

سایت ویژه ریاضیات [www.riazisara.ir](http://www.riazisara.ir)

درسنامه ها و جزوه های ریاضی  
سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور  
نمونه سوالات امتحانات ریاضی  
نرم افزارهای ریاضیات

و...

@riazisara

ریاضی سرا در تلگرام:



<https://t.me/riazisara>

@riazisara.ir

ریاضی سرا در اینستاگرام:



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

$$2x^2yy' + y^2 = 2$$

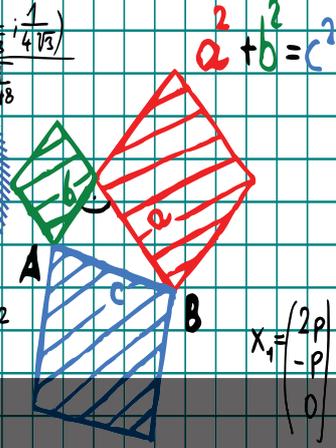
$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2; \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad \vec{n} = (F_x; F_y)$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

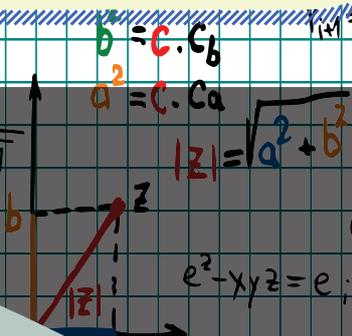
# ریاضی یازدهم تجربی

## فصل سوم



$$y = \sqrt{9x}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^3+1} + n}{\sqrt[3]{3n^2+2n-1}}$$



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$e^{-xyz} = e; A(0; e; 1) \quad \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad 2 \arctg x - x = 0, I = (1, 10)$$

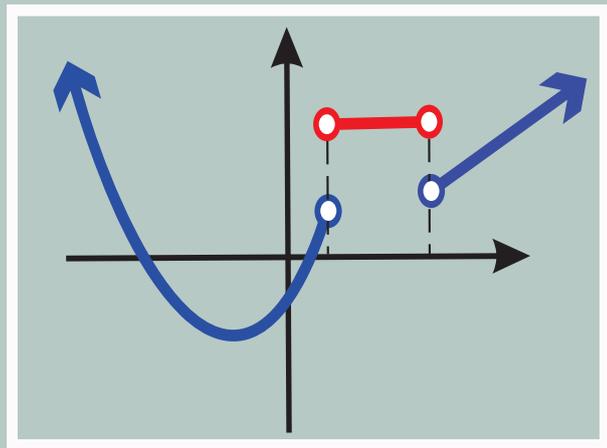
$$-\cos^2 x - \sin^2 x \quad \delta(p_2) = \sqrt{0; 16}$$

$$\text{grad} f = \left( \frac{\partial f}{\partial x}; \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{5x} = \frac{2}{5}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \end{pmatrix}$$

005



دبیر ریاضی: عادل آخندی

# تابع

دروس اول

آشنایی با برخی از انواع توابع

دروس دوم

وارون یک تابع و تابع یک به یک

دروس سوم

اعمال جبری روی توابع

۰۹۱۹۰۶۹۰۰۶۳

## درس اول

## آشنایی با برخی از انواع توابع

## توابع گویا

**یک جمله ای** : هر عبارت را، که به صورت حاصل ضرب یک عدد حقیقی در توان های صحیح و نامنفی یک یا چند متغیر باشد، یک

جمله ای می نامیم. مانند :  $2x, \frac{3}{5}, 4ab$

**چند جمله ای** : چنانچه تعدادی یک جمله ای غیر مشابه را با یکدیگر جمع جبری (جمع یا تفریق) کنیم، حاصل چند جمله ای است.

چند جمله ای می تواند یک جمله ای یا جمع جبری چند یک جمله ای غیرمتشابه باشد. مانند :  $\frac{2}{y}, 3a^4, 4x^2 + 4x + 1$

**عبارت گویا** : کسری که صورت و مخرج آن به صورت چند جمله ای باشد. مانند :  $\sqrt{3x - 6}, \frac{3x + 4}{2x - 7}$

**تابع گویا** : هر تابع به شکل  $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$  را یک تابع گویا می نامیم، که در آن  $P(x), Q(x)$  چندجمله ای هستند و

چندجمله ای  $Q(x)$  صفر نیست. توابع زیر مثال هایی از توابع گویا هستند :

$$f(x) = \frac{x}{x + 5}$$

$$f(x) = \frac{x + 3}{x - 10}$$

$$f(x) = \frac{x^2 + 5x}{2x - 6}$$

$$f(x) = \sqrt{5x}$$

$$f(x) = 2$$

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

**نکته** هر تابع چند جمله ای یک تابع گویاست. ولی عکس این جمله درست نیست.

**نکته** هر تابع ثابت، یک تابع گویاست.

**نکته** مجموع، تفریق، حاصل ضرب و حاصل تقسیم دو تابع گویا، یک تابع گویا است.

**مثال** ۱- مقدار عددی  $k$  را طوری بیابید که تابع  $f(x) = \frac{k\sqrt{x} - 3}{x + 2}$  یک تابع گویا باشد.

## دامنه توابع گویا

از سال های گذشته می دانیم مخرج هیچ کسری نمی تواند صفر باشد؛ به طور کلی اعدادی که مخرج کسر مربوط به ضابطه یک تابع گویا را صفر کنند، عضو دامنه آن تابع نیستند. به عنوان مثال، دامنه تابع گویای با ضابطه  $f(x) = \frac{5}{x - 2}$  برابر  $\mathbb{R} - \{2\}$  است.

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{Q(x) = 0\}$$

$$f(x) = \frac{x}{x + 5} \Rightarrow x + 5 = 0 \rightarrow x = -5 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{-5\}$$

$$g(x) = \frac{3}{x - 4} \Rightarrow x - 4 = 0 \rightarrow x = 4 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{4\}$$



تذکره همواره دامنه تابع را قبل از ساده کردن ضابطه آن محاسبه می‌کنیم. برای محاسبه دامنه تابع اجازه ساده کردن ضابطه را

نداریم.

$$h(x) = \frac{\sqrt{5x}}{x} \Rightarrow x = 0 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{0\}$$



مثال ۲- دامنه هر کدام از توابع زیر را بیابید.

الف)  $f(x) = \frac{3x^2 - 6}{x + 1}$

ب)  $f(x) = \frac{5}{(x + 1)^2}$

پ)  $f(x) = \frac{\frac{3}{x} - 6}{x^2 + 1}$

ت)  $f(x) = \frac{-2x}{(x - \sqrt{6})(x^2 - 1)}$

ث)  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^3 - x}$

ج)  $f(x) = \frac{x + 1}{|x| + 2}$

چ)  $f(x) = \frac{1 + \frac{1}{x + 1}}{1 - \frac{2}{x^2 - 1}}$



تست ۱- دامنه تابع  $f(x) = \frac{x^2 - \frac{8}{x}}{x^3 - \frac{16}{x}}$  برابر کدام است؟

۴)  $\mathbb{R} - \{0, 2, -2\}$

۳)  $\mathbb{R} - \{2, -2\}$

۲)  $\mathbb{R} - \{0, -2\}$

۱)  $\mathbb{R}$



مثال ۳- دامنه تابع  $f(x) = \frac{2x - 1}{3x^2 + ax + b}$  به صورت  $\mathbb{R} - \{1, 2\}$  است. مقدار  $a^2 + b^2$  را بیابید.



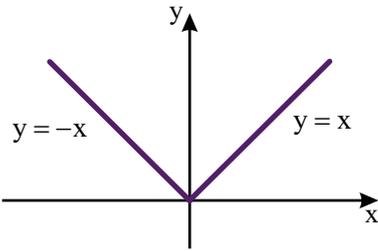
مثال ۴- حدود  $m$  را چنان تعیین کنید که دامنه تابع  $f(x) = \frac{3x}{x^2 + x + m}$  برابر  $\mathbb{R}$  شود.



مثال ۵- اگر  $g(x) = \frac{1}{x^2 - x - 6}$  و تابع  $f(x)$  به صورت  $f(x) = \frac{1}{g(x)}$  آنگاه دامنه تابع  $f(x)$  را بیابید.

یادآوری: همان طور که می دانیم تابع  $f(x) = |x|$  به صورت زیر است:

$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |f| = f & f \geq 0 \\ |f| = -f & f < 0 \end{cases}$$



همچنین نمودار آن به صورت مقابل است:

**مثال ۶** دامنه تابع  $f(x) = \frac{1}{|x| - x}$  را بیابید.

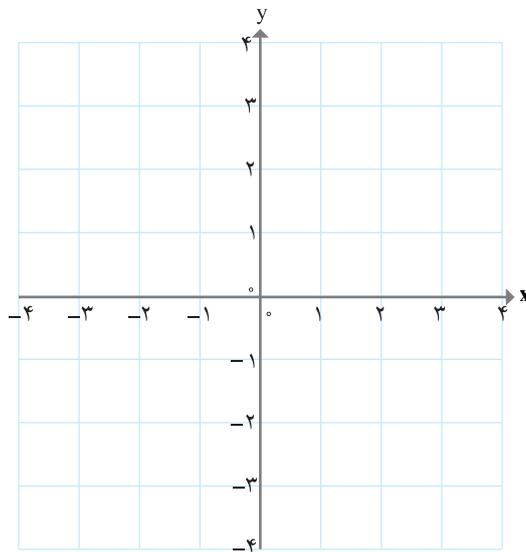
**مثال ۷** دامنه تابع  $f(x) = \frac{1}{|x| + x}$  را بیابید.

**معرفی تابع گویای**  $f(x) = \frac{1}{x}$

همان طور که می دانیم دامنه این تابع به صورت  $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$  است.

با کامل نمودن جدول زیر نمودار آن را رسم کنید.

|        |    |    |    |                |                |               |               |   |   |   |
|--------|----|----|----|----------------|----------------|---------------|---------------|---|---|---|
| $x$    | -۳ | -۲ | -۱ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{2}$ | ۱ | ۲ | ۳ |
| $f(x)$ |    |    |    |                |                |               |               |   |   |   |



مثال ۸- نمودار تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{1}{x}$  را با دامنه های زیر رسم کنید. سپس در هر حالت، برد آن را مشخص کنید.

الف)  $D_f = (0, +\infty)$

ب)  $D_f = [-5, 5] - \{0\}$

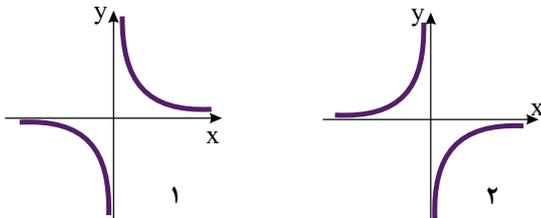
پ)  $D_f = \{1, 2, \frac{1}{3}, -\frac{1}{5}\}$

مثال ۹- نمودار هر کدام از توابع  $f(x) = -\frac{1}{x}$  و  $g(x) = |\frac{1}{x}|$  را رسم کنید.

### بررسی تابع هموگرافیک $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$

همان طور که مشاهده کردید نمودار تابع کسری ساده ای چون  $f(x) = \frac{1}{x}$  را می توان با نقطه گذاری رسم کرد. در حالت کلی

نمودار هر تابعی که به شکل  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$  (که در آن  $c$  صفر نباشد) شبیه یکی از دو نمودار زیر است:



پس برای رسم، آنها را در دو دسته زیر دسته بندی می کنیم:

الف) اگر  $ad - bc > 0$  آنگاه شاخه های نمودار به صورت افزایشی و مشابه شکل ۲ خواهد بود.

برای یافتن خطوط نقطه چین نیز از فرمول های  $x = -\frac{d}{c}$  و  $y = \frac{a}{c}$  استفاده می کنیم. برای درک بهتر موضوع به رسم نمودارهای زیر توجه کنید. دامنه و برد هر کدام از آنها را پس از رسم تعیین کنید.

ب)  $g(x) = \frac{x-2}{2x-1}$

الف)  $f(x) = \frac{2x-4}{x+3}$

ب) اگر  $ad - bc < 0$  آنگاه شاخه های نمودار به صورت کاهشی و مشابه شکل ۱ خواهد بود.

برای یافتن خطوط نقطه چین نیز از فرمول های  $x = -\frac{d}{c}$  و  $y = \frac{a}{c}$  استفاده می کنیم. برای درک بهتر موضوع به رسم نمودارهای زیر توجه کنید.

مثال ۱۰- نمودار هر کدام از توابع زیر را رسم کنید. سپس دامنه و برد آنها را مشخص کنید.

ب)  $g(x) = \frac{1}{x-3}$

الف)  $f(x) = \frac{2x-3}{x-2}$

مثال ۱۱- نمودار تابع  $g(x) = \frac{1}{x-1} + 2$  از کدام نواحی عبور می کند؟

تست ۲- برد تابع  $f(x) = \frac{x-3}{x-2}$  با دامنه  $\{2\} - (-\infty, 3]$  کدام است؟

(۱)  $(0, +\infty)$

(۲)  $[0, 1]$

(۳)  $(-\infty, 0] \cup (1, +\infty)$

(۴)  $(-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$

### بررسی یک فعالیت

یکی از معیارهای بررسی موفقیت یک بازیکن بسکتبال، بررسی «عملکرد پرتاب های آزاد اوست.» به این منظور، نسبت پرتاب های آزاد موفق هر بازیکن را به همه پرتاب های آزاد حساب می کنند. وحیده که عضو تیم بسکتبال مدرسه است، یک بازیکن موفق است، زیرا در مسابقات امسال، تا امروز، از ۱۰ پرتاب آزاد، ۷ پرتاب او موفق بوده است. بنابراین ۷۰ درصد پرتاب های آزاد او موفق بوده است. او دوست دارد عملکردش بهتر از این باشد.

الف) اگر تا پایان مسابقات همه پرتاب های آزاد وحیده موفق باشد، ضابطه تابع عملکرد پرتاب های آزاد او را بنویسید؟

ب) آیا تابع عملکرد پرتاب های آزاد وحیده، یک تابع گویاست؟

پ) توضیح دهید که پس از چند پرتاب آزاد موفق پیاپی دیگر، درصد موفقیت عملکرد وحیده ۸۰ درصد خواهد شد؟

**تست** ۳- بازیکنی ۱۰ پنالتی زده و ۶ تایی آنها را گل کرده است. اگر بعد از این، تمام پنالتی های خود را گل کند، ضابطه تابعی

که نشان دهنده درصد پنالتی های گل شده او نسبت به تعداد پنالتی هایی که زده است، کدام است؟

$$f(n) = \frac{n+6}{n+10} \quad (۴) \quad f(n) = \frac{100n+600}{n+10} \quad (۳) \quad f(n) = \frac{n-4}{n} \quad (۲) \quad f(n) = \frac{100n-400}{n} \quad (۱)$$

### تساوی دو تابع

دو تابع  $f$  و  $g$  را برابر نامیم هرگاه:

الف) دامنه  $f$  و دامنه  $g$  با هم برابر باشند.

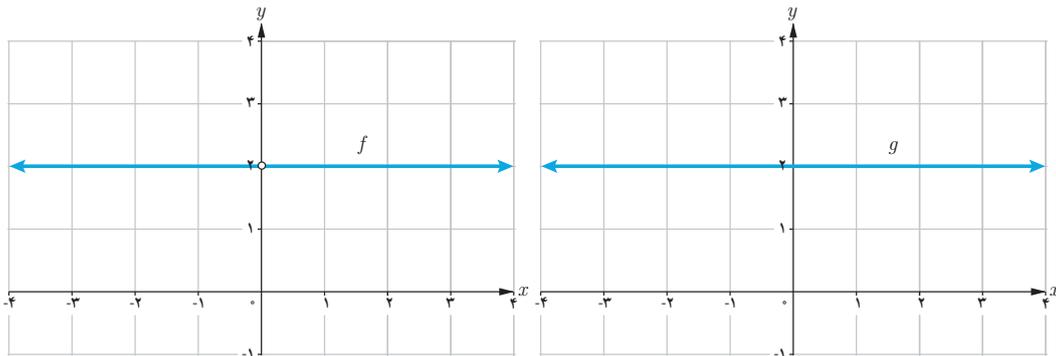
ب) برای هر  $x$  از این دامنه یکسان داشته باشیم:  $f(x) = g(x)$

بنابراین در صورت رسم نمودارهای دو تابع مساوی در یک دستگاه مختصات، باید نمودارهای آنها دقیقاً بر هم منطبق شوند.

