فصل دوم : هندسه

ترسیم های هندسی

استدلال و قضیه تالس

تشابه مثلثها

فرزانه بایمانی

تعریف: یک مکان هندسی مجموعه نقاطی است از صفحه که دارای یک ویژگی معین هستند و هر نقطه دیگری که دارای این ویژگی باشد در این مجموعه نقاط قرار دارد به عنوان مثال دایره ای که شعاع ۳ سانتی متر و به مرکز o رسم می شود در واقع مکان هندسی نقاطی از صفحه است که فاصله آنها تا مرکز برابر ۳ سانتی متر است.

توجه: هر واقعیت که بدیهی بوده و نیازمند استدلال نباشد را اصل می نامند.

به عنوان مثال:

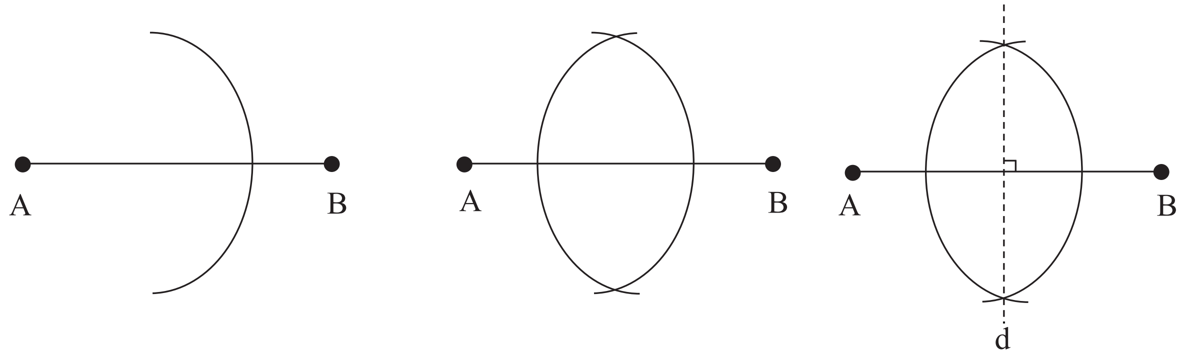
- از یک نقطه روی صفحه بینهایت خط می گذرد.
- از هر دو نقطه متمایز روی صفحه فقط و فقط یک خط راست میگذرد.
- از هر نقطه خارج یک خط راست تنها و تنها یک خط راست موازی آن می توان رسم کرد.

تعریف: عمود منصف مکان هندسی نقاطی از صفحه است که از دو سر یک پاره خط به یک فاصله هستند. البته می توان تعریف ساده تری نیز ارائه داد: هر خط که بر وسط یک پاره خط عمود باشد عمود منصف آن پاره خط نامیده می شود.

بنابراین تعریف داریم:

- هر نقطه روی عمود منصف تا دو سر پاره خط به یک فاصله است.
- اگر فاصله نقطه ای تا دو سریک پاره خط به یک اندازه باشد آن نقطه حتما روی عمود منصف پاره خط قرار دارد.

<u>رسم عمود منصف:</u> دهانه پرگار را به اندازه کمی بیش تر از نصف طول پاره خط باز کرده ، به مرکزهای دو سرپاره خط دو کمان می زنیم. خط گذرا از نقاط تلاقی این دو کمان عمود منصف پاره خط مفروض است.



توجه: اگر در یک مثلث هر سه زاویه حاده باشند محل تلاقی عمود منصف ها داخل مثلث است و اگر مثلث قائم الزاویه باشد محل تلاقی عمود منصف ها دقیقا وسط وتر است و اگر مثلث زاویه منفرجه (باز) داشته باشد محل تلاقی عمود منصف ها نقطه ای در خارج از مثلث است.

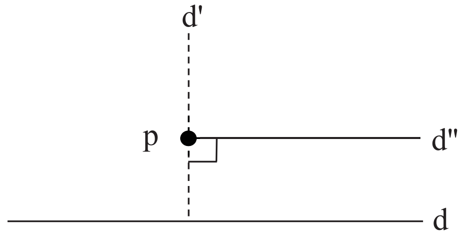
توجه: چون محل تلاقی سه عمود منصف از ۳ رأس مثلث به یک فاصله است این نقطه مرکز دایره محیطی مثلث (دایره ای که از رأس های آن میگذرد) است.

سوال:خط d ونقطه m روی آن داده شده اند ازm عمودی برd رسم کنید.(کتاب درسی صفحه ۲۸)

سوال:خط d ونقطه p خارج آن مفروضند. از p عمودی بر خط d رسم کنید. (کتاب درسی صفحه ۲۸)

سوال: خط d ونقطه p خارج آن مفروضند. از p خطی به موازات خط d رسم کنید. (کتاب درسی صفحه ۲۸)

ابتدا از نقطه p عمود d' را بر خط d رسم می کنیم.
سپس ازp روی خط d' عمود d'' را بر d' رسم می کنیم این خط با خط d موازی است زیرا دو خط عمود بر یک خط باهم موازی اند.



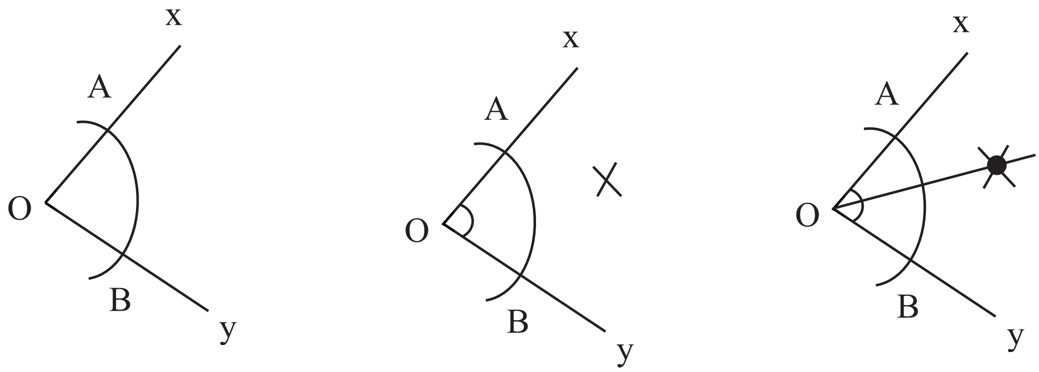
تعریف: نیمساز زاویه خطی است که از رأس زاویه می گذرد و آن را به دو زاویه مساوی تقسیم می کند به عبارت دیگر: نیمساز یک زاویه در واقع مکان هندسی نقاطی در درون زاویه است که از دو ضلع زاویه به یک فاصله اند.

بنابراین تعریف داریم:

- هر گاه نقطه ای از دو ضلع زاویه ای به یک فاصله باشد آن نقطه روی نیمساز زاویه قرار دارد.
- هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است.

رسم نیمساز یک زاویه:

ابتدا از رأس زاویه کمان دلخواهی می زنیم تا اضلاع زاویه را در دو نقطه قطع کند سپس سوزن پرگار را روی این دو نقطه گذاشته و دو کمان می زنیم و در نهایت محل برخورد دو کمان را به رأس زاویه وصل می کنیم.درصفحه بعد ترسیم شکل نشان داده شده است.



توجه: درهرمثلث محل تلاقی سه نیمساز داخلی همواره داخل مثلث است.

