

سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی
سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور
نمونه سوالات امتحانات ریاضی
نرم افزارهای ریاضیات

و...

@riazisara

ریاضی سرا در تلگرام:



<https://t.me/riazisara>

@riazisara.ir

ریاضی سرا در اینستاگرام:



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

فرزانه بایمانی دبیرریاضی شهرستان رامهرمز

فصل سوم : تابع

آشنایی با برخی از انواع تابع

وارون یک تابع و تابع یک به یک

اعمال جبری روی توابع

یادآوری:

۱- مجموعه ای از زوجهای مرتب (رابطه) را که هیچ دو زوج مرتب عضو اول یکسان نداشته باشند را تابع مینامند و اگر نقاط نظیر مختصات زوج های مرتب تابع را در صفحه محورهای مختصات تعیین کنیم مجموعه ای از نقاط بدست می آید که آن را نمودار تابع می نامند.

۲- مجموعه مختصهای اول (X ها) همه زوجها ، دامنه تابع نامیده می شود و مجموعه مختصهای دوم (Y ها) همه زوجها ، برد تابع خوانده می شود.

۳- از نظر نموداری رابطه ای تابع است که هر خط موازی محور Y ها نمودار آن را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

۴- اگر f تابعی از A به B باشد دامنه آن A است ولی لزومی ندارد که برد آن همان مجموعه B باشد. مجموعه B را هم دامنه یا مقصد تابع f می نامند. برد یک تابع زیر مجموعه ای از هم دامنه آن است و ممکن است مساوی هم دامنه نیز بشود.

۵- اگر تابعی از A به B با نمودار ون نمایش داده شده باشد اولاً از هر عضو A باید دقیقاً یک پیکان خارج شود و دوم اینکه لازم نیست به هر عضو B دقیقاً یک پیکان وارد شود ممکن است به یک عضو B یک پیکان ، یا بیش از یک پیکان وارد شود یا آن که اصلاً پیکانی وارد نشود.

۶- نمودار هر تابع به صورت $y = ax + b$ (تابع درجه اول) خط راست است از اینرو تابع درجه اول را تابع خطی نیز می نامند.

۷- تابع به صورت $y = ax^2 + bx + c$ را تابع درجه دوم می نامند. نمودار این تابع منحنی به نام سهمی است که دارای محور تقارنی به صورت $x = \frac{-b}{2a}$ می باشد.

۸- به دستور یا قانون بیانگر تابع ، ضابطه آن تابع گفته می شود.

فرزانه بایمانی دبیرریاضی شهرستان رامهرمز

۹- برای مشخص بودن یک تابع ضابطه و دامنه آن باید مشخص باشند.

۱۰- در صورت عدم بیان دامنه، بزرگترین مجموعه ای که آن تابع در آن قابل تعریف است را به عنوان دامنه در نظر میگیریم.

انواع توابعی که در این فصل با آنها سروکار داریم:

۱- توابع گویا: هر عبارتی به صورت $f(x) = \frac{g(x)}{t(x)}$ که در آن $g(x)$ و $t(x)$ چند جمله ای هستند و همچنین $t(x) \neq 0$ یک تابع گویا نامیده می شود. مثل:

$$h(x) = \frac{7}{x}, \quad g(x) = \frac{2x-1}{x^2-5x+1}, \quad f(x) = \frac{x+7}{3x-1}$$

دامنه توابع گویا: از قبل میدانیم که تقسیم بر صفر در ریاضیات تعریف نشده است بنابراین ریشه های مخرج جزو دامنه توابع گویا نیستند.

مثال: دامنه توابع گویای زیر را بیابید.

$$1) f(x) = \frac{3x+2}{x^3-x} \Rightarrow x^3-x=0 \Rightarrow x(x^2-1)=0 \Rightarrow x=0 \text{ یا } x^2=1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{0, \pm 1\}$$

$$2) f(x) = \frac{x+2}{2x^2-5x+3} \Rightarrow 2x^2-5x+3=0 \Rightarrow x^2-5x+6=0 \Rightarrow (x-3)(x-2)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-3=0 \Rightarrow x=3 \xrightarrow{+2} x=\frac{3}{2} \\ x-2=0 \Rightarrow x=2 \xrightarrow{+2} x=1 \end{cases} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \left\{ \frac{3}{2}, 1 \right\}$$

توجه: می توان ریشه ها را از راه Δ هم بدست آورد.

$$3) f(x) = \frac{x-2}{x^3-8} \Rightarrow$$

فرزانه بایمانی دبیرریاضی شهرستان رامهرمز

$$4) f(x) = \frac{2x^2+4x+1}{x^4-3x^2-4} \Rightarrow$$

$$5) f(x) = \frac{x-1}{x^2+9} \Rightarrow$$

توجه: در توابع گویا قبل از تعیین دامنه اجازه ساده کردن توابع را نداریم ☹

توجه: دامنه توابع چند جمله ای مثل $f(x)=2x+1$ یا $g(x)=x^3-2x^2$ یا $h(x)=\sqrt{2x+1}$ برابر \mathbb{R} می باشد.

تذکر: دامنه توابع گویا برابر {ریشه های مخرج} - \mathbb{R} می باشد.

تذکر: برای حل سوالات جذابتر از دامنه اندکی صبور باشید چون توابع رادیکالی و جزء صحیح را هم باید بخوانید تا بشود سوال ترکیبی نوشت. ☹



تساوی دو تابع:

دو تابع f و g مساویند اگر و فقط اگر:

الف) دامنه آنها مساوی باشد: $D_f = D_g$

ب) به ازای هر x از دامنه آنها ، $f(x) = g(x)$ باشد.

فرزانه بایمانی دبیرریاضی شهرستان رامهرمز

در واقع ابتدا دامنه دو تابع را حساب می کنیم در صورت تساوی آنها سراغ شرط دوم می رویم که باید نشان دهیم به ازای هر عضو دامنه ، ضابطه دو تابع برابر است.

$$\text{مثال: اگر } f(x) = x - 4 \text{ و } g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 5x + 4}{x - 1} & x \neq 1 \\ a - 2 & x = 1 \end{cases} \text{ مساوی باشند } a \text{ را به دست}$$

آورید

$$D_f = D_g = \mathbb{R}$$

$$\forall x \neq 1 \in D : g(x) = \frac{(x-1)(x-4)}{x-1} = x - 4 = f(x)$$

$$\text{اگر } x=1 \quad f(1) = -3, g(1) = a-2 \Rightarrow a-2 = -3 \Rightarrow a = -1$$

$$\text{سوال: اگر } f(x) = x - 4 \text{ و } g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 16}{x + 4} & x \neq -4 \\ k & x = -4 \end{cases} \text{ مقدار } k \text{ را چنان بیابید}$$

که به ازای هر x داشته باشیم $f(x) = g(x)$.

$$\text{سوال: آیا دو تابع } f(x) = \frac{x^4 - 4}{x^2 + 2} \text{ و } g(x) = x^2 - 2 \text{ مساوی اند؟ چرا؟}$$

$$\text{سوال: آیا دو تابع } g(x) = |x| - 1 \text{ و } f(x) = \frac{x^2 - 1}{|x| + 1} \text{ مساوی اند؟ چرا؟}$$

$$\text{راهنمایی: } x^2 - 1 = |x|^2 - 1$$

انتهای درس اول که با توابع رادیکالی و پله ای آشنا شدید باز هم از تساوی دو تابع سوال حل می کنیم.

