



سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

و...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

<https://t.me/riazisara>

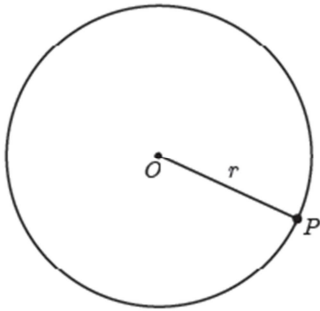


(@riazisara)

فصل ۲: هندسه

ترسیم‌های هندسی

۱) دایره $C(O, r)$ (بخوانید دایره C به مرکز O و شعاع r) را در نظر بگیرید:



هر نقطه که از نقطه O به فاصله r باشد دایره قرار دارد و هر نقطه که دایره قرار دارد از نقطه O به فاصله r است.

۲) خطی مانند d را در نظر بگیرید. تمام نقاطی را که به فاصله سانتیمتری از خط d هستند، مشخص

نمائید.



۳) نقطه p به فاصله ۱ سانتیمتری از خط d قرار دارد.



الف) تمام نقاطی که به فاصله ۲ سانتی متری از نقطه p هستند، مشخص

کنید.



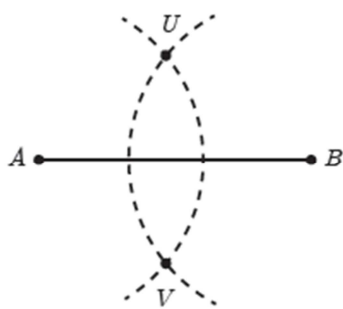
ب) نقاطی از خط d را که به فاصله ۲ سانتیمتری از نقطه p هستند، مشخص کنید.

۴) دو نقطه ثابت مانند A و B را در نظر بگیرید. دهانه پرگار را بیش از

نصف طول پاره خط AB باز کرده و یک بار از نقطه A و بار دیگر از

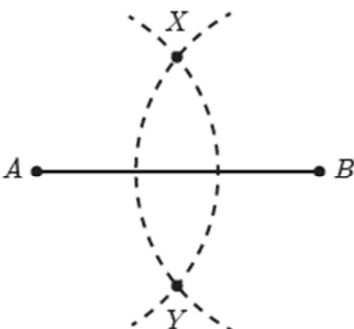
نقطه B با همان شعاع قبلی کمان بزنید تا یکدیگر را در نقاطی مانند U

و V قطع کنند. نقاط U و V چه ویژگی مشترکی دارند؟



۵) نقاط A و B به فاصله ۵ سانتیمتری از هم در نظر بگیرید. به مرکز A

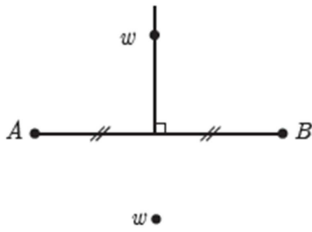
و به شعاع ۴ سانتیمتری یک کمان بزنید و سپس به مرکز B و به شعاع



۳ سانتیمتری کمانی دیگر بزنید تا دو کمان یکدیگر را در نقاطی مانند X و Y قطع کنند.

الف) اندازه اضلاع مثلث‌های AXB و AYB را مشخص کنید.

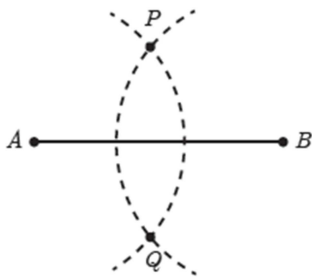
ب) توضیح دهید که چگونه می‌توانید مثلثی با طول ضلع‌های داده شده ۷ و ۵ و ۴ رسم کنید.



۶) هر نقطه روی عمود منصف پاره خط از دو سر پاره خط و

هر نقطه که از دو سر پاره خط یکسان باشد پاره خط قرار

دارد.



۷) رسم عمود منصف پاره خط داده شده :

۸) رسم خط عمود بر یک خط از نقطه داده شده روی آن :



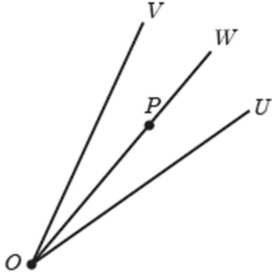
۹) رسم خط عمود بر یک خط از یک نقطه غیر واقع بر آن :



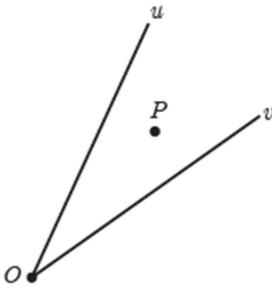
۱۰) رسم خط موازی با خط داده شده از یک نقطه غیر واقع بر آن :



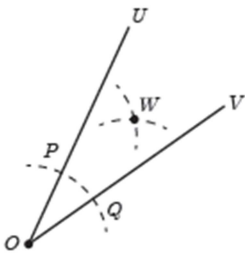
(۱۱) هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع زاویه



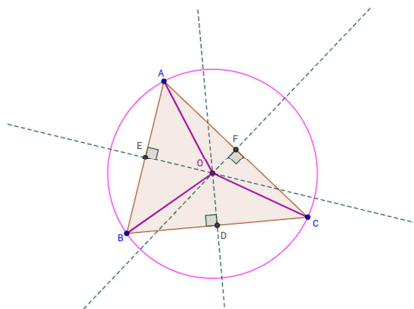
(۱۲) هر نقطه که از ضلع یک زاویه به فاصله یکسان باشد،



(۱۳) رسم نیمساز یک زاویه :

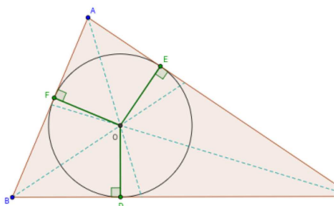


(۱۴) دایره محیطی یک مثلث : از سه رأس مثلث می‌گذرد .



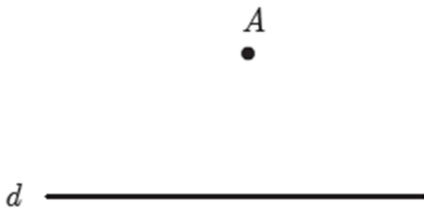
سوال. مرکز دایره محیطی مثلث ABC چگونه نقطه‌ای است ؟

(۱۵) دایره محاطی مثلث : اضلاع مثلث بر دایره مماس است.



سوال. مرکز دایره محاطی مثلث ABC چگونه نقطه‌ای است ؟

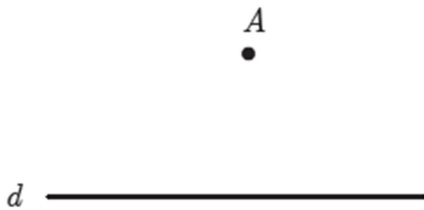
مثال. در شکل رو به رو، فاصله نقطه A از خط d برابر ۳ است.
 الف) روی خط d چند نقطه به فاصله ۵ از نقطه A وجود دارد؟
 ب) روی خط d چند نقطه به فاصله ۳ از نقطه A وجود دارد؟
 پ) روی خط d چند نقطه به فاصله ۲ از نقطه A وجود دارد؟



مثال. در شکل رو به رو، میدانیم $AB = 7$ است. نقطه‌ای پیدا کنید که $AC = 4$ و $BC = 6$ باشد.



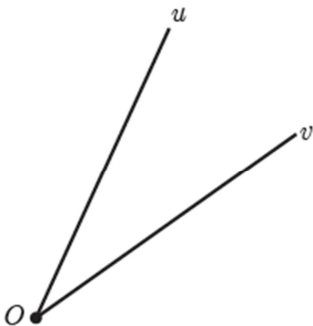
تمرین. الف) نقطه A به فاصله ۴ سانتیمتر مانند شکل مقابل مفروض است. مثلثی متساوی الساقین رسم کنید که یک رأس آن نقطه A و یک ضلع آن بر خط d منطبق باشد.



ب) مثلثی رسم کنید که شرایط (الف) را داشته باشد و سول ساق آن ۶ باشد.

پ) مثلثی رسم کنید که شرایط (الف) را داشته باشد و مساحت آن 8cm^2 باشد.

مثال. زاویه \widehat{UOV} را به چهار زاویه برابر تقسیم کنید.



مثال. پاره خط AB را به ۴ پاره خط برابر تقسیم کنید.



