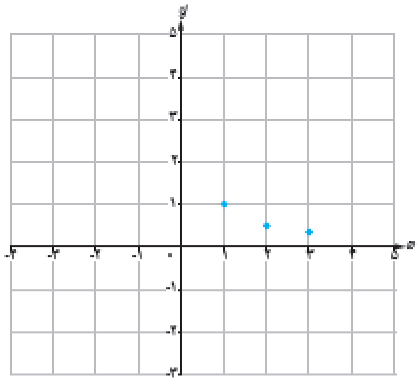
(پ) $\begin{cases} D_h = \{۱,۲,۳\} \\ h(x) = \frac{۱}{x} \end{cases}$

(ت) $\begin{cases} D_t = R - \{۰\} \\ t(x) = \frac{۱}{x} \end{cases}$


ب

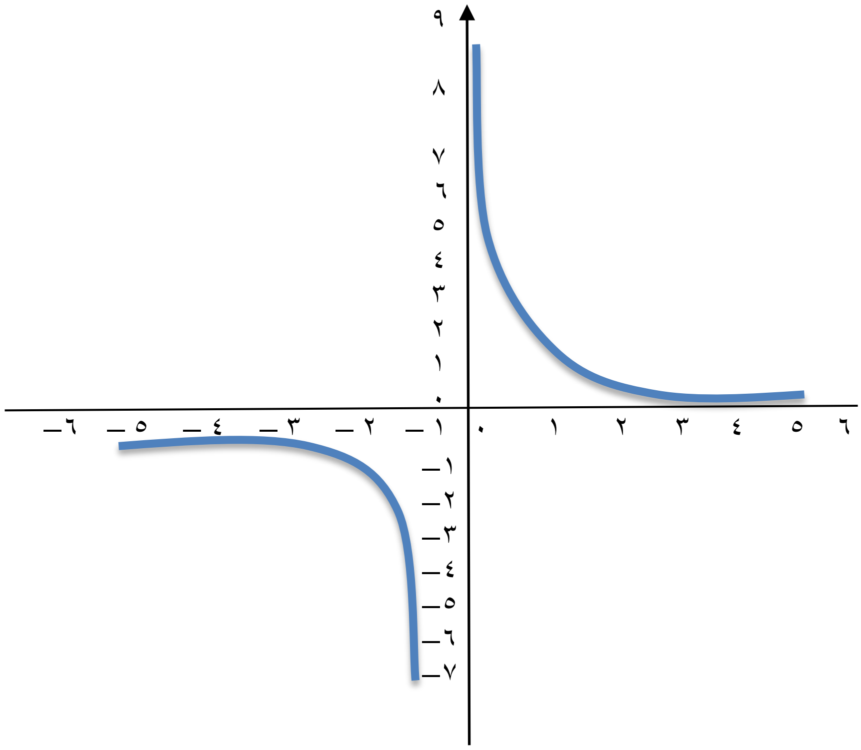

ت


الف


پ

مثال: نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = \frac{۱}{x}$ و دامنهٔ $D_f = [-۵,۵]$ را رسم کنید.

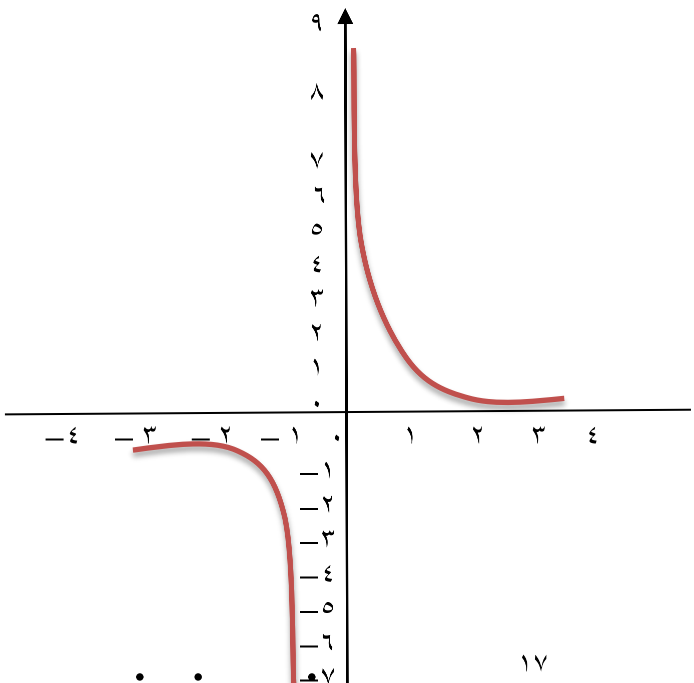
$$f(x) = \frac{۱}{x} \qquad D_f = [-۵,۵]$$



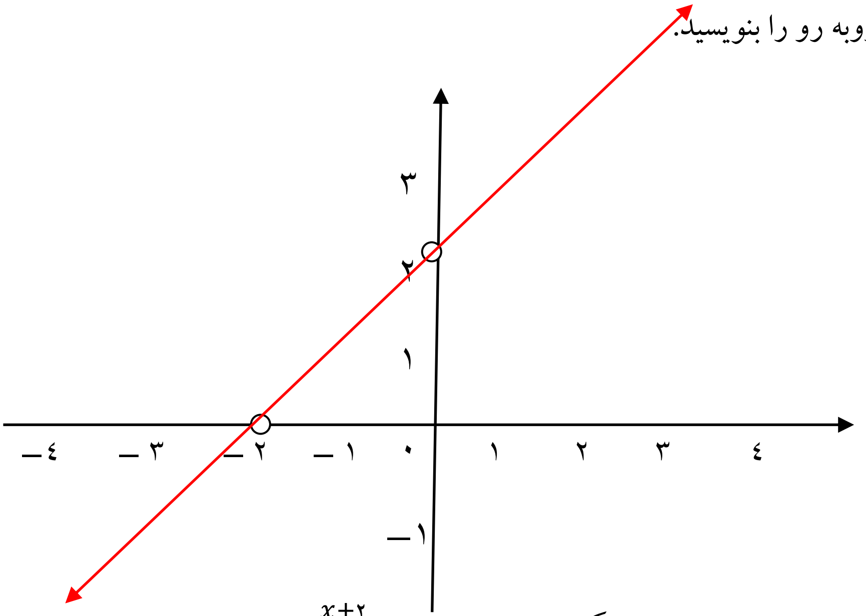
مثال: تابع زیر را رسم کنید.

$$f(x) = \frac{۱}{x} \qquad D_f = [-۳,۳]$$

$$f(x) = \frac{۱}{x} \qquad D_f = [-۳,۳]$$



مثال: ضابطهٔ تابع داده شده در شکل روبه رو را بنویسید.



اگر معادله ی این خط را بدون این که نقاط توخالی را در نظر بگیریم بنویسیم داریم: $y = \frac{x+۲}{۲}$ اما می دانیم که در $x = ۲$ و $x = -۲$ این تابع تعریف نمی شود پس می توانیم صورت و مخرج کسر را در $(x-۲)(x+۲) = (x^۲ - ۴)$ ضرب کنیم . بنابراین داریم:

$$y = \frac{(x+۲)(x^۲-۴)}{۲(x^۲-۴)} = \frac{x^۳ + ۲x^۲ - ۴x - ۸}{۲x^۲ - ۸}$$

مثال: تابعی گویا بنویسید که دامنه اش برابر $R - \{-۱\}$ شود.

$$f(x) = \frac{x+۳}{x+۱}$$

مثال: اگر تعداد افرادی که ، طی یک مدت معین، به وسیله یک نوع ویروس آلوده می شوند با دستور $n(t) = \frac{۹۵۰۰t - ۲۰۰۰}{۴+t}$ به دست آید که در آن $t > ۰$ زمان بر حسب ماه است:

الف) تعداد افرادی که در انتهای ماه پنجم آلوده شده اند چقدر است؟

$$n(۵) = \frac{۹۵۰۰ \times ۵ - ۲۰۰۰}{۴+۵} = \frac{۴۷۵۰۰ - ۲۰۰۰}{۹} = \frac{۴۵۵۰۰}{۹} = ۵۰۵۵$$ نفر

ب) پس از چند ماه تعداد افراد آلوده به ۵۵۰۰ نفر خواهد رسید؟

$$۵۵۰۰ = \frac{۹۵۰۰t - ۲۰۰۰}{۴ + t} \rightarrow ۲۲۰۰۰ + ۵۵۰۰t = ۹۵۰۰t - ۲۰۰۰ \Longrightarrow ۲۰۰۰۰ = ۴۰۰۰t \rightarrow t = ۵$$

مثال: هزینهٔ پاک سازی x درصد از آلودگی های شهری و صنعتی از رودخانه ای، به وسیله تابع $f(x) = \frac{۲۵۵x}{۱۰۰-x}$ محاسبه می شود که در آن x درصد آلودگی و $f(x)$ هزینه پاک سازی بر حسب میلیون تومان است.

الف) هزینه پاک سازی ۵۰٪ از آلودگی این رودخانه چقدر است؟

$$\frac{۲۵۵ \times ۵۰}{۱۰۰ - ۵۰} = ۲۵۵ \text{ میلیون}$$

ب) دامنه این تابع در این حالت (واقعی) را به کمک یک بازه نمایش دهید.

$$۱۰۰ - x > ۰ \quad x < ۱۰۰ \quad (-\infty, ۱۰۰)$$

تساوی دو تابع:

دو تابع f و g را برابر نامیم هرگاه:

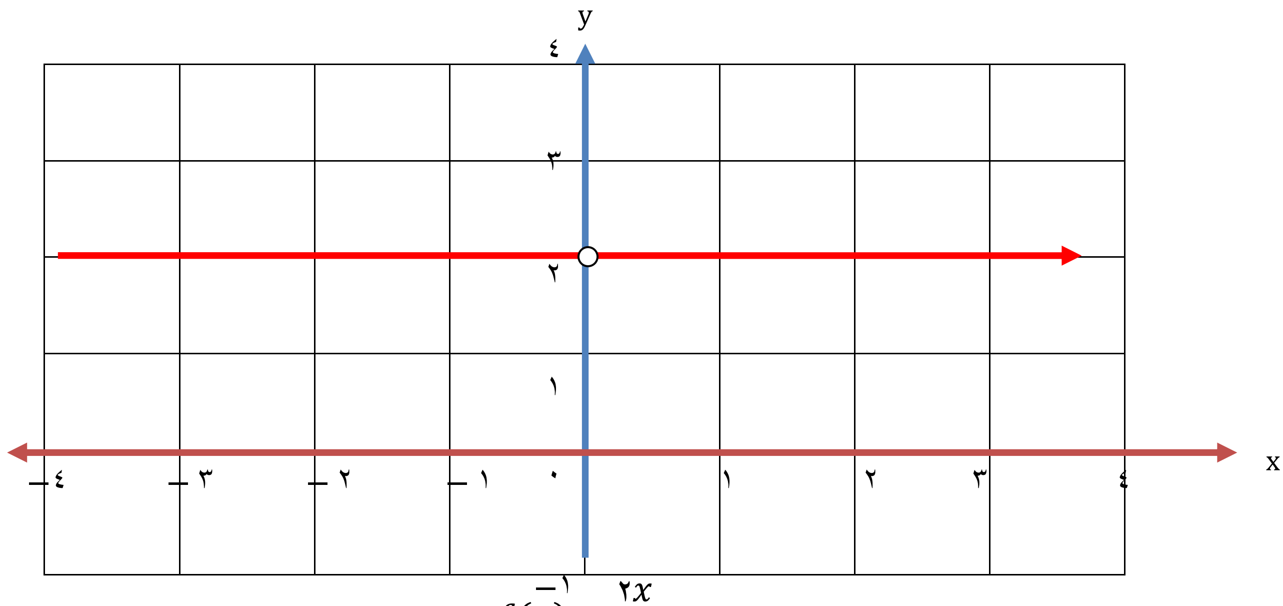
الف) دامنه f و دامنه g با هم برابر باشند.

ب) برای هر x از این دامنهٔ یکسان داشته باشیم: $f(x) = g(x)$

نکته: در صورتی که نمودار دو تابع مساوی را در یک دستگاه مختصات رسم کنیم ، نمودارهای آنها کاملا بر هم منطبق می شود.

به نمودار دو تابع با ضابطهٔ $f(x) = \frac{۲x}{x}$ و $g(x) = ۲$ دقت کنید.

$g(x) = ۲$



$$f(x)=\frac{۲x}{x}$$

می بینیم که نمودارهای این دو تابع کاملاَ روی هم منطبق نیستند. در واقع با اینکه ضابطهٔ دو تابع شبیه هم هستند و داریم:

$$f(x)=\frac{۲x}{x} \qquad g(x)=۲$$

ولی دامنهٔ دو تابع با هم متفاوت اند، زیرا داریم:

$$D_f=R-\{۰\}$$

$$D_g=R$$

بنابراین این دو تابع با هم برابر نیستند.

تذکر: همیشه به یاد داشته باشید که قبل از ساده کردن ضابطهٔ توابع گویا، دامنهٔ تابع را حساب کنید.

مثال: آیا دو تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x}{x^۲}$ و $g(x)=\frac{۱}{x}$ با هم برابر هستند، چرا؟

دامنه ی این دو تابع برابر است:

$D_f = D_g = R - \{۰\}$

همچنین ضابطه ی دو تابع در دامنه ی مشترکشان یکی است.

$$f(x) = \frac{x}{x^۲} = \frac{۱}{x} \quad x \neq ۰ \Rightarrow f(x) = g(x) = \frac{۱}{x}$$

بنابراین این دو تابع با هم برابرند.

مثال : در هر مورد آیا دو تابع داده شده با هم برابر است؟

الف) $f(x) = \begin{cases} -۱ & x < ۰ \\ ۱ & x > ۰ \end{cases} \quad , g(x) = |x|$

این دو تابع با هم برابر نیستند زیرا نه دامنه ی برابر دارند و نه ضابطه ی برابر دارند.