توجه: چون هر نقطه روی نیمساز از دو ضلع زاویه به یک فاصله است بنابراین محل تلاقی سه نیمساز داخلی هر مثلث از هر سه ضلع مثلث به یک فاصله است.

توجه: محل تلاقی سه نیمساز داخلی مثلث مرکز دایره محاطی داخلی (دایره ای است که بر هر سه ضلع مثلث مماس است) مثلث می باشد.

توجه: محل تلاقی نیمسازهای خارجی مثلث مرکز دایره های محاطی خارجی (دایره هایی که به یک ضلع و امتداد دو ضلع دیگر مماس است) مثلث می باشد.

توجه: تمام نقاطی که به فاصله k سانتیمتر ازخط d هستند دوخط موازی d درطرفین آن وبه فاصله k سانتیمتر ازآنرا تشکیل میدهند

توجه: اگرنقطه p به فاصله k سانتی متر ازخط d قرارداشته باشد: الف) تمام نقاطی که به فاصله a سانتی متر از p هستند دایره ای به مرکز p وشعاع a راتشکیل میدهند

ب) نقاطی ازخط d که به فاصله a سانتی متر ازنقطه p هستند محل های برخورددایره ایست به شعاع a سانتیمتروبه مرکز p باخط d

نکات کلیدی:

۱- یک مثلث در حالت کلی یک دایره محیطی دارد که مرکزش محل برخورد سه عمود منصف اضلاع مثلث است. همچنین یک دایره محاطی داخلی دارد که مرکزش محل برخورد سه نیمساز داخلی مثلث است. همچنین ۳ دایره محاطی خارجی نیز دارد که مرکزهریک محل برخورد نیمساز داخلی یک زاویه و نیمساز دو زاویه خارجی دو رأس دیگر است.

۲- اگر p را نصف محیط مثلث و S را مساحت مثلث و همچنین شعاع دایره محاطی داخلی را با r و شعاع های دایره های محاطی خارجی را با r_a ، r_b ، r_c نشان دهیم داریم:

$$r_a=\frac{S}{p-a} \quad , \quad r_b=\frac{S}{p-b} \quad , \quad r_c=\frac{S}{p-c}$$

و همچنین: $\frac{1}{r}=\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}$ ویا s=pr درنتیجه: $r=\frac{s}{p}$

۳- میانه نظیر یک رأس ، پاره خطی است که ضلع مقابل به آن را به دو قسمت مساوی تقسیم می کند.

۴- میانه هر رأس از نصف مجموع دو ضلع مجاور خود کوچکتر است.

۵- با سه عدد c,b,a یک مثلث قابل رسم است هرگاه مجموع هر دو عدد دلخواه از این سه عدد از دیگری بزرگتر باشد.

۶- محل تلاقی میانه های هر مثلث مرکز ثقل مثلث است همچنین میانه های هر مثلث همدیگر را به نسبت $\frac{2}{3}$ از رأس و $\frac{1}{3}$ از پای میانه قطع می کنند. به عبارت دیگر: (میانه) $\frac{1}{3}$ = فاصله وسط هرضلع تا محل تلاقی و(میانه) $\frac{2}{3}$ = فاصله رأس تامحل تلاقی میانه ها

۷- رسم مثلث در حالتی که دو ضلع از آن مشخص اندو زاویه ای که بین آن دو ضلع نیست نیز مشخص است. در این صورت دو حالت داریم:

حالت اول)زاویه داده شده روبه رو به ضلع بزرگتر است:در این حالت تنهایک مثلث قابل رسم است.

حالت دوم) زاویه داده شده رو به رو به ضلع کوچکتر است: در این حالت برای پیدا کردن تعداد حالات ممکن رسم مثلث از قضیه سینوس ها استفاده می کنیم.

مثلا اگر bوcو $\hat{B}$ معلوم باشند:

$$\frac{b}{\sin\hat{B}}=\frac{c}{\sin\hat{C}} \Rightarrow \sin\hat{C}=\frac{C\ \sin\hat{B}}{b} \Rightarrow \begin{cases} \sin\hat{c} > 1 \Rightarrow \text{مثلثی قابل رسم نیست} \\ \sin\hat{c} = 1 \Rightarrow \text{یک مثلث قابل رسم است} \\ \sin\hat{c} < 1 \Rightarrow \text{دو مثلث قابل رسم است} \end{cases}$$

۸- در حالت های : ض ز ض ، ض ض ض، ز ض ز تنها یک مثلث منحصر به فرد می توان رسم کرد.

۹- اگر در مثلثی هر سه زاویه حاده باشند محل تلاقی ارتفاع ها داخل مثلث است و اگر مثلث قائم الزاویه باشد محل تلاقی سه ارتفاع رأس قائمه است و اگر مثلث دارای زاویه منفرجه باشد محل تلاقی ۳ ارتفاع خارج مثلث است.

۱۰-معادله دایره ای به مرکز (a,b)وشعاعr به صورت

$r^2=(x-a)^2 +(y-b)^2$ می باشد

توجه:برای آنکه ببینیم نقطه (1,3) روی دایره ای به شعاع۳سانتی مترومرکز(0,-2) قرارداردیاخیرازنکته شماره ۱۰استفاده میکنیم.

تست:

۱- در یک مثلث متساوی الضلاع به محیط ۱۲ شعاع دایره محاطی داخلی و خارجی به ترتیب عبارتند از:

۱) $3\sqrt{6}/2, 2\sqrt{3}/3$ ۲) $2\sqrt{3}, 6\sqrt{3}$

۳) $2\sqrt{3}/3, 2\sqrt{3}$ ۴) $2\sqrt{3}, 6$

جواب : گزینه ۳

با استفاده از نکته ۲ حل کنید.

توجه: چون مثلث متساوی الاضلاع است سه شعاع دایره محاطی خارجی برابرند.

۲- کدام نقطه درون مثلث از سه راس مثلث به یک فاصله است؟

۱) محل تلاقی نیمسازها ۲) محل برخورد میانه ها

۳) محل تقاطع عمودمنصفها ۴) محل تقاطع ارتفاع ها

پاسخ:گزینه۳.به صفحه توصیف عمود منصف مراجعه کنید

۳- چند نقطه درون مثلث وجود دارد که از سه ضلع به یک فاصله است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ:گزینه۱.به توضیحات نیمسازهامراجعه کنید

۴- چند مثلث با اطلاعات $a=5$ ، $c=7$ و $h_b=3$ می توان رسم نمودکه مثلث زاویه منفرجه نداشته باشد؟

۱) صفر ۲) یک ۳) دو ۴) بی شمار

پاسخ:گزینه۲ ازنحوه رسم مثلثی که ارتفاعش مشخص است استفاده کنید

درس دوم: استدلال و قضیه تالس

نسبت و تناسب: نسبت بین دو عدد a و b عبارت است از کسر $\frac{a}{b}$ که b نباید صفر باشد چون تقسیم کردن یک عدد بر صفر معنی ندارد. تساوی بین دو نسبت $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ (که c و d صفر نیستند) یک تناسب نامیده می شود.

ویژگی های تناسب: (بافرض اینکه a,b,c,d صفرنیستند)

$$1)\ \frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow ad=bc$$

برای اثبات طرفین سمت چپ را در bd ضرب کنید.

این خاصیت را طرفین وسطین می نامند.

$$2)\ ad=bc\Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

با توجه به قسمت قبل برای اثبات باید سمت چپ را ....