۲- توابع رادیکالی:

الف) دامنه توابع به صورت $\sqrt[2n]{f(x)}$ از حل نامعادله $f(x) \geq 0$ بدست می آید.

فرزانه بایمانی دبیرریاضی شهرستان رامهرمز

ب) دامنه توابع به صورت $\frac{1}{2n\sqrt{f(x)}}$ از حل نامعادله $f(x) > 0$ بدست می آید.

ج) دامنه توابع به صورت $\sqrt[2n+1]{f(x)}$ همان دامنه $f(x)$ می باشد.

مثال: دامنه $f(x) = \frac{2+x}{\sqrt{2-|x|}}$ و $g(x) = \frac{2+\sqrt{3+x}}{\sqrt{-x}}$ را بیابید.

$$D_f: 2 - |x| > 0 \Rightarrow |x| < 2 \Rightarrow -2 < x < 2 \Rightarrow D_f: (-2, 2)$$

$$D_g: \begin{cases} 3+x \geq 0 \Rightarrow x \geq -3 \\ -x > 0 \Rightarrow x < 0 \end{cases} \quad \begin{array}{c} \bullet \\ \hline -3 \quad \quad \quad 0 \end{array} \rightarrow D_g: [-3, 0)$$

سوال: دامنه $f(x) = \sqrt{\frac{x+2}{x-1}}$ را بیابید.

سوال: دامنه تابع $f(x) = \frac{\sqrt{2-x}}{x^2-9}$ را تعیین کرده و به صورت بازه نمایش دهید. (خرداد ۸۳ - نهایی ریاضی (۳) تجربی)

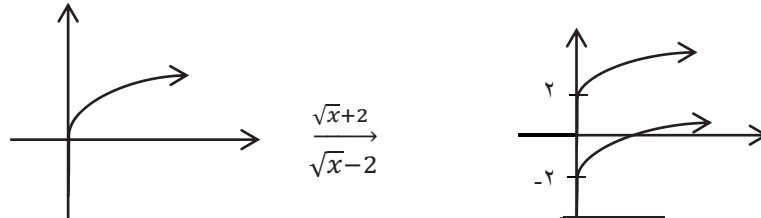
توجه: در درس سوم که عملیات جبری روی توابع را می خوانید با دامنه های ترکیبی از توابع گویا، رادیکالی، جزء صحیح و ... آشنا می شوید.

رسم توابع رادیکالی به کمک انتقال:

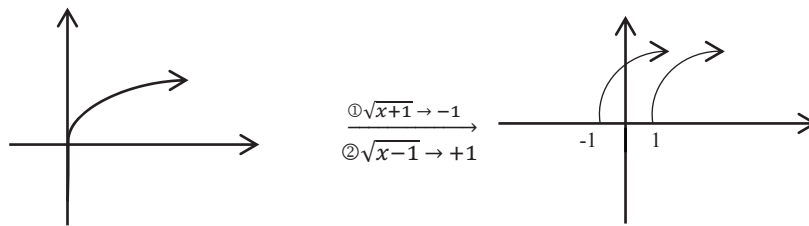
۱- برای رسم $\sqrt{x}+a$: نمودار \sqrt{x} را به اندازه $|a|$ واحد در امتداد محور y ها انتقال می دهیم
اگر $a > 0$ انتقال در جهت مثبت و اگر $a < 0$ انتقال در جهت منفی خواهد بود.

فرزانه بایمانی دبیرریاضی شهرستان رامهرمز

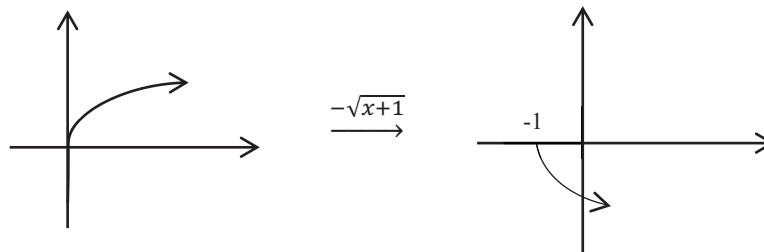
به عبارت دیگر: a را روی محور y ها مشخص کرده و از روی آن \sqrt{x} را رسم می کنیم.



۲- برای رسم $\sqrt{(x+a)}$: نمودار \sqrt{x} را به اندازه $|a|$ واحد در امتداد محور x ها انتقال می دهیم. اگر $a > 0$ انتقال به سمت چپ و اگر $a < 0$ انتقال به سمت راست خواهیم داشت به عبارت دیگر می توان عددی که در پرانتز کنار x نوشته شده را در نظر گرفت و قرینه آن را روی محور x ها مشخص کرده و نمودار \sqrt{x} را از روی آن رسم کرد.



۳- برای رسم $-\sqrt{x}$: نمودار \sqrt{x} نسبت به محور x ها قرینه می شود. به عبارت دیگر جهت آن به سمت پائین می باشد.



در واقع منفی قبل از رادیکال نشان می دهد به سمت پائین حرکت کنیم.

۴- برای رسم $\sqrt{-x}$: نمودار \sqrt{x} به جهت x های منفی رسم می شود.

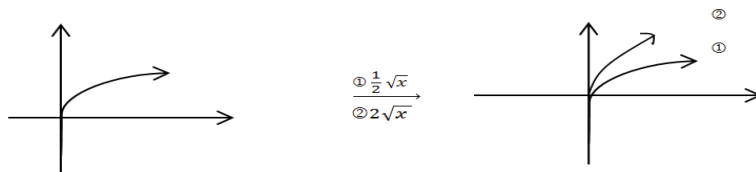


فرزانه بایمانی دبیر ریاضی شهرستان رامهرمز

$$\sqrt{-(x+1)}$$

۵- برای رسم $y = a\sqrt{x}$ اگر a عدد صحیح باشد نمودار جمع تر می شود به عبارت دیگر به محور y ها نزدیکتر می شود و اگر $0 < a < 1$ باشد نمودار بازتر

میشود و به محور x ها نزدیکتر می شود



سوال: نمودارهای زیر را به روش انتقال رسم کنید

1) $y = \sqrt{x-2} + 1$

2) $y = -\sqrt{x-2} + 1$

3) $y = \sqrt{-x+3} - 1$

4) $y = \sqrt{-x} - 1$

۳- توابع پله ای و تابع جزء صحیح:

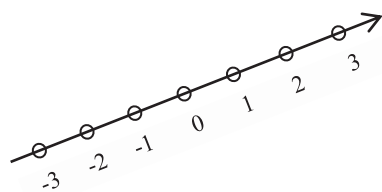
تعریف: هر تابعی که بتوان دامنه آن را به تعدادی بازه تقسیم بندی کرد که تابع روی هر کدام از این بازه ها تابع ثابت باشد یک تابع پله ای نامیده میشود
 نوع خاصی از توابع پله ای تابع جزء صحیح می باشد.