مثال. در مثلث ABC میدانیم $BC = 7$, $AB = 6$ و $AH = 3$ است. (AH ارتفاع وارد از رأس A است). روش رسم مثلث را توضیح دهید. مسئله چند جواب دارد؟

پرسش. میخواهیم به کمک رسم عمود منصف، پاره خط مقابل را به ۴ قسمت

برابر تقسیم کنیم. حداقل چند کمان باید ترسیم کنیم؟

(۱) ۶ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

پرسش. با داشتن معلومات $\hat{B} = 30^\circ$, $AC = 4$ و $AB = 3$ ، چند مثلث غیر همنهشت ABC میتوان رسم کرد.

(۱) ۱ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) هیچ

پرسش. دایره‌ای با قطر AC و مرکز O مفروض است. نقطه B را روی محیط دایره انتخاب میکنیم، آن را

به O وصل میکنیم و امتداد میدهیم تا محیط دایره را در D قطع کند. چهار ضلعی $ABCD$:

(۱) دوزنقه است (۲) مستطیل است (۳) لوزی است (۴) مربع است

پرسش. اگر $AB = 10$ باشد، چند نقطه در صفحه میتوان یافت که از A به فاصله ۶ و از B به فاصله ۴

باشد؟

(۱) ۰ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بیشمار

پرسش. اگر d و d' دو خط موازی به فاصله ۴ cm باشند، مجموعه نقاطی از صفحه که تفاضل فاصله‌هایش

از این دو خط برابر ۳ cm است، کدام است؟

(۱) یک خط موازی d (۲) دو خط موازی d (۳) خطی عمود بر d (۴) \emptyset

پرسش. در صفحه یک مثلث چند نقطه وجود دارد که از سه رأس مثلث به یک فاصله‌اند؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

پرسش. در صفحه یک مثلث چند نقطه وجود دارد که از سه ضلع به یک فاصله‌اند؟ (بدون امتداد ضلع‌ها)

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

پرسش. با معلومات $AB = 10$ و $AC = 7$ و $BC = 3$ ، چند مثلث مشخص می‌شود؟

(۱) ۰ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

پرسش. با معلومات $AB = 15$ و $AC = 12$ و $BC = 11$ ، چند مثلث مشخص می‌شود؟

(۱) ۰ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

پرسش. در مثلث ABC ، ضلع $a = 4$ ، $\hat{B} = 60^\circ$ و $h_c = 2\sqrt{3}$ است. چند مثلث قابل ترسیم است؟

(۱) هیچ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بیشمار

پرسش. با معلومات $AB = 8$ ، $AC = 6$ و $\hat{B} = 60^\circ$ چند مثلث مشخص می‌شود؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) هیچ

پرسش. با معلومات $AB = 10$ ، $\hat{A} = 45^\circ$ و $AC = 8$ چند مثلث مشخص می‌شود؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) هیچ

پرسش. چند مثلث میتوان رسم کرد بطوریکه $AB = ۱۶$ ، $\hat{B} = ۳۰$ و $AC = ۸$ باشد؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) هیچ

تمرین:

(۱) در شکل رو به رو، $AB = ۵$ است.

الف) چند نقطه C وجود دارد که $AC = ۲$ و $BC = ۱$ باشد؟



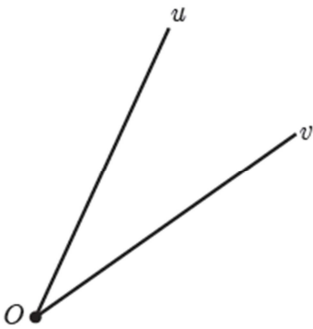
ب) چند نقطه D وجود دارد که $AD = ۳$ و $BD = ۲$ باشد؟

پ) چند نقطه E وجود دارد که $AE = ۴$ و $BE = ۳$ باشد؟

(۲) زاویه \widehat{UOV} داده شده است. نقطه P را درون زاویه طوری پیدا کنید

که فاصله P از OU و OV به ترتیب ۳ و ۲ باشد. (روش رسم را

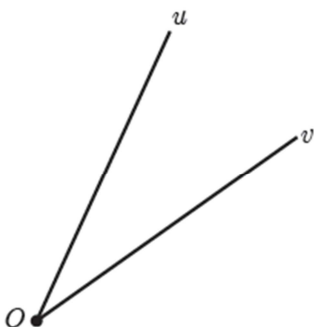
توضیح دهید)



(۳) زاویه \widehat{UOV} داده شده است. نقطه P را طوری درون زاویه پیدا کنید که

فاصله P از OU و OV برابر باشد و $OP = ۴$ باشد. (روش رسم را

توضیح دهید.)



(۴) پاره خط AB داده شده است. نقطه P را طوری پیدا کنید که

فاصله از پاره خط برابر ۵ باشد و $AP = PB$ باشد.



(۵) روش رسم یک مثلث قائم‌الزاویه که طول وترش ۸ و طول ضلع دیگر ۵ است را توضیح دهید.

(۶) درباره مثلث ABC میدانیم که طول اضلاع AB و AC و ارتفاع وارد بر AB به ترتیب ۱۰، ۵ و ۳

است. ($c = 10$, $b = 5$ و $h_c = 3$). روش رسم مثلث را توضیح دهید.

(۷) در مثلث متساوی الساقین ABC ($AB = AC$)، خط عمود بر AC (در رأس A)، نیمساز زاویه

داخلی C را در D قطع میکند. اگر M محل تلاقی نیمسازهای داخلی مثلث مفروض باشد، AD

برابر کدام است؟ (تجربی ۹۴)

(۱) AM (۲) MD (۳) MC (۴) $\frac{1}{2}AC$

استدلال و قضیه تالس:

نسبت و تناسب: هر دو نسبت مساوی یک تناسب تشکیل میدهد.

با فرض اینکه تمام مخرجها مخالف صفر هستند، موارد زیر را داریم:

$$\text{الف) } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow ad = bc \quad (\text{طرفین وسطین})$$

$$\text{ب) } ad = bc \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad (\text{تبدیل حاصل ضرب به تناسب})$$

$$\text{پ) } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c} \quad (\text{معکوس کردن تناسب})$$

$$\text{ت) } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{d}{b} \quad \left(\frac{a}{c} = \frac{b}{d}\right) \quad (\text{تعویض جای طرفین با وسطین})$$

$$\text{ث) } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \quad \left(\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}\right) \quad (\text{ترکیب نسبت در صورت یا مخرج})$$

راهنمایی: در قسمت (ث) برای اثبات اولین تناسب به دو طرف تساوی عدد ۱ را اضافه نمایید و برای اثبات تناسب دوم ابتدا کسرها را معکوس نمایید سپس به دو طرف عدد ۱ را اضافه نمایید.

$$\text{ج) } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d} \quad \left(\frac{a}{a-b} = \frac{c}{c-d}\right) \quad (\text{تفضیل نسبت در صورت یا مخرج})$$

راهنمایی: در قسمت (ج) برای اثبات اولین تناسب از دو طرف تساوی عدد ۱ را کم نمایید و برای اثبات تناسب دوم ابتدا کسرها را معکوس کرده سپس از دو طرف عدد ۱ را کم نمایید.
۲- با توجه به خواص اثبات شده در ۱ موارد زیر را کامل نمایید.

$$\text{الف) } \frac{5}{14} = \frac{15}{42} \Rightarrow 5 \times \text{---} = 15 \times \text{---}$$

$$\text{ب) } 3 \times 40 = 12 \times 10 \Rightarrow \frac{3}{\text{---}} = \frac{12}{\text{---}}$$

$$\text{پ) } \frac{7}{10} = \frac{21}{30} \Rightarrow \frac{10}{7} = \text{---}$$

$$\text{ت) } \frac{6}{11} = \frac{18}{33} \Rightarrow \frac{6}{18} = \text{---} , \frac{33}{11} = \text{---}$$

$$\text{ث) } \frac{4}{14} = \frac{10}{35} \Rightarrow \frac{18}{14} = \text{---} , \frac{4}{18} = \text{---}$$

$$\text{ج) } \frac{5}{12} = \frac{10}{24} \Rightarrow \frac{-7}{12} = \text{---} , \frac{5}{-7} = \text{---}$$

مثال. اگر $\frac{3x}{3-x} = 2$ ، آنگاه مقدار x را بدست آورید.

مثال. اگر $\frac{3a+b}{a+2b} = \frac{3}{2}$ باشد، مقدار $\frac{a}{b}$ را بدست آورید.

مثال. اگر $x = \frac{y}{3} = \frac{z}{5} = \frac{v}{3}$ ، حاصل $x + y + z$ را بدست آورید.

پرسش. اگر $\frac{2x+1}{3} = \frac{x-1}{12}$ ، مقدار x را بدست آورید.

پرسش. اگر $\frac{2a-b}{a+2b} = \frac{2}{3}$ ، مقدار $\frac{a}{b}$ را بدست آورید.