**مثال** ۱۲- نمودار هر کدام از توابع زیر را در دامنه خود رسم کنید و بررسی کنید که آیا نمودار آنها بر هم منطبق است؟

$$f(x) = \frac{2x}{x} \quad \text{الف) (ب) } g(x) = 3$$

به نمودارهای دو تابع  $f(x) = \frac{2x}{x}$  و  $g(x) = 2$  توجه کنید.



می بینیم که نمودارهای این دو تابع کاملاً بر هم منطبق نیستند. در واقع با اینکه ضابطه دو تابع شبیه هم هستند و در صورت ساده شدن ضابطه های دو تابع برابر می شوند ولی دامنه دو تابع با هم متفاوت اند، زیرا داریم:

$$D_f = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$D_g = \mathbb{R}$$

در نتیجه این دو تابع با هم برابر نیستند.

**تذکره** همان طور که قبلاً هم گفته شد، همواره دامنه تابع را قبل از ساده کردن ضابطه آن محاسبه می کنیم.

**مثال** ۱۳- در کدام یک از حالت های زیر دو تابع  $f$  و  $g$  با هم برابرند؟

$$g(x) = x \quad f(x) = \frac{x^3}{x^2} \quad (\text{الف})$$

$$g(x) = x^2 \quad f(x) = \frac{x^2}{x} \quad (\text{ب})$$

$$g(x) = 1 \quad f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \quad (\text{پ})$$

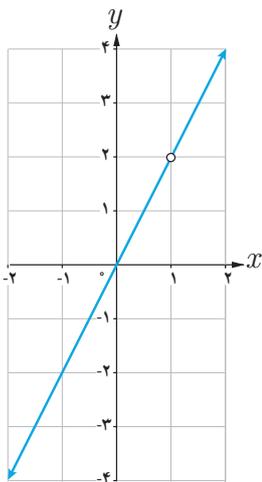
$$g(x) = x + 1, D_g = \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}, D_f = \mathbb{R} - \{1\} \quad (\text{ت})$$

$$g(x) = x + 1, D_g = \mathbb{R} - \{1\} \quad f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}, D_f = \mathbb{R} - \{1\} \quad (\text{ث})$$

### بررسی یک فعالیت

(۱) آیا دو تابع  $f(x) = \frac{x^2}{x}$  و  $g(x) = x$  با هم برابرند؟ چرا؟

(۲) نمودار تابع مقابل مربوط به کدامیک از توابع زیر است؟ مسئله چند جواب دارد؟



$$g(x) = 2x \quad D_g = \mathbb{R} \quad (\text{الف})$$

$$g(x) = 2x \quad D_g = \mathbb{R} - \{2\} \quad (\text{ب})$$

$$g(x) = 2x \quad D_g = \mathbb{R} - \{1\} \quad (\text{پ})$$

$$g(x) = \frac{2x^2 - 2x}{x - 1} \quad D_g = \mathbb{R} - \{1\} \quad (\text{ت})$$

$$g(x) = \frac{2x^2 - 4x}{x - 2} \quad D_g = \mathbb{R} - \{2\} \quad (\text{ث})$$

**مثال** ۱۴- نمودار هر کدام از توابع زیر را رسم کنید. سپس مشخص کنید که آیا با هم برابرند؟

$$g(x) = \frac{|x|}{x} \quad f(x) = \frac{x}{|x|} \quad (\text{الف})$$

$$g(x) = x + 2 \quad f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} \quad (\text{ب})$$

$$g(x) = \frac{|x|}{x} \quad f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \quad (\text{پ})$$

$$g(x) = \frac{|x|}{-2x} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & x > 0 \\ -\frac{1}{2} & x < 0 \end{cases} \quad (\text{ت})$$

سوال: دو تابع  $f$  و  $g$  مفروض اند. در کدام گزینه دو تابع مساوی اند؟

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2}}{|x|}, g(x) = 1 \quad (2) \quad f(x) = \frac{x^2}{x}, g(x) = x \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{x}{|x|}, g(x) = \frac{|x|}{x} \quad (4) \quad f(x) = (\sqrt{x})^2, g(x) = x \quad (3)$$

**نکته** برای تساوی دو تابع، ابتدا دامنه توابع را می یابیم. در صورتی که برابر بودند، سراغ ضابطه ها می رویم. در حالتی که پس از ساده کردن، ضابطه ها برابر بودند دو تابع مساوی اند.

### بررسی تابع رادیکالی در حالت ساده

می خواهیم نمودار تابع  $f(x) = \sqrt{x}$  را در دامنه خود رسم کنیم. ابتدا جدول را کامل کنید:

|        |   |   |   |   |
|--------|---|---|---|---|
| $x$    | 0 | 1 | 4 | 9 |
| $f(x)$ |   |   |   |   |



**نتیجه** با توجه به نمودار رسم شده می توان گفت که دامنه تابع  $f(x) = \sqrt{x}$  برابر ..... و برد آن برابر ..... است.

بررسی انتقال های افقی و عمودی در تابع  $f(x) = \sqrt{x}$

الف) انتقال افقی (حرکت در راستای محور طول ها):  $f(x) = \sqrt{x+a}$

$$f(x) = \sqrt{x+a} \Rightarrow \begin{cases} a > 0 \rightarrow \\ a < 0 \rightarrow \end{cases}$$

مثال ۱۵- نمودار توابع  $f(x) = \sqrt{x+1}$ ,  $f(x) = \sqrt{x-2}$  را به کمک انتقال رسم نمایید.

ب) انتقال عمودی (حرکت در راستای محور عرض ها):  $f(x) = \sqrt{x} + b$

$$f(x) = \sqrt{x} + b \Rightarrow \begin{cases} b > 0 \rightarrow \\ b < 0 \rightarrow \end{cases}$$

مثال ۱۶- نمودار توابع  $f(x) = \sqrt{x} + 1$ ,  $f(x) = \sqrt{x} - 2$  را به کمک انتقال رسم نمایید.

### بررسی یک فعالیت

مثال ۱۷- با انتقال نمودار تابع با ضابطه  $f(x) = \sqrt{x}$ ، نمودار مربوط به توابع زیر را رسم نموده، دامنه و برد آنها را بیابید.

الف)  $f(x) = -2 + \sqrt{x+3}$

ب)  $f(x) = \sqrt{x-2} + 1$

پ)  $f(x) = -\sqrt{x-2} + 1$

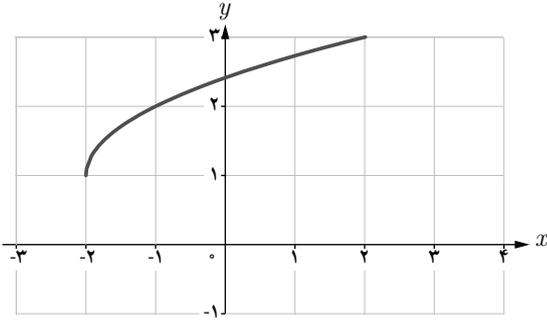
مثال ۱۸- نمودار توابع  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $g(x) = -\sqrt{x}$ ,  $h(x) = \sqrt{-x}$ ,  $k(x) = -\sqrt{-x}$  را در یک صفحه مختصات رسم کنید.

مثال ۱۹- با استفاده از نمودار  $f(x) = \sqrt{x}$  مقدار  $a$  را طوری بیابید که دامنه تابع  $f(x) = \sqrt{x+a}$  برابر با  $[3, +\infty)$  شود.



مثال ۲۰- در شکل مقابل نمودار تابع  $f(x) = a + \sqrt{x+b}$  با استفاده از نمودار تابع  $f(x) = \sqrt{x}$  ، رسم شده است.

مقادیر  $a, b$  را بیابید.



بررسی دامنه تابع رادیکالی  $y = \sqrt{f(x)}$  :

در این حالت کافی است نامعادله  $f(x) \geq 0$  را به کمک روش هایی چون تعیین علامت حل کنیم.

سوال : دامنه هر کدام از توابع زیر را بیابید.

الف)  $f(x) = \sqrt{x-1}$

ب)  $f(x) = \sqrt{-x+1}$

پ)  $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

ت)  $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

ث)  $f(x) = \sqrt{x-1} + \frac{1}{\sqrt{2-x}}$

تست ۴- دامنه تابع  $f(x) = \frac{\sqrt{25-x^2}}{\sqrt{x-1}-1}$  کدام است؟

- (۱)  $[-5, 5] - \{2\}$       (۲)  $[-5, 5] - \{1\}$       (۳)  $[1, 5] - \{2\}$       (۴)  $[1, 5] - \{1\}$

نکته در تابع  $y = \sqrt[3]{f(x)}$  دامنه تابع به صورت  $D_y = D_f$  است.

سوال : دامنه تابع  $y = \sqrt[3]{\frac{2x-3}{x^2-1}}$  را بیابید.

نکته در تابع  $y = \frac{a}{\sqrt{f(x)}}$  دامنه تابع به صورت  $f(x) > 0$  است.

مثال ۲۱- دامنه تابع  $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{3x-4}}$  را بیابید.

**مثال ۲۲** - دامنه تابع  $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{4 - x^2}}$  را بیابید.

**توابع پله ای و تابع جز صحیح**

**هزینه پارکینگ خودرو**

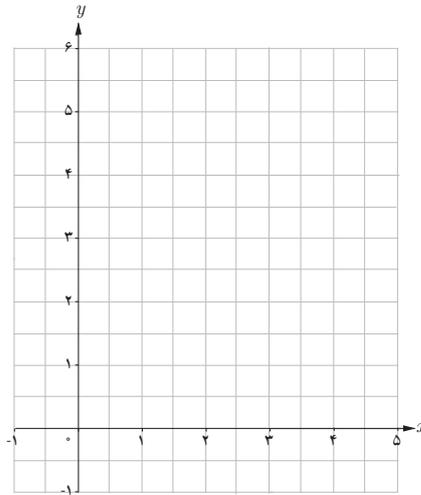
در یک پارکینگ هزینه پارک خودرو به این صورت محاسبه می شود :

الف) ضابطه تابع هزینه پارکینگ خودرو چیست ؟

ب) نمودار این تابع را رسم کنید.

| هزینه<br>(هزار تومان) | زمان              |                      |
|-----------------------|-------------------|----------------------|
| ۳                     | تا کمتر از ۲ ساعت | از هنگام ورود        |
| ۴                     | تا ۲/۵ ساعت       | از ۲ ساعت            |
| ۵                     | تا کمتر از ۳ ساعت | از بیشتر از ۲/۵ ساعت |
| ۶                     | تا ۵ ساعت         | از ۳ ساعت            |

$$f(x) = \begin{cases} 3 & 0 \leq x < 2 \\ 4 & 2 \leq x \leq \dots \\ 5 \\ 6 \end{cases}$$



به توابعی مانند تابع هزینه پارکینگ، توابع پله ای می گویند. توابع پله ای در تجارت یا خرید و فروش نقش تعیین کننده ای دارند.

مشهورترین تابع پله ای، تابع جزء صحیح است.

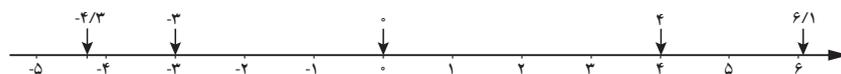
**مثال ۲۳** - تابع پله ای زیر را رسم کنید

$$f(x) = \begin{cases} 3 & -2 \leq x < 1 \\ 0 & 1 \leq x \leq 5 \\ 2 & 5 < x \leq 6 \end{cases}$$

**تابع جزء صحیح :** تابع جزء صحیح به هر عدد صحیح، خود همان عدد صحیح را نسبت می دهد و به هر عدد

غیر صحیح، بزرگ ترین عدد صحیح کوچک تر از آن عدد را نسبت می دهد. ضابطه این تابع به صورت  $f(x) = [x]$  نشان داده می شود.

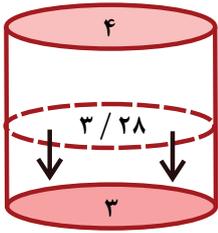
$$[4] = 4 \quad [6/1] = 6 \quad [0] = 0 \quad [-4/3] = -5 \quad [-3] = -3$$



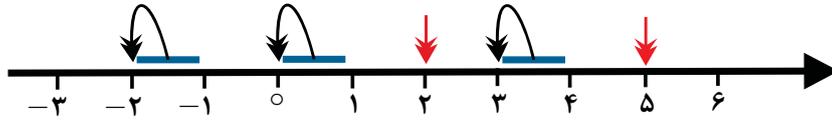
همان طور که در مثال دیدیم، جزء صحیح هر عدد غیر صحیح، برابر است با اولین عدد صحیح سمت چپ آن روی محور اعداد.

برای مثال داریم:

$[4] = 4$        $[6/1] = 6$        $[0] = 0$        $[-4/3] = -5$        $[-3] = -3$



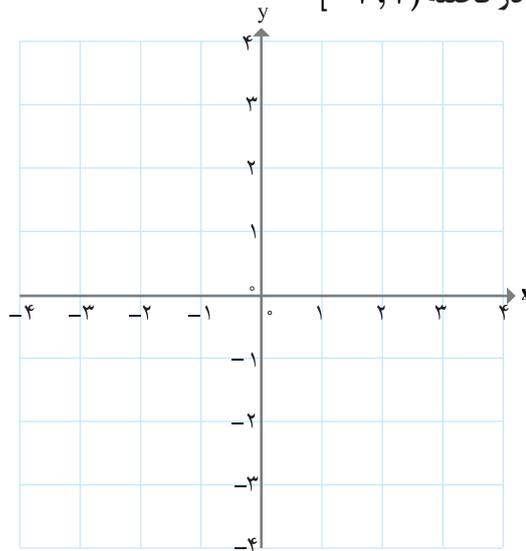
دید شهودی جزء صحیح



مثال ۲۴- با کمک گرفتن از محور اعداد، جزء صحیح اعداد خواسته شده را به دست آورید.

|                   |                   |                    |                        |                      |
|-------------------|-------------------|--------------------|------------------------|----------------------|
| $[-3/4] =$        | $[-2] =$          | $[-1/9] =$         | $[0/4] =$              | $[-0/4] =$           |
| $[4/25] =$        | $[\frac{2}{5}] =$ | $[223/3] =$        | $[-2395/2] =$          | $[-\pi] =$           |
| $[\sqrt{-100}] =$ | $[\sqrt{2}] =$    | $[3\frac{1}{8}] =$ | $[12/2 \times 12/8] =$ | $[\frac{-13}{15}] =$ |

رسم تابع پله ای  $f(x) = [x]$  در فاصله  $[-3, 3]$



$-3 \leq x < -2 \rightarrow f(x) = -3$   
 $-2 \leq x < -1 \rightarrow f(x) = -2$   
 $\dots \leq x < \dots \rightarrow f(x) = \dots$   
 $\dots \leq x < \dots \rightarrow f(x) = \dots$   
 $\dots \leq x < \dots \rightarrow f(x) = \dots$   
 $\dots \leq x < \dots \rightarrow f(x) = \dots$

نتیجه با توجه به نمودار می توان گفت که دامنه تابع  $f(x) = [x]$  برابر ..... و برد آن برابر ..... است.