ب) $f(x) = x - ۲ \qquad D_f = R \qquad , g(x) = \frac{x^۲ - ۴}{x + ۲} \qquad D_g = R - \{-۲\}$

می دانیم دامنه ی این دو تابع عبارت است از:

با وجود این که اگر $g(x)$ را ساده کنیم ضابطه ی آن با ضابطه ی $f(x)$ برابر می شود اما چون دامنه ها برابر نیستند نمی توانیم بگوییم که دو تابع برابر هستند.

$$g(x) = \frac{x^۲ - ۴}{x + ۲} = \frac{(x - ۲)(x + ۲)}{(x + ۲)} = x - ۲$$

مثال: تابع های $f(x) = \sqrt{x^۲}$ و $g(x) = |x|$ با هم برابرند ولی تابع های $f(x) = \frac{x}{x}$ و $g(x) = ۱$ برابر نسیتند. چون $D_f \neq D_g$

$D_f = R - \{۰\} \qquad D_g = R$

مثال : کدام یک از توابع داده شدۀ زیر با هم برابرند؟ دلیل بیاورید:

۱) $f = \{(۱,۲), (۵,۷)\}$ $\qquad g = \{(۱,۷), (۵,۲)\}$

$\rightarrow f(۱) \neq g(۱) \leftarrow$ اما $\mathrm{D_f} = \mathrm{D_g}$

۲) $f = \{(a,b), (c,d)\}$ $\qquad g = \{(c,d), (a,b)\} \rightarrow$ f و g برابرند

۳) $f(x) = x|x|$ $\qquad g(x) = x^۲$

$\rightarrow f(-۱) \neq g(-۱) \leftarrow$ اما $D_\mathrm{f} = \mathrm{D_g}$

۴) $f(x) = ۴x$ $\qquad g(x) = \frac{۸x}{۲} \rightarrow$ f و g برابرند

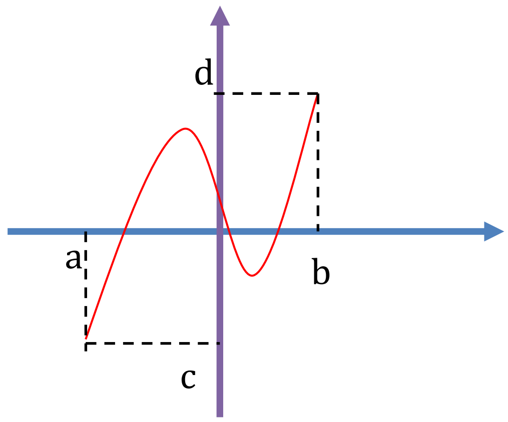
مثال: به ازای کدام مقادیر a دو تابع $g(x) = 1$ و $f(x) = \frac{x^2 + ax + 2}{x^2 + ax + 2}$ مساوی هستند؟

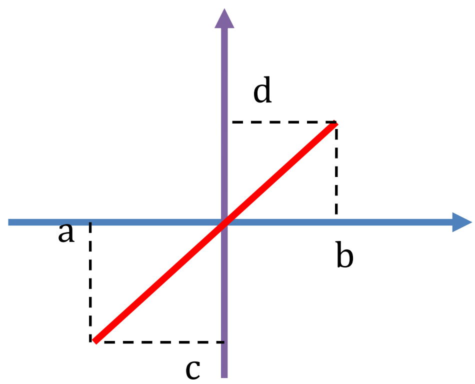
باید در تابع $f(x)$ مخرج فاقد ریشه باشد، یعنی این که:

$\Delta < 0 \Rightarrow \Delta = a^2 - 8 < 0 \Rightarrow -2\sqrt{2} < a < 2\sqrt{2}$

مثال: نشان دهید که در حالت کلی نمی توان گفت :اگر دامنه دو تابع با هم برابر و برد آنها نیز با یکدیگر برابر باشند، دو تابع برابرند.

در دو شکل زیر دامنه دو تابع با هم برابر و برد آنها نیز با یکدیگر برابر باشند، اما با هم برابر نیستند.

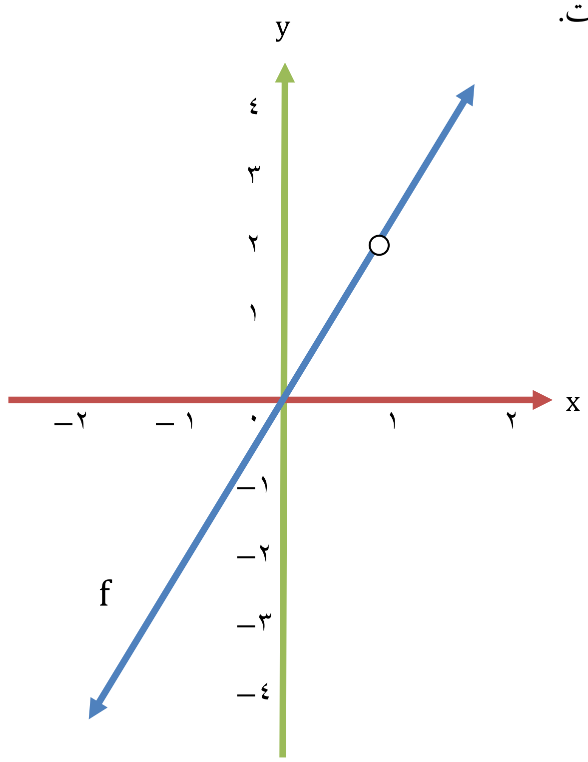




نکته: اگر نمودار های دو تابع در یک دستگاه مختصات داده شده باشند، هنگامی این دو تابع با هم برابرند که نمودار های آنها کاملاَ بر هم منطبق شوند.

مثال: به نمودار تابع f دقت کنید. آیا می توان تابعی مثل g یافت که با f برابر باشد ولی $D_{\mathrm{f}} = \mathrm{R} - \{۲\}$؟

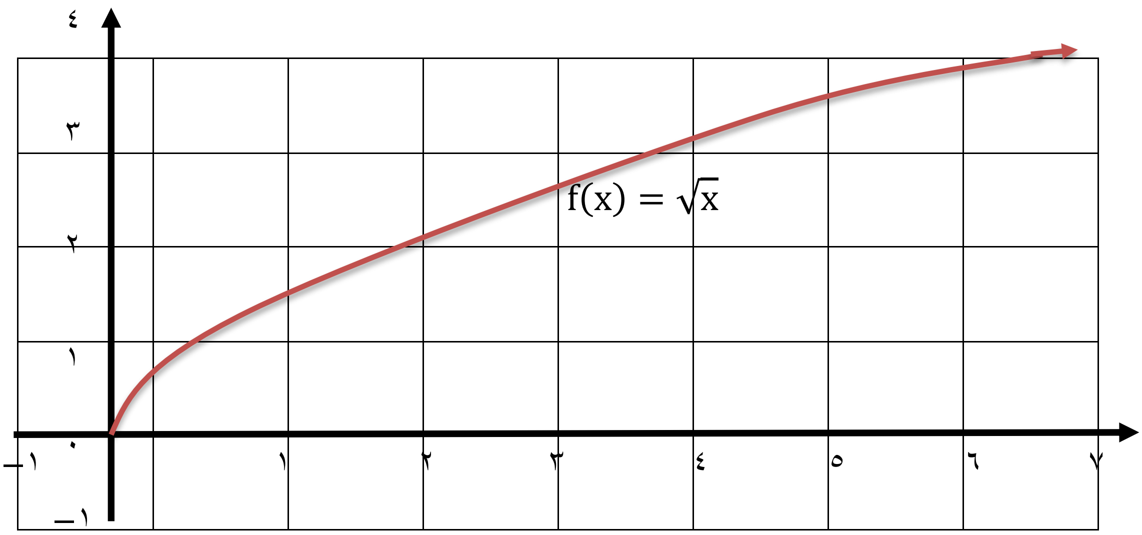
با توجه به شکل دامنه ی تابع f عبارت است از $D_{\mathrm{f}} = \mathrm{R} - \{۱\}$ بنابراین دامنه ی آن با دامنه ی تابع $D_g = \mathrm{R} - \{۲\}$ برابر نیست و بنا به تعریف نمی توان چنین تابعی یافت.



توابع رادیکالی (تابع ریشه دوم)

تابعی را که هر عدد نامنفی را به ریشه دوم نامنفی آن نسبت می دهد تابع ریشه دوم می نامند و به صورت $f(x)=\sqrt{x}$ یا $y=\sqrt{x}$ نمایش می دهند. نمودار تابع در شکل نشان داده شده است. دامنه و برد این تابع، بازهٔ $[۰,+\infty)$ است. تابع $f(x)=\sqrt{x}$ یک تابع رادیکالی است.

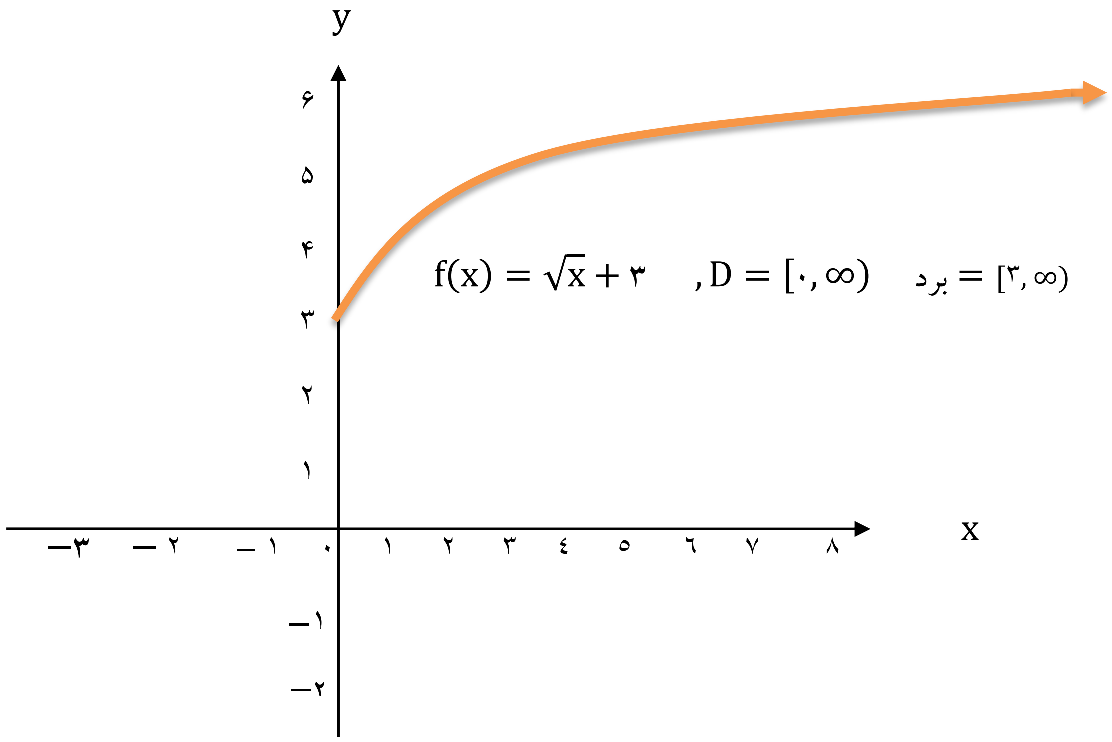
می توان گفت که ساده ترین تابع رادیکالی تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{x}$ است. دامنهٔ این تابع مجموعهٔ همهٔ اعداد نامنفی و نمودار آن به صورت زیر است.

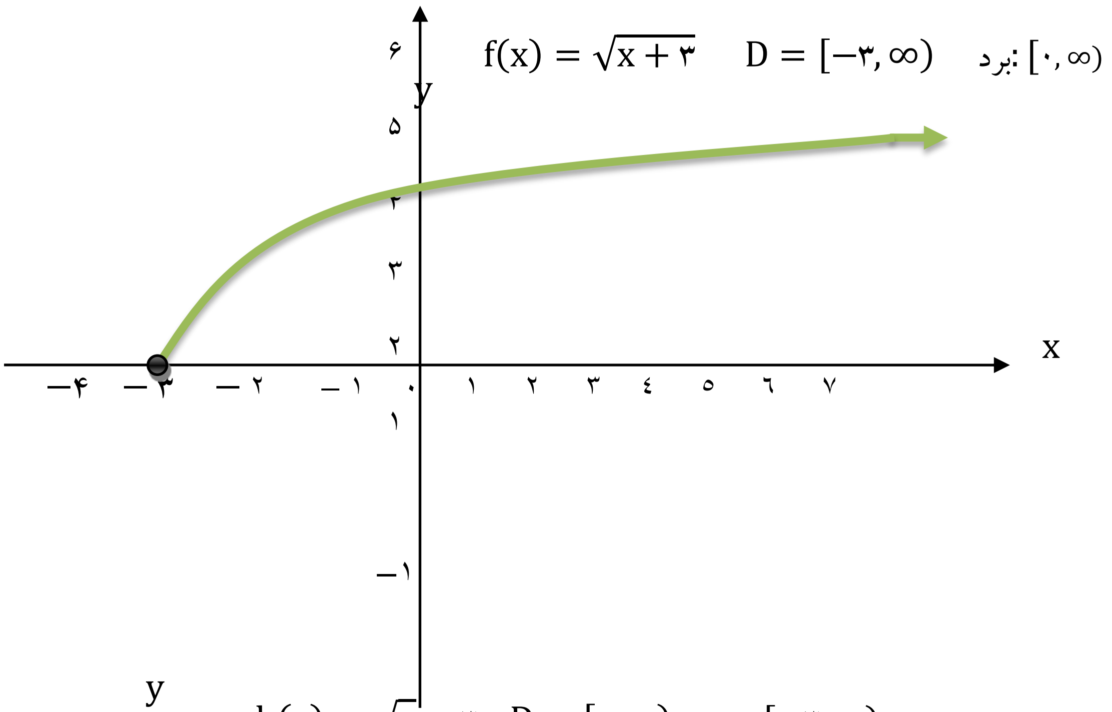


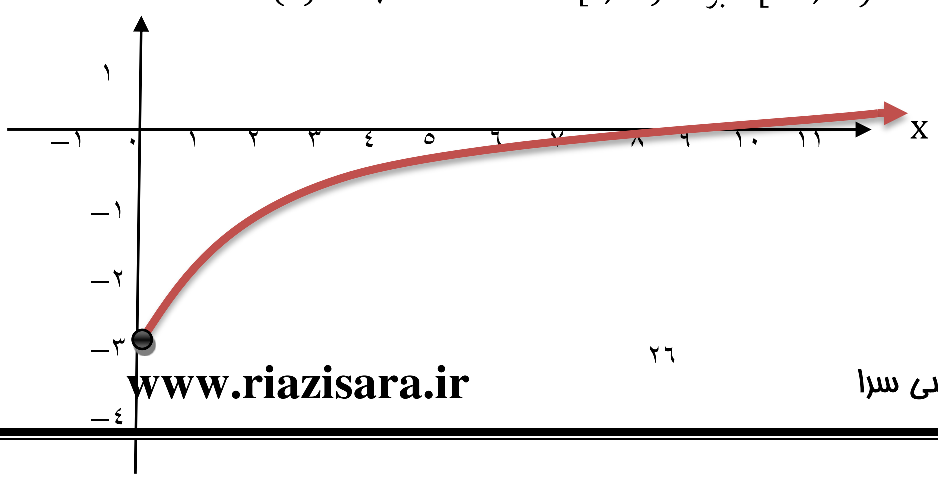
مثال: با کمک انتقال نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{x}$، نمودار مربوط به هر یک از توابع زیر را بیابید؛ و سپس دامنهٔ و برد هر یک را تعیین کنید.