پرسش. اگر $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h} = \frac{3}{5}$ باشد و $b + d + f + h = 35$ ، حاصل $a + c + e + g$ را بدست آورید.

پرسش. a و b عددهایی طبیعی اند که $\frac{a+b}{19a+94b} = \frac{1}{25}$. در این صورت $\frac{a}{b}$ برابر است با :

$$(1) \quad 11/5 \quad (2) \quad 9 \quad (3) \quad \frac{23}{4} \quad (4) \quad 10/5$$

تعریف : استدلالی که از مشاهده و بررسی موضوعی در چند حالت، نتیجه‌ای کلی در آن موضوع گرفته

میشود یا به اصطلاح از جزء به کل میرسیم، استدلال استقرایی نامیده میشود.

در استدلال استقرایی نمیتوان همواره به نتیجه گرفته شده مطمئن بود. مثلا اگر فردی با مشاهده پنج

مسافر آمریکایی که اضافه وزن دارند، نتیجه گیری میکند که همه آمریکایی‌ها اضافه وزن دارند، از استدلال

استقرایی استفاده کرده است.

پرسش. به روش استدلال استقرایی نشان دهید که یک n ضلعی منتظم، n تا محور تقارن دارد.

پرسش. ادعا شده که عبارت $P(x) = x^2 + x + 41$ به ازای x های طبیعی اعداد اول بیشتر از ۴۱ را نتیجه میدهد. صحت این ادعا را به روش استقرایی بررسی کنید.

پرسش. به روش استدلال استقرایی نشان دهید مجموع زوایای خارجی هر مثلث 360° درجه است.

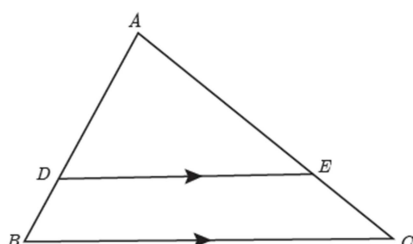
تعریف : استدلال استنتاجی، نتیجه گیری منطقی بر پایه واقعیت‌هایی است که درستی آنها را پذیرفته‌ایم. مثلا اگر کسی در جایی باشد که باران بیارد و نتیجه گیری کند که در آسمان ابر وجود دارد، از استدلال استنتاجی استفاده کرده است.

پرسش. به روش استدلال استنتاجی نشان دهید که مجموع زوایای داخلی یک مثلث 180° است.

پرسش. به روش استدلال استنتاجی ثابت کنید که مجموع زوایای خارجی هر مثلث 360° است.

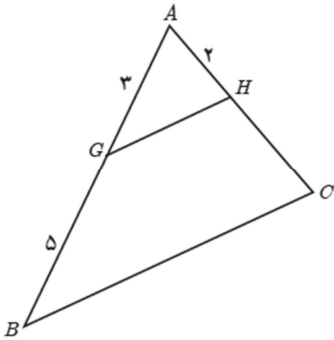
تعریف. نتایجی که با استدلال استنتاجی بدست آیند، قضیه نامیده میشود.

قضیه تالس. اگر در مثلث ABC ، پاره خط DE موازی ضلع BC باشد، داریم :

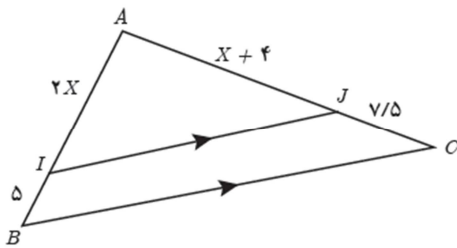


$$\frac{AD}{BD} = \frac{AE}{EC}$$

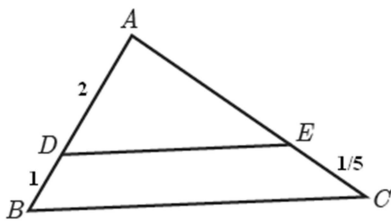
مثال. در شکل مقابل پاره خطهای GH و BC موازی اند. اندازه پاره خطهای AC و HC را بدست آورید.



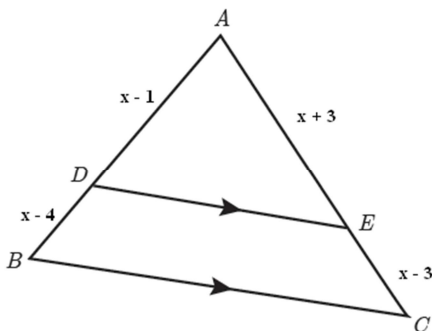
مثال. با تشکیل یک معادله مقدار X و سپس اندازه پاره خطهای AJ و AI را بدست آورید.



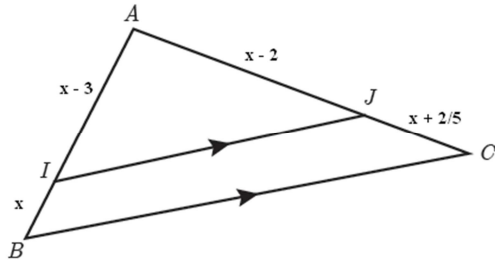
پرسش. در شکل زیر، $DE \parallel BC$ است. طول AE را بدست آورید.



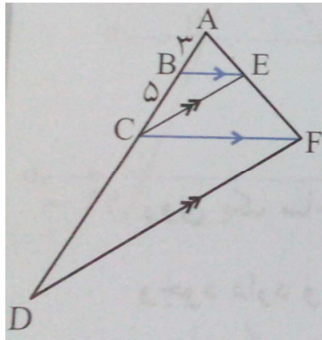
پرسش. در شکل زیر، $DE \parallel BC$ ، مقدار X را بدست آورید.



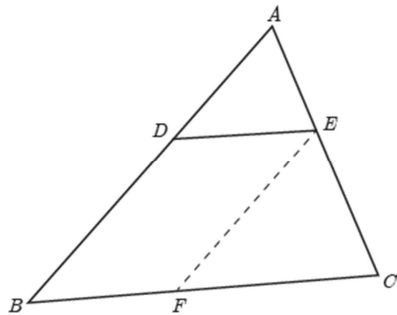
پرسش. در شکل زیر مقدار X را بیابید.



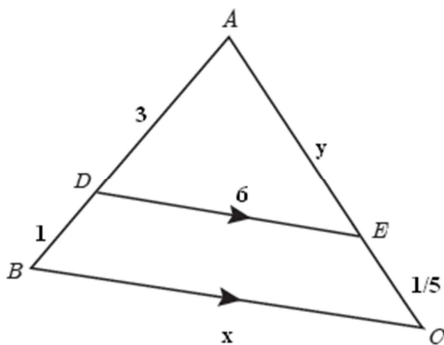
پرسش. در شکل زیر، $BE \parallel CF$ و $CE \parallel DF$. اندازه CD را بدست آورید.



تعمیم قضیه تالس. در مثلث ABC ، $DE \parallel BC$ ، آنگاه: $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$

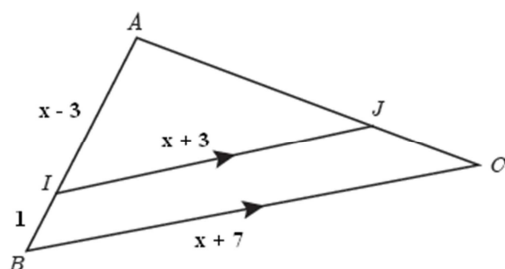


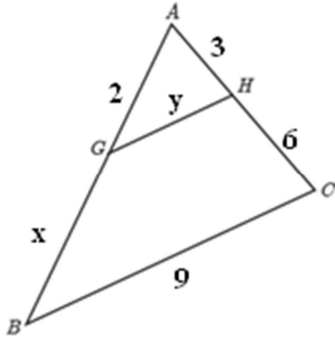
مثال. در شکل زیر $DE \parallel BC$ است. مقادیر X و Y را بدست آورید.



مثال. در شکل زیر، II با BC موازی است. مقدار X را بدست

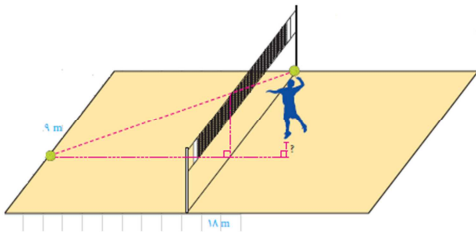
آورید.