مثال ۲۵- نمودار تابع  $f(x) = [x] + 2$  را در فاصله  $[-3, 3]$  رسم کنید.

مثال ۲۶- نمودار تابع  $f(x) = [x] - 1$  را در فاصله  $[-2, 2]$  رسم کنید.

۱)  $[x] \in \mathbb{Z}$

همان طور که می دانیم برد تابع جزء صحیح اعداد صحیح است لذا :

۲)  $[x] = n \rightarrow n \leq x < n + 1, n \in \mathbb{Z}$

مثال ۲۷- اگر  $[x] = ۲$  باشد، آنگاه  $x$  برای چه اعدادی می تواند باشد؟

مثال ۲۸- حاصل عبارت های زیر را بیابید.

a)  $[x] = ۷$

b)  $۲ \leq x < ۳$

c)  $[۲x] = ۶$

d)  $-۵ < x < -۳$

مثال ۲۹- معادله  $[x] + ۲[x] = ۹$  را حل کنید.تست ۴- هرگاه  $-\frac{۴}{۳} \leq x < -۱$  باشد حاصل  $[۳x - ۱]$  کدام است؟

|       |        |       |        |
|-------|--------|-------|--------|
| ۴ (۱) | -۴ (۲) | ۵ (۳) | -۵ (۴) |
|-------|--------|-------|--------|

تست ۵- اگر جزء صحیح  $x + x^۲$  برابر ۱- باشد آنگاه  $[x^{۲۰}]$  کدام است؟

|        |         |       |       |
|--------|---------|-------|-------|
| -۲ (۱) | صفر (۲) | ۱ (۳) | ۲ (۴) |
|--------|---------|-------|-------|

۳)  $x \in \mathbb{Z} \rightarrow [x] = x$

۴)  $[x \pm n] = [x] \pm n \quad n \in \mathbb{Z} \rightarrow [x - ۲] = [x] - ۲$

مثال حاصل معادله  $[۲x - ۱] = ۵$  را بیابید.مثال حاصل معادله  $[x + [x]] = ۳$  را بیابید.نکته فراموش نکنیم که در حالت کلی:  $[kx] \neq k[x]$ نکته معادله مقابل جواب ندارد:  $[x] = m, m \notin \mathbb{Z}$ مثال حاصل معادله  $[۲x - ۱] = ۰/۳$  را بیابید.مثال دامنه تابع  $f(x) = \frac{۲x}{[x] - ۳}$  را بیابید.

**تست** ۶- معادله ی  $\sqrt{x-1} + [x] = 0$  چند جواب دارد؟

- (۱) ۰      (۲)      (۳) ۲      (۴) بی شمار

**تست** ۷- حاصل  $||[5x] - [7x]||$  به ازای  $x = -\frac{1}{2}$  کدام است؟

- (۱) ۱      (۲) ۳      (۳) ۵      (۴) ۷

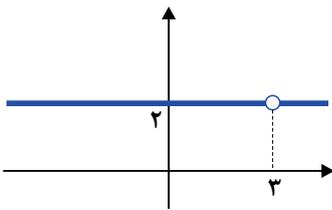
بررسی چند سوال تشریحی جهت جمع بندی

**مثال** ۳۰- به ازای چه مقداری از  $x$  دامنه تابع  $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x + a}$  برابر کل اعداد حقیقی است؟

**مثال** ۳۱- نمودارهای توابع  $f(x) = \frac{x^2}{|x|}$  و  $g(x) = \frac{|x^2|}{x}$  را رسم کنید.

**مثال** ۳۲- برد تابع  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x > 2 \\ -x + 1 & x \leq 2 \end{cases}$  را به کمک رسم نمودار بیابید.

**مثال** ۳۳- نمودار مقابل مربوط به تابع  $f(x) = \frac{ax - 6}{x + b}$  است.  $a + b$  را بیابید.



**مثال** ۳۴- نمودار تابع  $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$  را پس از مشخص کردن دامنه رسم نمایید.

**مثال** ۳۵- آیا دو تابع  $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$  و  $g(x) = \sqrt{2 - x}\sqrt{2 + x}$  با هم برابرند؟

**مثال** ۳۶- حاصل مجموع  $[10^5] + [10^4] + [10^3] + \dots + [10^0]$  را بیابید.

**مثال** ۳۷- دامنه تابع  $f(x) = \frac{x+6}{|x-2|-1}$  را بیابید.

**مثال** ۳۸- دامنه تابع  $f(x) = \frac{x-3}{[x]^2 - [x]}$  را بیابید.

بررسی نمودار تابع زنجیره ای  $f(x) = [x] + [-x]$

**مثال** ۳۹- دامنه تابع  $f(x) = \frac{1}{[x] + [-x]}$  را بیابید.

بررسی نمودار تابع اره ای  $f(x) = x - [x]$

**تست** ۸- بازیکنی ۲۰ پنالتی زده که ۱۲ تای آنها را گل کرده است. اگر او تمام پنالتی هایی که بعد از این میزند را گل کند، حداقل چند پنالتی دیگر باید بزند که درصد گل شدن پنالتی هایش از ۹۰ درصد بیشتر شود؟

- ۵۸ (۱)      ۵۹ (۲)      ۶۰ (۳)      ۶۱ (۴)

**تست** ۹- کدام یک از ضابطه های زیر متعلق به یک تابع گویا نیست؟

(۱)  $f(x) = 2 - \sqrt{3x}$       (۲)  $f(x) = \frac{40x}{40-x}$       (۳)  $f(x) = \frac{x}{40-x}$       (۴)  $f(x) = \frac{40x}{40+x}$

**تست** ۱۰- اگر  $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 5}{x^2 + 4x + 7}$  باشد، مقدار  $f(\sqrt{3} - 2)$  کدام است؟

- ۵ (۱)      ۳ (۲)      ۲ (۳)      ۱ (۴)

**تست ۱۱** کدام گزینه نادرست است؟

- (۱) هر تابع چندجمله‌ای، یک تابع گویا است.  
 (۲) دامنه یک تابع گویا هرگز برابر تمام  $\mathbb{R}$  نیست.  
 (۳) مجموع دو تابع گویا، یک تابع گویا است.  
 (۴) هر تابع ثابت، یک تابع گویا است.

**تست ۱۲** دامنه تابع  $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$  برابر کدام است؟

- (۱)  $\mathbb{R} - \{1\}$  (۲)  $\mathbb{R} - \{0\}$  (۳)  $\mathbb{R} - \{1, -1\}$  (۴)  $\mathbb{R}$

**تست ۱۳** دامنه تابع  $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x^3 - 4x}$  برابر کدام است؟

- (۱)  $\mathbb{R} - \{-2\}$  (۲)  $\mathbb{R} - \{2, -2\}$  (۳)  $\mathbb{R} - \{0, 2, -2\}$  (۴)  $\mathbb{R} - \{0, -2\}$

**تست ۱۴** دامنه تابع  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{|x| - 1}$  برابر کدام است؟

- (۱)  $\mathbb{R} - \{1\}$  (۲)  $\mathbb{R} - \{1, -1\}$  (۳)  $\mathbb{R}$  (۴)  $\emptyset$

**تست ۱۵** دامنه تابع  $f(x) = \frac{2x + 1}{x - |x|}$  برابر کدام است؟

- (۱)  $\emptyset$  (۲)  $\mathbb{R}$  (۳)  $(-\infty, 0)$  (۴)  $(0, +\infty)$

**تست ۱۶** دامنه تابع  $f(x) = \frac{\frac{1}{2x} - \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x-2}}$  برابر کدام است؟

- (۱)  $\mathbb{R} - \{-1, 0, 1, 2\}$  (۲)  $\mathbb{R} - \{-1, 0, 2\}$  (۳)  $\mathbb{R} - \{0, -1\}$  (۴)  $\mathbb{R} - \{1\}$

**تست ۱۷** اگر  $f(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 3x}$  باشد، دامنه تابع  $g(x) = \frac{1}{f(x)}$  برابر کدام است؟

- (۱)  $\mathbb{R} - \{0\}$  (۲)  $\mathbb{R} - \{-2, 3\}$  (۳)  $\mathbb{R} - \{0, 3\}$  (۴)  $\mathbb{R} - \{0, -2, 3\}$

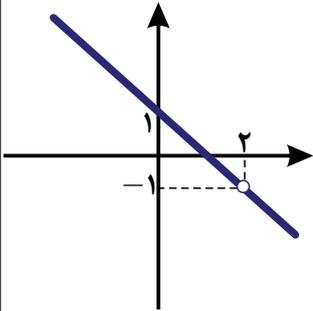
**تست ۱۸** اگر دامنه تابع  $f(x) = \frac{ax^2 + cx + b}{x^2 + bx + c}$  به صورت  $\mathbb{R} - \{-3, 2\}$  باشد،  $b + c$  برابر کدام است؟

- (۱)  $-5$  (۲)  $5$  (۳)  $-7$  (۴)  $7$

۱۹- تست دامنه تابع  $f(x) = \frac{x+2}{x^2+ax+9}$  برابر  $\mathbb{R}$  باشد، تمام حدود  $a$  کدام است؟

- (۱)  $a < 6$  (۲)  $-6 < a < 6$  (۳)  $a \leq 6$  (۴)  $-6 \leq a \leq 6$

۲۰- نمودار روبه رو متعلق به کدام تابع است؟



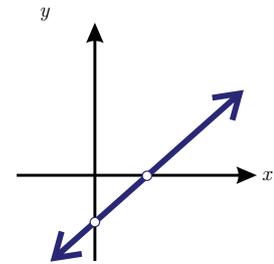
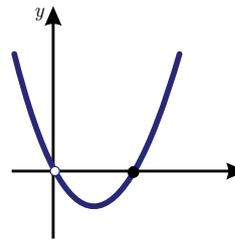
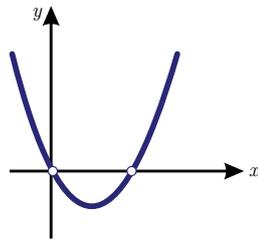
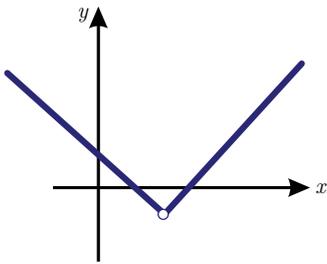
$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{2 - x} \quad (۲)$$

$$f(x) = \frac{-x^2 - 3x + 2}{x - 2} \quad (۴)$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} \quad (۱)$$

$$f(x) = \frac{-x^2 + 3x - 2}{2 - x} \quad (۳)$$

۲۱- کدام یک نمودار تابع  $f(x) = \frac{(x^2 - 2x)^2}{x^2 - 2x}$  را مشخص می کند؟



۲۲- اگر  $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$  و  $g(x) = \sqrt{x^2 + 4}$  و  $0 < a < 1$  باشد، حاصل  $f(a + \frac{1}{a}) + g(a - \frac{1}{a})$  کدام است؟

- (۱)  $2a$  (۲)  $\frac{2}{a}$  (۳)  $\frac{a}{2}$  (۴)  $-\frac{2}{a}$

۲۳- دامنه تعریف تابع  $y = \sqrt{x + |x|}$  کدام است؟

- (۱)  $x < 0$  (۲)  $\mathbb{R}$  (۳)  $D_f = \{0\}$  (۴)  $x \geq 0$

۲۴- دامنه تابع  $y = \frac{\sqrt{x-2}}{|x|-4}$  برابر کدام است؟

- (۱)  $x \geq 2$  (۲)  $x \geq 2, x \neq 4$  (۳)  $x \geq -4$  (۴)  $x \geq 0, x^2 \neq 16$

۲۵- دامنه تابع  $f = \left\{ (x, y) : y = \sqrt{\frac{1-|x|}{1+|x|}} \right\}$  کدام مجموعه است؟

- (۱)  $\mathbb{R}$  (۲)  $x \leq 1$  (۳)  $x \geq 1$  (۴)  $-1 \leq x \leq 1$

تست ۲۶- دامنه تابع  $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x-3}} + \sqrt{\frac{2-x}{x}}$  کدام فاصله است؟

- (۱)  $(0, 1]$  (۲)  $(0, 3)$  (۳)  $[1, 2]$  (۴)  $(2, 3)$

تست ۲۷- دامنه تابع  $f(x) = \frac{\sqrt{16-x^2}}{|x|-2}$  شامل چند عدد طبیعی است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

تست ۲۸- دامنه تابع  $f(x) = \frac{\sqrt{x(x^2-1)}}{\sqrt{|x|+x}}$  کدام است؟

- (۱)  $(1, +\infty)$  (۲)  $(-\infty, 1)$  (۳)  $(-\infty, 1]$  (۴)  $[1, +\infty)$

تست ۲۹- دامنه تابع  $y = \sqrt{\sqrt{x}-x}$  کدام است؟

- (۱)  $\{0\}$  (۲)  $\{0, 1\}$  (۳)  $[0, 1]$  (۴)  $\mathbb{R} - (0, 1)$

تست ۳۰- دامنه تابع  $y = \sqrt{\frac{2}{x-2}} - 1 + 1$  شامل چند عدد صحیح است؟

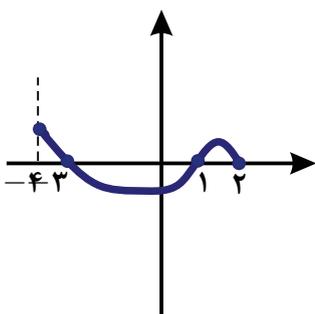
- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

تست ۳۱- اگر  $f(x) = \sqrt{2x-x^2}$ ، دامنه تابع  $f(3-x)$  کدام است؟ (تجربی داخل ۹۲)

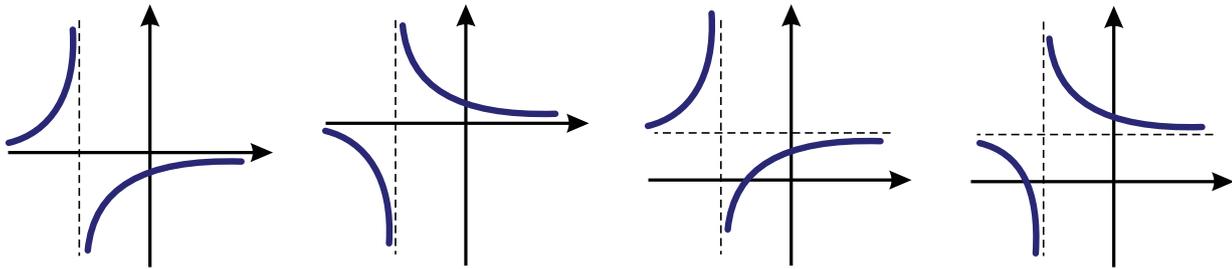
- (۱)  $[0, 2]$  (۲)  $[0, 3]$  (۳)  $[1, 3]$  (۴)  $[1, 2]$

تست ۳۲- شکل روبه رو نمودار تابع  $y = f(x)$  است. دامنه تابع  $\sqrt{xf(x)}$  کدام است؟

- (۱)  $[0, 2]$  (۲)  $[-3, 2]$  (۳)  $[-4, -3] \cup [1, 2]$  (۴)  $[-3, 0] \cup [1, 2]$



۳۳- تست کدام یک نمودار تابع  $f(x) = \frac{1}{x+2}$  است؟



۳۴- تست در کدام گزینه توابع  $f$  و  $g$  با یکدیگر مساویانند؟

(۲)  $f(x) = |x^2 - x|$ ,  $g(x) = |x| |1 - x|$

(۱)  $f(x) = \frac{x^8 - 1}{x^4 - 1}$ ,  $g(x) = x^2 + 4$

(۴) هر سه مورد ۱، ۲ و ۳

(۳)  $f(x) = \left[ \frac{1}{x^2 + 1} \right]$ ,  $g(x) = 0$

۳۵- تست تابع  $f(x) = 1 - \frac{2}{x}$  با کدام یک از تابع های زیر مساوی است؟

(۱)  $g(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + x}$  (۲)  $g(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 2x}$  (۳)  $g(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{x^3}$  (۴)  $g(x) = \frac{x^2 - 2x}{x^3}$

۳۶- تست کدام یک از جفت تابع های زیر با هم برابرند؟

(۲)  $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2 - 4} \\ g(x) = \sqrt{x - 2} \sqrt{x + 2} \end{cases}$

(۱)  $\begin{cases} f(x) = \frac{x^6 - 1}{x^3 + 1} \\ g(x) = x^3 - 1 \end{cases}$

(۴)  $\begin{cases} f(x) = \sqrt{2-x} \sqrt{2+x} \\ g(x) = \sqrt{4-x^2} \end{cases}$

(۳)  $\begin{cases} f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x \\ g(x) = \tan x \cot x \end{cases}$

۳۷- تست کدامیک از توابع زیر با تابع  $f(x) = \sqrt{-x^3}$  مساوی است؟

(۱)  $x\sqrt{x}$  (۲)  $x\sqrt{-x}$  (۳)  $-x\sqrt{-x}$  (۴)  $-x\sqrt{x}$

۳۸- تست نمودار دو تابع  $x \neq 2$  و  $x = 2$  است؟  
 $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 8}{x - 2} & x \neq 2 \\ k & x = 2 \end{cases}$  و  $g(x) = x^2 + ax + b$  با هم مساوی اند.  $a + b + k$  کدام

(۴) ۶ (۳) ۲۰ (۲) ۱۴ (۱) ۱۸

تست ۳۹- کدام گزینه درست است؟

(۱) تابع ثابت یک تابع پله ای است.