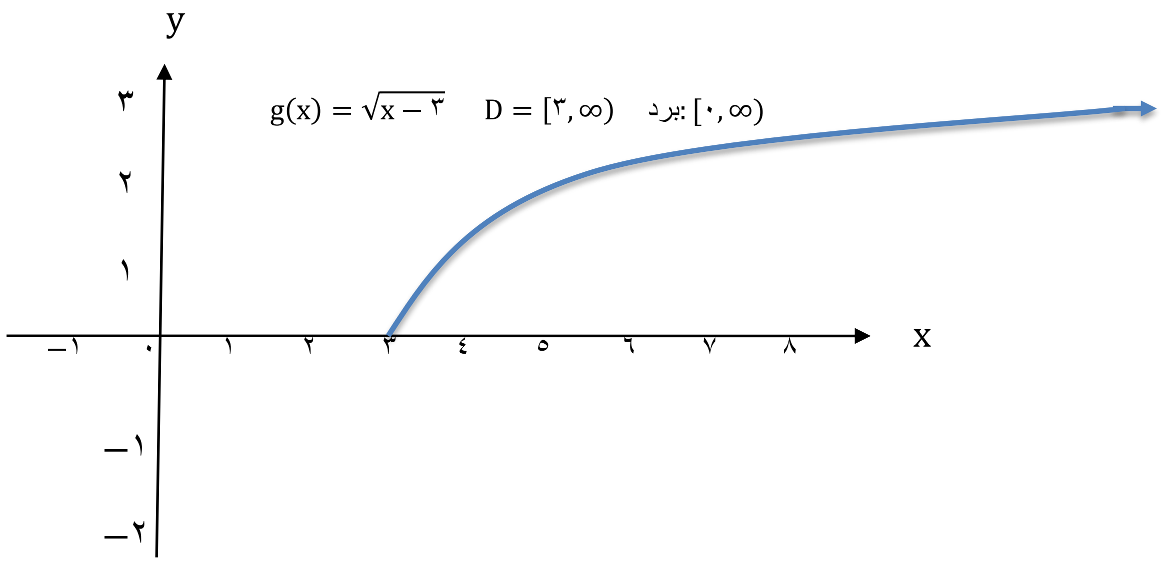
الف) $f(x)=\sqrt{x}+۳$, ب) $h(x)=\sqrt{x}-۳$

پ) $g(x)=\sqrt{x-۳}$, ت) $r(x)=\sqrt{x+۳}$


$f(x) = \sqrt{x} + ۳ \quad , D = [۰, \infty) \quad$ برد $= [۳, \infty)$


$f(x) = \sqrt{x + ۳} \quad D = [-۳, \infty) \quad$ برد: $[۰, \infty)$

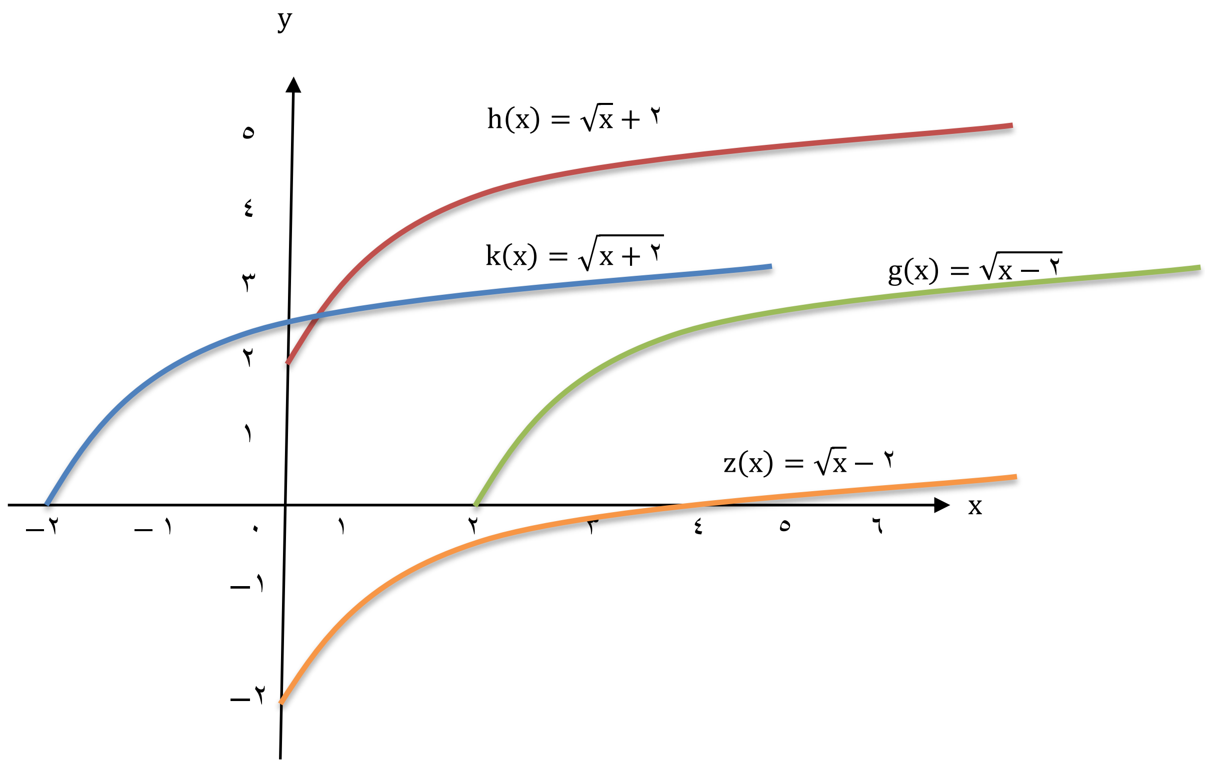

$h(x) = \sqrt{x} - ۳ \quad D = [۰, \infty) \quad$ برد : $[-۳, \infty)$



مثال: با کمک انتقال نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = \sqrt{x}$، نمودار مربوط به هر یک از توابع زیر را بیابید؛ و سپس دامنهٔ هر یک را تعیین کنید.

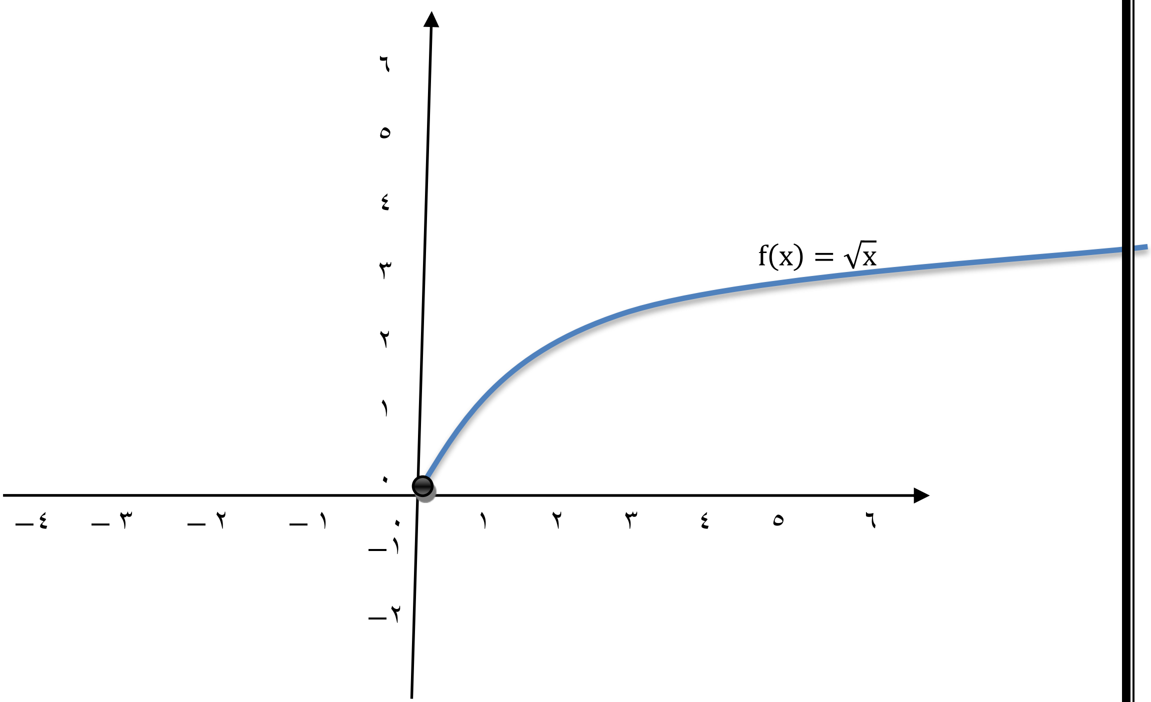
الف) $g(x) = \sqrt{x - ۲}$ ب) $h(x) = \sqrt{x} + ۲$

پ) $k(x) = \sqrt{x + ۲}$ ت) $z(x) = \sqrt{x} - ۲$

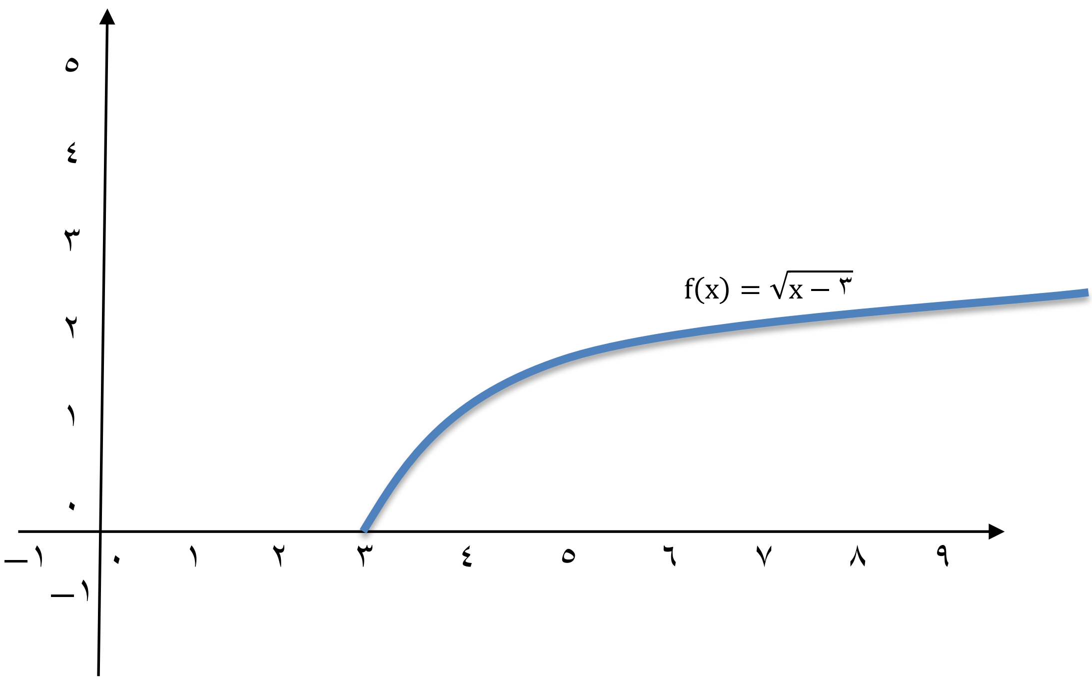


مثال: می خواهیم نمودار تابع با ضابطهٔ $y = ۱ + \sqrt{x - ۳}$ را رسم کنیم و سپس دامنهٔ آن را به دست آوریم.