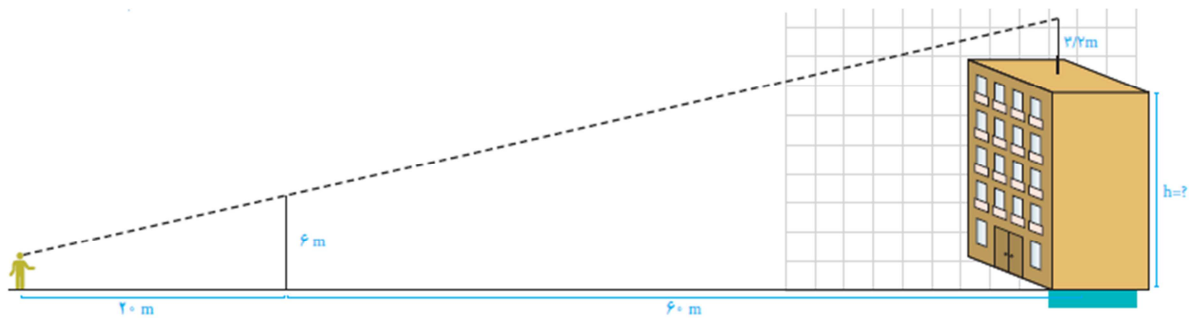


پرسش. در شکل زیر، مقادیر x و y را بیابید.

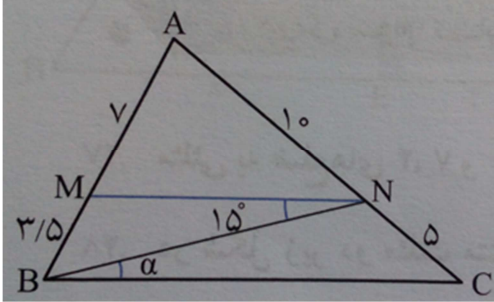
پرسش. ابعاد یک زمین استاندارد والیبال ۹ متر در ۱۸ متر است و تور والیبال با ارتفاع $2/43$ متر روی خط وسط نصب شده است. در یک لحظه، یک بازیکن با قد ۲ متر در فاصله ۴ متری تور، به هوا پریده و توپی را که در ارتفاع $0/5$ متری بالای سرش است با ضربه آبشار مماس بر تور روی خط انتهایی زمین حریف مینشاند. این بازیکن چقدر پریده است؟



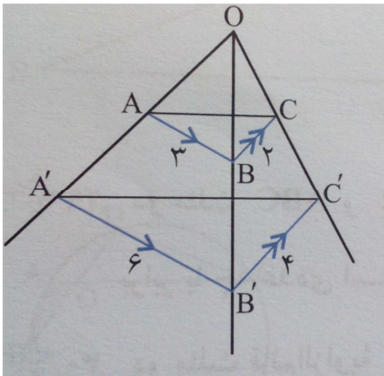
پرسش. مطابق شکل، روی یک ساختمان، یک آنتن به ارتفاع $3/2$ متر نصب شده است. در فاصله ۶۰ متری ساختمان، یک تیر برق قائم وجود دارد و یک ناظر وقتی در فاصله ۲۰ متری می ایستد، انتهای آنتن و انتهای تیر برق را در یک راستا میبیند. اگر بدانیم فاصله چشم ناظر از زمین $1/6$ متر است، بلندی ساختمان را محاسبه کنید.



پرسش. اندازه زاویه α را بدست آورید.



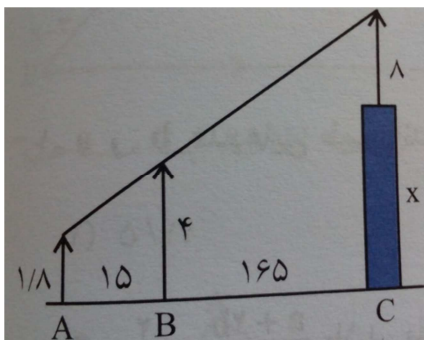
پرسش. در شکل زیر، اگر $AC = 4$ باشد، طول $A'C'$ را بدست آورید.



پرسش. در شکل زیر، دکلی به طول ۸ متر بر بالای برجی نصب شده

است. دید چشمی ناظر با ارتفاع $1/8$ متر، از ارتفاع دکل و تیرک ۴ متر

در یک راستا است. بلندی برج چند متر است؟ (ریاضی ۸۷)

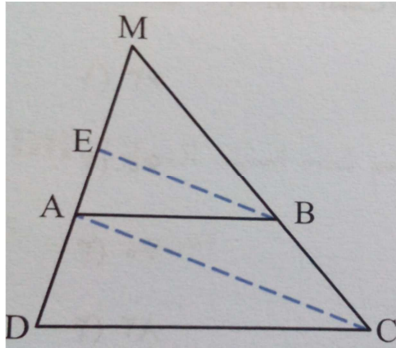


۲۰/۲ (۲) ۱۹/۸ (۱)

۲۱/۲ (۴) ۲۰/۸(۳)

پرسش. در دوزنقه $ABCD$ ، پاره خط BE موازی قطر AC است. اگر $AD = 7$ و $AE = 3$ باشد، فاصله

MD کدام است؟ (ریاضی ۹۳ خارج)



- ۱۲ (۱) ۱۲/۲۵ (۲) ۱۲/۵ (۳) ۱۲/۷۵ (۴)

پرسش. در دوزنقه‌ای اندازه قاعده‌ها ۹ و ۴ واحد و طول ساق‌ها ۶ و ۵ واحد است. محیط مثلثی که از امتداد

ساق‌ها در بیرون دوزنقه تشکیل شود، کدام است؟ (تجربی ۹۴)

- ۱۱/۴ (۱) ۱۱/۶ (۲) ۱۲/۲ (۳) ۱۲/۸ (۴)

عکس قضیه : اگر در یک قضیه جای فرض و حکم را عوض کنیم با آنچه حاصل میشود عکس قضیه گفته

میشود.

عکس قضیه ممکن است درست یا نادرست باشد. مثلاً :

قضیه : اگر مثلثی متساوی الساقین باشد، آنگاه ارتفاع و میانه وارد بر آن بر هم منطبق هستند.

عکس قضیه : اگر در یک مثلث ارتفاع و میانه وارد بر یک ضلع منطبق باشند، آنگاه آن مثلث متساوی

الساقین است.

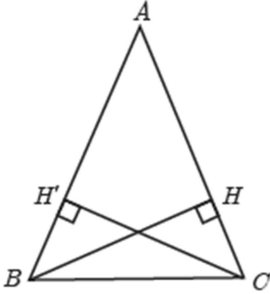
مثال. عکس قضیه‌های زیر را بنویسید.

(الف) اگر چهار ضلعی لوزی باشد، آنگاه قطرهاش عمود منصف یکدیگر هستند.

(ب) اگر دو ضلع از یک مثلث باهم برابر باشند، آنگاه میانه‌های وارد بر آن دو ضلع نیز باهم برابر هستند.

پ) اگر چهار ضلعی مستطیل باشد، آنگاه دو محور تقارن دارد.

ت) اگر دو ضلع از مثلثی باهم برابر باشند، آنگاه ارتفاع‌های وارد بر آن دو ضلع نیز باهم برابرند.



پرسش. عکس قضیه‌های زیر را بنویسید :

الف) «اگر در مثلث ABC , $AB = AC$ باشد، آنگاه میانه‌های BM و CN برابر هستند.»

ب) «اگر چهار ضلعی $ABCD$ لوزی باشد، آنگاه قطرهایش نیمساز زاویه‌هایش هستند.»

پرسش. در کدام مورد، هم خود قضیه و هم عکس قضیه درست است؟

الف) اگر دو مثلث همنهشت باشند، مساحتشان باهم برابر است.

ب) اگر سه ضلع مثلثی برابر باشند، آنگاه هر سه زاویه‌اش 60° هستند.

الف (۱) الف (۲) ب (۳) الف و ب (۴) هیچکدام

پرسش. در کدام مورد، هم خود قضیه و هم عکس قضیه درست است؟

الف) در مثلث ABC ، اگر $\hat{B} = \hat{C}$ باشد، آنگاه $AB = AC$

ب) اگر در مثلث ABC ، رابطه $AB^2 + AC^2 = BC^2$ برقرار باشد، آنگاه $\hat{A} = 90^\circ$.

الف (۱) الف (۲) ب (۳) هر دو (۴) هیچکدام

گزاره: گزاره یک جمله خبری است که دقیقاً درست یا نادرست باشد، اگر چه درست یا نادرست بودن آن بر ما معلوم نباشد. گزاره میتواند تنها یک خبر را اعلام کند که به آن گزاره ساده میگویند و میتواند بیش از یک خبر را اعلام کند و ترکیبی از چند گزاره ساده باشد که به آن گزاره مرکب میگویند؛ مثلاً گزاره‌های «فردا ۳شنبه است» و «ده عددی فرد است»، هر کدام گزاره ساده است و «فردا ۳شنبه است و ده عددی فرد است» یک گزاره مرکب است.