فرزانه بایمانی دبیرریاضی شهرستان رامهرمز

تعریف: تابعی که به هر عدد حقیقی، جزء صحیح آن را نسبت می دهد تابع جزء صحیح (یا براکت) نامیده می شود و با $f(x) = [x]$ نمایش داده می شود.

توجه: جزء صحیح هر عدد صحیح برابر خود آن عدد میباشد

توجه: جزء صحیح هر عدد حقیقی (که صحیح نباشد) اولین عدد سمت چپ آن عدد می باشد



به بیان ساده تر به شکل زیر دقت می کنیم:

اگر محور اعداد را کمی بچرخانیم تا مایل شود:

و اعداد صحیح را یک حفره در نظر بگیریم هر عدد

بین آنها در حفره قبلش (سمت چپ) می افتد:

$$[1/5] = 1 \quad [-2/25] = -3 \quad [\sqrt{3}] = 1 \quad [-\sqrt{2}] = -2$$

رسم تابع جزء صحیح:

۱- ابتدا دامنه را بنا به ضابطه تغییر می دهیم منظور آنست که دامنه حدود x است و ممکن است ضابطه $[3x]$ باشد.

۲- دامنه جدید را قسمت قسمت می کنیم و در هر قسمت y و x را محاسبه می کنیم.

۳- نقاط هر قسمت را به هم وصل کرده و توجه می کنیم که برای تابع بودن حتما باید طرف دوم آنها توخالی باشد البته ممکن است در اولین قسمت هر دو طرف توخالی باشند.

مثال: $y = [2x]$ را در بازه $(-1, 1]$ رسم کنید.

فرزانه بایمانی دبیرریاضی شهرستان رامهرمز

$$-1 < x \leq 1 \Rightarrow -2 < 2x \leq 2$$

ابتدا دامنه را بنابه سوال تغییر میدهیم:

$$-2 < 2x < -1 \Rightarrow [2x] = -2 \Rightarrow -1 < x < -\frac{1}{2}$$

x	-1	$-\frac{1}{2}$
y	-2	-2

$$-1 \leq 2x < 0 \Rightarrow [2x] = -1 \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq x < 0$$

x	$-\frac{1}{2}$	0
y	-1	-1

$$0 \leq 2x < 1 \Rightarrow [2x] = 0 \Rightarrow 0 \leq x < \frac{1}{2}$$

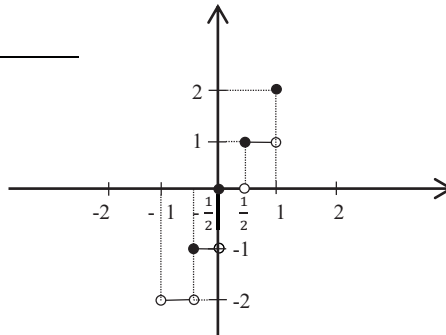
x	0	$\frac{1}{2}$
y	0	0

$$1 \leq 2x < 2 \Rightarrow [2x] = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq x < 1$$

x	$\frac{1}{2}$	1
y	1	1

$$2x = 2 \Rightarrow [2x] = 2 \Rightarrow x = 1$$

x	1
y	2



سوال: نمودار $y = [\frac{1}{3}x]$ را در بازه $[-3, 3)$ رسم کنید.

فرزانه بایمانی دبیرریاضی شهرستان رامهرمز

سوال: نمودار $y = [x+1]$ را در بازه $(-1, 2]$ رسم کنید.

سوال: نمودار $y = 2[x]-1$ را در بازه $(-2, 1)$ رسم کنید.

حل چند سوال از تساوی دو تابع

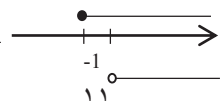
مثال: آیا دو تابع $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x}}$ و $g(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}$ مساویند چرا؟ (تهران-علامه طباطبایی ۸۶)

$D_f: \frac{x+1}{x} \geq 0$

x	-1	0	
x+1	-	o	+
x	-	-	o
$\frac{x+1}{x}$	+	o	-

$D_f: (-\infty, -1] \cup (0, +\infty)$

$D_g: \begin{cases} x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1 \\ x > 0 \Rightarrow \end{cases}$



$D_g(0, +\infty)$

فرزانه بایمانی دبیرریاضی شهرستان رامهرمز

چون $D_f \neq D_g$ پس دو تابع مساوی نیستند.

سوال: آیا دو تابع زیر باهم مساویند؟ چرا؟

(نهائی حسابان خرداد ۹۲)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-25}{x-5} & x \neq 5 \\ 6 & x = 5 \end{cases} \quad g(x) = x+5$$

سوال: آیا دو تابع $f(x) = \sqrt{x^2 - x}$ و $g(x) = \sqrt{x} \times \sqrt{x-1}$ مساویند؟ چرا؟ (نهائی

حسابان خرداد ۹۴)

سوال: آیا دو تابع $f(x) = \left[\frac{1}{x^2+1} \right]$ و $g(x) = 0$ مساویند؟ چرا؟ توجه: $0 < \frac{1}{x^2+1} \leq 1$

نکات کلیدی:

۱- نمودار $y = [nx]$ یک نمودار پلکانی است که اگر $n > 0$ پلکان صعودی و اگر $n < 0$ پلکان نزولی است و طول پله ها $\frac{1}{|n|}$ می باشد و ارتفاع پله ها همیشه یک است.

۲- هرگاه $n > 0$ ، پله ها را از مبدأ به سمت راست رسم می کنیم در واقع نمودار صعودی است. یعنی اگر از سمت چپ به راست نمودار را بررسی کنیم در حال صعود می باشد.

۳- هرگاه $n < 0$ ، پله ها را از مبدأ به سمت چپ رسم می کنیم در واقع نمودار نزولی است. یعنی اگر از سمت چپ به راست نمودار را بررسی کنیم در حال نزول می باشد.

$$0 \leq x - [x] < 1 \quad \text{۴-}$$

$$[-x] = \begin{cases} -[x] & x \in Z \\ -[x] - 1 & x \notin Z \end{cases} \quad \text{۵-}$$

$$n \in Z : \left[\frac{n}{2} \right] = \begin{cases} \frac{n}{2} & n \text{ زوج} \\ \frac{n-1}{2} & n \text{ فرد} \end{cases} \quad \text{۶-}$$

۷- $[x+n] = [x] + n$ توجه داشته باشید که این نکته برای $n \in Z$ صادق است.

$$\text{۸- اگر } -1 < x < 0 \text{ داریم : } [x^{2n+1}] = -1 \Leftrightarrow -1 < x^{2n+1} < 0$$

$$\text{۹- اگر } -1 < x < 0 \text{ داریم : } [x^{2n}] = 0 \Leftrightarrow 0 < x^{2n} < 1$$

فرزانه بایمانی دبیرریاضی شهرستان رامهرمز

تست:

(۱) رابطه $\{(3, m^2), (2, 1), (-2, m), (3, m+2), (m, 4)\}$ به ازای کدام مقدار m یک تابع است؟ (کنکور تجربی ۸۵)

(۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۲ (۴) هیچ مقدار

پاسخ: گزینه ۲

(۲) اگر $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$ دامنه تابع $f(3-x)$ کدام است؟ (کنکور تجربی ۹۲)

(۱) $[0, 2]$ (۲) $[0, 3]$ (۳) $[1, 2]$ (۴) $[1, 3]$

$$f(x) = \sqrt{2x - x^2} \Rightarrow D_f: 2x - x^2 \geq 0 \Rightarrow 2x - x^2 = 0 \Rightarrow x = 0, 2$$

x	·	۲	
$2x - x^2$	-		+
	-		-

$$\Rightarrow D_f: 0 \leq x \leq 2$$

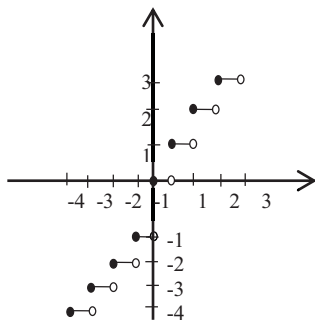
بنابراین اگر $3-x$ قرار است ورودی تابع f باشد باید

$$0 \leq 3-x \leq 2 \Rightarrow -3 \leq -x \leq -1 \Rightarrow 1 \leq x \leq 3$$

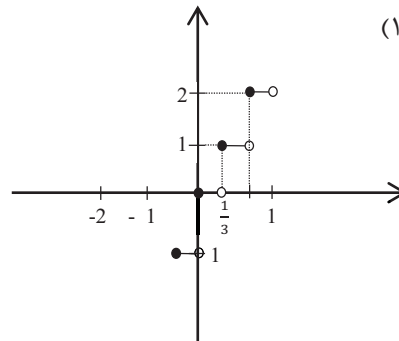
توجه: می توان ابتدا تابع $f(3-x)$ را با جایگذاری $3-x$ به جای x بدست آورد و سپس دامنه آن را حساب کرد.

۳) نمودار $y = [\frac{1}{3}x]$ در بازه $[-6, 6)$ کدام است؟

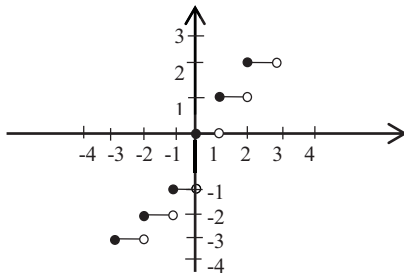
پاسخ: با توجه به نکته ۱، ۲، ۳ گزینه ۳



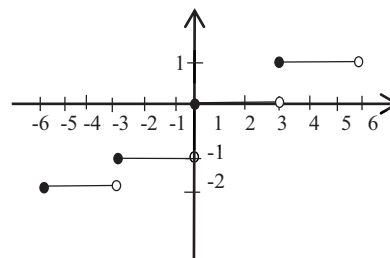
(۲)



(۱)



(۴)



(۳)

۴) اگر $x^2 + x < 0$ حاصل $[x] + [x^2] + [x^3] + [x^4]$ کدام است؟ (کنکور تجربی خارج ۸۸)

فرزانه بایمانی دبیرریاضی شهرستان رامهرمز

۱ (۴) ۳ (صفر) -۱ (۲) -۲ (۱)

$$X^2+x=0 \rightarrow x=0 \text{ یا } -1 \quad \Rightarrow -1 < x < 0$$

با توجه به نکات ۹ و ۸ : $[x]+[x^2]+[x^3]+[x^4]=-1+0+(-1)+0=-2$

(۵) برای هر عدد طبیعی $n > 2$ حاصل

$[\]$ کدام است؟ $[\sqrt{4n^2 - 3n + 1}] - 2[\sqrt{n^2 - 2n}]$ (علامت جزء صحیح است)
(کنکور تجربی ۹۱)

۴ (۴) ۳ (۳) ۲ (۲) ۱ (۱)

توجه: در تست به این نکته اشاره شده است که به ازای هر عدد طبیعی بزرگتر از ۲ حاصل عبارت یکسان است کافی است یک عدد طبیعی بزرگتر از ۲ انتخاب کنیم:

$$n=3 \Rightarrow A = [\sqrt{28}] - 2 [\sqrt{3}] = 5 - 2 = 3$$

شما با جایگذاری یک عدد دیگر امتحان کنید ☺

(۶) در تابع با ضابطه $f(x) = x^2 - 2[x]$ ([] نماد جزء صحیح) مقدار $f(-\frac{1}{2} f(\sqrt{3}))$ کدام است؟ (کنکور تجربی خارج ۹۰)

$\frac{3}{2}$ (۴) $-\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{9}{4}$ (۲) $-\frac{9}{4}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

راهنمایی: ابتدا $f(\sqrt{3})$ را حساب کنید نتیجه را در

$-\frac{1}{2}$ ضرب و سپس در f جایگذاری کنید.

فرزانه بایمانی دبیرریاضی شهرستان رامهرمز

فرزانه بایمانی دبیرریاضی شهرستان رامهرمز

تمریناتی برای تلاش بیشتر:

(۱) دامنه $f(x) = \frac{1}{|x-4|+3x}$ را محاسبه کنید. پاسخ:

$$(-\infty, 0]$$

(۲) نمودار $y = x - [x]$ را در بازه $[-3, 3]$ رسم کنید.

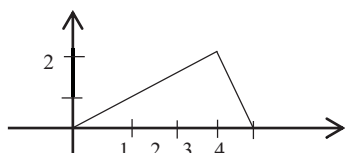
(۳) دامنه تابع $f(x) = \sqrt{\frac{2-\sqrt{x}}{x-2}}$ را بیابید و به صورت بازه بنویسید.

پاسخ: $D_f : (2, 4]$ (نیاز به تعیین علامت دارید).

(۴) تابع $y = x^2 [x]$ را در بازه $[-2, 4]$ رسم کنید.

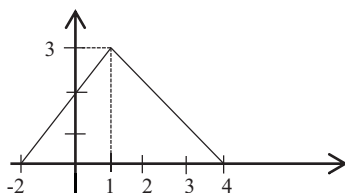
(۵) نمودار تابع f رسم شده است نمودار $g(x) = -2f(x) + 1$ و $h(x) = f(-2x + 4)$ را رسم

کنید. (مجمع آموزشی و تربیتی امام صادق (ع) - دوشنبه - تاجیکستان دی ۹۲)



(۶) نمودار تابع f با دامنه $[-2, 4]$ و برد $[0, 3]$ در شکل زیر داده شده است.

مطلوب است: نمودار، دامنه و برد تابع $y = 2f(-2-x) - 3$



فرزانه بایمانی دبیرریاضی شهرستان رامهرمز

درس دوم : وارون یک تابع و تابع یک به یک:

وارون یک تابع: اگر مؤلفه های همه ی زوج های مرتب تابع f را جابه جا کنیم رابطه جدیدی

به دست می آید که آن را وارون تابع f می گوئیم و با f^{-1} نشان می دهیم.