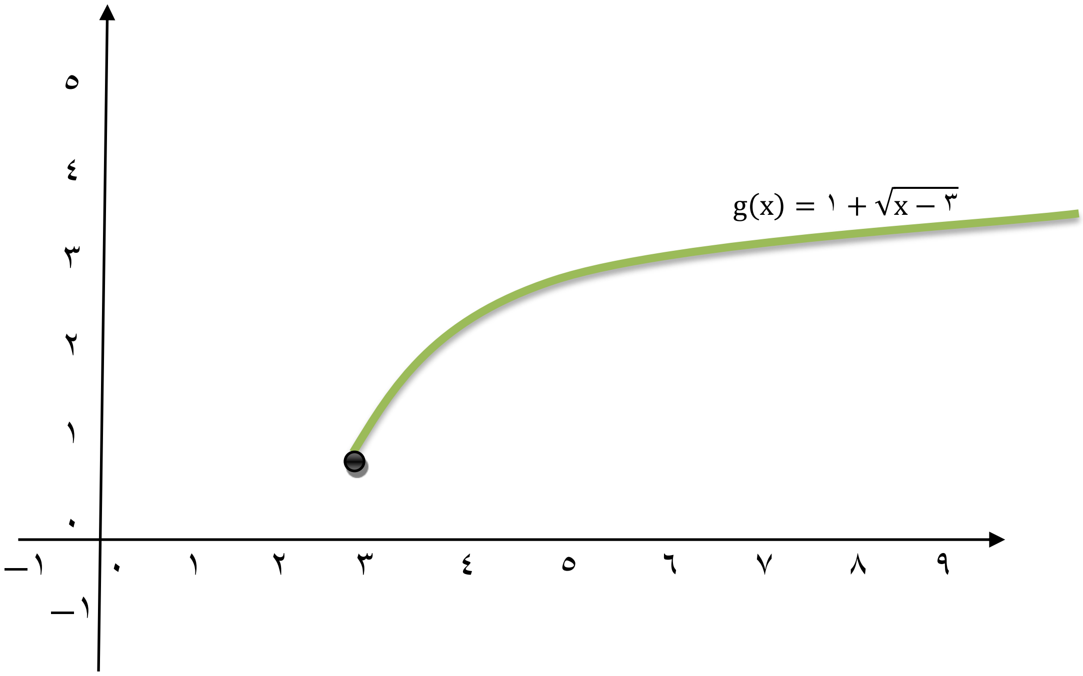
الف) (مرحلهٔ اول) نمودار تابع با ضابطهٔ $y = \sqrt{x}$ را رسم کنید.



ب) (مرحلهٔ دوم) با کمک نمودار مرحلهٔ اول، نمودار تابع با ضابطهٔ $y = \sqrt{x - ۳}$ را رسم می کنیم.



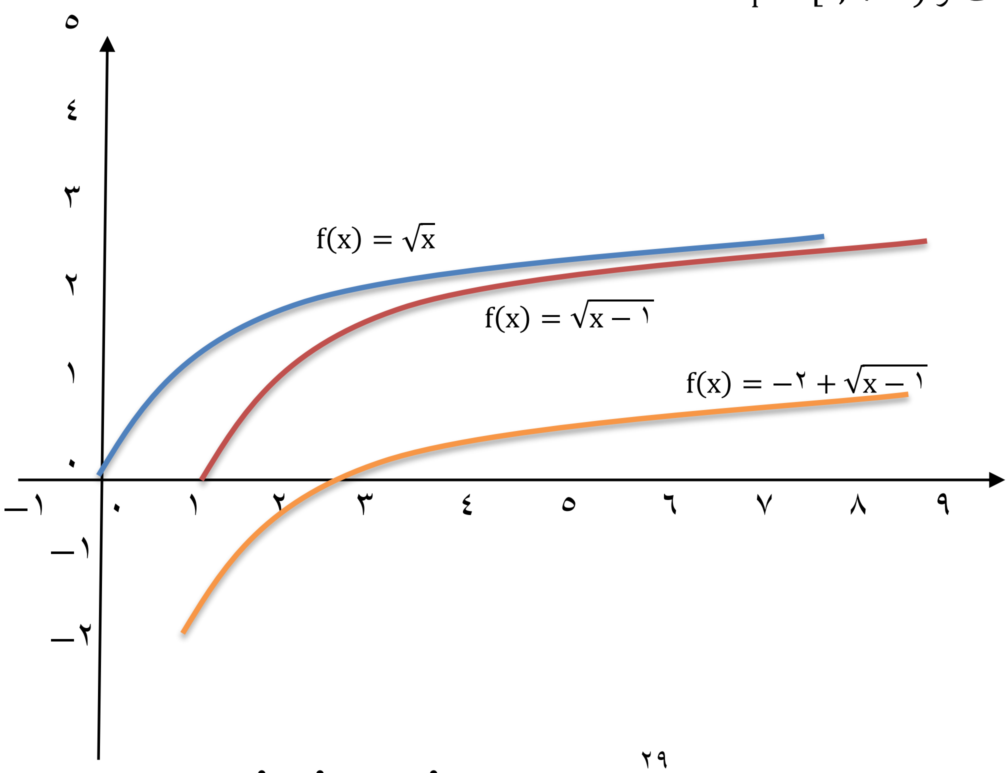
پ) (مرحلهٔ سوم) با کمک نمودار مرحلهٔ دوم، نمودار تابع با ضابطهٔ $y = ۱ + \sqrt{x - ۳}$ را رسم کنید.



ت) (مرحلهٔ چهارم) با توجه به شکل می بینم که دامنهٔ این تابع $[۳, +\infty)$ است.

۳ نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = -۲ + \sqrt{x - ۱}$ را رسم کنید، و سپس دامنهٔ آن را بیابید.

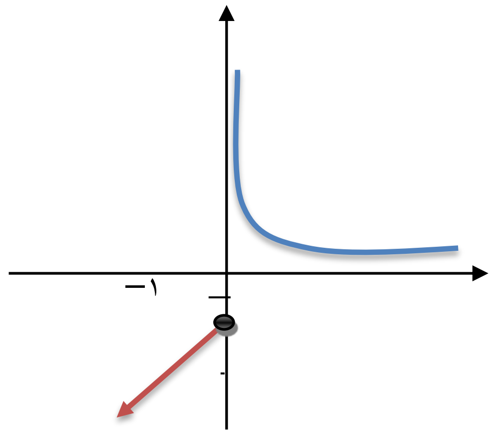
دامنه ی این تابع عبارت است از $D_f = [۱, +\infty)$



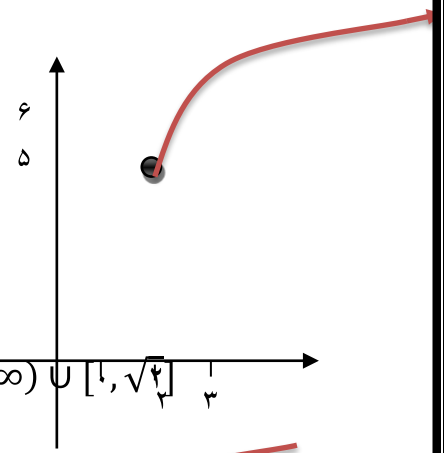
تمرین : نمودار تابع با ضابطهٔ $g(x) = -۳ + \sqrt{x - ۴}$ را رسم کنید.

مثال: نمودار توابع زیر را رسم نموده و دامنه و برد هر یک را معلوم کنید.

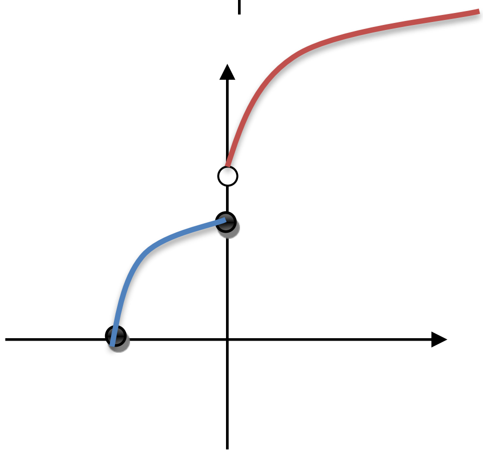
الف) $f(x) = \begin{cases} \frac{۱}{x} & x > ۰ \\ x - ۲ & x \leq ۰ \end{cases}$ $\quad D = R$ برد: $(-\infty, -۲] \cup (۰, \infty)$



ب) $f(x) = \sqrt{x - ۲} + ۵$ $\quad D = [۲, \infty)$ برد : $[۵, \infty)$



پ) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} + ۲ & x > ۰ \\ \sqrt{x + ۲} & -۲ \leq x \leq ۰ \end{cases}$ $\quad D = [-۲, \infty)$ برد: $[۲, \infty) \cup [۰, \sqrt{۲}]$



مثال: دامنه تابع $f(x) = \sqrt{۳x - ۵}$ برابر مجموعهٔ همه اعدادی است که برای آنها $۳x - ۵ \geq ۰$ و یا $x \geq \frac{۵}{۳}$

پس: $D_f = [\frac{۵}{۳}, +\infty)$

برد این تابع نیز مجموعه اعداد نامنفی است.

یعنی: $R_f = [۰, +\infty)$

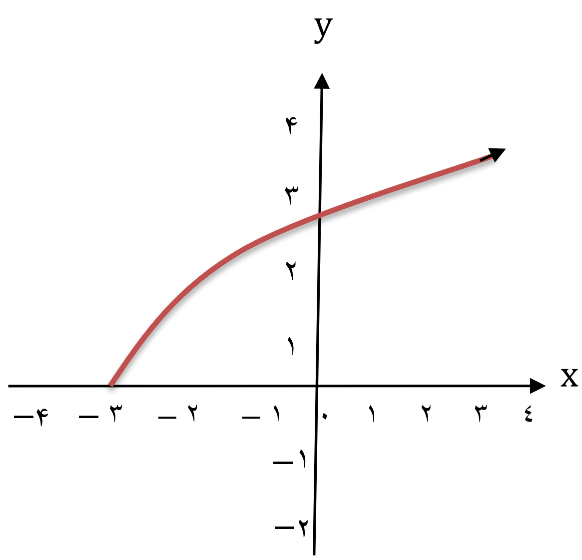
در جدول، مقادیر تابع f به ازای چند عدد در دامنه آن مشخص و نمودار تابع نیز در زیر جدول رسم شده است.

x	$\frac{۵}{۳}$	۲	۳	۴	$\frac{۱۴}{۳}$
$f(x)$	۰	۱	۲	$\sqrt{۷}$	۳

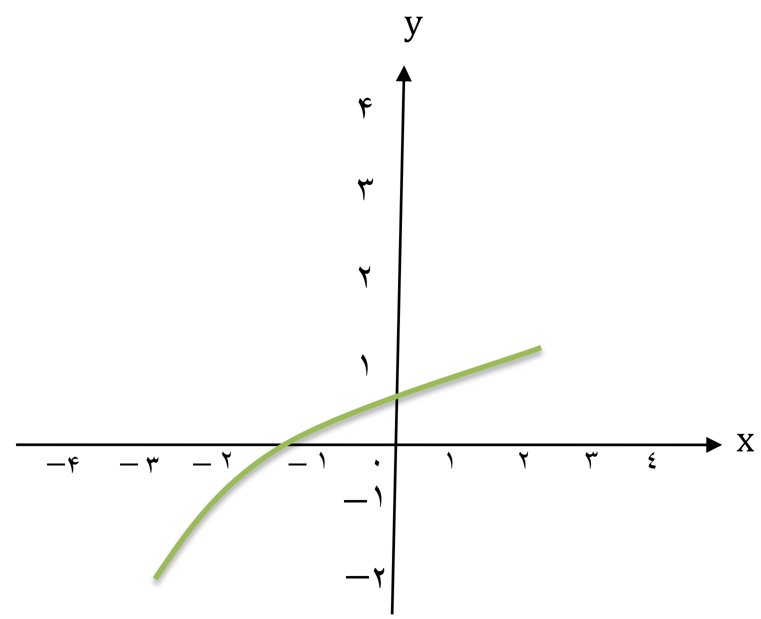
مثال: الف) دامنهٔ تابع $f(x) = \sqrt{۲x + ۶}$ را به دست آورید. سپس به کمک نقطه یابی نمودار آن را رسم کرده و برد تابع را نیز معلوم کنید.

$$۲x + ۶ \geq ۰ \quad ۲x \geq -۶ \quad x \geq -۳ \quad D_f = [-۳, \infty)$$

ب) نمودار تابع $g(x) = \sqrt{۲x + ۶} - ۲$ را به کمک انتقال رسم کنید.



الف برد $[۰, \infty)$ $D: [-۳, \infty)$



ب برد $[-۲, \infty)$ $D: [-۳, \infty)$

مثال: تابع $f(x) = ۷\sqrt{x} + ۵۰$ قد متوسط کودکان را ، به تقریب و بر حسب سانتی متر تا حدود ۶۰ ماهگی نشان می دهد. X نشان دهنده ماه های پس از تولد است. در حالت کلی دامنه این تابع رادیکالی بازهٔ $[۰,\infty)$ است ولی در این مثال که واقعی است دامنهٔ آن بازهٔ $[۰,۶۰]$ می باشد.

الف) جدول زیر را کامل کنید. در همین صفحه با استفاده از این جدول نمودار تقریبی f را رسم کرده ایم.

x	۰	۱	۴	۱۰	۱۶	۲۵	۳۰	۳۶	۴۹	۶۰
$f(x)$	۵۰	۵۷	۶۴	۷۲ / ۱	۷۸	۸۵	۸۸ / ۳	۹۲	۹۹	۱۰۴/۲

ب) برد این تابع چیست؟ $[۵۰,\infty)$

پ) قد یک کودک چهار ساله تقریباً چقدر است؟ $۷\sqrt{۴۸} + ۵۰ = ۷(۶/۹۲) + ۵۰cm = ۹۸ / ۴۴$

ت) با استفاده از ضابطه تابع یا نمودار آن مشخص کنید که کودکی با قد ۷۵ سانتی متر حدوداً چند ماهه است.

$$۷۵ = ۷\sqrt{x} + ۵۰ \quad ,۲۵ = ۷\sqrt{x} \quad ,\frac{۲۵}{۷} = \sqrt{x} \quad ,۳/۷۵ = \sqrt{x} \quad ,x = ۱۲ / ۷۴$$

دامنه تابع f با ضابطه ی $f(x) = \sqrt[n]{p(x)}$

الف) اگر n عددی فرد باشد دامنه ی تابع $f(x)$ همان دامنه $p(x)$ است به عبارت دیگر وقتی فرجه رادیکال فرد باشد رادیکال را پاک می کنیم سپس دامنه را بدست می آوریم.

مثال) $y = \sqrt[۳]{\frac{۱}{x}} \Rightarrow y = \frac{۱}{x} \Rightarrow x = ۰ \rightarrow D_y = R - \{۰\}$

ب) اگر n عددزوج باشد $p(x) \geq ۰$ سپس با تعیین علامت محدوده ی مورد نظر را مشخص می کنیم

مثال: دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $f(x) = ۳ + \sqrt{۱۳ - x}$ را تعیین کنید.