مثال.

الف) جمله‌های زیر گزاره اند :

- علی به مدرسه آمد.

- ۲۳ عددی اول است.

- $100 < 0$

- عدد اول زوج وجود ندارد.

ب) موارد زیر گزاره نیستند :

- چه رنگ زیبایی !

- آیا قطرهای لوزی برهم عمودند ؟

- از روی صندلی بلند شو .

- شاعران فارسی زبان افراد خوبی هستند .

- آیا عدد ۴۳ اول است ؟

- یک مثلث متساوی الساقین رسم کنید .

نقیض یک گزاره: همانطور که گفته شد، ارزش یک گزاره یا درست است و یا نادرست.

نقیض یک گزاره مانند مثال‌های زیر ساخته میشود و ارزش آن دقیقاً مخالف ارزش خود گزاره است.

مثال.

الف) گزاره : « ۲۳ عددی اول است»

نقیض آن : «چنین نیست که ۲۳ عددی اول باشد.» که معادل است با « ۲۳ عددی اول نیست.»

ب) گزاره : « a از b بزرگتر است.»

نقیض آن : چنین نیست که a از b بزرگتر باشد.» که معادل است با « a از b بزرگتر نیست.» و معادل است با « a یا کوچکتر از b است و یا با b برابر است.»

پ) گزاره : «هر صندلی، چهار پایه دارد.»

نقیض آن : «چنین نیست که هر صندلی چهار پایه داشته باشد.» که معادل است با «صندلی‌ای وجود دارد که چهار پایه ندارد.»

ت) گزاره : «یک مثلث وجود دارد که مجموع زوایای داخلی آن برابر ۱۸۰ درجه نیست.»

نقیض آن : «چنین نیست که یک مثلث وجود داشته باشد که مجموع زوایای داخلی آن ۱۸۰ درجه نیست.» که معادل است با «هر مثلثی مجموع زوایای داخلی اش ۱۸۰ درجه است.»

ث) گزاره : «هیچ کتابی بی‌ارزش نیست.»

نقیض گزاره : «چنین نیست که کتابی بی‌ارزش نیست.» که معادل است با «کتابی وجود دارد که بی‌ارزش است.»

پرسش. نقیض گزاره‌های زیر را بنویسید.

الف) برق خانه وصل است.

ب) علی قد بلندترین دانش آموز کلاس است.

پ) عدد حقیقی a ، گویا است.

ت) هر مستطیل یک مربع است.

ث) هر ۶ لامپ خانه روشن است.

ج) در هر پنج ضلعی، حداقل یک زاویه بزرگتر از ۹۰° وجود دارد.

پرسش. نقیض گزاره «دو خط موازی یکدیگر را قطع نمیکنند» کدام گزاره است.

- (۱) دو خط که همدیگر را قطع میکنند موازی نیستند. (۲) دو خط موازی همدیگر را قطع میکنند.
 (۳) دو خط که همدیگر را قطع نمیکنند موازی هستند. (۴) همه خطها موازی هستند.

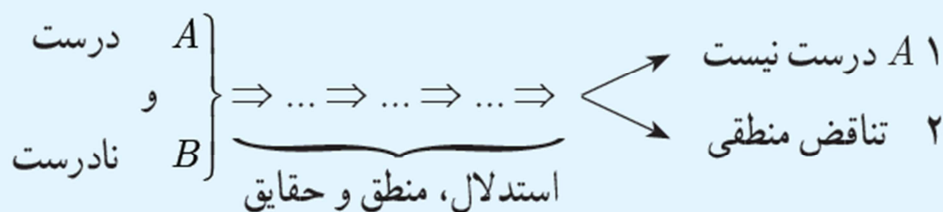
پرسش. نقیض گزاره «این هفته، من هر روز ورزش کردم» کدام گزاره است؟

- (۱) این هفته، من کلا ورزش نکردم. (۲) این هفته، من یک روز درمیان ورزش کردم.
 (۳) حداقل یک روز در هفته ورزش نکردم. (۴) این هفته، من هیچ روزی ورزش نکردم.

برهان غیر مستقیم یا برهان خلف: بدین صورت که بجای اینکه بطور مستقیم از فرض شروع کنیم و به نادرستی حکم برسیم، فرض میکنیم حکم درست نباشد (فرض خلف) و به یک تناقض یا به یک نتیجه غیر ممکن برسیم و به این ترتیب فرض خلف باطل و درستی حکم ثابت میشود.

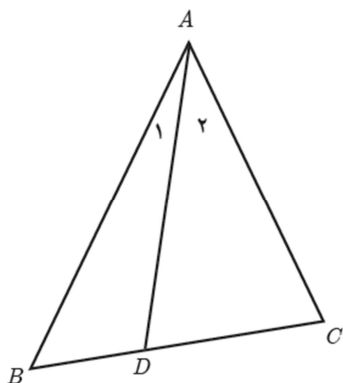
B (حکم) $\Rightarrow A$ (فرض): مسئله

اثبات به روش برهان خلف:



پس نتیجه می‌گیریم حکم B درست است. زیرا در صورت نادرستی B طبق استدلال فوق به یکی از نتایج ۱ یا ۲ می‌رسیم که هیچ کدام نمی‌تواند اتفاق بیفتد.

مثال. اگر $n \in \mathbb{N}$ و n^2 عددی فرد باشد، آنگاه n نیز فرد است.



فرض کنیم AD نیمساز زاویه A از مثلث ABC باشد. اگر $BD \neq DC$ آنگاه $AB \neq AC$.

پرسش. دو خط d_1 و d_2 بر خط l عمود هستند. ثابت کنید d_1 و d_2 موازی هستند.

پرسش. با استفاده از برهان خلف نشان دهید که اگر n عددی صحیح و n^2 زوج باشد، آنگاه n نیز زوج است.

پرسش. نشان دهید $2\sqrt{3}$ یک عدد گنگ است.

پرسش. در اثبات یک قضیه به کمک برهان خلف.....

(۱) فرض می‌کنیم حکم درست باشد و برای درستی آن چند مثال ارائه می‌دهیم.

(۲) نقیض حکم مسئله را بعنوان حکم می‌پذیریم و با استدلال منطقی به تناقض می‌رسیم.

(۳) نقیض فرض را بعنوان حکم می‌پذیریم و با استدلال منطقی به تناقض می‌رسیم.

(۴) فرض می‌کنیم حکم درست نباشد و برای نادرستی آن دلیل ارائه می‌کنیم.

پرسش. بهار میخواهد گزاره زیر را به کمک برهان خلف ثابت کند :

«اگر حاصلضرب دو عدد طبیعی a و b زوج باشد، آنگاه حداقل یکی از آن دو عدد، زوج است». فرض او

باید کدام باشد؟

(۱) a و b زوج هستند.

(۲) a و b طبیعی نیستند.

(۳) a و b فرد هستند.

(۴) $a \times b$ فرد است.

پرسش. پویا میخواهد گزاره زیر را به کمک برهان خلف ثابت کند :

«اگر خطهای d_1 و d_2 بر خط l عمود باشند، آنگاه d_1 و d_2 موازی هستند». در مورد استدلال او کدام

درست است؟

(۱) فرض او باید این باشد که d_1 و d_2 همدیگر را قطع میکنند.

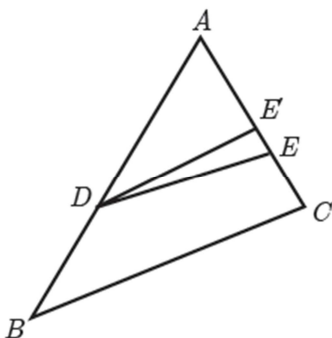
(۲) در پایان به مثلثی میرسد که دو زاویه 90° دارد، که تناقض است.

(۳) هر دو .

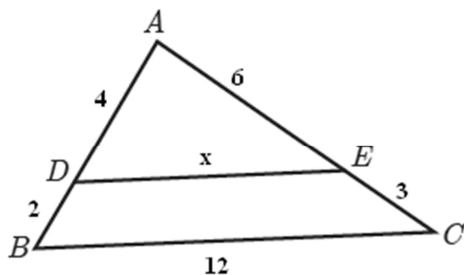
(۴) هیچکدام .

عکس قضیه تالس : اگر مانند شکل مقابل در مثلث ABC داشته باشیم $\frac{AE}{EC} = \frac{AD}{DB}$ ، آنگاه $DE \parallel BC$.