(۲) دامنه یک تابع پله ای همواره برابر  $\mathbb{R}$  است.

(۳) تابع جز صحیح یک تابع پله ای است.

(۴) برد یک تابع پله ای یک بازه از اعداد حقیقی است.

تست ۴۰- حاصل  $[16/9 \times 17/1]$  کدام است؟

(۱) ۲۸۷ (۲) ۲۸۸ (۳) ۲۸۹ (۴) ۲۹۰

تست ۴۱- اگر  $x = 5/2$  باشد، حاصل  $[x^3]$  برابر کدام است؟

(۱) ۱۲۵ (۲) ۱۳۰ (۳) ۱۳۵ (۴) ۱۴۰

تست ۴۲- دامنه تابع  $f(x) = \frac{2x+1}{[x]-2}$  کدام است؟

(۱)  $\mathbb{R} - \{2\}$  (۲)  $\mathbb{R} - [2, 3)$  (۳)  $\mathbb{R} - (2, 3)$  (۴)  $\mathbb{R}$

تست ۴۳- دامنه تابع  $f(x) = \frac{x-1}{[x]+[-x]}$  کدام است؟

(۱)  $\mathbb{Z}$  (۲)  $\emptyset$  (۳)  $\mathbb{R}$  (۴)  $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$

تست ۴۴- اگر  $x^2 + x < 0$  باشد، حاصل  $[x^4] + [x^3] + [x^2] + [x]$  کدام است؟

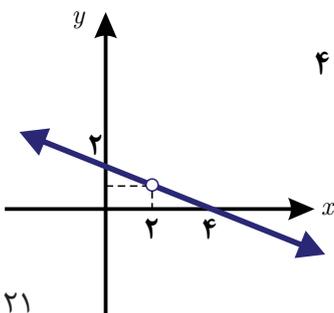
(۱) -۲ (۲) -۱ (۳) صفر (۴) ۱

تست ۴۵- دامنه تابع  $f(x) = \frac{x-3}{|x-2|-1}$  به شکل  $\mathbb{R} - \{x_1, x_2\}$  است. مقدار  $\{x_1 + x_2\}$  کدام است؟

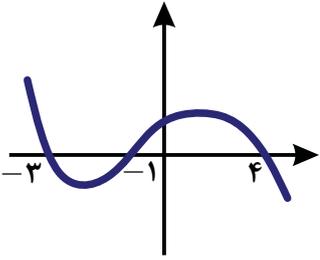
(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

تست ۴۶- اگر نمودار رو به رو متعلق به تابع  $f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{cx + d}$  باشد، مقدار  $a + b + c + d$  برابر کدام است؟

(۱) -۴ (۲) -۲ (۳) ۲ (۴) ۴



۴۷- شکل رو به رو نمودار تابع  $y = f(x - 2)$  است. دامنه تابع با ضابطه  $y = \sqrt{xf(x)}$  کدام است؟ (خارج ۹۴) **تست**



$$[-3, 1] \cup [0, 2] \quad (2)$$

$$[-1, 1] \cup [0, 1] \quad (1)$$

$$[-5, -2] \cup [0, 2] \quad (4)$$

$$[-5, -2] \cup [-1, 2] \quad (3)$$

۴۸- اگر دامنه ی تابع  $y = \frac{3x - 2}{x^2 + mx + n}$  برابر  $\mathbb{R} - \{3\}$  باشد حاصل  $m + n$  کدام است؟ **تست**

$$6 \quad (4)$$

$$3 \quad (3)$$

$$-3 \quad (2)$$

$$-6 \quad (1)$$

۴۹- دامنه ی تابع  $y = \sqrt{|4 - x|(9 - x^2)}$  کدام است؟ **تست**

$$[-3, 3] \cup \{4\} \quad (4)$$

$$[-3, 4] \cup \{-4\} \quad (3)$$

$$[-3, 3] \quad (2)$$

$$\mathbb{R} - (-3, 3) \quad (1)$$

۵۰- اگر عبارت  $f(x) = \sqrt[4]{\frac{2}{x^2} - \frac{9}{2}} + \sqrt[3]{2x - x^2}$  عدد حقیقی باشد مقادیر  $x$  کدام است؟ (تجربی خارج ۹۶) **تست**

$$\left[-\frac{2}{3}, 0\right) \cup \left(0, \frac{2}{3}\right] \quad (4)$$

$$\left[-\frac{2}{3}, 0\right) \cup (0, 2] \quad (3)$$

$$\left[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right] \quad (2)$$

$$\left[\frac{2}{3}, 2\right] \quad (1)$$

۵۱- مجموعه جواب نامعادله  $-1 < \frac{3x + 1}{x - 3} < 3$  به کدام صورت است؟ (سراسری تجربی ۹۶) **تست**

$$\frac{1}{2} < x < 3 \quad (4)$$

$$\frac{-1}{2} < x < 3 \quad (3)$$

$$x < \frac{1}{2} \quad (2)$$

$$x < 3 \quad (1)$$

\* ۵۲- اگر  $197 = (1 + \sqrt{2})^6 + (1 - \sqrt{2})^6$ ، جز صحیح عدد  $(1 + \sqrt{2})^6$  کدام است؟ **تست**

$$198 \quad (4)$$

$$197 \quad (3)$$

$$196 \quad (2)$$

$$195 \quad (1)$$

تست ۵۳- اگر  $11 < 2x - 3$  | آنگاه  $\left[\frac{x}{3}\right]$  چند مقدار صحیح خواهد داشت؟

(۴) ۵

(۳) ۴

(۲) ۶

(۱) ۳

تست ۵۴- اگر  $4 = [x + 2[x]]$  کدام مقادیر برای  $x$  قابل قبول است؟

(۴) جواب ندارد

(۳)  $1 \leq x < 2$ (۲)  $0 \leq x < 1$ (۱)  $\frac{4}{3} \leq x \leq \frac{7}{3}$ 

تست ۵۵- دامنه ی تابع  $f(x) = \frac{x+4}{3[1-x]-9}$  کدام است؟

(۴)  $\mathbb{R} - (-3, -2)$ (۳)  $\mathbb{R} - [2, 3)$ (۲)  $\mathbb{R} - [-3, -2)$ (۱)  $\mathbb{R} - (2, 3]$ 

تست ۵۶- معادله  $[x] = \frac{x}{3}$  چند ریشه دارد؟

(۴) بی شمار

(۳) ۱

(۲) ۳

(۱) صفر



## وارون یک تابع و تابع یک به یک

## وارون یک تابع

## بررسی یک فعالیت

الف) هر مایل تقریباً  $1/6$  کیلومتر است. تعیین کنید که هر کدام از جملات سمت راست مربوط به کدامیک از رابطه های سمت چپ است؟

$$f(x) = \frac{8}{5}x$$

این رابطه برای تبدیل تقریبی «مایل» به «کیلومتر» است.

$$g(x) = \frac{5}{8}x$$

این رابطه برای تبدیل تقریبی «کیلومتر» به «مایل» است.

ب) تندی  $30$  مایل بر ساعت تقریباً معادل تندی چند کیلومتر بر ساعت است؟

پ) همان طور که می دانیم رابطه  $F = \frac{9}{5}\theta + 32$  برای تبدیل درجه بر حسب سانتی گراد به فارنهایت مورد استفاده قرار می گیرد. به عنوان مثال اگر  $\theta = 5$  باشد، آنگاه  $F = 41$  فارنهایت خواهد بود. حال شما رابطه ای را بیابید که به کمک آن بتوان درجه سانتی گراد را بر حسب درجه فارنهایت نوشت.

**نتیجه** هر تابع با ضابطه  $y = f(x)$  بیان می کند که متغیر  $y$  چه ارتباطی با متغیر  $x$  دارد و چگونه می توان با در دست داشتن متغیر  $x$ ، مقدار  $y$  را به دست آورد. اما گاهی مهم است که بدانیم چگونه می توان از مقدار  $y$  به مقدار  $x$  رسید. تبدیل یکای اندازه گیری نمونه ای ساده از این حالت است.

به خاطر دارید که یک تابع را می توان با مجموعه ای از زوج های مرتب نشان داد.

## وارون تابع

باجا به جا کردن مولفه های زوج مرتب  $(a, b)$  می توان زوج مرتب  $(b, a)$  را به دست آورد. حال اگر مولفه های همه زوج های مرتب تابع  $f$  را جابجا کنیم، رابطه جدیدی به دست می آید که آن را وارون تابع  $f$  می گوئیم و با  $f^{-1}$  نشان می دهیم.

برای مثال وارون تابع  $f = \{(2, 1), (3, 7), (4, 2)\}$  برابر با  $f^{-1} = \{(1, 2), (7, 3), (2, 4)\}$  است.

مثال واریون تابع های زیر را بنویسید.

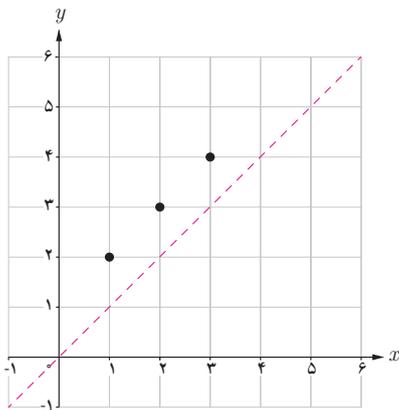
|  |            |
|--|------------|
| $s = \{(4, 1), (1, 4), (3, 3), (2, 5)\}$ | $s^{-1} =$ |
| $t = \{(5, 1), (1, 4), (4, 3), (2, 3)\}$ | $t^{-1} =$ |
| $u = \{(2, 3), (5, 2), (4, 1), (3, 4)\}$ | $u^{-1} =$ |

$$f^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in f\}$$

نتیجه  $f^{-1}$  از جابجایی مولفه های اول و دوم  $f$  به دست می آید.

واریون یک رابطه به کمک نمودار

### بررسی یک فعالیت



(۱) در دستگاه مختصات داده شده نمودار تابع  $f$  رسم شده است.

(الف) تابع  $f$  را به صورت مجموعه ای از زوج های مرتب نشان دهید.

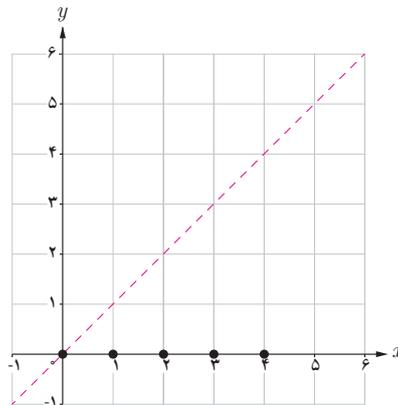
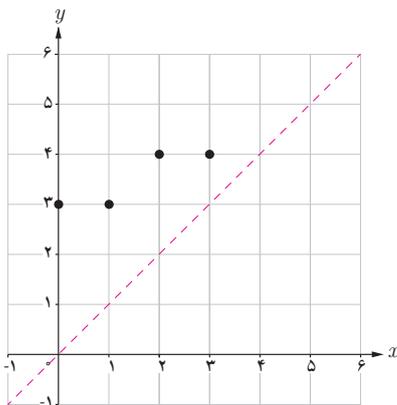
(ب) تابع  $f^{-1}$  را به صورت مجموعه ای از زوج های مرتب نشان دهید.

(پ) در همین دستگاه مختصات، نمودار  $f^{-1}$  را رسم کنید.

(ت) نمودار  $f$  و  $f^{-1}$  چه ارتباطی با هم دارند؟

نتیجه نمودار  $f$  و نمودار  $f^{-1}$  نسبت به ..... قرینه یکدیگرند.

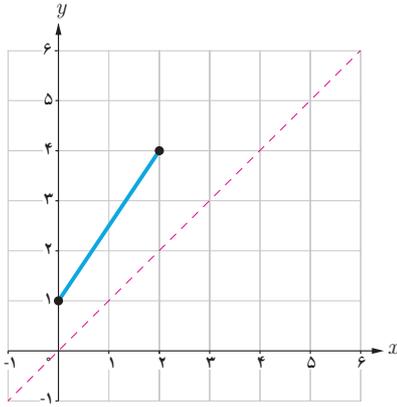
(۲) الف) در هر مورد بیان کنید چرا نمودار داده شده معرف یک تابع است و سپس واریون آن را رسم کنید.



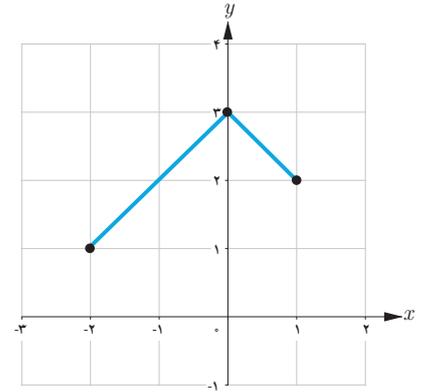
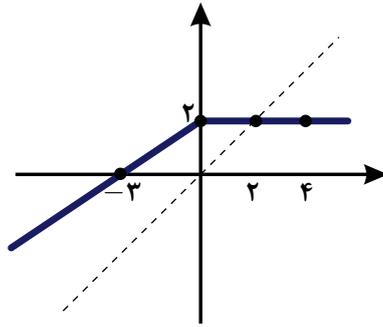
(ب) عبارت زیر را کامل کنید.

برای رسم نمودار واریون یک تابع کافی است قرینه نمودار آن تابع را نسبت به ..... رسم کنیم.

۳) نمودار وارون توابع داده شده را رسم کنید.



**تذکر** برای رسم نمودار وارون یک تابع بهتر است نقاط  $(a, b)$  را روی  $f$  یافته، سپس آن را تبدیل به نقطه  $(b, a)$  کرده که روی وارون قرار دارد. سپس آن نقاط را به هم وصل می کنیم.



**مثال** نمودار تابع  $y = 2x - 1$  را رسم کرده و به کمک آن نمودار تابع وارون را رسم کنید.

**نکته** همان طور که قبلا هم توضیح داده شد، اگر نمودار  $f$  از نقطه  $(a, b)$  بگذرد آنگاه نمودار  $f^{-1}$  از نقطه  $(b, a)$  می گذرد.