یک عبارت زیر رادیکال باید نامنفی باشد تا این عبارت با معنی باشد پس:

$$۱۳ - x \geq ۰ \Rightarrow x \leq ۱۳ \Rightarrow D_f = (-\infty, ۱۳]$$

مثال: دامنهٔ توابع زیر را بیابید.

ت) $f(x) = \sqrt{۳x + ۱} \quad ۳x + ۱ \geq ۰ \quad x \geq -\frac{۱}{۳} \quad D_f = \left[-\frac{۱}{۳}, \infty\right]$

ث) $f(x) = ۲\sqrt{x} - ۳ \quad D_f = [۰, \infty)$

ج) $f(x) = \sqrt{۸ - x} \quad D_f = (-\infty, ۸]$

مثال: دامنهٔ توابع زیر را بیابید.

۱) مثال $y = \sqrt{\frac{۲x-۶}{x+۱}} \Rightarrow \frac{۲x-۶}{x+۱} \geq ۰ \Rightarrow\Rightarrow D_y = (-\infty, -۱) \cup [۳, +\infty)$ تعیین علامت

x	-∞ -۱	۳	+∞
$۲x - ۶$	-	-	+
$x + ۱$	-	+	+
	$\underbrace{+}_{\text{جواب}}$	-	$\underbrace{+}_{\text{جواب}}$

۲) $y = \sqrt{۲ - x} \Rightarrow ۲ - x \geq ۰ \Rightarrow ۲ \geq x \longrightarrow D_y: R - (-\infty, ۲]$

۳) $y = \sqrt{x^۲ - x} \Rightarrow x^۲ - x \geq ۰ \Rightarrow D_y = (-\infty, ۰] \cup [۱, +\infty)$

x	-∞ ۰	۱	+∞
p	$\underbrace{+}_{\text{جواب}}$ ۰	- ۰	$\underbrace{+}_{\text{جواب}}$

$$۴)\ y=\sqrt{۲x^۲+x+۳}\Longrightarrow ۲x^۲+x+۳\geq ۰ \xrightarrow{\Delta<۰\ \text{ریشه ندارد}} D=(-\infty,+\infty)=R$$

x	$-\infty$					$+\infty$
p	+	+	+	+	+	+

جواب

$$۵)\ y=\sqrt{-x^۲-۱}\Longrightarrow -x^۲-۱\geq ۰ \xrightarrow{\Delta<۰\ \text{ریشه ندارد}} D_y=\emptyset$$

x	$-\infty$				$+\infty$
p	-	-	-	-	-

$$۶)\ y=\sqrt{۵x-x^۲}\Longrightarrow ۵x-x^۲\geq ۰$$

x	$-\infty$		۰		۵		$+\infty$
p		-	۰	$\underbrace{+}_{\text{جواب}}$	۰	-	

$$\Longrightarrow D_y=[۰,۵]$$

مثال: اگر $f(x)=\sqrt{۲x-x^۲}$ دامنه ی تابع $f(۳-x)$، کدام است؟(سراسری تجربی ۹۲)

۱) $[۰,۲]$ ۲) $[۰,۳]$ ۳) $[۱,۲]$ ۴) $[۱,۳]$

روش اول:

$$f(۳-x)=\sqrt{۲(۳-x)-(۳-x)^۲}=\sqrt{۶-۲x-(۹-۶x+x^۲)}=$$

$$\sqrt{۶-۲x-۹+۶x-x^۲}=\sqrt{-x^۲+۴x-۳}=-x^۲+۴x-۳\geq ۰\xrightarrow{x-۱}x^۲-۴x+۳\leq ۰$$

	$-\infty$		۱		۳		$+\infty$
		+	۰	-	۰	+	

روش دوم:

$$f(x)=\sqrt{۲x-x^۲}\Longrightarrow D_f: ۲x-x^۲\geq ۰\Longrightarrow$$

	$-\infty$		۰		۲		$+\infty$
		-	۰	+	۰	-	

$$۰\leq x\leq ۲$$

یعنی اگر x بخواهد ورودی تابع f باشد باید $۰\leq x\leq ۲$ حال اگر $(۳-x)$ بخواهد ورودی f باشد باید

$$۰\leq ۳-x\leq ۲\Longrightarrow -۲\leq x-۳\leq ۰\rightarrow ۱\leq x\leq ۳$$

> نکته: اگر رادیکال با فرجه زوج در مخرج کسر باشد عبارت زیر رادیکال رافقط بزرگتر از صفر قرار داده و با استفاده از تعیین علامت نامعادله را حل می کنیم

مثال ۱) $f(x)=\frac{۱}{\sqrt{۱-x^{۲}}} \Rightarrow ۱-x^{۲}>۰$

	-∞		-۱		۱		+∞
		+	۰	-	۰	+	

$\Rightarrow D_f=(-۱,۱)$

مثال ۲) $y=\frac{۱}{\sqrt{x^{۲}-x+۱}} \Rightarrow x^{۲}-x+۱>۰ \Rightarrow \Delta<۰$ ریشه ندارد $D_y=(-\infty,+\infty)=R$

x	-∞						+∞
p	+	+	+	+	+	+	
	جواب						

مثال ۳) $y=\frac{۱}{\sqrt[۴]{۶x^{۲}-۱۳x+۷}} \Rightarrow ۶x^{۲}-۱۳x+۷>۰ \Rightarrow ۶x^{۲}-۱۳x+۷>۰ \Rightarrow (۶x-۶)(۶x-۷)$

x	-∞		-۲		۰		+∞
$۷-x$		-	۰	+		+	
$x+۳$		-		-	۰	+	
		+	۰	-	۰	+	

$D_y=(-\infty,۱)\cup\left(\frac{۷}{۶},+\infty\right)$

تابع پله ای – تابع جزء صحیح

هزینهٔ ارسال بسته های پستی به طور معمول تابعی از وزن آنهاست . هزینهٔ توقف خودرو در یک پارکینگ نیز تابعی از زمان توقف است. در فعالیت زیر با نمونه ای از این توابع آشنا می شویم.

فعالیت: هزینه ارسال یک بستهٔ پستی به مقصدی معین در جدول زیر داده شده است.

$۱۰ < x \le ۱۲$	$۵ < x \le ۱۰$	$۲ < x \le ۵$	$۰ < x \le ۲$	x (وزن بسته) کیلوگرم
۲۰	۱۷	۱۰	۵	$f(x)$(هزینه ارسال) بر حسب هزار تومان

اگر حداکثر وزن بسته های ارسالی ۱۲ کیلوگرم باشد،

الف) ضابطهٔ تابعی را که در جدول فوق نشان می دهد بنویسید و دامنه و برد آن را به دست آورید:

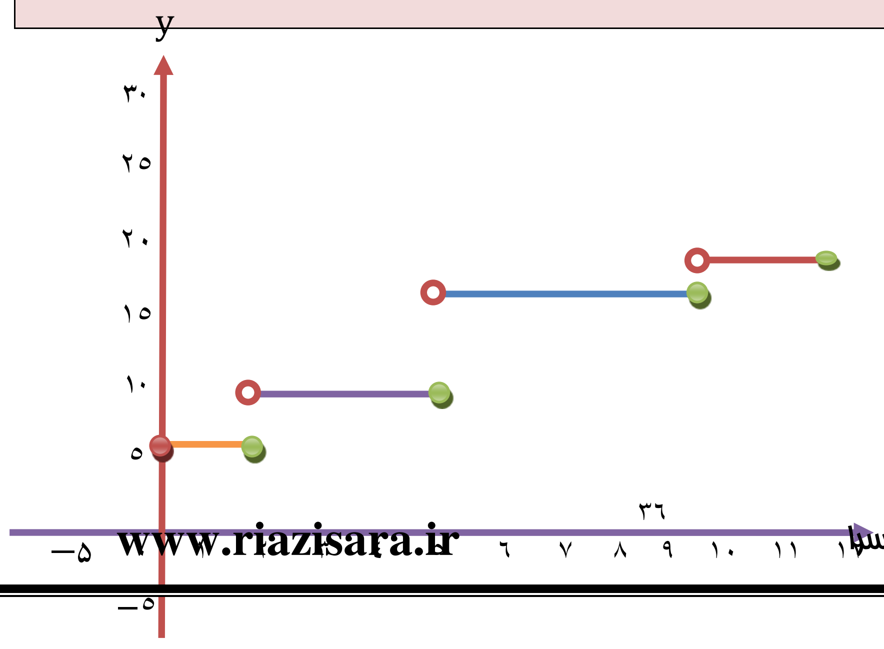
$$f(x) = \begin{cases} ۵ & ۰ < x \le ۲ \\ ۱۰ & ۲ < x \le ۵ \\ ۱۷ & ۵ < x \le ۱۰ \\ ۲۰ & ۱۰ < x \le ۱۲ \end{cases} \qquad D = [۰,۱۲] \qquad \text{برد: } \{۵,۱۰,۱۷,۲۰\}$$

ب) برای ارسال دو بسته به وزن های ۹ کیلوگرم و ۵ / ۱۱ کیلوگرم چه هزینه ای باید پرداخت؟

$$۱۷ + ۲۰ = ۳۷$$

پ نمودار این تابع را رسم کنید.

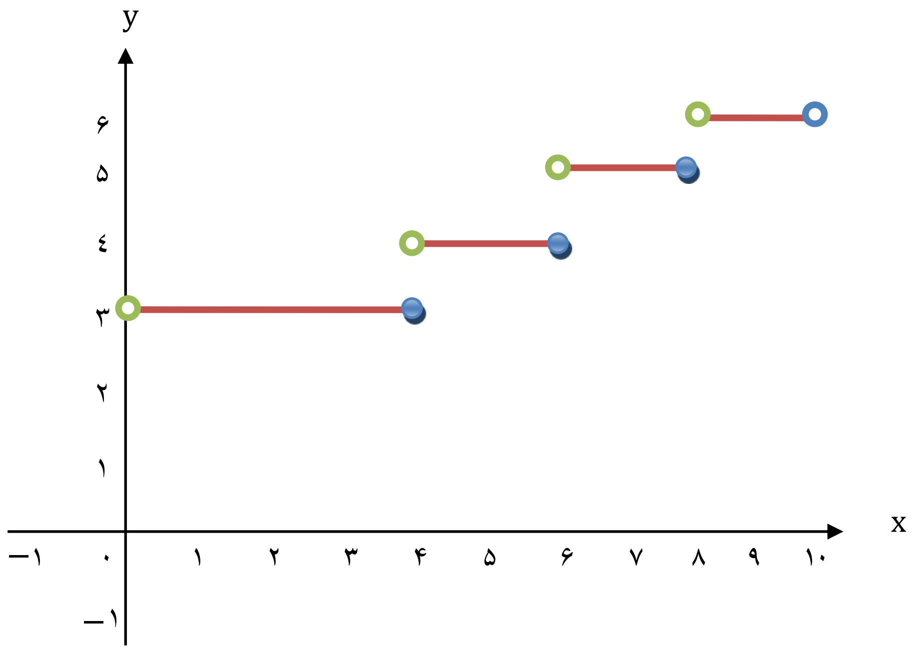
توابعی مانند تابع فوق را که بتوان دامنه آنها را به تعدادی بازه تقسیم کرد به گونه ای که تابع روی هر کدام از این بازه ها ثابت باشد، تابع پله ای می نامند.



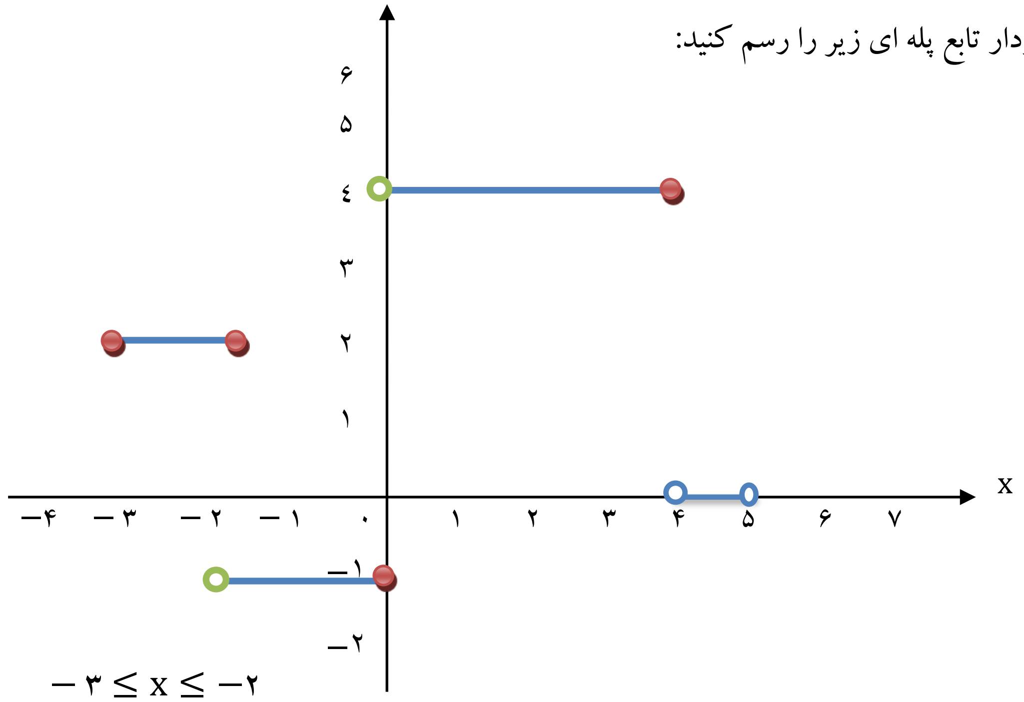
مثال: پارکینگ یک مجتمع تفریحی- ورزشی برای چهار ساعت اول توقف یک خودرو ۳ هزار تومان و برای هر دو ساعت اضافه یا زمانی کمتر از آن ۱۰۰۰ تومان دریافت می کند . اگر حداکثر مدت توقف در این پارکینگ ده ساعت باشد، نمودار تابعی را که هزینه توقف را به ازای همه ساعات ممکن نشان دهد رسم کنید . دامنه و برد تابع را نیز مشخص کنید.