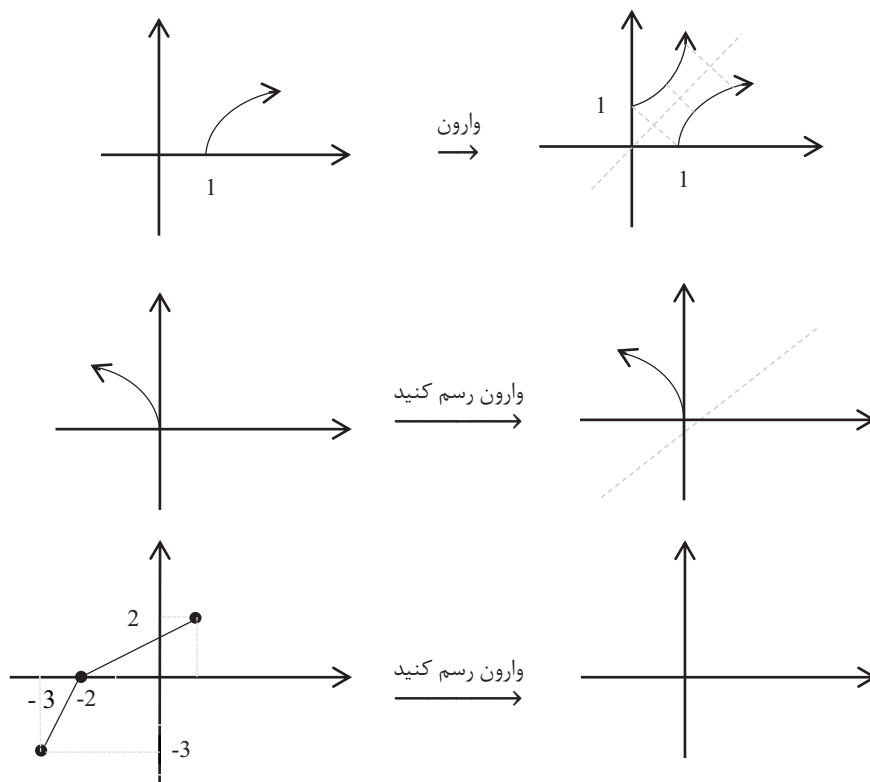
به عنوان مثال هر گاه $f = \{(1,2), (2,3), (3,4)\}$ آنگاه

$$f^{-1} = \{(2,1), (3,2), (4,3)\}$$

میباشد.

توجه: برای رسم نمودار وارون یک تابع کافی است قرینه نمودار آن تابع را نسبت به نیمساز

ربع اول و سوم رسم کنیم.



تابع یک به یک:

تعریف ۱: به تابعی که در زوج های مرتب متمایز خود ، مؤلفه های دوم تکراری نداشته باشد تابع یک به یک می گوییم.

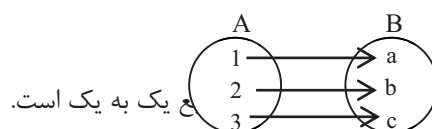
تعریف ۲: فرض کنید $f: A \rightarrow R$ یک تابع باشد ، اگر هر عضو از برد f فقط با یک عضو از A متناظر باشد آنگاه f را یک به یک گویند.

تعریف ۳: یک تابع یک به یک است هرگاه هر خط موازی محور X ها نمودار آن را در صورت قطع کردن فقط در یک نقطه قطع کند.

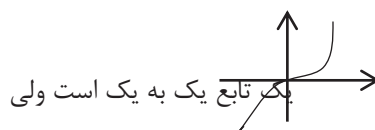
تعریف ۴: تابع f یک به یک است اگر برای هر دو نقطه X_1 و X_2 از دامنه f داشته باشیم:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

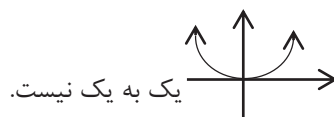
مثال ۱: تابع $f: \{(1,2), (2,4), (3,6)\}$ یک تابع یک به یک است.



مثال ۲: تابع



مثال ۳: تابع



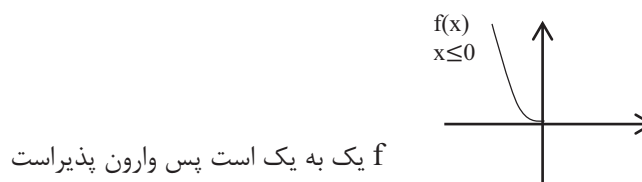
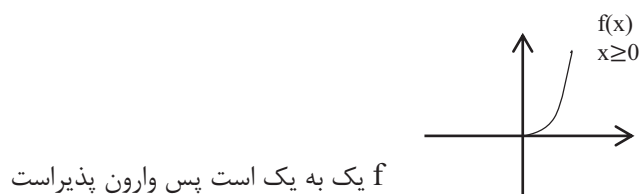
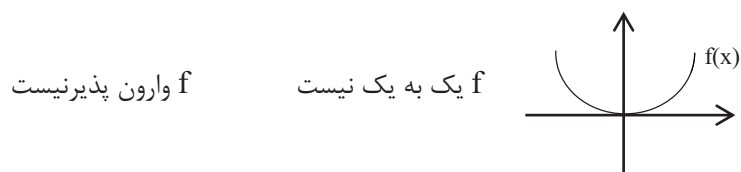
فرزانه بایمانی دبیرریاضی شهرستان رامهرمز

مثال ۴: تابع $f(x)=3x+2$ یک به یک است زیرا:

$$\begin{cases} f(x_1) = 3x_1 + 2 \\ f(x_2) = 3x_2 + 2 \end{cases} \Rightarrow 3x_1+2=3x_2+2 \Rightarrow 3x_1=3x_2 \Rightarrow x_1=x_2$$

نکته: اگر تابعی یک به یک باشد وارون پذیر خواهد بود

توجه: اگر تابعی یک به یک نباشد وارون پذیر هم نیست اما با کوچکتر کردن دامنه یک تابع ممکن است بتوانیم تابعی یک به یک بسازیم. به مثال زیر دقت کنید:



فرزانه بایمانی دبیرریاضی شهرستان رامهرمز

مثال: تابع $f(x) = |x| + 3$ دارای دامنه \mathbb{R} می باشد و یک به یک نیست اما اگر دامنه آن را محدود کنیم یعنی $D_f: [0, +\infty)$ یا $D_f: (-\infty, 0]$ در نظر بگیریم یک به یک است:

$$\begin{cases} f(x_1) = |x_1| + 3 \\ f(x_2) = |x_2| + 3 \end{cases} \Rightarrow |x_1| + 3 = |x_2| + 3 \Rightarrow |x_1| = |x_2| \Rightarrow x_1 = \pm x_2$$

به ازای یک x_2 دو مقدار برای x_1 بدست آمد پس یک به یک نیست اما اگر $D_f: [0, +\infty)$ در نظر بگیریم مقدار منفی قابل قبول نخواهد بود و تابع یک به یک می شود.