(تبدیل حاصل ضرب به تناسب)

$$3)\ \frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow \frac{b}{a}=\frac{d}{c}$$

برای اثبات طرفین تساوی سمت چپ را در $\frac{bd}{ac}$ ضرب کنید. (معکوس کردن تناسب)

$$4)\ \frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow \frac{c}{a}=\frac{d}{b}$$

برای اثبات طرفین تساوی سمت چپ را در $\frac{d}{a}$ ضرب کنید. (جابجایی طرفین)

$$5)\ \frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow \frac{a}{c}=\frac{b}{d}$$

برای اثبات: طرفین تساوی سمت چپ را در $\frac{b}{c}$ ضرب کنید. (جابجایی وسطین)

$6)\ \frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ ترکیب نسبت در صورت

برای اثبات طرفین تساوی سمت چپ را با ۱ جمع کنید.

$7)\ \frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a}{b+a}=\frac{c}{d+c}$ ترکیب نسبت در مخرج

برای اثبات ابتدا ویژگی شماره ۳ استفاده کنید و سپس عدد ۱ را به طرفین تساوی اضافه کنید و باز از شماره ۳ استفاده کنید.

$8)\ \frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$ تفاضل نسبت در صورت

برای اثبات با یک تغییر کوچک از اثبات شماره ۶ کمک بگیرید.

$9)\ \frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a}{b-a}=\frac{c}{d-c}$ تفاضل نسبت در مخرج

برای اثبات با یک تغییر کوچک از اثبات شماره ۷ کمک بگیرید.

سوال: در هریک از موارد زیر مقادیر مجهول را بیابید.

$1)\frac{x}{18-x}=\frac{3}{7}$

$2)\ \frac{9}{12}=\frac{x}{20}=\frac{21}{y}$

3) $\frac{4}{x+1}=\frac{2}{3x-2}$

تذکر: نسبت با کسر فرق دارد زیرا: در کسرها می توان جنس و واحد آنرا قید کرداما‌نسبت ها مطلق اند و واحد ندارند مثلا: $\frac{3}{4}$متر یا $\frac{2}{3}$پاره خط نمونه هایی از کسرند اما نسبت $\frac{3}{4}$یعنی اگر اولی سه باشد دومی چهار است ، اگر اولی ۳۰ باشد دومی ۴۰ است، اگر اولی ۹ باشد دومی ۱۲ است و ...

تذکر: در کسرها صورت و مخرج عدد صحیح اند ولی در نسبت ها لازم نیست چنین باشد به عبارت دیگر صورت و مخرج نسبت ، عدد کسری و رادیکالی هم می توانند باشند.

مثال: یک چوب ۲ متری را روی زمین به طور قائم نصب کرده ایم در یک ساعت از روز سایه این چوب ۱ متر است. درختی کاملا قائم در مجاور همین چوب قرار دارد و در همین ساعت از روز سایه اش تا پای درخت ۳ متر است. طول درخت چقدر است؟

توجه: سایه اشیا در یک ساعت معین به یک اندازه کم یا زیاد می شود پس تغییرات باهم متناسب اند

$\frac{1}{2}=\frac{3}{x}\Rightarrow x=6$

نسبت سایه چوب به طولش $\frac{1}{2}$و نسبت سایه درخت به طولش $\frac{3}{x}$ (هردو قائم اند) پس متناسبند.

سوال: اگر قیمت ۱۰ عدد از یک کالا ۴۰۰ تومان باشد ، قیمت چند عدد از آن ، ۸۰ تومان خواهد بود؟

استدلال:

استدلال استقرایی: استدلالی که در آن با مشاهده و بررسی یک موضوع در چند حالت ، نتیجه کلی از آن گرفته می شود به عبارت دیگر از جزء به کل می رسیم استدلال استقرایی نامیده می شود.

نتیجه این استدلال قطعیت ندارد یعنی نمی توانیم آن را تعمیم یا عمومیت بخشیم.

به عنوان مثال اگر وارد دهکده ای شویم که خانه های ورودی گنبدی شکل باشند نمی توان نتیجه گرفت که همه خانه های آن دهکده گنبدی شکل است به عبارت دیگر: اگر تا صدخانه را بررسی کنیم و نتیجه گنبدی بودن آنها باشد نمی توانیم تعمیم دهیم که مثلا هر ۲۵۰ خانه آن دهکده گنبدی شکلند.

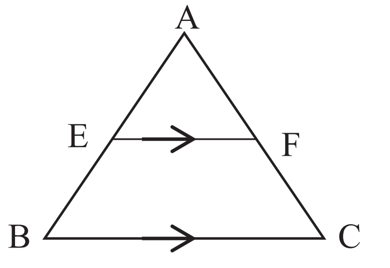
استدلال استنتاجی: روش نتیجه گیری کلی بر مبنای حقایقی است که درستی آنها را پذیرفته ایم مثل : جمع زاویه های داخلی هر مثلث ۱۸۰ درجه است.

توجه: نتایج مهمی که از استدلال استنتاجی به دست می آیند قضیه نامیده می شوند.

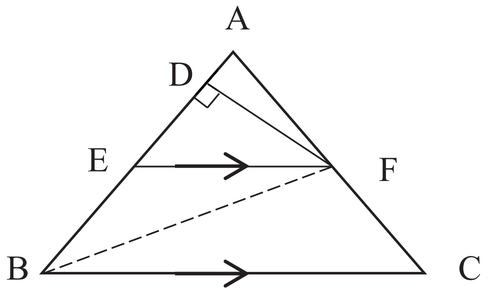
سوال: دو زاویه $\hat{A}$ و $\hat{B}$ متمم یکدیگرند اگراندازه یکی از ۲ برابردیگری 15° کمتر باشداندازه این دو زاویه رابرحسب درجه بدست آورید (کشوری ریاضی۲ دیماه ۷۵)

قضیه تالس: اگر خطی با یک ضلع مثلث موازی باشد و دو ضلع دیگر را قطع کند ،نسبت پاره خط هایی که روی یک ضلع پدید می آورد ، برابر است با نسبت پاره خط هایی که روی ضلع دیگر ایجاد می کند به عبارت دیگر:

اگر در مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$، EF موازی BC باشد آنگاه $\frac{AE}{EB}=\frac{AF}{FC}$



اثبات: از F به B وصل کرده و پاره خط FD را بر AB عمود می کنیم در این صورت داریم:



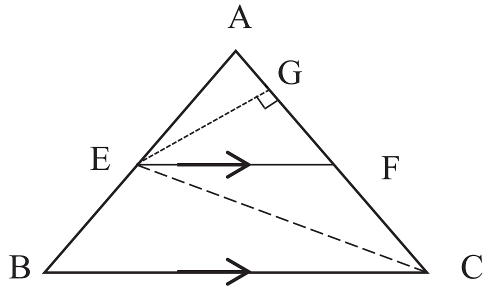
$\overset{\Delta}{AFE}$ مساحت $=\frac{1}{2}\,AE\times FD$

$\overset{\Delta}{EFB}$ مساحت $=\frac{1}{2}\,EB\times FD$

(در واقع FD حکم ارتفاع دو مثلث را دارد.)