$$f(x) = \begin{cases} ۳ & ۰ < x \leq ۴ \\ ۴ & ۴ < x \leq ۶ \\ ۵ & ۶ < x \leq ۸ \\ ۶ & ۸ < x \leq ۱۰ \end{cases} \quad D = (۰,۱۰)$$

، برد : $\{۳,۴,۵,۶\}$



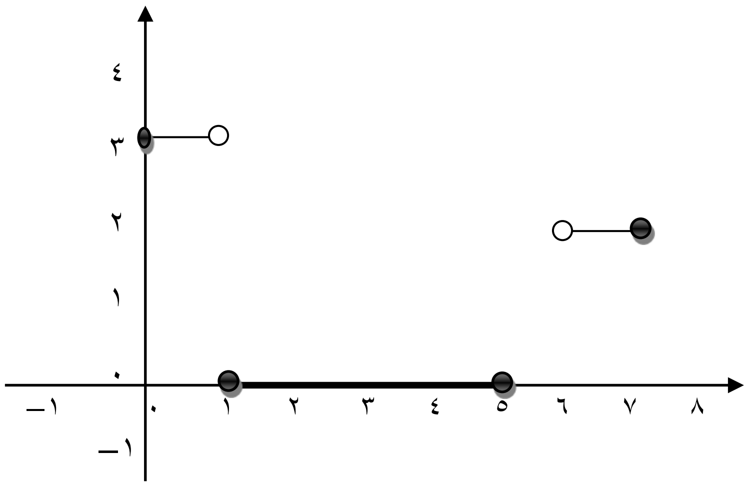
مثال: نمودار تابع پله ای زیر را رسم کنید:



$$f(x)=\begin{cases} ۲ & -۳\leq x\leq -۲ \\ -۱ & -۲< x\leq ۰ \\ ۴ & ۰< x\leq ۴ \\ ۰ & ۴< x< ۵ \end{cases}$$

مثال: تابع پله ای رو به رو را رسم کنید.

$$f(x)=\begin{cases} ۳ & x\in [۰,۱) \\ ۰ & x\in [۱,۵] \\ ۲ & x\in (۶,۷] \end{cases}$$



گونه خاصی از توابع پله ای که دارای کاربردهای زیادی نیز هست تابع جزء صحیح نام دارد . ابتدا با جزء صحیح یک عدد آشنا می شویم.

جزءِ صحیح (براکت):

هر عدد حقیقی x از یک قسمت صحیح که آن را با نماد $[x]$ یا $[x]$ و یک قسمت اعشاری که آن را بانمادهای $\{x\}$ یا p نشان می‌دهیم تشکیل شده است.

جزءِ اعشاری + جزءِ صحیح = هر عدد حقیقی

$$x = [x] + p \qquad (0 \le p < 1)$$

$$\begin{array}{ll}
۲/۰۷ = ۲ + ۰/۰۷ \Rightarrow [۲/۰۷] = ۲ & (۰ \le ۰/۰۷ < ۱) \\
۳/۴ = ۳ + ۰/۴ \Rightarrow [۳/۴] = ۳ & (۰ \le ۰/۴ < ۱) \\
۰/۵ = ۰ + ۰/۵ \Rightarrow [۰/۵] = ۰ & (۰ \le ۰/۵ < ۱) \\
۷ = ۷ + ۰ \Rightarrow [۷] = ۷ & (۰ \le ۰ < ۱) \\
-۲/۳ = -۳ + ۰/۷ \Rightarrow [-۲/۳] = -۳ & (۰ \le ۰/۷ < ۱) \\
[-۸/۲] = -۹ + ۰/۸ \Rightarrow [-۸/۲] = -۹ & (۰ \le ۰/۸ < ۱) \\
[-۰/۴] = -۱ + ۰/۶ \Rightarrow [-۰/۴] = -۱ & (۰ \le ۰/۴ < ۱)
\end{array}$$

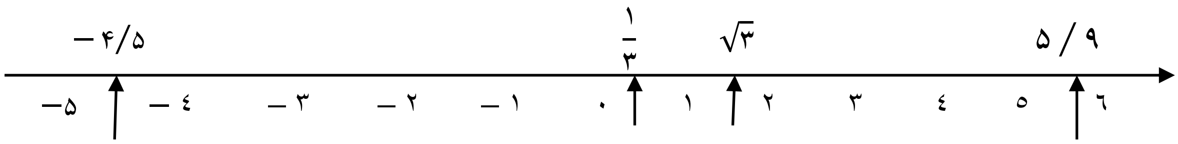
$$\begin{array}{l}
[+\square/\lozenge] = +\square \\
[-\square/\lozenge] = -\square - ۱
\end{array}$$

به زبان ساده تر برای هر عدد حقیقی مانند x ، جزء صحیح آن بزرگ ترین عدد صحیحی است که از x بیشتر نباشد.

جزء صحیح x را با نماد $[x]$ نمایش می دهیم . برای محاسبهٔ جزء صحیح یک عدد ، آن عدد را روی محور اعداد در نظر می گیریم؛ اگر آن عدد صحیح باشد، جزء صحیح برابر خود آن عدد می شود؛ اما اگر آن عدد صحیح نباشد، جزء صحیح برابر نزدیک ترین عدد صحیح سمت چپ آن عدد می شود.

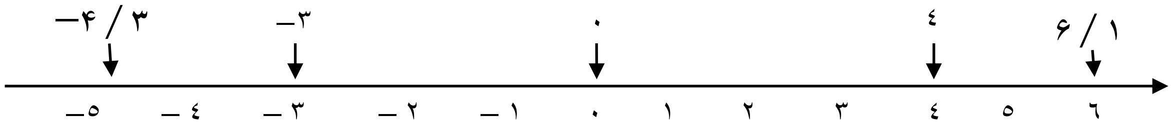
$$[x] = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Z} \\ x \text{ نزدیکترین عدد صحیح سمت چپ} & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

مثال : جزء صحیح اعداد نشان داده شده روی محور را بیابید.



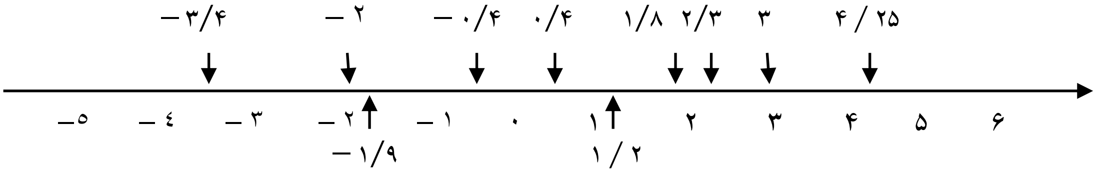
$[-۴ / ۵] = -۵$ $\left[\frac{۱}{۳}\right] = ۰$ $[\sqrt{۳}] = ۱$ $[۵ / ۹] = ۵$

مثال : جزء صحیح اعداد نشان داده شده روی محور را بیابید.



$[۴] = ۴$ $[۶ / ۱] = ۶$ $[۰] = ۰$ $[-۴ / ۳] = -۵$ $[-۳] = -۳$

مثال: با کمک گرفتن از محور اعداد جزء صحیح های خواسته شده را حساب کنید.



$[-۳ / ۴] = -۴$ $[-۲] = -۲$ $[-۱ / ۹] = -۲$ $[۰ / ۴] = ۰$ $[-۰ / ۴] = -۱$

$[۴ / ۲۵] = ۴$ $[۳] = ۳$ $[۲ / ۳] = ۲$ $[۱ / ۸] = ۱$ $[۱ / ۲] = ۱$

مطابق با تعریف جزء صحیح یک عدد همواره : $[x] \le x$. اگر x یک عدد صحیح باشد $[x] = x$

مثال: حاصل عبارت های زیر را بدست آورید.

$[۳/۴] = ۳$ $[-۳/۴] = -۳ - ۱ = -۴$

$[۰/۷۵] = ۰$ $[-۰/۷۵] = -۰ - ۱ = -۱$

$\left[\frac{۱}{۲}\right] = [۰/۵] = ۰$ $\qquad \left[-\frac{۱}{۲}\right] = [-۰/۵] = -۰-۱ = -۱$

$\left[\frac{۲۷}{۵}\right] = [۵/۴] = ۵$ $\qquad \left[-\frac{۲۷}{۵}\right] = [-۵/۴] = -۵-۱ = -۶$

$\left[\frac{۴۱}{۳۷}\right] = [۱/۱۰۸] = ۱$ $\qquad \left[-\frac{۱۳}{۵۱}\right] = [-۰/۲۵۴] = -۱$

$[\sqrt{۲}] = [۱/۴] = ۱$ $\qquad [-\sqrt{۲}] = [-۱/۴] = -۱-۱ = -۲$

$[\sqrt{۲۸}] = [۵/۳] = ۵$ $\qquad [-\sqrt{۲۸}] = [-۵/۳] = -۵-۱ = -۶$

$$\left[\frac{\sqrt{۲}}{۱-\sqrt{۲}}\right] = \left[\frac{۱/۴}{۱-۱/۴}\right] = \left[-\frac{۱۴}{۴}\right] = [-۳/۵] = -۳-۱ = -۴$$

$$[-۲-\sqrt{۲}] = [-۲-۱/۴] = [-۳/۴] = -۴$$

$$\left[\frac{\sqrt{۳}}{۰/۵}\right] = \left[\frac{۱/۷}{\frac{۵}{۱۰}}\right] = \left[\frac{۱۷}{۵}\right] = [۳/۴] = ۳$$

$$\left[\frac{۰/۵}{\sqrt{۳}}\right] = \left[\frac{\frac{۵}{۱۰}}{۱/۷}\right] = \left[\frac{\frac{۵}{۱۰}}{\frac{۱۷}{۱۰}}\right] = \left[\frac{۵}{۱۷}\right] = [۰/۲] = ۰$$

$$[۱/۳۱ \times ۲/۳۲] = [۳/۰۳۹۲] = ۳$$

مثال: اگر $[x] = ۳$، آنگاه x برابر چه اعدادی می تواند باشد؟

$$[x] = ۳ \Rightarrow ۳ \le x < ۴$$

مثال : حاصل عبارت $|[۵x] - [۷x]|$ به ازای $x = -\frac{۱}{۲}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۷

$$[۷x] \xrightarrow{x=-\frac{۱}{۲}} \left[-\frac{۷}{۲}\right] = [-۳/۵] = -۳-۱ = -۴$$

$$[۵x] \xrightarrow{x=-\frac{۱}{۲}} \left[-\frac{۵}{۲}\right] = [-۲/۵] = -۲-۱ = -۳$$

$$\Rightarrow |-۴-(-۳)| = |-۴+۳| = |-۱| = ۱$$

مثال : حاصل عبارت $A = [\sqrt{۱}] + [\sqrt{۲}] + [\sqrt{۳}] + \cdots + [\sqrt{۱۲}]$ کدام است؟

۱) ۱۷ ۲) ۳۲ ۳) ۲۴ ۴) ۲۵

$$A = ۱ + ۱ + ۱ + ۲ + ۲ + ۲ + ۲ + ۲ + ۳ + ۳ + ۳ + ۳ = ۲۵$$

مثال : در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x^۲ - ۲[x]$ مقدار $f\left(-\frac{۱}{۲}f(\sqrt{۳})\right)$ کدام است؟ ([ ] نماد جزءِ صحیح است)

(سراسری تجربی ۹۰ خ)

۱) ۱/۷۵ ۲) ۲/۲۵ ۳) ۲/۵ ۴) ۲/۷۵

$$f(x) = x^۲ - ۲[x]$$
$$f(\sqrt{۳}) = (\sqrt{۳})^۲ - ۲[\sqrt{۳}] = ۳ - ۲(۱) = ۱$$
$$\Rightarrow f\left(-\frac{۱}{۲}f(\sqrt{۳})\right) = f\left(-\frac{۱}{۲} \times ۱\right) = f\left(-\frac{۱}{۲}\right) = \left(-\frac{۱}{۲}\right)^۲ - ۲\left[-\frac{۱}{۲}\right]$$
$$= \frac{۱}{۴} - ۲ \times (-۱) = \frac{۱}{۴} + ۲ = ۲/۲۵$$

مثال : اگر $-۱ < x < ۰$ حاصل $[x] + [x^۲] + [x^۳] + \cdots + [x^{۲۰}]$ کدام است؟

۱) -۲۰ ۲) ۲۰ ۳) -۱۰ ۴) ۱۰

نکته:
$$if \quad -۱ < x < ۰ \Rightarrow -۱ < x^{۲n+۱} < ۰ \Rightarrow [x^{۲n+۱}] = -۱$$
$$if \quad -۱ < x < ۰ \Rightarrow -۱ < x^{۲n} < ۰ \Rightarrow [x^{۲n}] = ۰$$

$$[x] + [x^۲] + [x^۳] + \cdots + [x^{۲۰}] = -۱ + ۰ + (-۱) + ۰ + (-۱) + \cdots + ۰ = -۱۰$$

مثال : اگر $x^۲ + x < ۰$ حاصل $[x] + [x^۲] + [x^۳] + [x^۴]$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۸۸ خ)

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) صفر ۴) ۱

$$x^۲ + x < ۰ \Rightarrow$$

x		-۱		۰	
$x^۲ + x$	$+$	$\circ$	$\underbrace{-}_{\text{جواب}}$	$\circ$	$+$

$$\Rightarrow -۱ < x < ۰$$

$$[x] + [x^۲] + [x^۳] + [x^۴] = -۱ + ۰ + (-۱) + ۰ = -۲$$

تابعی که به هر عدد حقیقی x، جزء صحیح آن را نسبت می دهد **تابع جزء صحیح** نامیده می شود و آن را به صورت $f(x) = [x]$ نمایش می دهند. $D_f = R$ و $R_f = Z$

رسم نمودار تابع جزصحیح

مرحله ۱: بازه‌ی داده شده را با شکستن به چند زیر بازه تقسیم می‌کنیم

مرحله ۲ : جزصحیح هر کدام از بازه ها را به دست می آوریم و ضابطه‌ی تابع را بدون جزءِ صحیح می‌نویسیم

مرحله ۳ : اعداد ابتدا و انتهای هر زیر بازه را به جای x قرار مدهیم و yرا به دست می آوریم

مرحله۴: نقاط به دست آمده در هر زیر بازه را به هم وصل می کنیم تا نمودار به دست آید.