توجه: یک به یک بودن تابع از نظر ضابطه مثل مثال صفحه قبل در محدوده کتاب شما نیست

عصبانی نشوید اطلاعاتتون بالا رفت ☺

توجه: اگر f تابعی وارون پذیر باشد و وارون آن تابع g باشد. g تابعی است که برعکس f عمل می کند یعنی اگر $f(a) = b$ آنگاه $g(b) = a$.

نکته: اگر دو تابع f و g وارون یکدیگر باشند داریم: $D_f = R_g$ و $D_g = R_f$

تذکر: f^{-1} یک نماد است و نباید آن را با $\frac{1}{f(x)}$ اشتباه گرفت.

توجه: برای بدست آوردن ضابطه تابع وارون یک تابع وارون پذیر مانند f در معادله $y = f(x)$ ، x را برحسب y محاسبه می کنیم سپس با تبدیل y به x تابع

$f^{-1}(x)$ را بدست می آوریم.

مثال: ضابطه وارون $f(x) = \frac{x+3}{5}$ را محاسبه کنید.

$$y = \frac{x+3}{5} \Rightarrow 5y = x+3 \Rightarrow x = 5y-3 \Rightarrow f^{-1}(x) = 5x-3$$

فرزانه بایمانی دبیرریاضی شهرستان رامهرمز

توجه: در کتاب درسی فقط تابع خطی مدنظر است و معمولا وارون پذیر بودن تابع محرز است اما ما در اینجا وارون پذیر بودن هم نشان میدهیم:

$$\begin{cases} f(x_1) = \frac{x_1+3}{5} \\ f(x_2) = \frac{x_2+3}{5} \end{cases} \Rightarrow \frac{x_1+3}{5} = \frac{x_2+3}{5} \Rightarrow x_1+3 = x_2+3 \Rightarrow x_1 = x_2$$

سوال: ضابطه وارون $f(x) = 3x - 2$ را محاسبه کنید

مثال: ضابطه وارون $f(x) = \frac{x+1}{x-3}$ را محاسبه کنید.

$$y = \frac{x+1}{x-3} \Rightarrow xy - 3y = x+1 \Rightarrow xy - x = 1+3y \Rightarrow x(y-1) = 1+3y$$

$$\Rightarrow x = \frac{1+3y}{y-1} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1+3x}{x-1}$$

*برای نشان دادن وارون پذیری اش:

$$\begin{cases} f(x_1) = \frac{x_1+1}{x_1-3} \\ f(x_2) = \frac{x_2+1}{x_2-3} \end{cases} \Rightarrow \frac{x_1+1}{x_1-3} = \frac{x_2+1}{x_2-3} \Rightarrow (x_1+1)(x_2-3) = (x_2+1)(x_1-3)$$

$$\Rightarrow x_1x_2 - 3x_1 + x_2 - 3 = x_1x_2 - 3x_2 + x_1 - 3 \Rightarrow -3x_1 - x_1 = -3x_2 - x_2 \Rightarrow -4x_1 = -4x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

البته اگر نمیگفت وارون تابع را محاسبه کنید مثلا میگفت در صورت وجود وارونش را بیابید ابتدا باید وارون پذیری اش ثابت میشد ولی ما برای تمرین بیشتر یک به یک بودن یا وارون پذیری آن را هم نشان دادیم

سوال: نشان دهید $f(x) = \frac{3x-2}{5x-3}$ وارون خودش است.

فرزانه بایمانی دبیرریاضی شهرستان رامهرمز

مثال: اگر $f(x)=2x+5$ و $g(x)=mx+h$ باشد، مقادیر m و h را چنان بیابید که این دو تابع وارون یکدیگر باشند.

$$f(x)=2x+5 \Rightarrow y=2x+5 \Rightarrow 2x=y-5 \Rightarrow x = \frac{y-5}{2}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = g(x) \Rightarrow \frac{x-5}{2} = mx+h \Rightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{2} \\ h = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

سوال: وارون $f(x)=\sqrt{2x-1}$ را بدست آورید.

سوال: تحقیق کنید آیا دو تابع $f(x)=\frac{1}{x}+3$ و $g(x)=\frac{1}{x-3}$ وارون یکدیگرند؟ (نهایی حسابان دی ۹۴)

سوال: به کمک رسم نمودار، ثابت کنید تابع

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x - 1 & x < 0 \end{cases} \text{ وارون پذیر نیست. (نهایی حسابان خرداد ۹۴)}$$

سوال: نمودار تابعی مانند f را رسم کنید که در هر دو شرط زیر صدق کند:

فرزانه بایمانی دبیرریاضی شهرستان رامهرمز

الف) f وارون پذیر نباشد

ب) برای هر عدد حقیقی x ، $f(x) > x$

نکات کلیدی:

(۱) در توابع چند ضابطه ای برای معکوس پذیری باید هر ضابطه روی دامنه اش یک به یک باشد و بردها هم اشتراک نداشته باشند.

(۲) تابع خطی $f(x) = ax + b$ ($a \neq 0$) همیشه وارون پذیر است.

(۳) شیب یک تابع با شیب وارونش عکس همدیگرنند یعنی اگر شیب تابع f برابر با a باشد آنگاه شیب تابع f^{-1} برابر است با $\frac{1}{a}$

(۴) دو حالت وجود دارد که یک تابع خطی با وارونش برابر باشد:

حالت اول: تابع خطی $y = x$ با وارونش برابر است.

حالت دوم: وقتی شیب خط تابع برابر -1 باشد مثل $f(x) = 2 - x$

(۵) تابع هموگرافیک یعنی $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ همواره با شرط: $c \neq 0$ و $\frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}$ یک به یک است پس وارون پذیر است و می توان وارون آن را از $f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a}$ بدست آورد یعنی جای a و d را عوض کرد و b و c را منفی کرد.

فرزانه بایمانی دبیرریاضی شهرستان رامهرمز

d را عوض کرده و هر دو را قرینه می کنیم. و اگر a و d برابروقرینه هم باشند آنگاه وارون تابع هموگرافیک با خودش برابر است.

فرزانه بایمانی دبیرریاضی شهرستان رامهرمز

تست:

(۱) وارون $f(x) = \frac{2x-3}{x-2}$ عبارت است:

(ب) $f^{-1}(x) = \frac{-2x+3}{x+2}$

(الف) $f^{-1}(x) = \frac{2x+3}{x-2}$

(د) $f^{-1}(x) = \frac{2x-3}{x-2}$

(ج) $f^{-1}(x) = \frac{2x-3}{x+2}$

پاسخ: گزینه د از نکته شماره ۵ استفاده کنید.

(۲) شیب وارون تابع $2x-3y=3$ برابر است با:

(ب) $\frac{2}{3}$

(الف) $\frac{3}{2}$

(د) $-\frac{2}{3}$

(ج) $-\frac{3}{2}$

پاسخ: گزینه الف از نکته شماره ۳ استفاده کنید.