$\Rightarrow \frac{\text{مساحت } \overset{\Delta}{AFE}}{\text{مساحت } \overset{\Delta}{FEB}}=\frac{AE}{EB}$ ①

همینکار را اینبار از رأس E انجام میدهیم یعنی از E به C وصل کرده و پاره خط EG را بر AC عمود می کنیم.

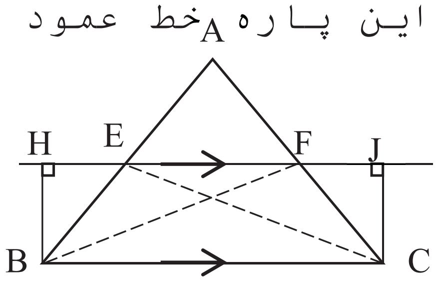


(در واقع EG حکم ارتفاع دو مثلث AEF و EFC را دارد.)

$$\Rightarrow \frac{\text{مساحت } \overset{\Delta}{AFE}}{\text{مساحت } \overset{\Delta}{EFC}} = \frac{\frac{1}{2} AF \times EG}{\frac{1}{2} FC \times EG} = \frac{AF}{FC} ②$$

اکنون برای آنکه نشان دهیم طرف های دوم تساوی های ① و ② باهم برابرند باید نشان دهیم مساحت $\overset{\Delta}{EFB}$ و $\overset{\Delta}{EFC}$ باهم مساوی اند بنابراین:

پاره خط EF را از دو طرف امتداد می دهیم. از B و C بر امتداد این پاره خط عمود های BH و CJ را رسم می کینم.



چون HJ ∥BC و $\hat{H}=\hat{J}=90$ و طبق قضیه

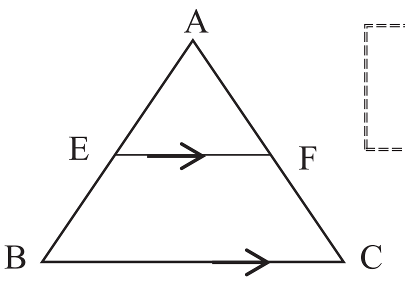
خطوط موازی $\hat{B}=\hat{C}=90$ (چهار زاویه قائمه) پس چهار ضلعی BCJH مستطیل است.

در نتیجه : BH=CJ (اضلاع روبرو در مستطیل باهم مساویند.)

$$\begin{cases} \text{مساحت مثلث } \overset{\Delta}{EFB} = \frac{1}{2} BH \times EF \\ \text{مساحت مثلث } \overset{\Delta}{EFC} = \frac{1}{2} CJ \times EF \end{cases} \Rightarrow \quad \text{مساحتها برابرند} ③$$

$$①,②,③ \Rightarrow \frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FC}$$

<u>نتیجه ۱ تالس:</u>



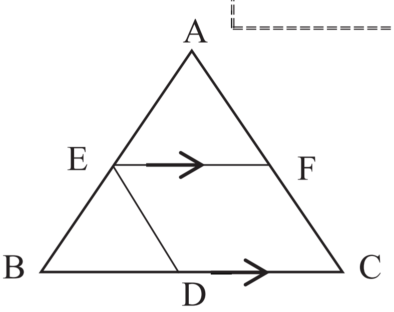
$$\boxed{EF \parallel BC \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC}}$$

$$EF \parallel BC \xRightarrow{\text{تالس}} \frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FC} \xRightarrow{\text{ترکیب نسبت در مخرج}}$$

$$\frac{AE}{AE+EB} = \frac{AF}{AF+FC} \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC}$$

نتیجه ۲ تالس:

$$\text{EF} \parallel \text{BC} \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC}$$



$$\text{EF} \parallel \text{BC} \xRightarrow{\text{نتیجه ①}} \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} \text{ ①}$$

از E خطی موازی AC رسم می کنیم

$$\text{ED} \parallel \text{AC} \xRightarrow{\text{نتیجه ①}} \frac{AE}{AB} = \frac{CD}{BC} \text{ ②}$$

از طرفی چهارضلعی EFCD متوازی الاضلاع است (اضلاع دو به دو موازی اند)

بنابراین : EF=DCپس رابطه ②را به صورت زیر بازنویسی می کنیم:

$$\frac{AE}{AB} = \frac{EF}{BC} \text{ ③} \qquad ①,③ \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC}$$

توجه: اگر فرض و حکم یک قضیه را جابجا کنیم آنچه حاصل می شود عکس قضیه است که ممکن است درست یا نادرست باشدبه مثال زیر توجه کنید:

قضیه: اگر مثلثی متساوی الساقین باشد آنگاه زاویه های رو به رو ساقها باهم برابرند.

عکس قضیه: اگر زاویه های روبه رو به ساقها برابر باشند آنگاه مثلث متساوی الساقین است.

توجه: عبارت هایی که به صورت اگر و آنگاه بیان می شوند (جمله های شرطی) قضیه های شرطی نامیده می شوند. قضیه های شرطی در هندسه دارای نقش مهمی هستند و اغلب برای سادگی بیان ، قضیه شرطی ، قضیه نامیده می شود.

توجه : اگر عکس یک قضیه شرطی خود یک قضیه شرطی باشد آنگاه این دو قضیه شرطی را می توان به صورت

یک قضیه بیان کرد. چنین قضیه ای ، **قضیه دو شرطی** نامیده می شود. در واقع قضیه دو شرطی زمانی نوشته می شود که قضیه و عکس آن هر دو درست باشند.

قضیه دو شرطی : یک مثلث متساوی الساقین است اگر و تنها اگر زاویه های رو به رو به ساقها باهم برابر باشند.

توجه : نماد قضیه دو شرطی به صورت $\Leftrightarrow$ می باشد.

برهان خلف: معمولا برای اثبات قضیه ها به طور مستقیم از داده ها که همان فرض ها هستند شروع می کنیم و با استفاده از سایر قضیه ها و اصل ها و تعریف ها یعنی حقایقی که درستی آنها را پذیرفته ایم برقرای حکم را نشان می دهیم. با این حال، برای اثبات بعضی از قضیه ها نمی توان به سادگی به طور مستقیم پیش رفت و راه غیر مستقیم (برهان خلف) را مدنظر قرار می دهیم.

توجه: این حقیقت که یک عبارت ریاضی نمی تواند همزمان هم درست و هم نادرست باشد اساس روش اثبات غیر مستقیم است.

توجه: برای اثبات به روش برهان خلف ابتدا فرض می کنیم حکم درست نباشد (فرض خلف) پس نقیض حکم درست است بنابراین نشان می دهیم نقیض حکم با حقایق دانسته شده یا فرض اولیه در تناقض است و در نهایت با نادرست بودن نقیض حکم نتیجه می گیریم که حکم درست است.

مثال: با استفاده ازبرهان خلف نشان دهید اگرa ،b وc سه خط راست باشند بطوریکه:$a \parallel b$ و $c \parallel b$ آنگاه $a \parallel c$

فرض می کنیم $a \nparallel c$ (فرض خلف) پس خط a یا (امتداد آن) خط c (یا امتداد آن) را قطع می کند و چون $c \parallel b$

پس خط b را نیز قطع می کند و این متناقض است با فرض $a \parallel b$. بنابراین فرض خلف اشتباه بود و $a \parallel c$.