**مثال** اگر  $f(x) = \frac{2}{3}x + a$  باشد و نمودار  $f^{-1}$  از نقطه  $(2, 6)$  بگذرد. هر کدام از مقادیر زیر را بیابید.

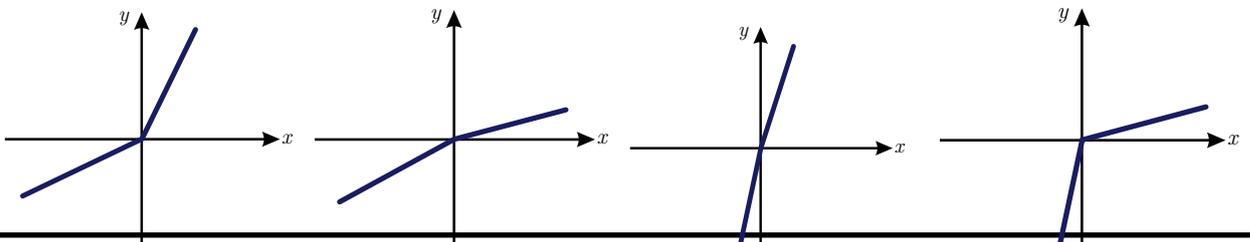
الف) مقدار  $a$  را بیابید

ب) مقدار  $f^{-1}(0)$  را بیابید.

**تست ۱** تابع معکوس تابع  $y = x + x +$  از کدام نقطه زیر می گذرد؟

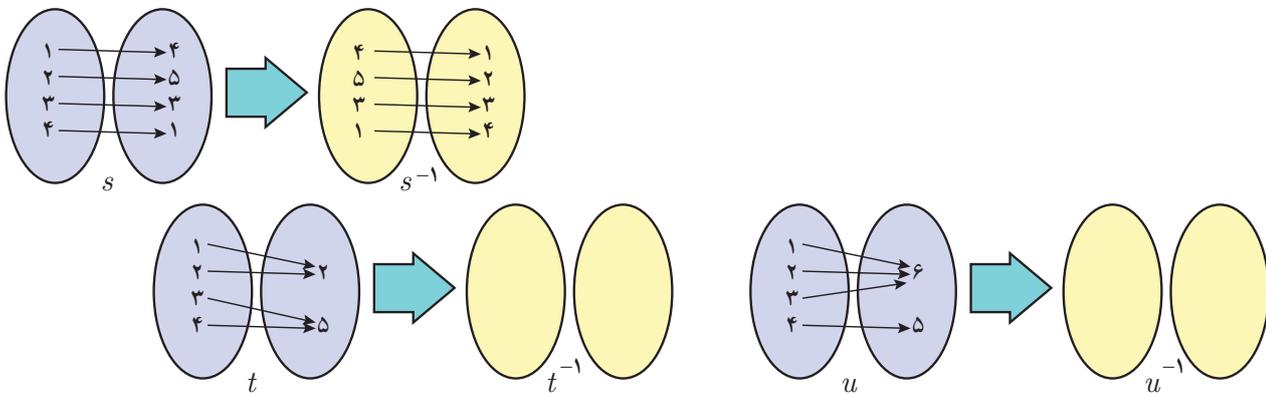
- (۱)  $(-9, -2)$       (۲)  $(1, 3)$       (۳)  $(3, 0)$       (۴)  $(11, -2)$

**تست ۲** نمودار وارون تابع  $f(x) = 3x + |x|$  کدام است؟



بررسی یک فعالیت

به نمونه داده شده دقت کنید. با کمک نمودار پیکانی، وارون توابع داده شده را بدست آورید.



(ب) در جدول مقابل گزینه های درست را انتخاب کنید.

|   |                       |
|---|-----------------------|
| <input type="checkbox"/> بله <input type="checkbox"/> خیر | $s^{-1}$ یک تابع است. |
| <input type="checkbox"/> بله <input type="checkbox"/> خیر | $t^{-1}$ یک تابع است. |
| <input type="checkbox"/> بله <input type="checkbox"/> خیر | $u^{-1}$ یک تابع است. |

(۳) عبارت زیر را کامل کنید.

وارون تابع  $f$ ، خود یک تابع است؛ هرگاه در زوج های مرتب متفاوت تابع  $f$  مولفه های ..... تکراری وجود نداشته باشد.

**نتیجه** هرگاه تابع  $f$  به گونه ای باشد که **وارون آن هم خود تابع باشد**، گوییم یک به یک است. به عنوان مثال

اما  $f = \{(5, 1), (1, 4), (4, 3), (2, 3)\}$  تابع است که وارون آن به صورت  $f^{-1} = \{(1, 5), (4, 1), (3, 4), (3, 2)\}$  است. چون وارون آن تابع نیست. پس تابع  $f$  یک به یک نیست. اما تابع  $g = \{(5, 8), (-1, 4), (2, 3)\}$  یک به یک است، چون وارون آن هم که به صورت  $g^{-1} = \{(8, 5), (4, -1), (3, 2)\}$  است خود یک تابع است.

**نکته** وارون هر تابع یک به یک، خود تابع است.

تشخیص تابع یک به یک به کمک زوج مرتب: هیچ دو زوج مرتبی در تابع  $f$  دارای مولفه دوم یکسان نباشد. اما در صورتی که مولفه دوم یکسان باشد، بایستی مولفه اول هم یکسان باشد.

**مثال** کدامیک از توابع زیر یک به یک است؟

۱)  $f = \left\{ (-5, 8), \left(1, \frac{4}{3}\right), (2, \sqrt{3}) \right\}$

$$۲) g = \{(9, 8), (8, 9), (12, 8)\}$$

اگر  $f = \{(a^2 + 1, 3), (-1, 7), (b + 1, 7), (5, 3), (3, 0), (3, a + 2)\}$  تابعی یک به یک باشد، مقدار  $a + b$  را بیابید. **مثال**

۳- تابع  $\{(-2, 2), (m, 3), (-1, 3), (2m, a)\}$  یک به یک است مقدار  $a$  کدام است؟ **تست**

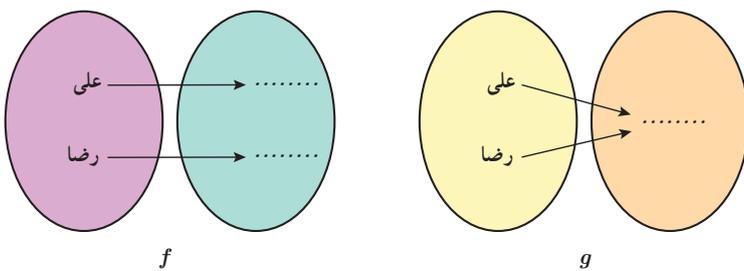
- (۱) -۲      (۲) -۱      (۳) ۱      (۴) ۲

۴- اگر رابطه  $f = \{(3, 2), (a, 5), (3, a^2 - a), (b, 2), (-1, 4)\}$  یک به یک است دوتایی  $(a, b)$  کدام است؟ **تست**  
(ریاضی خارج کشور ۸۶)

- (۱)  $(-1, 1)$       (۲)  $(-1, 3)$       (۳)  $(2, 1)$       (۴)  $(2, 3)$

### تشخیص تابع یک به یک به کمک نمودار ون

نمودارهای پیکانی زیر بیانگر تابع اثر انگشت و تابع گروه خونی علی و رضا است.



الف) مشخص کنید که کدام نمودار پیکانی مربوط به اثر انگشت و کدام نمودار پیکانی مربوط به گروه خونی است.

ب) آیا  $f, g$  هر دو تابع اند؟

پ) در مورد تابع بودن  $f^{-1}, g^{-1}$  چه می توان گفت؟

ت) کدامیک از دو تابع  $f, g$  یک به یک هستند؟

ث) عبارت های زیر را کامل کنید.

با دانستن گروه خونی یک انسان، هویت او به طور یکتا تعیین .....

با دانستن اثر انگشت یک انسان، هویت او به طور یکتا تعیین .....

**نتیجه** هرگاه یک تابع به صورت نمودار ون نمایش داده شود یک به یک است که به هر عضو مجموعه دوم یک و فقط یک پیکان وارد شده باشد.

**مثال** به کمک نمودار ون، شکل هایی رسم کنید که ویژگی های زیر را داشته باشد؟

الف) تابع نباشد.

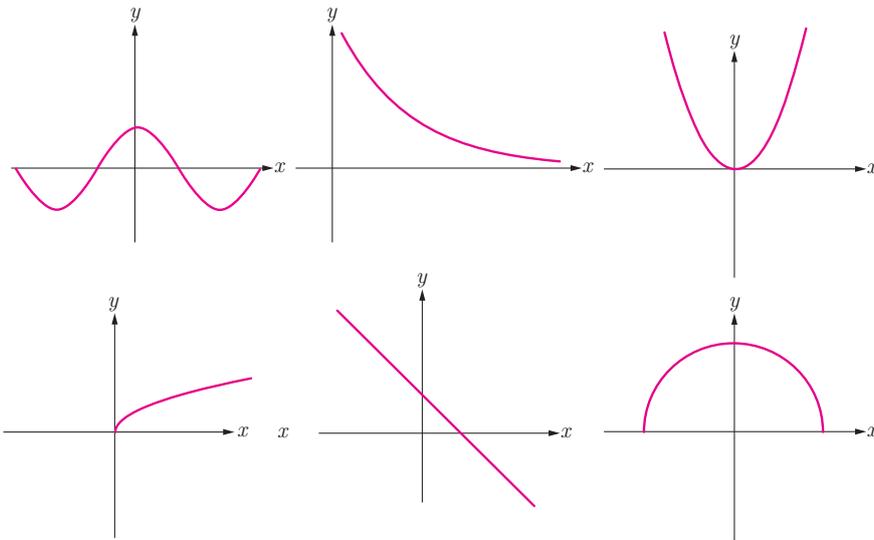
ب) تابع باشد، اما یک به یک نباشد.

ج) تابع یک به یک باشد.

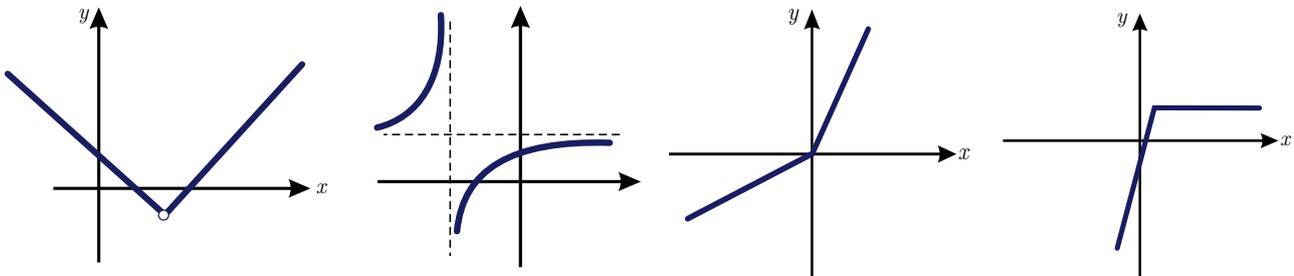
### تشخیص تابع یک به یک به کمک نمودار

اگر هر خط موازی محور طول ها تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند، آن گاه آن تابع یک به یک است.

**مثال** کدامیک از نمودارهای زیر مربوط به تابع یک به یک است؟



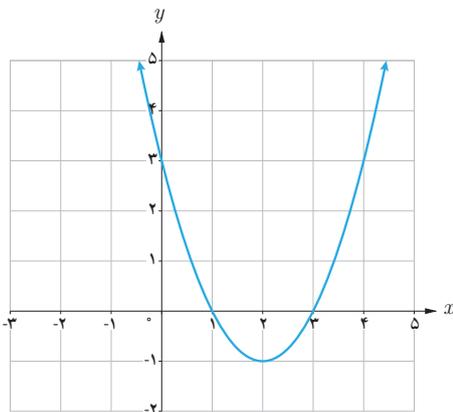
**مثال** کدامیک از نمودارهای زیر مربوط به یک تابع یک به یک است؟



**مثال** نمودار تابع زیر را رسم نموده و یک به یک بودن آن را بررسی کنید.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ 1-x & x < 0 \end{cases}$$

بررسی یک فعالیت



(۱) به نمودار تابع با ضابطه  $f(x) = x^2 - 4x + 3$  در شکل مقابل دقت کنید.

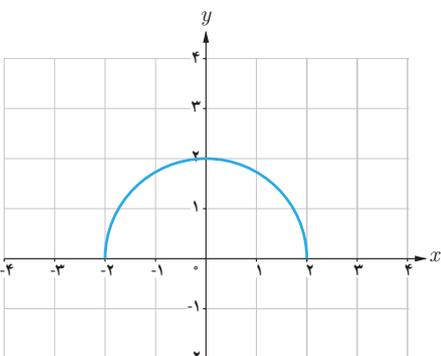
با محدود کردن دامنه این تابع روی کدام بازه های زیر می توان یک تابع یک به یک ساخت؟

$[1, 4]$

$[0, 2]$

(۲) آیا هر تابع درجه دوم، یک به یک است؟ چرا؟

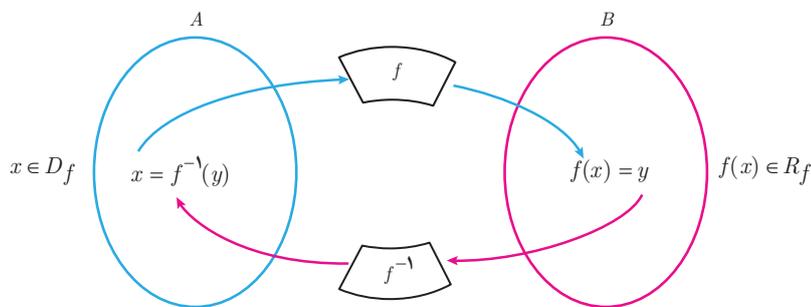
**نتیجه** اگر نقطه راس سهمی به مختصات  $V = (-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$  درون بازه مورد بحث قرار گیرد، تابع درجه دوم یک به یک نخواهد بود.



(۳) با حذف بخشی از نمودار نیم دایره داده شده، نمودار یک تابع یک به یک را مشخص کنید.

به دست آوردن ضابطه تابع وارون یک تابع خطی غیر ثابت

همان طور که قبلا توضیح داده شد، اگر  $f$  یک تابع یک به یک باشد و  $f^{-1}$  تابع وارون آن باشد. نمودار زیر ارتباط  $f$  و  $f^{-1}$  را نشان می دهد.