(۳) کدام تابع همیشه وارون پذیر است و وارونش با خودش برابر است؟

(ج) $\frac{2x+6}{3x+9}$

(ب) $y = \frac{x+1}{3}$

(الف) $y = 2x+1$

(د) $y = 4-x$

فرزانه بایمانی دبیرریاضی شهرستان رامهرمز

پاسخ: گزینه د از نکته ۴ و ۵ کمک بگیرید.

تمریناتی برای تلاش بیشتر:

(۱) اگر تابع f وارون پذیر باشد وارون تابع

$$h(x) = \frac{2f(x)+1}{f(x)-3} \text{ را بیابید.}$$

راهنمایی: اولاً $y=h(x) \Rightarrow x=h^{-1}(y)$ ثانیاً از رابطه $h(x)=y$ که $h(x)=y$ رابطه $f(x)$ را محاسبه کنید از طرفین f^{-1} بگیرید و سپس جای x مقدار مساویش را قرار دهید و در نهایت جای x و y را تعویض کنید.

(۲) نشان دهید $f(x) = x^2 - 4x + 3$ معکوس پذیر است.

(۳) f تابعی یک به یک است و f^{-1} معکوس f است. معکوس تابع $g(x) = 1 + 2f(x-3)$ را حساب کنید (نهایی حسابان خرداد ۸۸)

(۴) تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 1 \\ 2x - 1 & x < 1 \end{cases}$ مفروض است. ضابطه f^{-1} را بنویسید. (نهایی حسابان شهریور ۸۱)

راهنمایی: برای هر ضابطه جداگانه وارون را بیابید یعنی f^{-1} نیز دو ضابطه ای است.

(۵) a و b و c را طوری تعیین کنید که معکوس تابع f خودش باشد. $f(x) = \frac{x-a}{bx-c}$

(۶) ضابطه تابع وارون تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{x^3|x|}{x^4+1}$ را بدست آورید. (استعداد های درخشان علامه حلی دی ۹۶)

راهنمایی: ابتدا تابع را به صورت دو ضابطه ای بنویسید که قدر مطلق از بین برود و سپس هر ضابطه را جداگانه وارونش را محاسبه کنید. دقت کنید برد تابع برابر دامنه وارون می شود.

درس سوم: اعمال جبری روی توابع:

تعریف: دو تابع حقیقی f و g را در نظر می‌گیریم و دامنه آن‌ها را یکسان می‌کنیم یعنی دامنه آن‌ها را مجموعه $D = D_f \cap D_g$ قرار می‌دهیم. فرض کنید x متعلق به D باشد، در این صورت:

الف- مجموع دو تابع f و g را با نماد $f+g$ نشان می‌دهیم و آن را چنین تعریف می‌کنیم:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

ب- تفاضل دو تابع f و g را با نماد $f-g$ نشان می‌دهیم و آن را چنین تعریف می‌کنیم:

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

ج- حاصل ضرب دو تابع را با نماد $f.g$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(f.g)(x) = f(x) \times g(x)$$

د- تقسیم دو تابع f و g را با نماد $\frac{f}{g}$ نشان می‌دهیم و آن را چنین تعریف می‌کنیم:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad g(x) \neq 0$$

توجه: دامنه همه توابع تعریف شده در بالا $D_f \cap D_g$ است به جزء $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\}$$

مثال: توابع $f(x) = \sqrt{x+2}$ و $g(x) = \frac{2}{x-3}$ داده شده اند (نهائی ریاضی (۳) تجربی شهرپور

(۹۵)

الف) دامنه تابع $\frac{g}{f}$ را با استفاده از تعریف به دست آورید.

فرزانه بایمانی دبیرریاضی شهرستان رامهرمز

ب) ضابطه تابع $\frac{g}{f}$ را تشکیل دهید.

ج) حاصل عبارت $(3f-2g)(-1)$ را به دست آورید.

(الف)

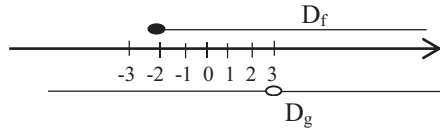
$$D_f: x+2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2 \Rightarrow D_f: [-2, +\infty)$$

$$D_g: x-3 = 0 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow D_g: \mathbb{R} - \{3\}$$

$$D_{\frac{g}{f}} = D_f \cap D_g - \{x \mid f(x)=0\} \Rightarrow D_{\frac{g}{f}} = [-2, 3) \cup (3, +\infty) - \{x \mid \sqrt{x+2}=0\}$$

$$\Rightarrow D_{\frac{g}{f}} = [-2, 3) \cup (3, +\infty) - \{x+2=0 \Rightarrow x=-2\} = (-2, 3) \cup (3, +\infty)$$

توجه:



بهترین کار برای اشتراک گرفتن محور است.

$$\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{\frac{2}{x-3}}{\sqrt{x+2}} = \frac{2}{(x-3)\sqrt{x+2}} \quad \text{ب)}$$

$$(3f-2g)(-1) = 3f(-1) - 2g(-1) = 3 \times 1 - 2 \times \frac{-1}{2} = 3 + 1 = 4 \quad \text{ج)}$$

سوال: توابع $f(x) = \frac{3x}{x-1}$ و $g(x) = \sqrt{x}$ داده شده اند. مقدار $\left(\frac{f-g}{2g}\right)(4)$ را محاسبه کنید.

(نهایی ریاضی (۳) تجربی خرداد ۹۳)

سوال: توابع $f(x) = x^2$ و $g(x) = \frac{1}{x}$ مفروضند مقدار $\sqrt{(2f-4g)(2)}$ را بدست آورید.

(نهایی ریاضی (۳) تجربی دی ماه ۸۱)

فرزانه بایمانی دبیرریاضی شهرستان رامهرمز

سوال: اگر $f(x) = x$ و $g(x) = \sqrt{x^2 + 3}$ باشد. (نهایی ریاضی (۳) تجربی خرداد ۹۶)

الف) دامنه تابع $\frac{g}{f}$ را با استفاده از تعریف بدست آورید.

ب) تابع $\frac{g}{f}$ را تشکیل دهید.

سوال: دو تابع $f(x) = \sqrt{x} + 2$ و $g(x) = \frac{1}{x-4}$ را در نظر بگیرید. (نهایی حسابان شهریور ۹۴)

دامنه تابع $\frac{f}{g}$ را بدست آورید.

مثال: اگر $f = \{(1,-1), (2,0), (3,2)\}$ و $g = \{(1,3), (4,-2), (2,4)\}$ حاصل عبارات زیر را بیابید.

الف) $f+g$ ب) $\frac{g}{f}$

الف) ابتدا دامنه $f+g$ را پیدا می کنیم: $D_{f+g} = \{1,2\}$

$$\begin{cases} (f+g)(1) = f(1) + g(1) = -1 + 3 = 2 \\ (f+g)(2) = f(2) + g(2) = 0 + 4 = 4 \end{cases} \Rightarrow f+g = \{(1,2), (2,4)\}$$

$$D_{\frac{g}{f}} = D_f \cap D_g - \{x \mid f(x) = 0\} = \{1,2\} - \{2\} = \{1\} \quad \text{ب)}$$

فرزانه بایمانی دبیرریاضی شهرستان رامهرمز

$$\frac{g}{f}(1) = \frac{g(1)}{f(1)} = \frac{3}{-1} = -3 \rightarrow \frac{g}{f} : \{(1, -3)\}$$

سوال: اگر $f = \{(1, 2), (-2, 5), (0, 7), (3, -4)\}$ و $g = \{(1, 4), (2, 9), (-2, 3)\}$ عبارات های زیر را محاسبه کنید.