مثال: می دانیم $\sqrt{5}$گنگ است . با استفاده از برهان خلف ثابت کنید $2+\sqrt{5}$ گنگ است. (نهائی جبر دی ۸۴)

فرض می کنیم $2+\sqrt{5}$گنگ نباشد پس گویاست و می توان آن را به صورت یک عبارت کسری نوشت:

$$2+\sqrt{5} = \frac{a}{b} \Rightarrow \sqrt{5} = \frac{a}{b} -2 \Rightarrow \sqrt{5} = \frac{a-2b}{b}$$

و این عبارت تناقض است زیرا طبق فرض $\sqrt{5}$گنگ است و نمی تواند برابر یک عدد گویا شود چون به تناقض رسیدیم نتیجه میگیریم: $2+\sqrt{5}$ گنگ است.

سوال: $\sqrt{3}$عددی گنگ است ثابت کنید $1+\sqrt{3}$گنگ است.(برهان خلف) (نهائی جبرخرداد ۸۴)

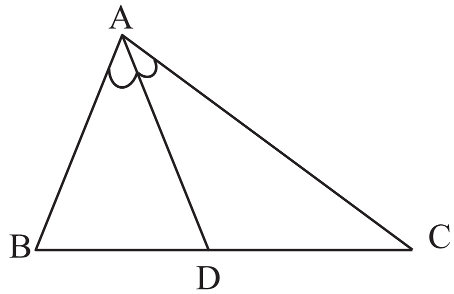
مثال: با استفاده از برهان خلف ثابت کنید اگر $y\neq 1$ و $x^3+2y=10$ آنگاه $x\neq 2$ است. (نهائی جبر دی ماه ۷۹)

فرض می کنیم $x=2$ (فرض خلف) پس در عبارت به جای x عدد ۲ قرار می دهیم:

$$2^3+2y=10 \Rightarrow 2y=10-8 \Rightarrow 2y=2 \Rightarrow y=1$$

و این با فرض اولیه $(y\neq 1)$ در تناقض است پس حکم برقرار است یعنی $x\neq 2$

سوال: فرض کنید AD نیمساز زاویه $\hat{A}$در مثلث ABC باشد اگر $BD\neq CD$ ثابت کنید $AB\neq AC$ (برهان خلف) (نهائی جبر خرداد ۸۰)



مثال: اگر n^2 مضربی از ۳ باشد ثابت کنید n نیز مضربی از ۳ است. (برهان خلف)

فرض می کنیم n مضربی از ۳ نباشد (فرض خلف)
بنابراین باقیمانده تقسیم n بر ۳ برابر ۱ یا ۲ می باشد:

$n=3k+1 \Rightarrow n^2=9k^2+6k+1 \Rightarrow n^2 = 3(\underbrace{3k^2 + 2k}_{k'})+1= 3k' +1$

$n=3k+2 \Rightarrow n^2=9k^2+12k+4 \Rightarrow n^2 = 3(\underbrace{3k^2 + 4k}_{k'})+4= 3k' +4$

$=3k' +3+1 = 3(\underbrace{k' + 1}_{k''})+1= 3k'' +1$

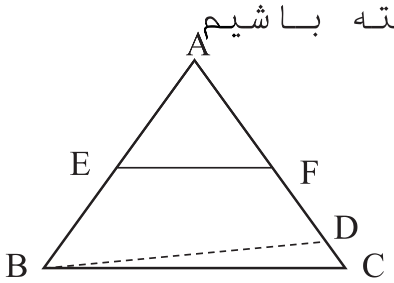
در هر دو حالت می بینیم که n^2 مضربی از ۳ نیست و این با فرض تناقض دارد. پس حکم درست است و nمضربی از ۳ می باشد.

سوال: با استفاده از برهان خلف ثابت کنید اگر n^2 زوج باشد آنگاه n زوج است ($n \in N$) .

راهنمایی: نماد اعداد زوج را 2k و نماد اعداد فرد را 2k+1 در نظر میگیریم.

نتیجه۳ تالس: نتیجه سوم به عکس قضیه تالس معروف است.

هرگاه پاره خط EF پاره خط های AB و AC را به گونه ای قطع کرده باشد که داشته باشیم



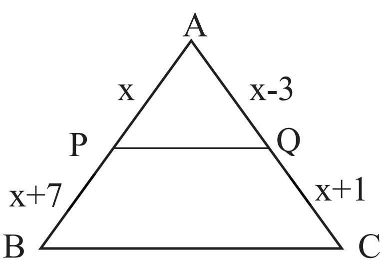
$\frac{AE}{EB}=\frac{AF}{FC}$ در این صورت EF ∥BC

اثبات: ازبرهان خلف استفاده میکنیم یعنی فرض میکنیم EF موازی BC نباشدپس از B خطی موازی EF رسم می کنیم تا AC را در نقطه D قطع کند در این صورت طبق قضیه تالس داریم:

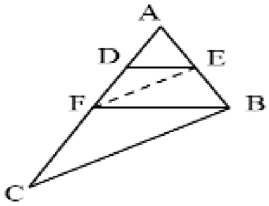
$$\begin{cases} EF \parallel BD \Rightarrow \frac{AE}{BE}=\frac{AF}{FD} \\ \text{طبق فرض} \Rightarrow \frac{AE}{EB}=\frac{AF}{FC} \end{cases} \Rightarrow \frac{AF}{FD}=\frac{AF}{FC} \Rightarrow FD = FC$$

یعنی نقطه D بر C منطبق است به عبارت دیگر BD همان BC است واین یک تناقض است زیرا EF با BC موازی نیست ولی با BD موازیست پس از اول فرض خلف غلط بوده و EF ∥BC

سوال: در شکل زیر PQ با BC موازی است. به کمک قضیه تالس طول x را حساب کنید.



سوال: در مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ در شکل زیر DE با FB و EF با BC



موازی است ثابت کنید: $\frac{AD}{DF} = \frac{AF}{FC}$

مثال نقض:

استدلال استنتاجی به ما اطمینان می دهد که نتیجه به دست آمده حتما درست است.

این جامعیت یکی از نشانه های اقتدار و زیبایی این نوع استدلال است اما گاهی اتفاق می افتد که با مثالی، عمومیت نتیجه ای که حدس می زنیم نقض می شود بنابراین:

به مثالی که نشان میدهد یک نتیجه گیری یا یک حدس کلی نادرست است مثال نقض گفته می شود.

توجه: برای نشان دادن درستی یک حکم کلی باید آن را اثبات کنیم.

توجه: اگر درستی یا نادرستی یک حکم کلی برما مشخص نباشد و برای رد آن ، مثال نقض نیز نتوانیم ارائه دهیم ، نمی توان درباره درستی یا نادرستی آن حکم کلی نتیجه ای گرفت.

مثال: آیا هر عدد طبیعی را می توان بصورت مجموع چند عدد طبیعی متوالی نوشت؟ اگر بلی چرا و اگر خیر مثال نقض بزنید. (نهایی چهارم انسانی دی ۷۶)

خیر مثلا عدد ۲

مثال: با یک مثال نقض نشان دهید مجموع دو عدد گنگ همیشه یک عدد گنگ نمی شود. (چهارم انسانی – مجتمع آموزشی و تربیتی امام صادق (ع) تاجیکستان دی ۹۲)

$$\begin{cases} x = \sqrt{2} \\ y = -\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow x+y = \sqrt{2}+ (-\sqrt{2}) = 0$$

سوال: با مثال نقض نشان دهیدعبارت توان دوم یک عدد همیشه از آن بزرگتر است صحیح نیست.