اثبات :



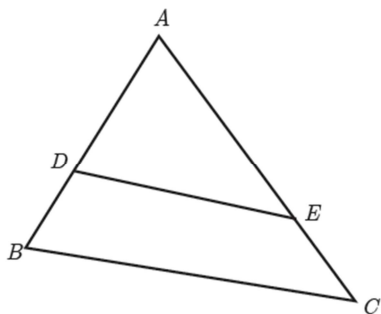
مثال. مقدار x را بدست آورید.



قضیه‌های دو شرطی :

قضیه تالس و عکس آن هر دو درست‌اند، بنابراین در مثلث ABC :

اگر $DE \parallel BC$ ، آنگاه $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ و برعکس .



چنین قضیه‌هایی را قضیه‌های دو شرطی می‌نامیم. قضیه‌های دو شرطی را میتوان با نماد \Leftrightarrow (اگر و

تنها اگر) بیان کرد. بطور مثال قضیه فوق و عکس آن را میتوان بصورت زیر بیان کرد :

فرض کنیم ABC یک مثلث و نقاط D و E به ترتیب روی AB و AC باشند. در این صورت

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \Leftrightarrow DE \parallel BC$$

مثال. در یک مثلث دو ضلع برابرند، اگر و تنها اگر زاویه‌های رو به رو به آنها باهم برابر باشند.

مثال. در یک مثلث متساوی الاضلاع یک پاره خط نیمساز است، اگر و تنها اگر میانه باشد.

پرسش. عکس قضیه و قضیه دو شرطی قضیه زیر را بنویسید.

قضیه : «در هر مثلث قائم‌الزاویه مربع وتر با مجموع مربعات دو ضلع دیگر برابر است.

پرسش. مثلث ABC مفروض است. ثابت کنید $AB = AC$ است، اگر و تنها اگر ارتفاع AH نیمساز زاویه

A باشد.

مثال نقض : به مثالی که در آن برای رد یک حکم کلی استفاده میشود، مثال نقض می‌گوئیم.

مثال. همه اعداد اول فرد هستند (حکم کلی در مورد اعداد اول).

پرسش. نادرستی حکم‌های زیر را با مثال نقض نشان دهید :

الف) حاصلضرب هر دو عدد گنگ، عددی گنگ میشود.

ب) هیچ دوزنقه‌ای محور تقارن ندارد.

پ) در هر چهار ضلعی، قطرهای همدیگر را قطع میکنند.

ت) نمیتوان پنج عدد طبیعی متوالی پیدا کرد که همگی مرکب باشد.

تمرین. برای رد درستی گزاره‌های زیر یک مثال نقض بیاورید.

الف) توان دوم هر عدد همیشه از خود آن عدد بزرگتر است.

ب) حاصل جمع هر دو عدد گنگ همواره یک عدد گنگ است.

پ) حاصلضرب یک عدد گویا در یک عدد گنگ همواره یک عدد گنگ است.

ت) برای هر دو عدد حقیقی و مثبت x و y همواره داریم : $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$

پرسش. اعداد کدام گزینه کلیت «حاصلضرب هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است» را نقض میکند؟

(کنکور)

$$(۱) \sqrt{۶} \text{ و } \sqrt{۲۱۶} \quad (۲) \sqrt{۶} \text{ و } \sqrt{۱۲} \quad (۳) \sqrt{۱۸} \text{ و } \sqrt{۲۱۶} \quad (۴) \sqrt{۱۲} \text{ و } \sqrt{۱۸}$$

پرسش. کدام عدد کلیت حکم «توان دوم هر عدد بزرگتر از خود آن است» را نقض میکند؟ (کنکور)

$$(۱) -\frac{1}{۲} \quad (۲) ۱ - \sqrt{۲} \quad (۳) \sqrt{۲} - ۱ \quad (۴) \sqrt{۲} + ۱$$

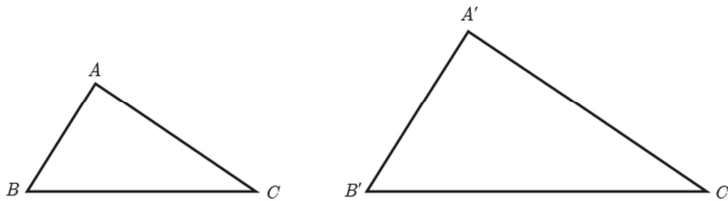
تشابه مثلث ها :

دو مثلث ABC و $A'B'C'$ متشابه

هستند هرگاه زوایای متناظر باهم برابر باشند

و نسبت اضلاع متناظر در دو مثلث یکسان

باشد.



$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{A} = \hat{A}' \text{ و } \hat{B} = \hat{B}' \text{ و } \hat{C} = \hat{C}' \\ \text{و} \\ \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} \end{cases}$$

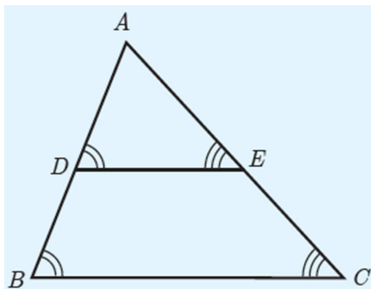
در این صورت اضلاع متناظر در دو مثلث را نسبت تشابه دو مثلث می نامیم. مثلاً اگر $\frac{AB}{A'B'} = \frac{2}{3}$ باشد گوییم

مثلث ABC با مثلث $A'B'C'$ با نسبت به تشابه $\frac{2}{3}$ ، متشابه است.

قضیه اساسی تشابه مثلث ها :

اگر خطی موازی یکی از اضلاع مثلث، دو ضلع دیگر را قطع کند در این صورت مثلث کوچکی که بوجود

می آید با مثلث بزرگ اولیه متشابه است.

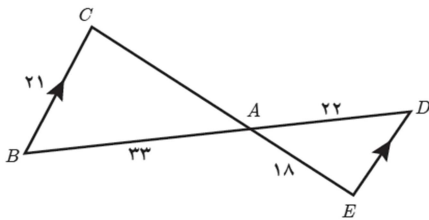


اثبات :

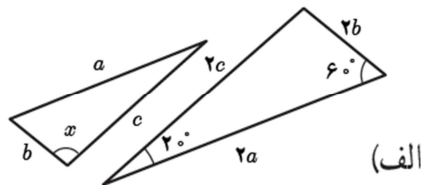
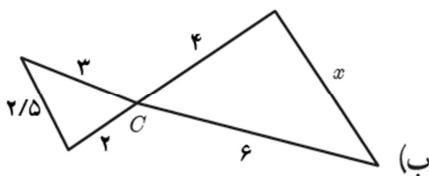
نکات:

- (۱) هرگاه دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشند، دو مثلث متشابه‌اند. (ز ز)
- (۲) هرگاه اندازه‌های دو ضلع با اندازه‌های دو ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند و زاویه بین آنها هم اندازه باشند، دو مثلث متشابه‌اند. (ض ز ض)
- (۳) هرگاه اندازه‌های سه ضلع از مثلثی با اندازه‌های سه ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند، دو مثلث متشابه‌اند. (ض ض ض)
- (۴) اگر دو مثلث ABC و $A'B'C'$ متشابه و نسبت تشابه (نسبت اضلاع) برابر k باشد در این صورت:
- الف) نسبت ارتفاعات، نیمسازها و میانه‌های نظیر دو مثلث برابر k است.
- ب) نسبت محیط‌های دو مثلث برابر k است.
- پ) نسبت مساحت‌های دو مثلث برابر k^2 می‌باشد.

مثال. در شکل زیر اندازه پاره خط CE برابر ۴۵ سانتیمتر است و $BC \parallel DE$. اندازه پاره خط‌های DE و CA را بدست آورید.

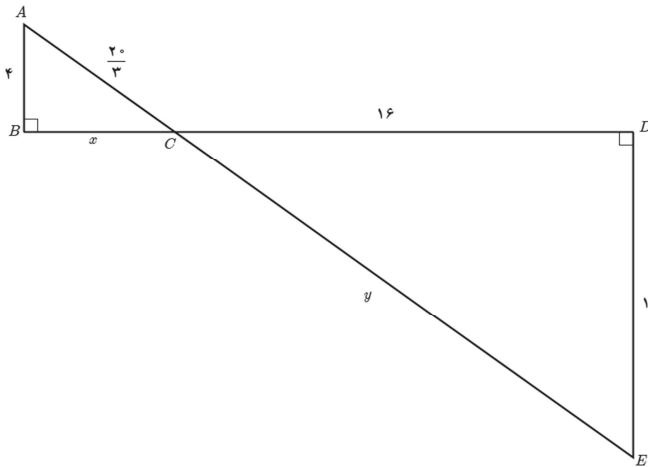


مثال. در هر قسمت ابتدا تشابه مثلث‌ها را ثابت کنید و سپس مقادیر X ها را مشخص کنید.