الف) $f-g$ ب) $\frac{f}{g}$ را محاسبه کنید.

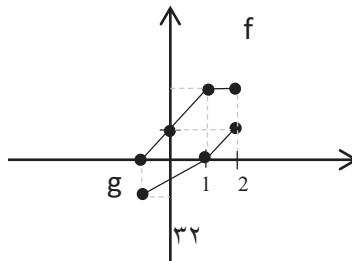
سوال: فرض کنید $f = \{(-4, 13), (-1, 7), (0, 5), (\frac{5}{2}, 0), (3, -5)\}$ و

$g = \{(-4, -7), (-2, -5), (0, -3), (3, 0), (5, 2)\}$ توابع $\frac{f}{g}$ و $f.g$ را محاسبه کنید.

سوال: اگر $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-3}}$ و $g(x) = \sqrt{3-x}$ باشد آیا تابع $f \times g$ وجود دارد؟ چرا؟

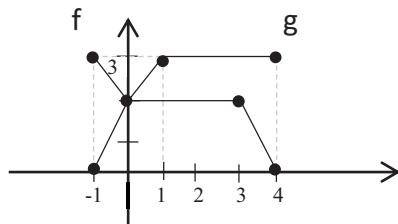
راهنمایی: $D_{f \times g}$ را محاسبه کنید.

سوال: نمودار توابع f و g در شکل زیر رسم شده است. نمودار $f+g$ را رسم کنید.



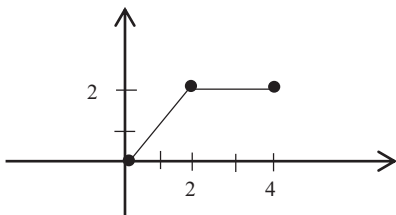
فرزانه بایمانی دبیرریاضی شهرستان رامهرمز

سؤال: نمودار دو تابع f و g در شکل زیر رسم شده است. نمودار $2f-g$ را رسم کنید.



توجه: اگر k عددی مثبت (منفی) باشد برای رسم نمودار تابع با ضابطه $y=kf(x)$ کافی است عرض هر نقطه از نمودار تابع با ضابطه $y=f(x)$ را k برابر کنیم.

سؤال: در شکل زیر نمودار تابع f داده شده است نمودار $y=-2f(x)$ را رسم کنید.



(کار در کلاس صفحه ۶۹ کتاب درسی)

تذکر: تمام نکته هایی که درمورد رسم توابع رادیکالی به کمک انتقال گفته شد در مورد سایر توابع نیز صادق است تنها تفاوت، نوع شکل هست.

تست:

۱) اگر $f^{-1} = \{(2,1), (3,-2), (4,-1)\}$ و $f-2g = \{(-2,-1), (-1,8)\}$ و تابع g یک به یک باشد کدام نقطه زیر حتماً روی g^{-1} قرار دارد؟

۱) $(-2, -1)$ ۲) $(-2, -1)$ ۳) $(-2, 1)$ ۴) $(1, -2)$

فرزانه بایمانی دبیرریاضی شهرستان رامهرمز

پاسخ: گزینه ۲ راهنمایی: f را بدست آورید سپس $D_f \cap D_{f-2g}$ نشان میدهد چه نقاطی حتماً در g حضور دارند و ...

$$\left. \begin{array}{l} f: N \rightarrow N \\ f(x) = 2x \end{array} \right\} \text{اگر توابع } f \text{ و } g \text{ به صورت}$$

$$g = \left\{ \left(1, \frac{2}{3}\right), (4, -1), (5, 1), (6, 4) \right\}$$

تعریف شوند تابع $f+g^{-1}$ کدام است؟

(۱) $\{(4, 1), (7, 1)\}$ (۲) $\{(3, 5), (2, 6)\}$

(۳) $\{(7, 4), (1, 1)\}$ (۴) $\{(2, 6), (1, 5)\}$

پاسخ: گزینه ۱ راهنمایی: $D_{g^{-1}} \cap D_f$ را حساب کنید و روی آن نقاط کار کنید.

$$(۳) \text{ اگر } f(x) = \sqrt{4-x^2} \text{ و } g(x) = \sqrt{3x-x^2} \text{ باشد دامنه } \frac{f}{g} \text{ کدام است؟}$$

(۱) $[-2, 2]$ (۲) $[-2, \frac{1}{2}]$ (۳) $[-\frac{1}{2}, 2]$ (۴) $(0, 2]$

پاسخ: گزینه ۴

فرزانه بایمانی دبیرریاضی شهرستان رامهرمز

۴) اگر $f = \{(2,7), (3,1), (1,4), (0,2)\}$ و $g = \{(3,4), (0,3), (4,2), (1,2)\}$ باشد برد تابع $f+g$ کدام است؟

(۱) $\{۵ و ۶\}$

(۲) $\{۵ و ۶ و ۲\}$

(۳) $\{۵ و ۶ و ۳\}$

(۴) $\{۶ و ۵ و ۴\}$

پاسخ: گزینه ۱

تمریناتی برای تلاش بیشتر:

۱- اگر $f(x) = \frac{x+1}{x^2-x}$ و $g(x) = \{(-1,2), (3,1), (1,2), (4,0), (0,1)\}$ باشند $f.g$ را بیابید.

فرزانه بایمانی دبیرریاضی شهرستان رامهرمز

۲- توابع $f(x)=ax^2+3$ و $g(x)=\begin{cases} bx & x \geq 0 \\ x-1 & x < 0 \end{cases}$ را در نظر گرفته و a و b را طوری بیابید که نمودار تابع $f-g$ محور طولها را در نقطه ای به طول ۱ قطع کرده و $(\frac{f}{g})(-1)=-\frac{5}{2}$ باشد.

۳- اگر $f(x)=x+\sqrt{x-1}$ و $g(x)=\{(-4,2),(2,-3),(5,7),(0,10)\}$ باشد مقدار

$(2)(\frac{5-3g}{g+g-1})$ را محاسبه کنید. (استعداد های درخشان شهید بهشتی اهواز خرداد ۹۷)

۴- اگر $f=\{(1,4),(4,-1),(3,4),(2,1)\}$ و $g=\{(1,3),(2,0),(3,2),(-1,2)\}$ باشند بدون جایگذاری تابع های f و g در رابطه،

دامنه تابع $\frac{f+g}{f-2g}$ را پیدا کنید.

۵- تابع $f=\{(m^4+2,5),(n^3+1,4)\}$ مفروض است ، n و m را طوری تعیین کنید که برد وارون f ، برابر $\{-7,18\}$ باشد. (غیرانتفاعی سرای دانش تهران دی ۹۶)