نمودار تابع های زیر را رسم کنید.

$y = [x] \qquad -۲ \leq x < ۱$

$-۲ \leq x < -۱ \Rightarrow [x] = -۲ \Rightarrow y = -۲$

x	-۲	-۱
y	-۲	-۲

$-۱ \leq x < ۰ \Rightarrow [x] = -۱ \Rightarrow y = -۱$

x	-۱	۰
y	-۱	-۱

$۰ \leq x < ۱ \Rightarrow [x] = ۰ \Rightarrow y = ۰$

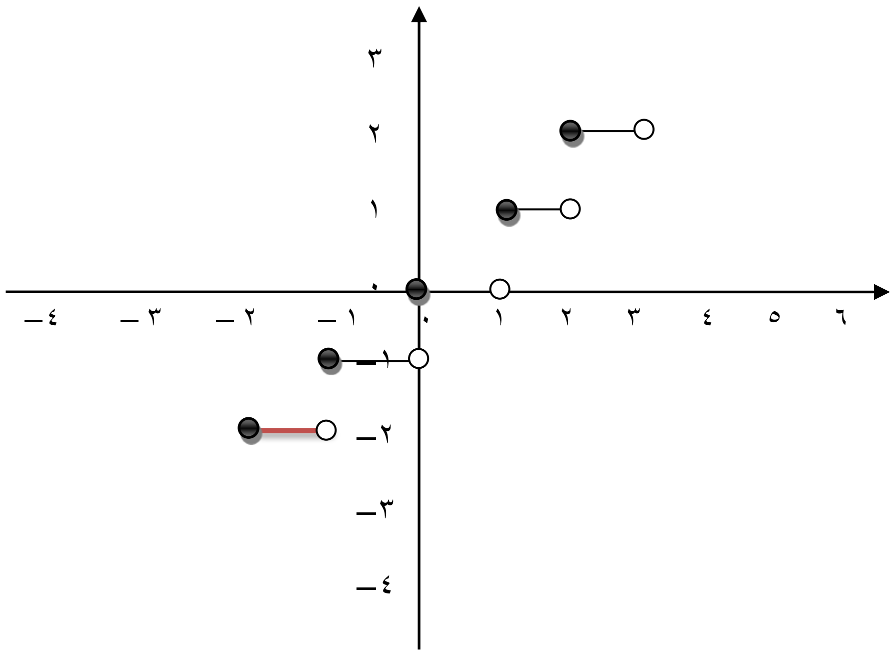
x	۰	۱
y	۰	۰

$۱ \leq x < ۲ \Rightarrow [x] = ۱ \Rightarrow y = ۱$

x	۱	۲
y	۱	۱

$۲ \leq x < ۳ \Rightarrow [x] = ۲ \Rightarrow y = ۲$

x	۲	۳
y	۲	۲



$y = ۲[x] - ۱ \qquad -۲ \le x < ۱$

$-۲ \le x < -۱ \Rightarrow [x] = -۲ \Rightarrow y = ۲(-۲) - ۱ \Rightarrow y = -۵$

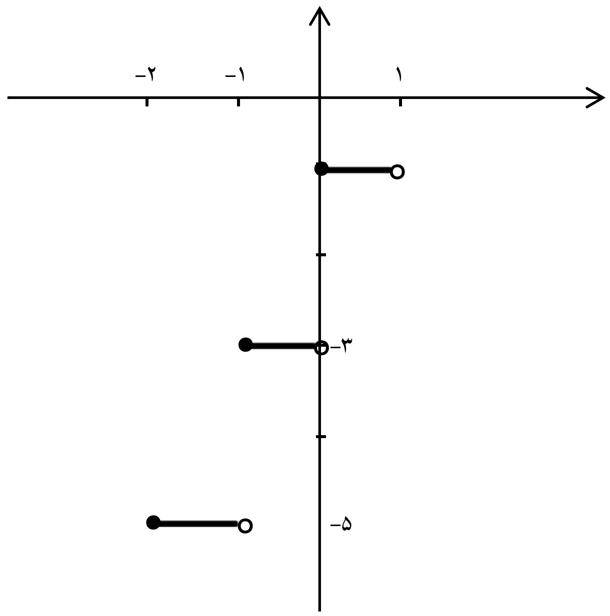
x	−۲	−۱
y	−۵	−۵

$-۱ \le x < ۰ \Rightarrow [x] = -۱ \Rightarrow y = ۲(-۱) - ۱ \Rightarrow y = -۳$

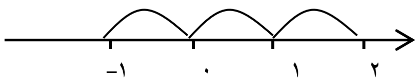
x	−۱	۰
y	−۳	−۳

$۰ \le x < ۱ \Rightarrow [x] = ۰ \Rightarrow y = ۲(۰) - ۱ \Rightarrow y = -۱$

x	۰	۱
y	−۱	−۱



مثال : نمودار تابع $y = ۲x + [x]$ را در بازه‌ی $[-۱ , ۲)$ رسم کنید.



$$-۱ \leq x < ۰ \Rightarrow [x] = -۱ \xrightarrow{y=۲x+[x]} y = ۲x + (-۱)$$

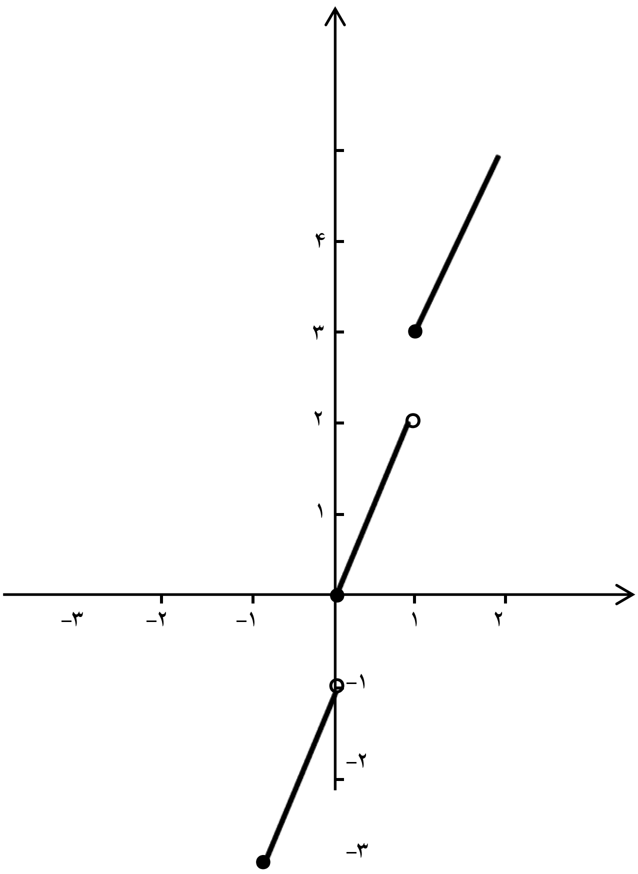
	اول بازه	آخر بازه
x	-۱	۰
y	-۳	-۱

$$۰ \leq x < ۱ \Rightarrow [x] = ۰ \xrightarrow{y=۲x+[x]} y = ۲x + (۰)$$

x	۰	۱
y	۰	۲

$$۱ \leq x < ۲ \Rightarrow [x] = ۱ \xrightarrow{y=۲x+[x]} y = ۲x + (۱)$$

x	۱	۲
y	۳	۵



$y = ۲[x] - ۱$ $\quad -۲ \leq x < ۱$

$$-۲ \leq x < -۱ \Rightarrow [x] = -۲ \Rightarrow y = ۲(-۲) - ۱ \Rightarrow y = -۵$$

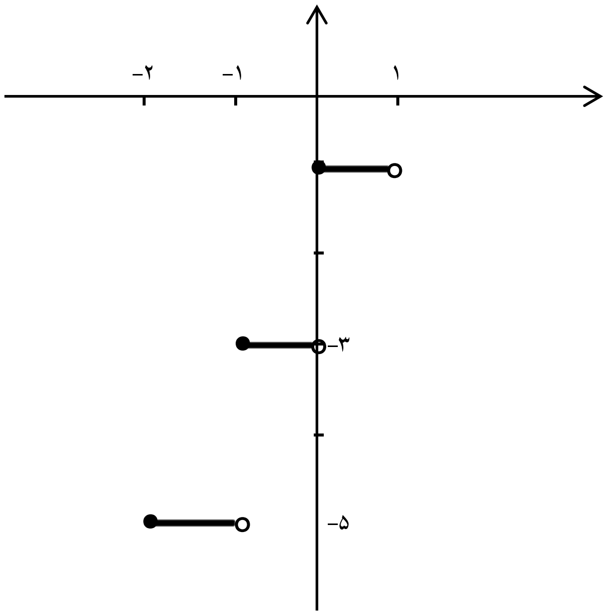
x	-۲	-۱
y	-۵	-۵

$-۱ \leq x < ۰ \Rightarrow [x] = -۱ \Rightarrow y = ۲(-۱) - ۱ \Rightarrow y = -۳$

x	-۱	۰
y	-۳	-۳

$۰ \leq x < ۱ \Rightarrow [x] = ۰ \Rightarrow y = ۲(۰) - ۱ \Rightarrow y = -۱$

x	۰	۱
y	-۱	-۱



مثال: تابع با ضابطهٔ $f(x) = [x] + ۲$ و دامنهٔ $D_f = [-۳,۳)$ را رسم کنید.

$-۳ \leq x < -۲ \rightarrow [x] = -۳ \rightarrow f(x) = -۳ + ۲ = -۱$

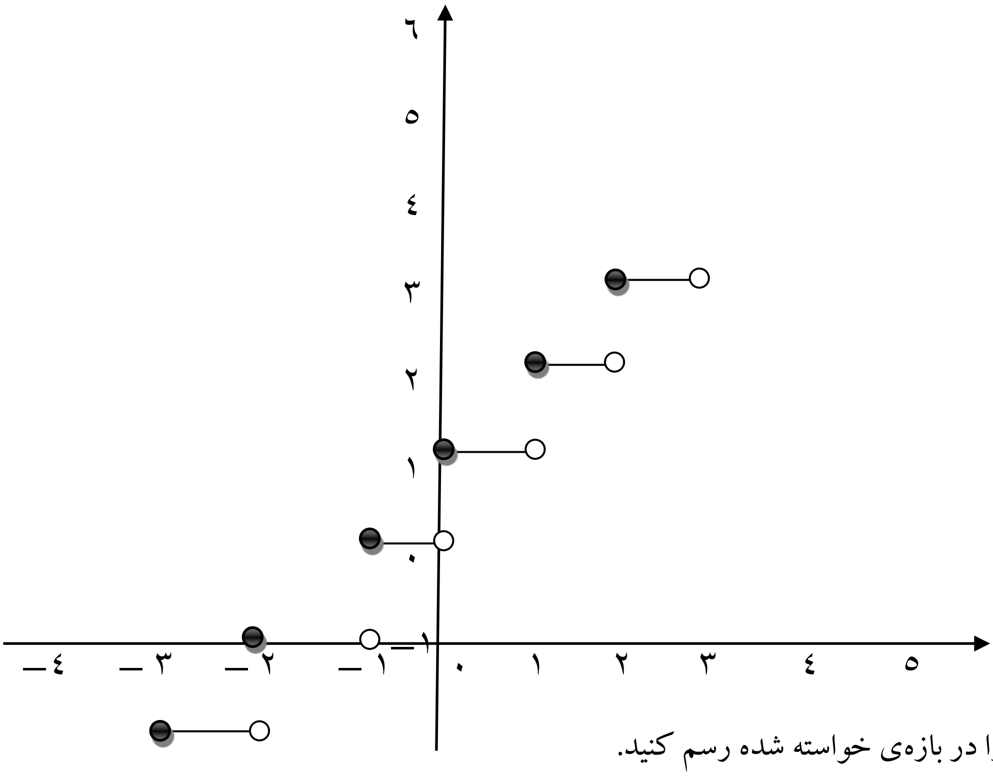
$-۲ \leq x < -۱ \rightarrow [x] = -۲ \rightarrow f(x) = -۲ + ۲ = ۰$

$-۱ \leq x < ۰ \rightarrow [x] = -۱ \rightarrow f(x) = -۱ + ۲ = ۱$

$۰ \leq x < ۱ \rightarrow [x] = ۰ \rightarrow f(x) = ۰ + ۲ = ۲$

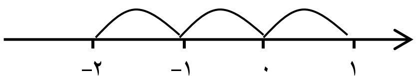
$۱ \leq x < ۲ \rightarrow [x] = ۱ \rightarrow f(x) = ۱ + ۲ = ۳$

$۲ \leq x < ۳ \rightarrow [x] = ۲ \rightarrow f(x) = ۲ + ۲ = ۴$



مثال: نمودار توابع زیر را در بازه‌ی خواسته شده رسم کنید.