مثال. در این دو مثلث قائم‌الزاویه ابتدا مقادیر X و Y را بیابید و نسبت محیط‌ها و مساحت‌های آنها را بدست

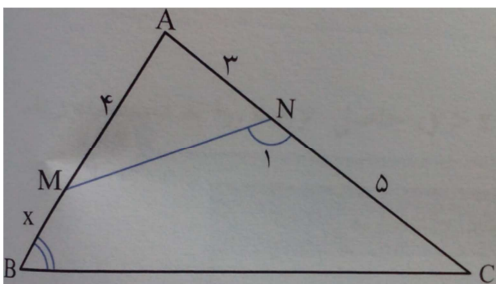
آورید.



پرسش. مثلثی به اضلاع ۳، ۴ و ۶ با مثلثی به اضلاع ۹، X و Y متشابه است. اگر $Y > X > 9$ ، حاصل $X +$

Y را بدست آورید.

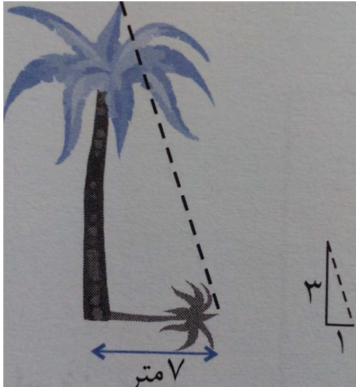
پرسش. مقدار X را بدست آورید.



پرسش. در شکل زیر، زاویه‌های B و N_1 مکمل هستند. X را

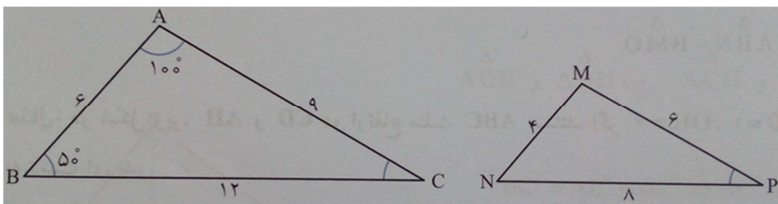
بدست آورید.

پرسش. برای بدست آوردن ارتفاع درخت، یک چوب ۳ متری را به صورت عمودی روی زمین قرار میدهیم.

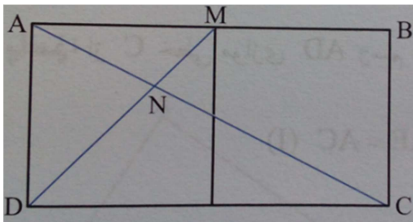


طول سایه چوب، ۱ متر است. طول سایه درخت ۷ متر است. ارتفاع درخت را بدست آورید.

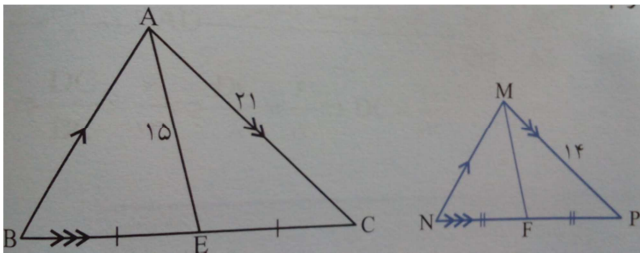
پرسش. زاویه P را بدست آورید.



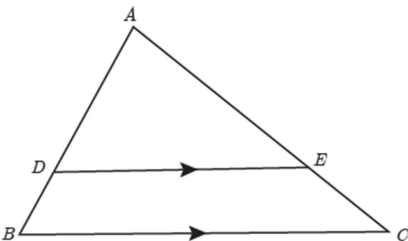
پرسش. در شکل زیر، دو مربع به اضلاع واحد کنار هم قرار دارند. طول AN را بدست آورید.



پرسش. ضلع‌های دو مثلث زیر، موازی هستند. طول میانه MF را بدست آورید.



پرسش. نسبت مساحت دو مثلث $\frac{16}{81}$ است. اگر محیط مثلث کوچک برابر ۱۸ باشد، محیط مثلث بزرگ را به دست آورید.

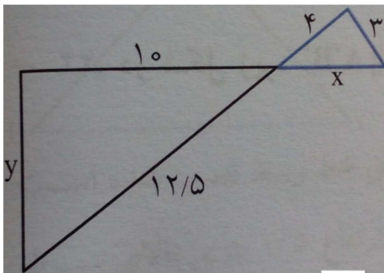


پرسش. DE موازی BC است و $\frac{\text{محیط مثلث } ADE}{\text{محیط مثلث } ABC} = \frac{2}{3}$ است، اگر مساحت ADE برابر ۸ باشد، مساحت مثلث

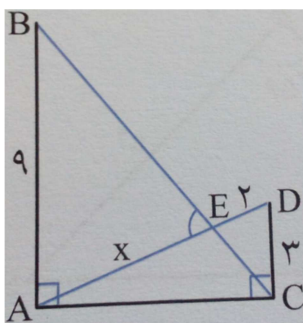
ABC را بدست آورید.

پرسش. مثلثی به ضلع‌های ۴، ۷ و ۱۰ با مثلثی به اضلاع x، y و ۵ متشابه است. اگر $x < y < ۵$ ، حاصل

$x + y$ را بدست آورید.

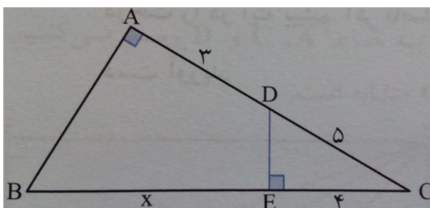


پرسش. در شکل زیر دو مثلث متشابه‌اند، مقدار x و y را بدست آورید.



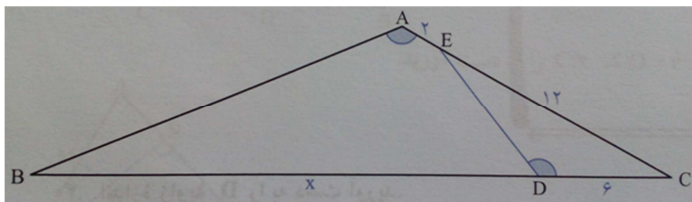
پرسش. در شکل زیر، $AB \perp AC$ و $CD \perp AC$ است. مقدار x را بدست

آورید.

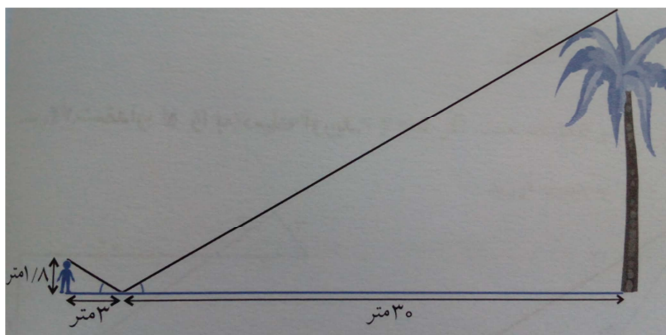


پرسش. مقدار x را بدست آورید.

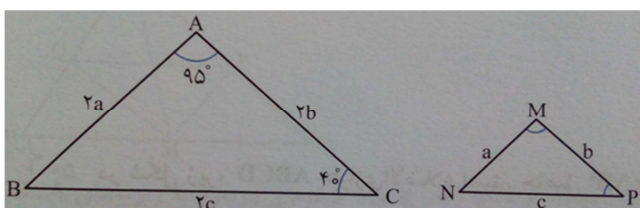
پرسش. مقدار X را بدست آورید.



پرسش. برای بدست آوردن ارتفاع درخت، آینه‌ای را روی زمین قرار می‌دهیم و آنقدر جابجا می‌شویم تا



تصویر نوک درخت را در آینه ببینیم. اگر فاصله پای ما تا آینه ۳ متر و فاصله آینه تا پای درخت ۳۰ متر باشد، ارتفاع درخت را بدست آورید.



پرسش. زاویه N را بدست آورید.