(دقت کنید که  $R_f = D_{f^{-1}}$  و  $D_f = R_{f^{-1}}$ )

برای به دست آوردن ضابطه تابع وارون یک تابع خطی غیر ثابت مانند  $f$  در معادله  $y = f(x)$ ،  $x$  را بر حسب  $y$  محاسبه می کنیم. سپس با جابجا کردن  $x$  و  $y$  ضابطه تابع  $f^{-1}(x)$  را به دست می آوریم.

$$f(x) = 2x + 1 \Rightarrow y = 2x + 1$$

$$\Rightarrow 2x = y - 1$$

$$\Rightarrow x = \frac{y - 1}{2}$$

$$\Rightarrow y = \frac{x - 1}{2}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x - 1}{2}$$

وارون تابع با ضابطه  $f(x) = 2x + 1$  به صورت زیر محاسبه می شود:

**مثال**  معادله وارون هر کدام از توابع زیر را بیابید.

۱)  $y = x + 5$

۲)  $y = 4x$

۳)  $y = 2x + 3$

۴)  $y = \frac{2}{3}x - 4$

۵)  $y = \frac{-7x + 5}{3}$

۶)  $y = \frac{5x + \sqrt{3}}{-8}$

**نتیجه**  هر تابع خطی  $f(x) = ax + b$  ,  $a \neq 0$  یک به یک خواهد بود.

**نکته**  با توجه به تعریف تابع وارون می توان نتیجه گرفت که :

$$\begin{cases} D_{f^{-1}} = R_f \\ R_{f^{-1}} = D_{f^{-1}} \end{cases}$$

**مثال**  بدون محاسبه وارون تابع  $f(x) = \sqrt{x} - 1$  دامنه و برد وارون آن را بیابید.

**مثال**  ضابطه تابع وارون، تابع چند ضابطه ای زیر را بیابید.

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & x < 0 \\ x - 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

**مثال**  نمودار تابع زیر را رسم کنید و به کمک نمودار رسم شده، نمودار وارون آن را رسم کنید

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x > 0 \\ -\sqrt{-x} & x \leq 0 \end{cases}$$

**نکته**  اگر نمودار تابع  $f$  در ناحیه اول قرار گیرد. نمودار وارون آن هم در این ناحیه قرار خواهد کرد. ( برای ناحیه سوم هم به همین صورت برقرار است )

**نکته**  اگر نمودار تابع  $f$  در ناحیه دوم قرار گیرد. نمودار وارون آن در ناحیه چهارم قرار می گیرد و اگر نمودار تابع  $f$  در ناحیه چهارم باشد، نمودار وارون آن در ناحیه دوم قرار خواهد گرفت.



نمودار تابع زیر را رسم کنید و به کمک نمودار رسم شده، نمودار وارون آن را رسم کنید

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} & x < 0 \\ -\sqrt{x} & x \geq 0 \end{cases}$$



به نظر شما چه هنگامی تابع  $f(x) = ax + b$  بر وارون خود منطبق است. (با هم برابرند) به عنوان راهنمایی از نمودار

تابع خطی  $y = -2x + 3$  کمک بگیرید.



به نظر شما این گفته درست است که نمودار توابع  $f(x) = \frac{1}{x}$  و  $g(x) = -\frac{1}{x}$  بر وارون خود منطبق اند؟

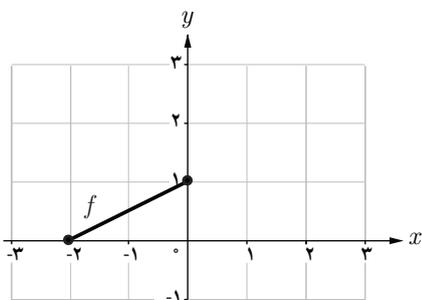


بزرگترین بازه ممکن را برای آنکه تابع درجه دوم  $f(x) = x^2 - 8x$  یک به یک باشد، مشخص کنید.



نمودار تابع  $f$  به صورت شکل مقابل است. اگر نقاط  $(m-2, 0)$  و  $(3n, -2)$  روی نمودار  $f^{-1}$  باشد. مقدار  $m$  و  $n$

را بیابید.



اگر  $f$  تابعی یک به یک باشد و عدد ۳ عضو دامنه آن باشد. آنگاه در معادله  $f^{-1}(3) = m$ ،  $m$  دارای چند جواب

است؟

سوال: الف) آیا تابعی یک به یک می توان یافت که دامنه آن شامل ۴ عضو و برد آن شامل ۳ عضو باشد؟

ب) دامنه یک تابع یک به یک  $3n + 1$  عضو و برد آن  $11 - 2n$  عضو دارد. مقدار ممکن برای عدد طبیعی  $n$  را بیابید.



معادله خطی را بنویسید که قرینه خط  $y = 3x - 1$  نسبت به نیمساز ربع اول و سوم باشد.

**مثال** اگر  $f(-3) = 1$  ،  $f(1) = -2$  باشد، ضابطه وارون این تابع خطی را بنویسید.

**مثال** ضابطه وارون تابع خطی  $f(x) = ax + b$  ،  $a \neq 0$  را به صورت کلی بنویسید.

**مثال** تابعی را مثال بزنید که وارونش با خودش برابر باشد.

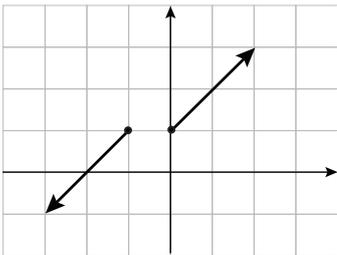
**مثال** مقدار  $a$  را طوری بیابید که تابع داده شده، یک به یک باشد.

$$f(x) = \begin{cases} 2x & x \neq 3 \\ a & x = 3 \end{cases}$$

**مثال** نمودار تابعی مانند  $y$  را رسم کنید که دامنه آن  $[-4, 2]$  و برد آن  $[0, 4]$  باشد، به طوری که:

الف) تابع  $y$  ، یک به یک باشد.

ب) تابع  $y$  ، یک به یک نباشد.



**مثال** با حذف کوچکترین بخش از نمودار تابع داده شده، نمودار را تبدیل به یک تابع، یک

به یک کنید.

**تست** ۵- نمودار تابع وارون تابع،  $f(x) = ax + 1$  از نقطه  $(4, 1)$  میگذرد. در این صورت نمودار تابع  $f$  از کدام نقطه زیر می گذرد؟

- (۱)  $(1, 3)$       (۲)  $(-1, 2)$       (۳)  $(-2, -5)$       (۴)  $(2, 6)$

**تست** ۶- ضابطه تابع وارون  $f(x) = \frac{2x + 3}{x - 5}$  کدام است؟

$$f^{-1}(x) = \frac{3x + 2}{5x - 1} \quad (2)$$

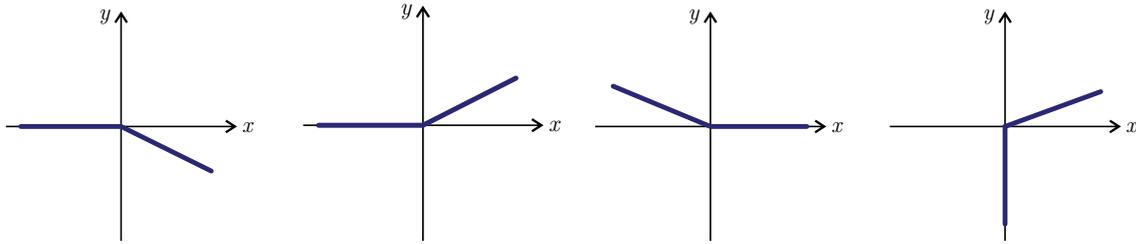
$$f^{-1}(x) = \frac{x - 5}{2x + 3} \quad (1)$$

$$f^{-1}(x) = 2x - 3 \quad (4)$$

$$f^{-1}(x) = \frac{5x + 3}{x - 2} \quad (3)$$

**مثال** ضابطه تابع وارون تابع  $f(x) = \sqrt{x - 2} + 1$  را بیابید.

۷- تست منحنی وارون تابع  $y = 2x + |2x|$  کدام است؟



۸- تست کدام تابع یک به یک است؟

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & x \geq 0 \\ x & x < 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & x \geq 0 \\ -x + 1 & x < 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & x \geq 0 \\ -x^3 & x < 0 \end{cases} \quad (4)$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^3 & x < 0 \end{cases} \quad (3)$$

۹- تست تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} x^3 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$  و  $g(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 0 \\ x + 2 & x < 0 \end{cases}$  به ترتیب چگونه اند؟

(۱) یک به یک و یک به یک (۲) یک به یک و غیریک به یک (۳) غیریک به یک و یک به یک (۴) غیریک به یک و غیریک به یک

۱۰- تست ضابطه تابع معکوس تابع  $f(x) = \frac{1}{x-1}$  کدام تابع است؟

$$g(x) = 1 + \frac{1}{x} \quad (4) \quad g(x) = 1 - \frac{1}{x} \quad (3) \quad g(x) = \frac{x}{x-1} \quad (2) \quad g(x) = \frac{1}{x+1} \quad (1)$$

۱۱- تست تابع وارون تابع  $y = \sqrt{1-x}$  کدام است؟

$$y = 1 + x^2 \quad (4) \quad y = \sqrt{1+x} \quad (3) \quad y = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \quad (2) \quad y = 1 - x^2, x \geq 0 \quad (1)$$

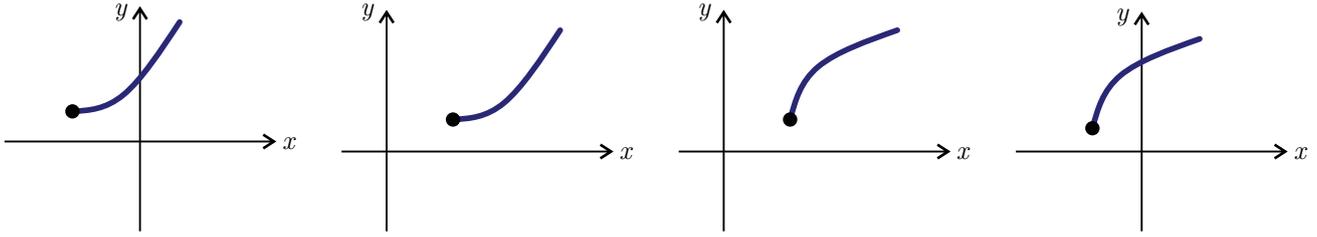
۱۲- تست اگر ضابطه تابع  $f, f(x) = x^2 - x + 1$  باشد، نمودار  $f^{-1}$  الزاما از کدام نقطه می گذرد؟

$$(0, 1) \quad (4) \quad (1, 0) \quad (3) \quad (0, -1) \quad (2) \quad (-1, 0) \quad (1)$$

۱۳- تست ضابطه تابع وارون تابع  $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$  کدام است؟

$$f^{-1}(x) = \frac{3x-1}{x+2} \quad (4) \quad f^{-1}(x) = \frac{3x+1}{x-2} \quad (3) \quad f^{-1}(x) = \frac{3x-1}{x-2} \quad (2) \quad f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2x+1} \quad (1)$$

۱۴- منحنی تابع وارون تابع  $f(x) = x^2 - 2x, x \geq 1$  کدام است؟ **تست**



۱۵- دامنه تابع وارون تابع  $f(x) = 2 + \sqrt{x-1}$  برابر کدام است؟ **تست**

- (۱)  $[1, +\infty)$       (۲)  $[1, 2]$       (۳)  $[2, +\infty)$       (۴)  $\mathbb{R}$

۱۶- تابع معکوس تابع  $y = x^2 - 4x$  با شرط  $x < 2$  کدام است؟ **تست**

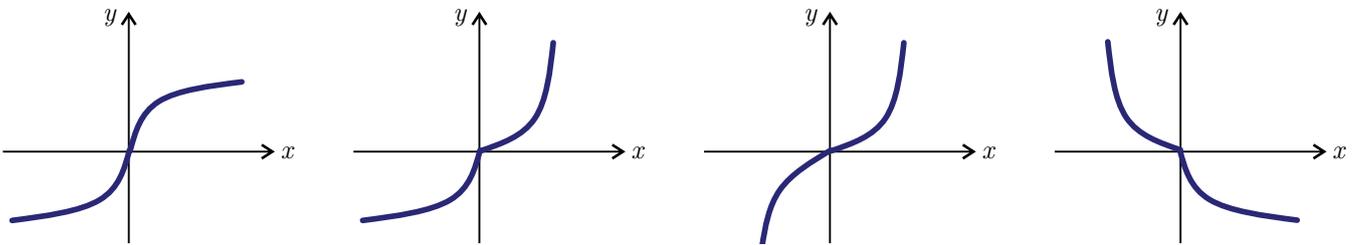
$$f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x+4} \quad (۲)$$

$$f^{-1}(x) = 2 - \sqrt{x+4} \quad (۱)$$

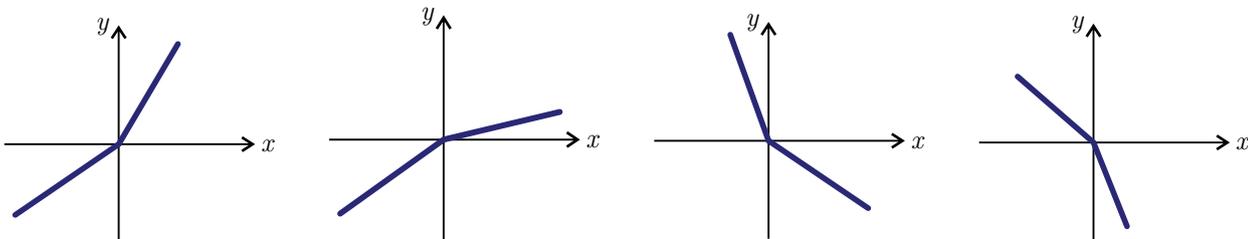
$$f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x-4} \quad (۴)$$

$$f^{-1}(x) = 2 - \sqrt{x-4} \quad (۳)$$

۱۷- نمایش هندسی تابع معکوس  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$  کدام است؟ **تست**



۱۸- نمودار تابع وارون تابع  $f(x) = 2x + |x|$  کدام است؟ **تست**



۱۹- اگر دو خط به معادلات  $ax + by = 8$  و  $2x - 3y = b$  ، نسبت به نیمساز ربع اول ، متقارن باشند  $a + b$  کدام است؟ **تست**

است؟

(۴)  $-2, 3$

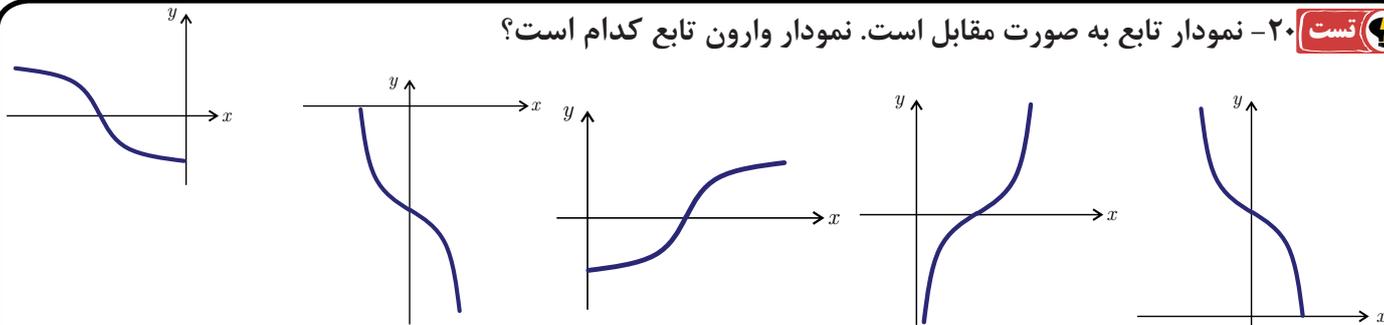
(۳)  $-3, 2$

(۲)  $\pm 2$

(۱)  $\pm 3$

تست ۲۰

نمودار تابع به صورت مقابل است. نمودار وارون تابع کدام است؟



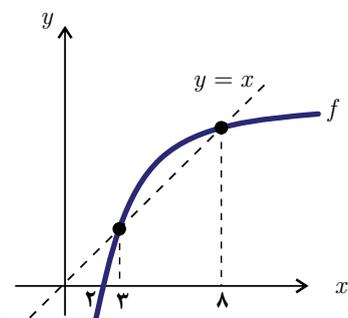
تست ۲۱

قرینه خط به معادله  $3y - 2x = 4$  را نسبت به خط  $y = x$ ، خط  $d$  می نامیم. عرض از مبدا خط  $d$  کدام است؟

- (۱) -۲      (۲) -۱      (۳) ۱      (۴) ۲

تست ۲۲

شکل زیر نمودار تابع  $y = f(x)$  و نیمساز ناحیه اول و سوم است. دامنه تابع با ضابطه  $\sqrt{x - f^{-1}(x)}$  کدام است؟