سوال: آیا به ازای هر عدد طبیعی n عبارت 2^n+3 اول است؟

سوال: آیا حاصلضرب هر عدد طبیعی در یک عدد فرد ، عددی فرد است؟

سوال: با یک مثال نقض گزاره های زیر را رد کنید.

الف) همه اعداد اول فرد هستند.

ب) در هر مثلث ارتفاع ها درون آن قرار می گیرند.

ج) هیچ عدد اول بزرگتر از ۱۲۷ وجود ندارد. (کتاب درسی صفحه ۴۱)

تـست:

۱) اگـر $\frac{a}{3}=\frac{b}{4}=\frac{c}{5}$ عـدد b چـه کـسری از a+b+c اسـت؟

۱) 4 ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) 3

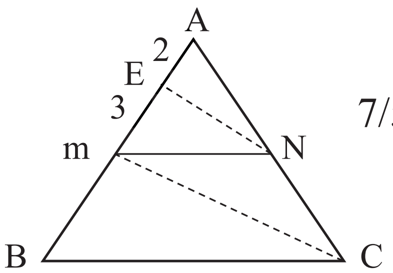
$\frac{a+b+c}{3+4+5}=\frac{b}{4}\Rightarrow\frac{a+b+c}{12}=\frac{b}{4}\Rightarrow b=\frac{4}{12}(a+b+c)=\frac{1}{3}(a+b+c)$

۲) اگـر $\frac{a}{b}=\frac{3}{4}$ بـاشد مـقـدار $\frac{3a+3b}{2a+b}$ کـدام اسـت؟

۱) $\frac{10}{21}$ ۲) $\frac{21}{10}$ ۳) 2 ۴) $\frac{1}{2}$

$\begin{cases}a=3k\\ b=4k\end{cases}\Rightarrow\frac{3a+3b}{2a+b}=\frac{9k+12k}{6k+4k}=\frac{21\cancel{k}}{10\cancel{k}}=\frac{21}{10}$

۳) در شـکـل مـقـابـل EN ∥ MC و mN ∥ BC انـدازه MB کـدام اسـت؟



۱) 6 ۲) 6/5 ۳) 7 ۴) 7/5

$\begin{cases}\overset{\Delta}{ABC}:\ mN\parallel Bc\Rightarrow\frac{Am}{mB}=\frac{AN}{NC}\\ \overset{\Delta}{AmC}:\ EN\parallel mc\Rightarrow\frac{AE}{Em}=\frac{AN}{NC}\end{cases}\Rightarrow\frac{Am}{mB}=\frac{AE}{mE}\Rightarrow\frac{5}{mB}=\frac{2}{3}\Rightarrow mB=7/5$

۴) در یـک ذوزنـقـه قـائـم الـزاویـه ،از نـقـطـه o مـحـل تـلاقـی قـطـرهـا ، خـطـی مـوازی قـاعـده هـا رسـم مـی شـود سـاق قـائـم را در A و سـاق مـایـل را در B قـطـع مـی کـنـد نـسـبـت $\frac{OA}{OB}$ چـگـونـه اسـت(کـنـکـور تـجـربـی۹۷)

۱) کـوچـکـتـر از ۱ ۲) مـسـاوی ۱

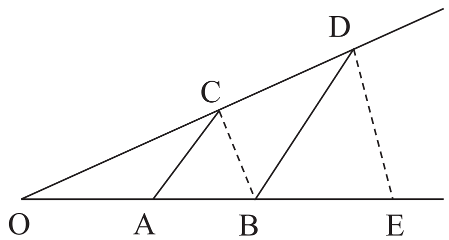
۳)بـزرگـتـر از ۱ ۴) نـسـبـت بـه اضلاع مـتـغـیـر

پاسخ: گزینه ۲ . (نیاز دارید در مثلثهای ایجاد شده تالس را بنویسید.)

۵) در شکل زیر ، دو جفت پاره خط موازی اند و OA=3 و AB=5 اندازه BE کدام است؟ (کنکورخارج کشور تجربی ۹۴)

۱) $13\frac{1}{3}$ ۲) $12\frac{2}{3}$ ۳) $11\frac{1}{3}$ ۴) $10\frac{2}{3}$

پاسخ : گزینه ۱



از ق تالس ۲ بار در ۲ مثلث $\overset{\Delta}{OBD}$ و $\overset{\Delta}{ODE}$ استفاده کنید.

۶) روی پاره خط AB=a دو نقطه M و N را بطوری اختیار می کنیم که $\frac{Am}{mB}=\frac{BN}{AN}=2$ در این صورت طول پاره خط mN چقدر است؟

۱) $\frac{a}{4}$ ۲) $\frac{a}{2}$ ۳) $\frac{a}{3}$ ۴) $\frac{2a}{3}$

پاسخ: گزینه <u>۳</u> . از ترکیب نسبت در مخرج استفاده کنید و اینکه mN=AB-(Bm+AN) البته قبل از ترکیب تناسب را معکوس کنید.

۷) اگر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$ و k>0 آنگاه حاصل $\sqrt{\frac{2a^2+3c^2}{2b^2+3d^2}}$ کدام است؟

۱) k

۲) -k

۳) $\frac{1}{k}$

۴) $-\frac{1}{k}$

پاسخ: گزینه <u>۱</u> . توان ۲ ، و ترکیب در صورت و مخرج نیاز دارید.

تمرینـاتـی بـرای تـلاش بـیشتـر:

۱- اگـر بـدانـیم بـرای سه عـدد m و n و t رابـطه 2n=4m=5t بـرقـرار است حـاصل $\frac{3m+2n-t}{n+m}$ را بـدست آوریـد
(بـایـد 2n=4m=5t =20k قـرار دهید و ..)

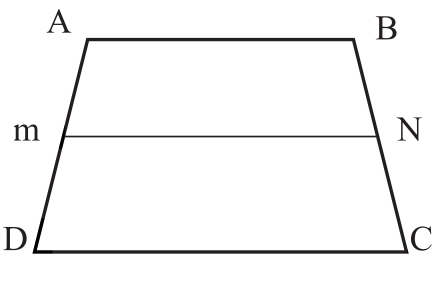
۲- اگـر $\frac{a}{b}=\frac{5}{3}$ بـاشد مقـدار $\frac{a-b}{a+b}$ را بـدست آوریـد.

از خاصیت تـرکیب نسبت در مخرج و تـفـاضل نسبت در صورت استفـاده کنیـد.

۳- اگـر $\frac{z+x}{7}=\frac{y+z}{6}=\frac{x+y}{5}$ و z≠0 و y و x مقـدار عددی $\frac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2}$ چقـدر است؟ (استعدادهای درخشان علامه حلی دی مـاه ۹۶)

تـوجه: ابـتـدا $k=\frac{(x+y)+(y+z)+(z+x)}{5+6+7}$ تـا x+y+z را محـاسبـه کنیـد سپس هرکدام را جداگـانـه بـرابـر k قـرار دهیـد تـا x و y و z بـدست آیـنـد.(بـرحسب k)

۴- اگـر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{1}{3}$ بـاشد نـسبـت $\frac{5a-2c}{5b-2d}$ را مـشخص کـنـیـد.
(اردیـبـهشت ۹۷- شهیـد بـهشتـی اهـواز)



۵- در شکل روبـرو AB ‖ mN ‖ DC

ثـابـت کـنـیـد $\frac{Am}{mD}=\frac{BN}{NC}$

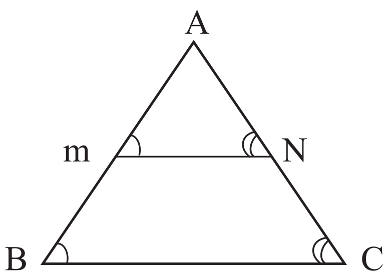
(B)A را بـه (D)C وصل کـرده و در ۲ مـثـلث ایـجـاد شده تـالـس را بـنـویـسید.