۱) $y = x - ۲[x] \qquad -۲ \leq x < ۱$



$-۲ \leq x < -۱ \Longrightarrow [x] = -۲ \longrightarrow y = x - ۲(-۲) \longrightarrow y = x + ۴$

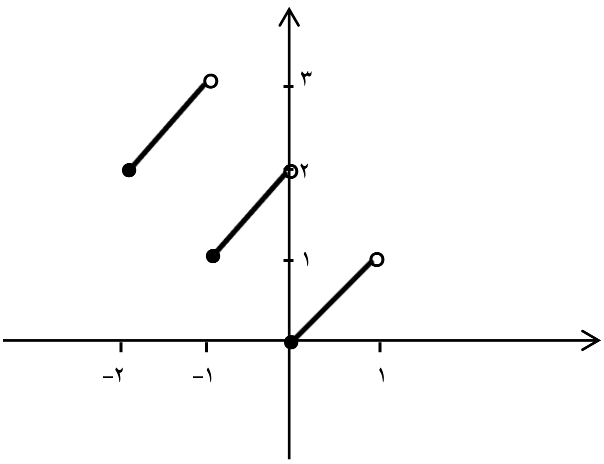
	اول بازه	آخر بازه
x	-۲	-۱
y	۲	۳

$-۱ \leq x < ۰ \Longrightarrow [x] = -۱ \longrightarrow y = x - ۲(-۱) \longrightarrow y = x + ۲$

x	-۱	۰
y	۱	۲

$۰ \leq x < ۱ \Longrightarrow [x] = ۰ \longrightarrow y = x - ۲(۰) \longrightarrow y = x$

x	۰	۱
y	۰	۱

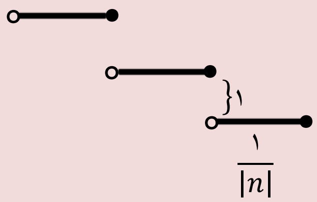


روش کنکوری رسم نمودار توابع به فرم $y=[nx]$

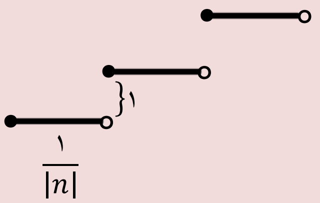
نمودار این تابع یک نمودار پلکانی است اگر $n>0$ پلکان صعودی و اگر $n<0$ پلکان نزولی است.

طول پله‌ها $\frac{1}{|n|}$ می‌باشد.

ارتفاع پله‌ها همیشه یک است.



پله‌ها را از مبدأ به سمت چپ رسم می‌کنیم



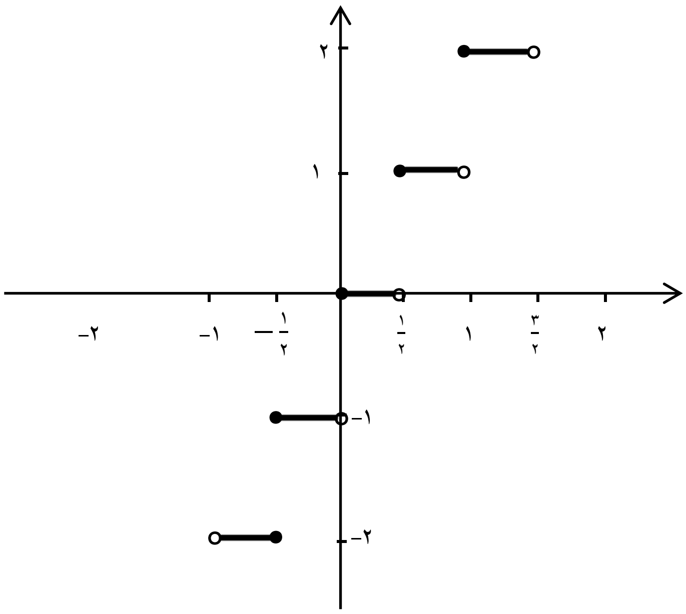
پله‌ها را از مبدأ به سمت راست رسم می‌کنیم

$y=[2x]$

طول پله‌ها $=\frac{1}{2}$

ارتفاع $=$ یک

صعودی

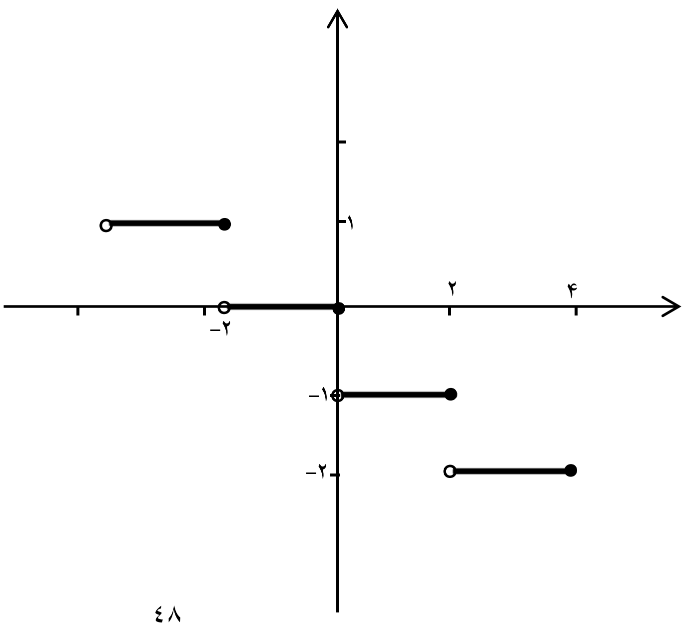


$y=\left[-\frac{1}{2}x\right]$

طول پله‌ها $=\frac{1}{\left|-\frac{1}{2}\right|}=2$

ارتفاع $=$ یک

نزولی

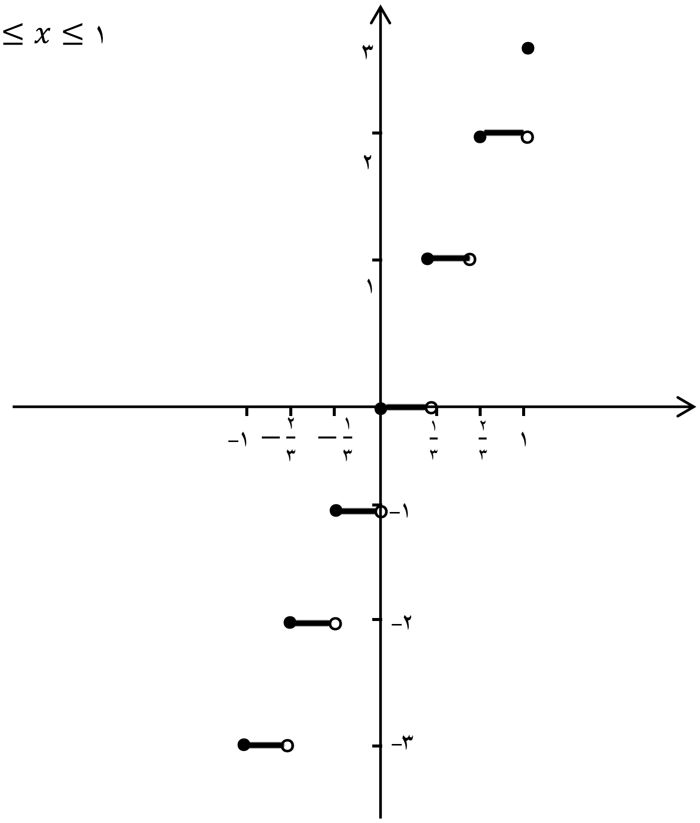


۱) $y=[۳x]$ $\qquad -۱\le x\le ۱$

$\frac{۱}{|۳|}=\frac{۱}{۳}=$ طول پله‌ها

یک $=$ ارتفاع

صعودی

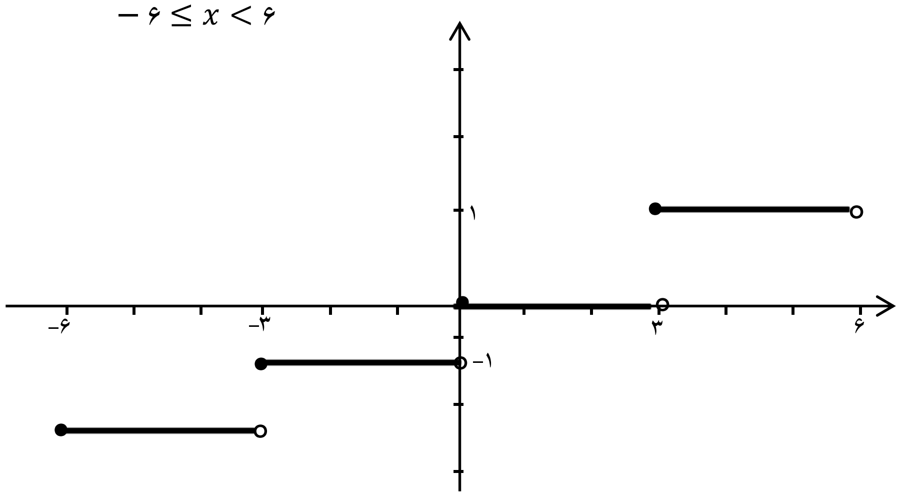


۲) $y=\left[\frac{۱}{۳}x\right]$ $\qquad -۶\le x< ۶$

$\frac{۱}{\left|\frac{۱}{۳}\right|}=۳=$ طول پله‌ها

یک $=$ ارتفاع

صعودی

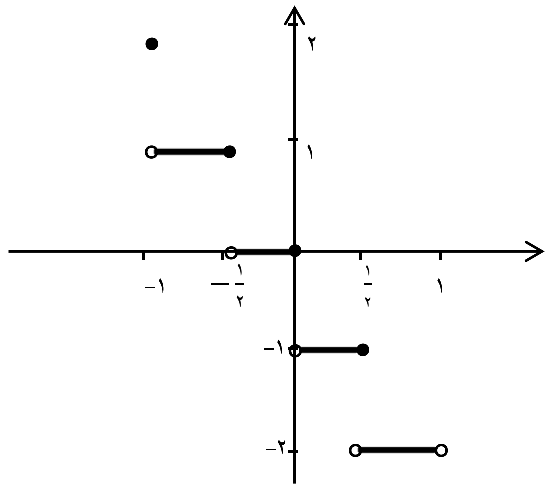


۳) $y = [-۲x]$ $\quad -۱ \le x < ۱$

طول پله‌ها $= \frac{۱}{|-۲|} = \frac{۱}{۲}$

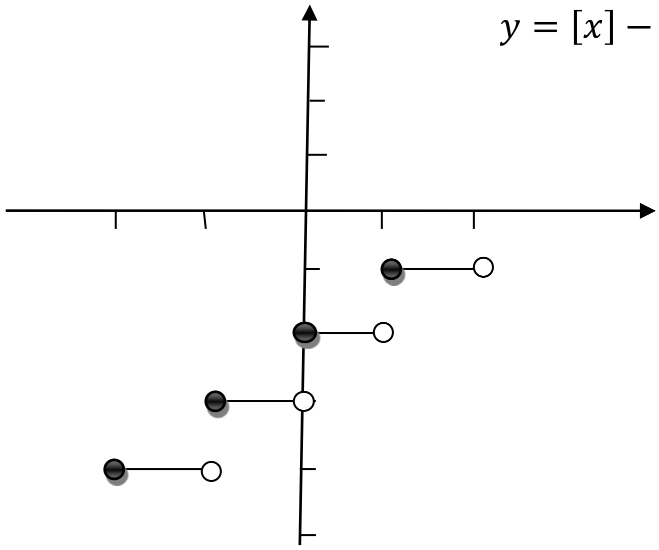
ارتفاع $=$ یک

نزولی



فعالیت :نمودارهای دو تابع $y=[x-۳]$ و $y=[x]-۳$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنید . چه رابطه ای بین این دو تابع وجود دارد؟

$y=[x]-۳$



$-۲\le x<-۱ \to y=-۵$

$-۱\le x<۰ \to y=-۴$

$۰\le x<۱ \to y=-۳$

$۱\le x<۲ \to y=-۲$

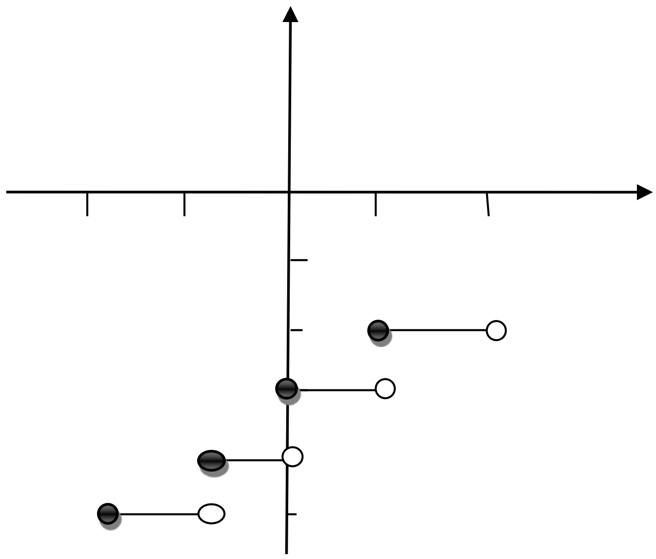
$y=[x-۳]$

$y=-۵ \quad -۵\le x-۳<-۴$

$y=-۴ \quad -۴\le x-۳<-۳$

$y=-۳ \quad -۳\le x-۳<-۲$

$y=-۲ \quad -۲\le x-۳<-۱$



هر دو تابع نمودار یکسانی دارند

براکت مجموع هر عدد با یک عدد صحیح برابر است با مجموع براکت آن عدد و آن عدد صحیح.

$\boxed{۱)\quad [u+k]=[u]+k \qquad (k\in\mathbb{Z})}$

$[x+۱]=[x]+۱$

$[۲-۳x]=[-۳x]+۲$

$[۲x-۵]=[۲x]-۵$

$\big[x+[x]\big]=[x]+[x]=۲[x]$

مثال: اگر a و b دو عدد باشند و بدانیم $[a]=[b]$، بیشترین و کمترین مقدار اختلاف این دو عدد چه می تواند باشد؟

$$\left.\begin{array}{l} a=b \Rightarrow [a]=[b] \Rightarrow a-b=b-a=۰ \\ n\le a<n+۱ , n\le b<n+۱ \\ a\neq b , a=n , \ b<n+۱ \\ \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b-a=b-n \\ b<n+۱ \end{array}\right\} \Rightarrow b-n<n-n+۱ \Rightarrow b-n<۱ \Rightarrow b-a<۱ \\ a\neq b , \quad b=n , \quad a<n+۱ \\ \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a-b=a-n \\ a<n+۱ \end{array}\right\} \Rightarrow a-n<n-n+۱ \Rightarrow a-n<۱ \Rightarrow a-b<۱ \end{array}\right\} \Rightarrow ۰\le |a-b|<۱$$