- (۱)  $(0, 2]$       (۲)  $[2, 3]$   
 (۳)  $[2, 8]$       (۴)  $[3, 8]$

تست ۲۳

اگر تابع  $f(x) = \begin{cases} x+1 & x < 1 \\ 2x+a & x \geq 1 \end{cases}$  یک به یک باشد، حداقل مقدار  $a$  کدام است؟

- (۱) ۰      (۲) ۱      (۳) ۲      (۴) ۳

تست ۲۴

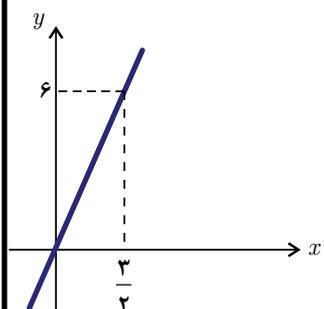
اگر دامنه تابع  $f(x) = x^2 + 2x$  را به بازه  $(-\infty, a]$  محدود کرده باشیم تا تابع وارون پذیر شود. حداکثر مقدار  $a$  کدام است؟

- (۱) ۰      (۲) ۱      (۳) -۱      (۴) -۲

تست ۲۵

اگر نمودار  $f$  به صورت مقابل باشد،  $f^{-1}(\frac{2}{3})$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{6}$       (۲)  $\frac{1}{3}$   
 (۳) ۲      (۴) ۴



تست ۲۶- اگر  $f$  تابعی خطی باشد و داشته باشیم  $f(2x) + f(x-1) = 3x - 4$  آنگاه  $f^{-1}(2)$  کدام است؟

$$\frac{9}{2} \quad (4)$$

$$\frac{7}{2} \quad (3)$$

$$\frac{5}{2} \quad (2)$$

$$\frac{3}{2} \quad (1)$$

تست ۲۷- اگر  $f(x) = ax + b$  باشد. شیب نمودارهای  $f$  و  $f^{-1}$  چه ارتباطی با هم دارند؟

(۱) قرینه هم (۲) معکوس هم (۳) قرینه و معکوس هم (۴) حاصل ضرب آنها ۲ است

تست ۲۸- اگر  $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & x > 2 \\ x + 1 & x \leq 2 \end{cases}$  باشد، حاصل  $f^{-1}(9) + f(9)$  کدام است؟

$$27 \quad (4)$$

$$25 \quad (3)$$

$$20 \quad (2)$$

$$22 \quad (1)$$

## یادداشت برداری

[www.riazisara.ir](http://www.riazisara.ir)

ریسر ریاضی عادل آنگری

دانلود از سایت ریاضی سرا

## اعمال جبری روی توابع

در مجموعه اعداد چهار عمل اصلی داریم، جمع، تفریق، ضرب و تقسیم، در مورد تابع ها هم همین طور است. این چهار عمل را در مورد تابع ها به صورت زیر تعریف می کنیم.

| تعریف دامنه  | تعریف ضابطه                                       | نام عمل |
|--|---|---------|
| $D_{f+g} = D_f \cap D_g$                               | $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$                          | جمع     |
| $D_{f-g} = D_f \cap D_g$                               | $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$                          | تفریق   |
| $D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g$                         | $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$                | ضرب*    |
| $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\}$ | $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ | تقسیم   |

به عنوان مثال فرض کنید  $f(x) = x^2 - 3x + 2$  و  $g(x) = \sqrt{x+6} + 1$  در این صورت :

$$D_f = \mathbb{R}, \quad D_g = [-6, +\infty)$$

$$D_{f+g} = D_f \cap D_g = [-6, +\infty)$$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 - 3x + 2 + \sqrt{x+6} - 1 = x^2 - 3x + 1 + \sqrt{x+6}$$

$$D_{f-g} = D_f \cap D_g = [-6, +\infty)$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = x^2 - 3x + 2 - (\sqrt{x+6} - 1) = x^2 - 3x + 3 - \sqrt{x+6}$$

$$D_{f \times g} = D_f \cap D_g = [-6, +\infty)$$

$$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x) = (x^2 - 3x + 2) \times (\sqrt{x+6} - 1)$$

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\} = [-6, +\infty) - \{x \mid \sqrt{x+6} - 1 = 0\}$$

$$= [-6, +\infty) - \{-5\}$$

**مثال** اگر  $f(x) = x - 2$  و  $g(x) = 2x - 1$  آنگاه مجموع، تفاضل، حاصل ضرب و حاصل تقسیم آنها  $(\frac{g}{f})$  را به دست آورید و دامنه هر یک را مشخص کنید.

**مثال** برای دو تابع با ضابطه های  $f(x) = x^2 + 3x + 1$  و  $g(x) = x - 3$  هر کدام از مقادیر خواسته شده را بیابید.

$$1) (f - g)(x) =$$

$$2) (f + g)(2) =$$

$$3) (2f \times g)(x) =$$

$$4) (2f \times 3g)(-1) =$$

$$5) D_{\frac{f}{g}} =$$

**مثال** برای دو تابع با ضابطه های  $f(x) = \sqrt{x}$  و  $g(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$  هر کدام از مقادیر خواسته شده را بیابید.

$$1) (f + g)(0) =$$

$$2) (2f - g)(1) =$$

$$3) f(4) + f^{-1}(2) =$$

$$4) (f \times \frac{1}{3}g)(9) =$$

$$5) \sqrt{(\frac{f}{g})(2)} =$$

$$6) \frac{1}{5}(f + g)(3) =$$

**نکته** به طور کلی هر گاه توابع  $f$  و  $g$  در مقادیر غیر صفری چون  $a$  و  $b$  ضرب شوند، دامنه آنها تغییر نخواهد کرد.

$$D_{af \pm bg} = D_{f \pm g} = D_f \cap D_g$$

$$D_{af \times bg} = D_{f \times g} = D_f \cap D_g$$

$$D_{af \div bg} = D_{f \div g} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\}$$

**مثال** برای دو تابع با ضابطه های  $u(x) = \sqrt{x} + 1$  و  $v = x - 1$  هر کدام از مقادیر خواسته شده را بیابید.

۱)  $D_{\frac{u}{v}} =$

۲)  $D_{2u+3v} =$

۳)  $D_{\frac{u}{5v}} =$

۴)  $(3u - 4v)(1) =$

۵)  $(3u^2 \div 2v^2)(4) =$

**مثال** فرض کنید  $f(x) = \frac{\sqrt{3-x^2}}{u} - \frac{\sqrt[3]{2-x^2}}{v}$  باشد، دامنه تابع  $f$  را بیابید.

**مثال** فرض کنید  $f(x) = -\sqrt{x}$ ،  $g(x) = \sqrt{-x}$  آنگاه ضابطه  $f \times g$  و دامنه  $f - g$  را بیابید.

**تست** ۱- اگر  $f(x) = \sqrt{4x-4}$  و  $g(x) = \left[\frac{x}{2}\right]$  باشند.  $(f \cdot g)(5)$  برابر کدام است؟

- ۱) ۲      ۲) ۴      ۳) ۸      ۴) ۱۶

**تست** ۲- اگر  $f(x) = x + \sqrt{1-x^2}$  و  $g(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 4}$  باشند. مقدار  $\left(\frac{f}{g}\right)\left(\frac{3}{5}\right)$  برابر کدام است؟

- ۱) -۱      ۲) ۱      ۳)  $\frac{1}{2}$       ۴)  $-\frac{1}{2}$

**تست** ۳- اگر  $f(x) = \sqrt{x} - 1$  و  $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}}$  باشند. حاصل  $\left(\frac{f^2 - g^2}{f - g}\right)(4)$  کدام است؟

- ۱)  $\frac{5}{3}$       ۲)  $\frac{5}{4}$       ۳)  $\frac{7}{3}$       ۴)  $\frac{7}{4}$

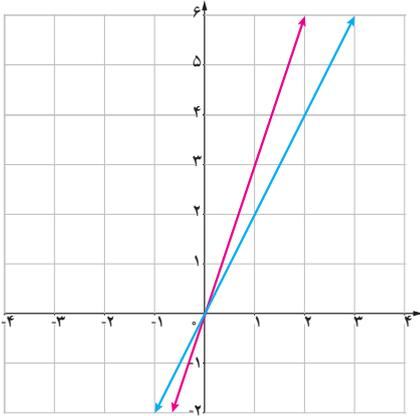
**تست** ۴- اگر دامنه تابع  $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$  و  $g(x) = \sqrt{1 - 2x}$  باشند. ضابطه تابع  $(f^2 + g^2)(x)$  کدام است؟

- ۱)  $y = 2x - 1, x \in \mathbb{R}$       ۲)  $y = 2x - 1, x \geq \frac{1}{2}$       ۳)  $y = 2x - 1, x \leq \frac{1}{2}$       ۴)  $y = 2x - 1, x \in \left\{\frac{1}{2}\right\}$



مثال مطابق شکل، دو تابع  $f$  و  $g$  به ترتیب با رنگ های قرمز و آبی نشان داده شده اند. هر کدام از ضابطه های توابع

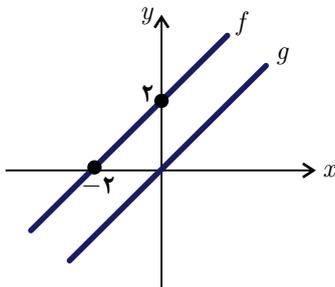
$f + g$  ,  $f - g$  را بیابید.



مثال فرض کنید که دو تابع  $f$  و  $g$  خطی باشند. در این صورت با اعمال کدام عمل جبری، حاصل نیز یک تابع خطی خواهد بود؟



مثال اگر نمودارهای دو تابع خطی  $f$  و  $g$  به صورت رو به رو باشد. نمودار  $f.g$  را رسم کنید.



### اعمال جبری در توابع زوج مرتبی

برای این کار ابتدا دامنه عمل جبری را یافته، سپس در دامنه، عمل جبری را روی مولفه دوم زوج های مرتب اعمال کنید.



مثال اگر  $f = \{(1, 4), (2, 3), (4, 6)\}$  و  $g = \{(1, 1), (2, -3), (5, 7)\}$  هر کدام از اعمال جبری زیر را بیابید.

۱)  $f + g =$

۲)  $2f - 3g =$

۳)  $\frac{3f}{g} =$

۴)  $\frac{3f}{f - g} =$

۵)  $2f \times 3g =$



مثال اگر  $f = \{(1, 2), (-1, 3), (4, 4), (3, 5)\}$  باشد، آنگاه  $f - f^{-1}$  را محاسبه کنید.



مثال با فرض اینکه  $f = \{(2, 5), (3, 4), (0, -2)\}$  و  $g = \{(-1, 2), (0, 3), (2, 4), (3, 0)\}$  دامنه و ضابطه  $\frac{g}{f}$  را بیابید.

۵- تست اگر  $f = \{(1, 2), (2, 5), (3, -1), (4, 3), (5, 2)\}$  و  $g = \{(1, -3), (2, 4), (3, 0), (-2, 1), (6, 3)\}$

باشند. دامنه و برد تابع  $f + g$  هر کدام به ترتیب چند عضو دارند؟

۴, ۵ (۴)

۲, ۳ (۳)

۳, ۳ (۲)

۵, ۵ (۱)

۶- تست اگر  $f = \{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, -1), (5, 1)\}$  و  $g = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1), (4, -2), (-1, 2)\}$

باشند. چند تا از توابع  $f + g, f - g, f \cdot g, \frac{f}{g}$  یک به یک هستند؟

۳ (۴)

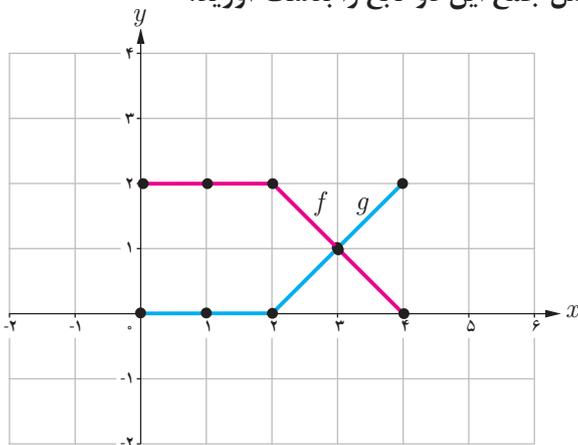
۲ (۳)

۱ (۲)

هیچ (۱)

مثال با فرض اینکه  $f(x) = \begin{cases} -2 & 0 < x \leq 2 \\ -x + 4 & 2 < x < 4 \end{cases}$  و  $g(x) = \begin{cases} 3 & 0 < x \leq 2 \\ 2x + \frac{3}{5} & 2 < x < 4 \end{cases}$  باشد. آنگاه  $f - g$  را بیابید.

مثال در شکل مقابل نمودار دو تابع  $f$  و  $g$  رسم شده است. نمودار حاصل جمع این دو تابع را بدست آورید.



مثال در هر مورد دامنه و ضابطه حاصل جمع، ضرب، تفریق و تقسیم دو تابع داده شده را بیابید.

۱)  $g(x) = \frac{1}{x}$  ,  $f(x) = |x|$

۲)  $g(x) = x + 2$  ,  $f(x) = x^2 - 4$

$$۳) g(x) = -\sqrt{x} \quad , \quad f(x) = \sqrt{x}$$

$$۴) g(x) = x^2 + 3x - 10 \quad , \quad f(x) = \frac{x-2}{x+5}$$

$$۵) g = \{(-1, 2), (0, 3), (2, 4), (3, 0)\} \quad , \quad f = \{(2, 5), (3, 4), (0, -2)\}$$

### بررسی انتقال نمودار در توابع

الف) انتقال افقی (در راستای محور طول ها)

$$f(x+a) \mapsto \begin{cases} a > 0 \\ a < 0 \end{cases}$$

$$y = \sqrt{x-2} \quad , \quad y = (x+2)^2 \quad , \quad y = |x+3|$$

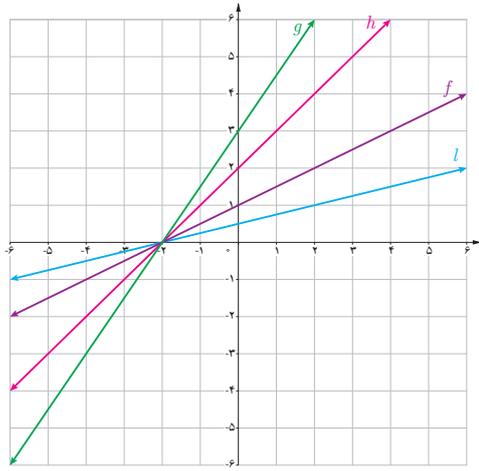
مثال  نمودار هر کدام از توابع زیر را رسم کنید.

ب) انتقال عمودی (در راستای محور عرض ها)

$$f(x)+b \mapsto \begin{cases} b > 0 \\ b < 0 \end{cases}$$

$$y = \sqrt{x+2} \quad , \quad y = x^2 - 1 \quad , \quad y = |x+3| - 2$$

مثال  نمودار هر کدام از توابع زیر را رسم کنید.



**مثال** با توجه به شکل دیده می شود که  $l(x) = \frac{1}{4}f(x)$

جاهای خالی را پر کنید.

$$g(x) = \dots\dots\dots f(x)$$

$$h(x) = \dots\dots\dots f(x)$$

**نتیجه** اگر  $k$  عددی مثبت باشد، برای رسم نمودار تابع با ضابطه  $y = kf(x)$  کافی است عرض هر نقطه از نمودار تابع  $y = f(x)$  را  $k$  برابر کنیم.