درس سوم: تشابه مثلث ها

تعریف: دو مثلث را متشابه گویند ، اگر زاویه های نظیر در آنها برابر و ضلع های نظیر متناسب باشند
مثلا: هر دو مثلث متساوی الاضلاع متشابه هستند.

قضیه اساسی تشابه مثلث ها: اگر خطی موازی یکی از اضلاع مثلث دو ضلع دیگر را قطع کند در این صورت مثلث کوچکی که به وجود می آید با مثلث بزرگ اولیه متشابه است.

اثبات: طبق تعریف باید ثابت کنیم اضلاع متناسب و زاویه ها برابر هستند:



$$mN \parallel BC \xRightarrow{\text{تعمیم تالس}} \frac{Am}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{mN}{BC} \; ①$$

$$\begin{cases} mN \parallel BC \xrightarrow{AB\ \text{مورب}} \hat{m} = \hat{B} \\ mN \parallel BC \xrightarrow{AC\ \text{مورب}} \hat{N} = \hat{C} \end{cases} \quad , \ \hat{A}\ \text{مشترک}$$

②

$$①,② \Rightarrow \overset{\Delta}{AmN} \sim \overset{\Delta}{ABC}$$

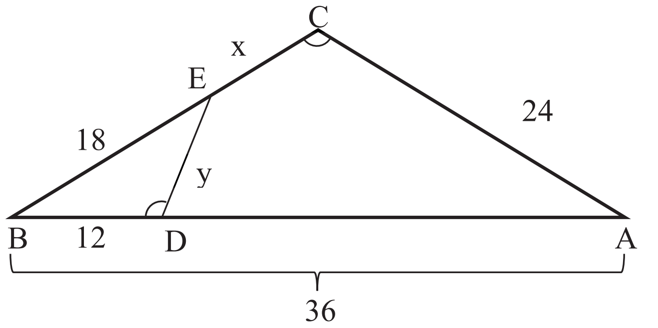
حالت های تشابه دو مثلث:

۱- هرگاه دو زاویه از مثلثی بادوزاویه ازمثلث دیگر برابر باشند دو مثلث متشابه اند.

۲- هرگاه اندازه های دو ضلع از مثلثی با اندازه های دو ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند و زاویه بین آنها برابر باشد دو مثلث متشابه اند.

۳- هرگاه اندازه های سه ضلع از مثلثی با اندازه های سه ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند دو مثلث متشابه اند.

مثال: در شکل زیر $\hat{C} = \widehat{BDE}$.طول x و y را پیدا کنید.



$$\overset{\Delta}{ABC} \text{ ، } \overset{\Delta}{BDE} \begin{cases} \hat{C} = \widehat{D} \text{فرض} \\ \hat{B} \quad \text{مشترک} \end{cases} \Rightarrow \overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{BDE} \Rightarrow \hat{E}=\hat{A}$$

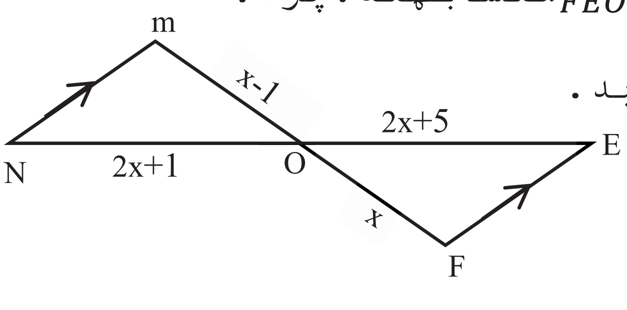
$$\frac{AB}{BE} = \frac{AC}{DE} = \frac{BC}{BD} \Rightarrow \frac{36}{18} = \frac{24}{y} = \frac{18+x}{12} \Rightarrow 2=\frac{24}{y} \Rightarrow y=12\,,$$

$$2=\frac{12+x}{12} \Rightarrow 12+x=24 \Rightarrow x=12$$

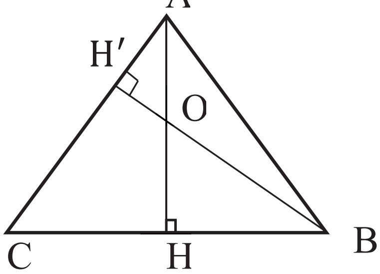
سوال: در شکل زیر:

الف) آیا دو مثلث $\overset{\Delta}{ONM}$و $\overset{\Delta}{FEO}$متشابهند.چرا؟

ب) مقدار x را محاسبه کنید.



سوال: در مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ارتفاع های AH و 'BH را رسم می کنیم ثابت کنید دو مثلث 'OAH و OBH متشابهند.



پاره خط های متناسب در دو مثلث متشابه:

۱- در دو مثلث متشابه نسبت ارتفاع های نظیر برابر با نسبت تشابه است.

۲- در دو مثلث متشابه نسبت میانه های نظیر برابر با نسبت تشابه است.

۳- در دو مثلث متشابه نسبت محیط ها برابر با نسبت تشابه است.

۴- در دو مثلث متشابه ، نسبت مساحت ها برابر با توان دوم نسبت تشابه است.

مثال: مثلث های $\overset{\Delta}{ABC}$ و $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ متشابه اند. اگر طول ضلع های مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ برابر ۵ و ۸ و ۱۱ سانتی متر و محیط مثلث $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ برابر ۶۰ سانتی متر باشد طول ضلع های مثلث $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ را بدست آورید.

طبق شماره ۳ بالا:

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{P}{P'}\Rightarrow\frac{5}{A'B'}=\frac{8}{A'C'}=\frac{11}{B'C'}=\frac{\cancel{24}}{\cancel{60}}=\frac{2}{5}$$

$$P=5+8+11=24\Rightarrow\quad \frac{5}{A'B'}=\frac{2}{5}\Rightarrow A'B'=12/5$$

$$\Rightarrow\frac{8}{A'C'}=\frac{2}{5}\Rightarrow A'C'=20,\quad \frac{11}{B'C'}=\frac{2}{5}\Rightarrow B'C'=27/5$$