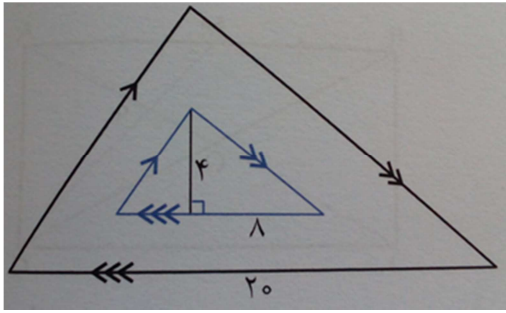
پرسش. طول اضلاع مثلثی ۶، ۷ و ۱۲ است. اگر این مثلث با مثلث دیگری با محیط ۷۵ متشابه باشد، طول

ضلع متوسط مثلث دوم چند است؟

پرسش. نسبت مساحت دو مثلث متشابه برابر با $\frac{4}{9}$ است. اگر ضلع کوچک مثلث کوچک برابر با ۱۲ باشد،

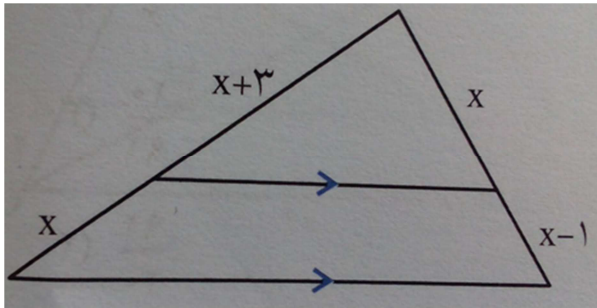
ضلع کوچک مثلث بزرگ را بدست آورید.

پرسش. در شکل زیر، مساحت مثلث بزرگتر را بدست آورید.



پرسش. در شکل زیر، مساحت مثلث بزرگتر چند برابر مساحت

مثلث کوچکتر است ؟



(۱) $1\frac{2}{3}$

(۲) $1\frac{5}{9}$

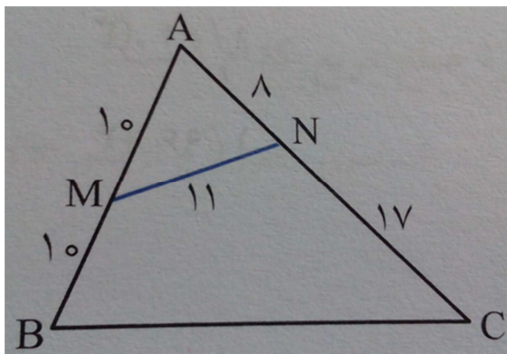
(۳) $1\frac{7}{9}$

(۴) $1\frac{8}{9}$

پرسش. در مثلثی به اضلاع ۶، ۵ و ۳ واحد، نیمساز کوچکترین زاویه خارجی آن، بزرگترین ضلع مثلث را قطع میکند. مساحت مثلثی که در خارج مثلث اصلی تشکیل میشود، چند برابر مثلث اصلی است؟ (ریاضی

(۹۱)

(۱) $\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) ۲ (۴) $\frac{9}{4}$



پرسش. در شکل زیر، مقدار BC کدام است ؟

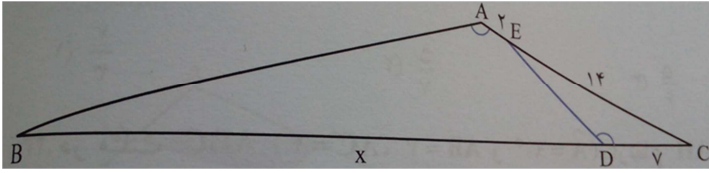
(۱) ۲۴

(۲) ۲۳/۵

(۳) ۲۵

(۴) ۲۷/۵

پرسش. در شکل زیر، $\hat{A} = \hat{D}$ ، طول BD چند واحد است؟ (ریاضی ۸۶)



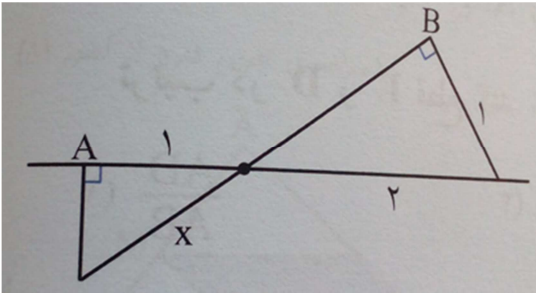
(۱) ۲۲

(۲) ۲۳

(۳) ۲۴

(۴) ۲۵

پرسش. در شکل زیر، دو زاویه \hat{A} و \hat{B} قائمه‌اند. مقدار x چقدر است؟ (ریاضی ۹۱)



(۱) $\frac{1}{2}\sqrt{3}$

(۲) $\frac{2}{3}\sqrt{3}$

(۳) $\frac{4}{3}$

(۴) $\frac{3}{2}$

پرسش. مثلثی به طول اضلاع a, b و 3 با مثلثی به طول اضلاع $5, 4$ و 3 متشابه است و دو مثلث قابل

انطباق نیستند. بیشترین محیط از مثلث اول کدام است؟ (تجربی ۹۰)

(۱) $7/2$ (۲) 9 (۳) 10 (۴) $13/5$

پرسش. مثلثی با اضلاع $3, 5$ و 7 با مثلثی به اضلاع $5, x$ و y متشابه است. اگر $x > 5$ و $y > 5$ باشند، x

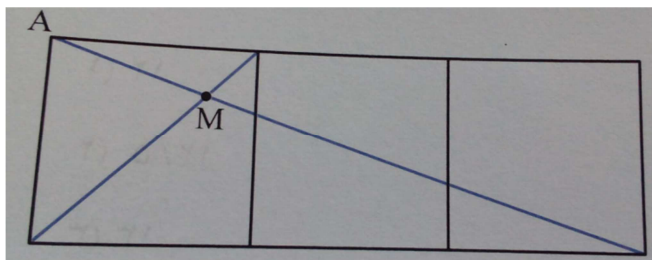
$y +$ کدام است؟ (کنکور)

(۱) $\frac{58}{3}$ (۲) 20 (۳) $\frac{61}{3}$ (۴) 21

پرسش. در شکل زیر، سه مربع به اضلاع واحد کنار هم قرار دارند. فاصله MA چند برابر $\sqrt{10}$ است؟

(کنکور)

(۱) $\frac{1}{3}$

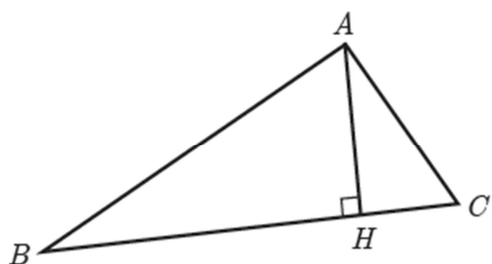


$$\frac{1}{4} \quad (۲)$$

$$\frac{2}{9} \quad (۳)$$

$$\frac{1}{5} \quad (۴)$$

روابط طولی در مثلث قائم الزاویه :



$$AHC \sim ABC \Rightarrow \frac{AC}{BC} = \frac{CH}{AC} \Rightarrow AC^2 = CH \times BC$$

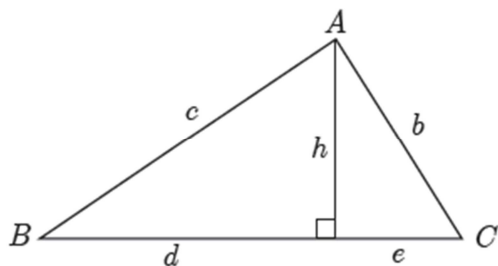
$$ABH \sim ABC \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{BH}{AB} \Rightarrow AB^2 = BH \times BC$$

$$ABH \sim AHC \Rightarrow \frac{BH}{AH} = \frac{AH}{HC} \Rightarrow AH^2 = BH \times HC$$

$$S_{ABC} = \frac{AH \times BC}{2} = \frac{AB \times AC}{2} \Rightarrow AB \times AC = AH \times BC$$

مثال. در مثلث قائم الزاویه زیر در هر مورد با کمترین محاسبه

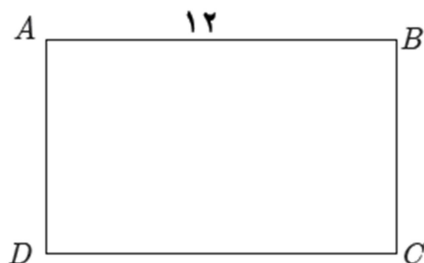
ممکن از داده‌ها استفاده کنید و مقادیر خواسته شده را بیابید.



$$e = ? \quad d = 7 \quad h = 5 \quad (۱)$$

$$c = ? \quad b = ? \quad e = 3 \quad d = 5 \quad (۲)$$

$$h = ? \quad b = 6 \quad c = 8 \quad (۳)$$



پرسش. در شکل مقابل مستطیلی به طول ۱۲ است. اگر از نقطه A

عمودی بر قطر BD رسم کنیم و پای عمود را H بنامیم، طول BH برابر

۱۱ خواهد شد. اندازه عمود رسم شده، طول قطر مستطیل و اندازه عرض

مستطیل را محاسبه نمایید .