ج ( انبساط و انقباض عمودی

$$kf(x) \mapsto \begin{cases} k > 0 & \begin{cases} 0 < k < 1 \\ k > 1 \end{cases} \\ k < 0 & \begin{cases} -1 < k < 0 \\ k < -1 \end{cases} \end{cases}$$

**مثال** نمودار هر کدام از توابع زیر را رسم کنید.

۱)  $y = \sqrt{x}$  ,  $y = 2\sqrt{x}$  ,  $y = 3\sqrt{x}$

۲)  $y = \sqrt{x}$  ,  $y = \frac{1}{2}\sqrt{x}$  ,  $y = \frac{1}{3}\sqrt{x}$

۳)  $y = -\sqrt{x}$  ,  $y = -2\sqrt{x}$  ,  $y = -3\sqrt{x}$

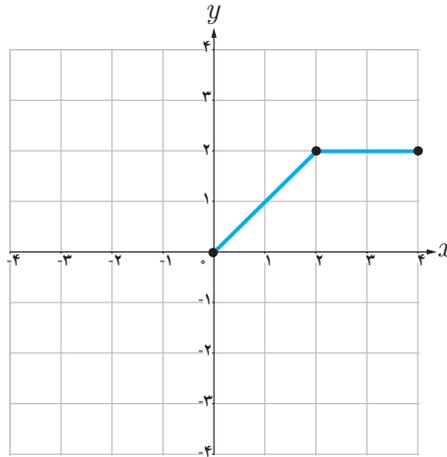
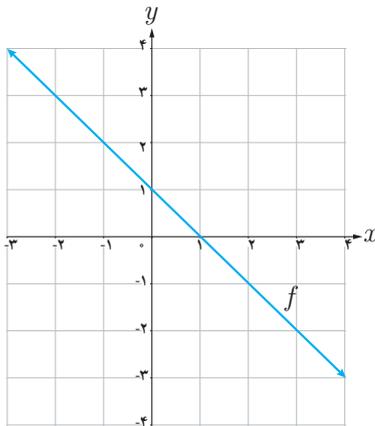
۴)  $y = -\sqrt{x-2}$  ,  $y = 1-\sqrt{x-3}$  ,  $y = 1-2\sqrt{x}$

۵)  $y = x^2$ ,  $y = 2x^2$ ,  $y = -x^2$ ,  $y = -\frac{1}{2}x^2$

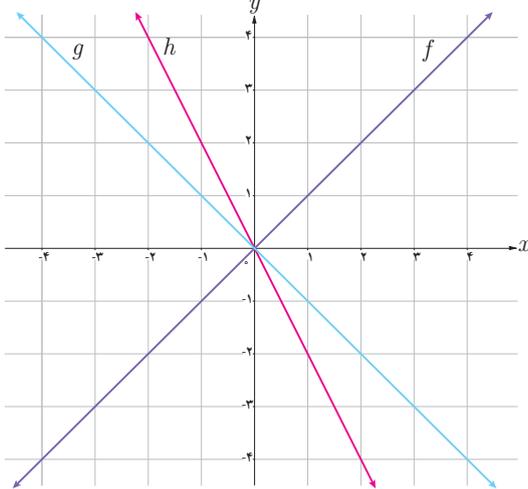
۶)  $y = |x|$ ,  $y = \frac{2}{3}|x|$ ,  $y = -|x|$ ,  $y = -\frac{1}{2}|x| + 1$ ,  $y = 2|x - 2|$

**نکته** برای رسم نمودار تابع با ضابطه  $y = -f(x)$  کافی است **قرینه** نمودار تابع ضابطه  $y = f(x)$  را نسبت به محور **طول** ها رسم کنید.

**مثال** با توجه به نمودار تابع  $y = f(x)$  در شکل مقابل، نمودار تابع با ضابطه  $y = -f(x)$  و  $y = -2f(x)$  را رسم کنید.

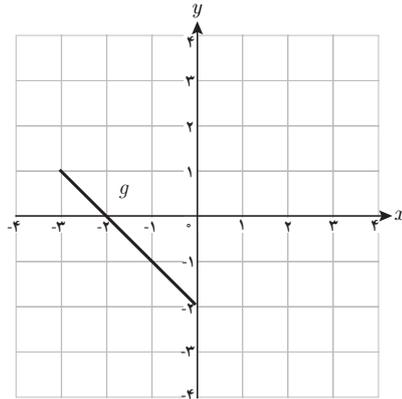
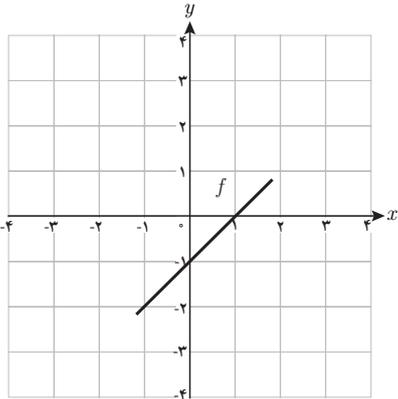


**مثال** با توجه به نمودار سه تابع داده شده مشخص کنید که کدام یک از آنها برابر مجموعه دو تابع دیگر است؟

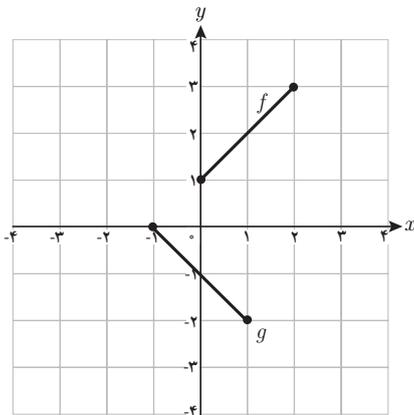


**مثال** اگر دو تابع  $f$  و  $g$  به صورت  $f(x) = \frac{x-1}{x}$  و  $g = \{(-2, 0), (0, 1), (3, 4), (4, 4)\}$  باشد، دامنه و ضابطه های  $\frac{f}{g}$  و  $\frac{g}{f}$  را بیابید.

**مثال** نمودار توابع  $f$  و  $g$  به صورت زیر داده شده است. دامنه  $\frac{f}{g}$  و  $\frac{g}{f}$  را بیابید.



**مثال** با توجه به نمودار توابع  $f$  و  $g$  حاصل هر یک از عبارات های زیر را در صورت وجود بیابید.



- الف)  $(g+f)(1)$
- ب)  $(f \times g)(0)$
- پ)  $(f-g)(2)$
- ت)  $(\frac{g}{f})(-1)$
- ث)  $(f-2g)(0)$
- ج)  $(\frac{g-f}{-3f})(0)$

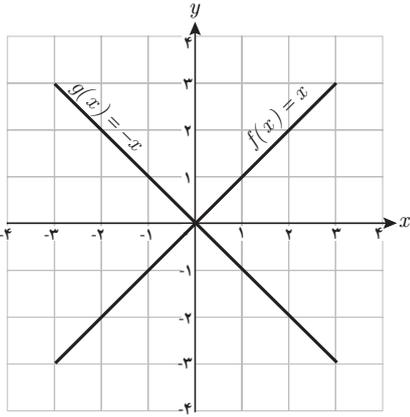
**مثال** اگر  $f(x) = \sqrt{1-x} + 2$  و  $g(x) = 2 - \sqrt{1-x}$  باشد، نمودار تابع  $(f+g)(x)$  را رسم کنید.

**مثال** اگر  $f(x) = \sqrt{1-x} - 2$  باشد، دامنه تابع  $\frac{f^{-1}}{f}$  را بیابید.



نمودارهای توابع  $f(x) = x$  و  $g(x) = -x$  در شکل زیر رسم شده است. نمودارهای توابع  $f - g$  و  $g - f$  را به

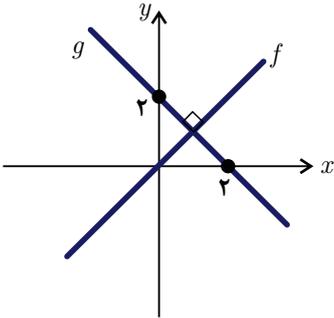
کمک نمودارهای داده شده رسم کنید.



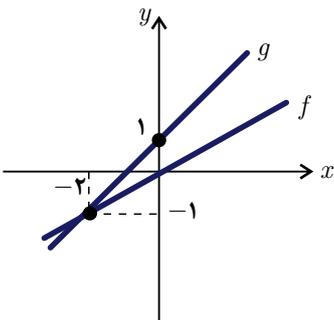
مساحت محدود به تابع با ضابطه  $y = 3 - |x|$  و محور  $x$  ها را بیابید.



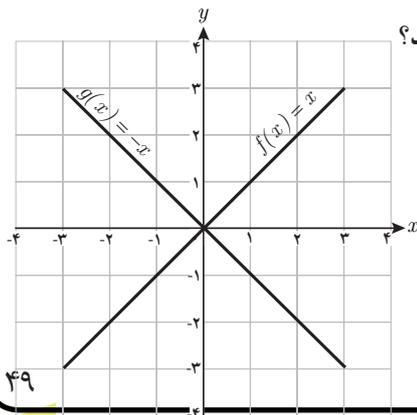
اگر نمودار دو تابع  $f$  و  $g$  به شکل روبرو باشند، نمودار تابع  $f + g$  را رسم کنید؟

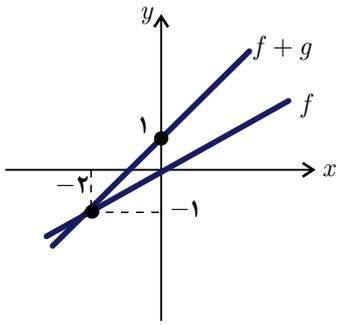


اگر نمودار تابع های  $f$  و  $g$  به شکل روبرو باشند، نمودار تابع  $f - g$  را رسم کنید؟

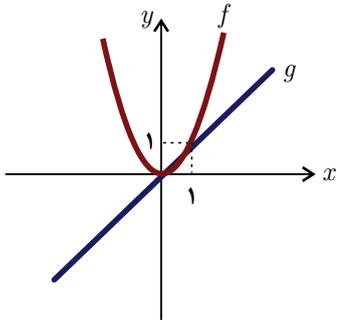


اگر نمودار تابع های  $f$  و  $g$  به صورت مقابل باشند، نمودار تابع  $f.g$  را رسم کنید؟

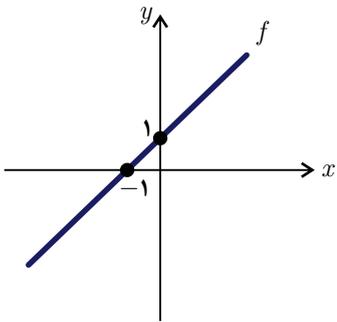




**مثال** اگر نمودارهای توابع  $f$  و  $f + g$  به شکل روبرو باشند، نمودار تابع  $g$  کدام است؟



**مثال** اگر نمودارهای توابع  $f$  و  $g$  به شکل روبرو باشند، نمودار تابع  $f \cdot g$  به کدام صورت است؟



**مثال** اگر نمودار تابع  $f$  به صورت روبه رو باشد، نمودار تابع  $f^2 - f$  کدام است؟

**تست ۷- هرگاه**  $f = \{(1, 2), (3, 4), (2, 3)\}$  و  $g = \{(1, 3), (2, -1), (5, 6)\}$  آنگاه تابع  $2f + 3g$  کدام است؟

- (۱)  $\{(2, 5), (10, 7)\}$  (۲)  $\{(1, 13), (2, 3)\}$  (۳)  $\{(4, 13), (8, 3)\}$  (۴)  $\{(4, 13), (5, 3)\}$

**تست ۸- اگر**  $f(x) = \sqrt{2-x-x^2}$  و  $g(x) = \log \frac{x+1}{1-x}$  باشند، دامنه ی تابع  $\frac{2g}{f}$  کدام است؟

- (۱)  $[-1, 1]$  (۲)  $(-1, 1)$  (۳)  $(-1, 1)$  (۴)  $[-2, 1) - \{-1\}$

**تست ۹- با فرض اینکه**  $f(x) = x + \sqrt{x}$  و  $g = \{(-1, 0), (1, 2), (4, -1), (0, 1)\}$  باشد، کدام زوج مرتب عضو تابع

$f + g$  نمی باشد.

- (۱)  $(1, 4)$  (۲)  $(1, 6)$  (۳)  $(4, 5)$  (۴)  $(0, 1)$

۱۰- تست اگر  $f = \{(1, 3), (2, 5)\}$  و  $g = \{(2, 3), (5, 1)\}$ ، مجموعه  $f + 2g$  کدام است؟

- (۱)  $\{(2, 11)\}$  (۲)  $\{(2, 7)\}$  (۳)  $\{(2, 7), (1, 4)\}$  (۴)  $\{(2, 11), (1, 4)\}$

۱۱- تست اگر  $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$  و  $g = \{(1, 5), (2, 6), (3, 0)\}$  باشند، آن گاه تابع  $\frac{2f}{g}$  کدام است؟

- (۱)  $\emptyset$  (۲)  $\{(1, \frac{4}{5}), (2, 1)\}$  (۳)  $\{(1, \frac{4}{5}), (2, \frac{1}{2})\}$  (۴)  $\{(2, 1), (1, \frac{4}{5})\}$

۱۲- تست اگر  $f(x) = \sqrt{x+1}$  و  $g(x) = \frac{x+1}{x-2}$ ، مقدار  $(2f - g)(3)$  کدام است؟

- (۱)  $-1$  (۲) صفر (۳)  $1$  (۴)  $2$

۱۳- تست اگر  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+3}}$  و  $g(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x+3}}$  باشد، دامنه تابع با ضابطه  $\frac{f(x)}{g(x)}$  کدام است؟

- (۱)  $\{-3, +\infty\} - \{1\}$  (۲)  $\mathbb{R} - \{1\}$  (۳)  $\{-3, +\infty\}$  (۴)  $\{-3, +\infty\} - \{0\}$

۱۴- تست اگر  $f(x) = x^2 - 2x$  و  $g(x) = -x^2 + x + 2$  باشند، دامنه تابع  $\frac{f}{2f+g}$  برابر کدام است؟

- (۱)  $\mathbb{R} - \{1, 2\}$  (۲)  $\mathbb{R} - \{-1, 2\}$  (۳)  $\mathbb{R} - \{1, -2\}$  (۴)  $\mathbb{R}$

۱۵- تست در کدام یک از گزینه های زیر،  $f + g$  یک به یک است؟

- (۱)  $\begin{cases} f = \{(2, 3), (3, 4), (4, 1)\} \\ g = \{(3, 2), (2, 3)\} \end{cases}$   
 (۲)  $\begin{cases} f = \{(2, 3), (3, 4), (4, 1)\} \\ g = \{(2, -1), (3, -2), (4, 1)\} \end{cases}$   
 (۳)  $\begin{cases} f = \{(2, 3), (3, 4), (4, 1)\} \\ g = \{(2, 0), (4, 2)\} \end{cases}$   
 (۴)  $\begin{cases} f = \{(2, 3), (3, 4), (4, 1)\} \\ f = \{(2, 3), (3, 4), (4, 1)\} \end{cases}$

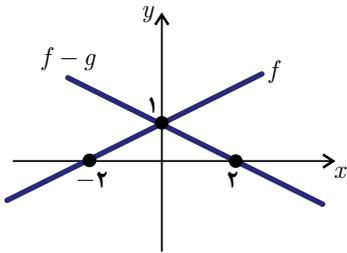
تست ۱۶- با توجه به نمودارهای  $f - g$  و  $f$ ، ضابطه تابع  $f + g$  کدام است؟

(۱)  $3x - 1$

(۲)  $\frac{3}{2}x + 1$

(۳)  $\frac{3}{2}x - 1$

(۴)  $3x + 1$



## یادداشت برداری

[www.riazisara.ir](http://www.riazisara.ir)

ریسر ریاضی عادل آنگری

دانلود از سایت ریاضی سرا