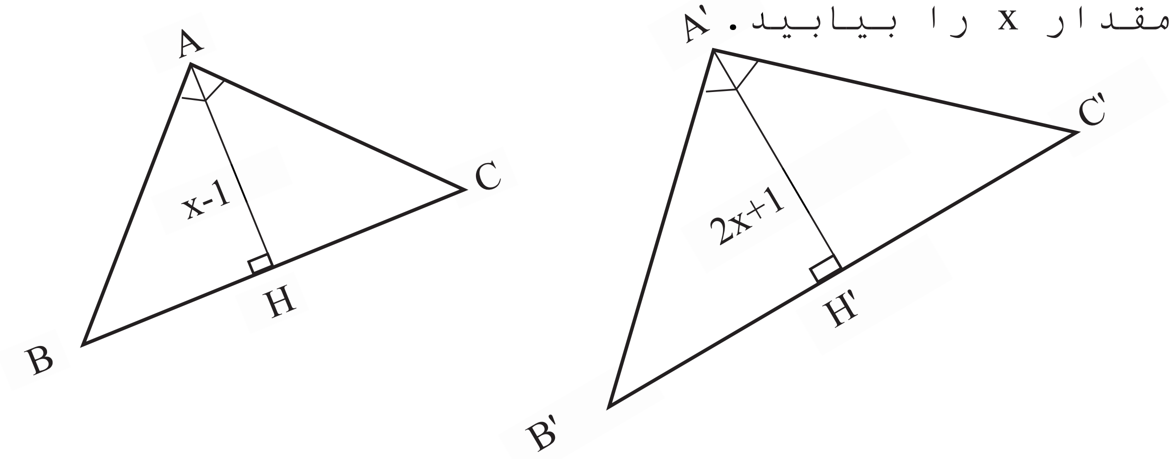
سوال: طول ضلع های مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ برابر ۷ و ۹ و ۱۴ سانتی متر است. مثلث $\overset{\Delta}{PQR}$ با این مثلث متشابه است و طول بزرگترین ضلع آن ۲۱ سانتی متر است. محیط مثلث $\overset{\Delta}{PQR}$ را محاسبه کنید.

سوال: اگرنسبت مساحت های دومثلث متشابه۲۵باشدنسبت محیط های آنهارابدست آورید(کشوری ریاضی۲دی ماه۷۲)

سوال: اگر محیط دو مثلث متشابه ۲۵ و ۴۵ سانتی متر و مساحت مثلث کوچکتر ۵۰ سانتی متر مربع باشد مساحت مثلث بزرگتر را بدست آورید. (خرداد ۷۳ منطقه ۳ تهران)

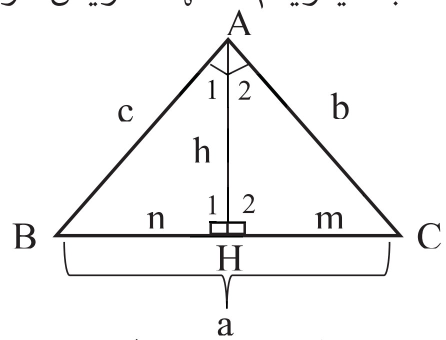
سوال: پاره خط های AH و A'H' دو ارتفاع متناظر از دو مثلث متشابه قائم الزاویه $\overset{\Delta}{ABC}$ و $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ می باشند که نسبت مساحت های آنها برابر $\frac{4}{25}$ است.

مقدار x را بیابید.



روابط طولی در مثلث قائم الزاویه:

اگر مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ را که در رأس A قائمه است در نظر بگیریم مهمترین روابطی که برقرار است عبارتند از:



1) $a^2 = b^2 + c^2$ (فیثاغورس)

2) $b^2 = a \times m$ 3) $c^2 = an$

4) $h^2 = m \times n$ 5) $a \times h = b \times c$

با قضیه فیثاغورس آشنایی دارید و حتی کاربردش را بارها دیده اید. اما روابط دیگر را اثبات می کنیم:

اثبات رابطه ۲و۳: $\overset{\Delta}{ABH}$, $\overset{\Delta}{ABC}$ $\begin{cases}\hat{B} & \text{مشترک}\\ \hat{A} = \hat{H} = 90\end{cases} \Rightarrow$

$\overset{\Delta}{ABH} \sim \overset{\Delta}{ABC}$ ① به حالت دوزاویه

$\overset{\Delta}{ACH}$, $\overset{\Delta}{ABC}$ $\begin{cases}\hat{C} & \text{مشترک}\\ \hat{A} = \hat{H} = 90\end{cases} \Rightarrow \overset{\Delta}{ACH} \sim \overset{\Delta}{ABC}$ ② به حالت دوزاویه

②$\Rightarrow\Rightarrow \frac{h}{c} = \frac{b}{a} = \frac{m}{b} \Rightarrow b^2 = a \times m$

①$\Rightarrow\Rightarrow \frac{h}{b} = \frac{c}{a} = \frac{n}{c} \Rightarrow c^2 = a \times n$

برای اثبات رابطه ۴ بدین ترتیب عمل می کنیم:

①,②$\Rightarrow \overset{\Delta}{ACH} \sim \overset{\Delta}{ABH} \Rightarrow \frac{b}{c} = \frac{h}{n} = \frac{m}{h} \Rightarrow h^2 = n \times m$

توجه: در دو مثلث $\overset{\Delta}{ABH}$ و $\overset{\Delta}{ACH}$ تساوی زاویه ها به این صورت است که: $\hat{B} = \widehat{A_2}, \widehat{H_1} = \widehat{H_2}, \widehat{A_1} = \hat{C}$

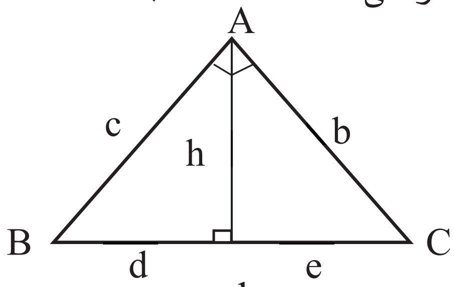
(اگر مثلث $\overset{\Delta}{ABH}$را بچرخانید تا حالت قائم مثلث $\overset{\Delta}{ACH}$را به خود بگیرد متوجه تساوی زاویه ها خواهید شد.)

به تساوی زاویه ها برای نوشتن درست نسبت هانیازداریم زیرا هرنسبت درواقع نسبت اضلاع روبروی زاویه های مساویست.

اثبات رابطه 5:

$$\begin{cases} S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{1}{2}\, a \times h \\ S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{1}{2}\, b \times c \end{cases} \Rightarrow \cancel{\frac{1}{2}}\, a \times h = \cancel{\frac{1}{2}}\, b \times c \Rightarrow a \times h = b \times c$$

مثال: در مثلث زیر اگر h=5 و d=7مقدار e را محاسبه کنید. (کاردر کلاس کتاب درسی صفحه ۴۵)



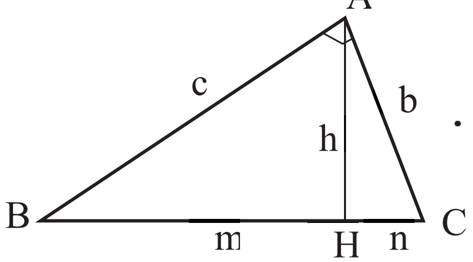
$$h^2 = de \Rightarrow 25=7e \Rightarrow e= \frac{25}{7}$$

مثال: اگر در مثلث فوق b=4 و c=3 مقدار h را بیابید.

$$a^2= b^2 +c^2 \Rightarrow a^2= 3^2 +4^2 \Rightarrow a^2= 9+16 \Rightarrow a^2= 25 \Rightarrow a= 5$$

$$bc=ha \Rightarrow 12=5h \Rightarrow h = \frac{12}{5}$$

سوال: با توجه به مثلث زیر در هر حالت مقادیر خواسته شده را محاسبه کنید.



الف) m=4، n=2 مقادیرbوc رابیابید.

ب) $b=5$ ، $n=2$ مقادیر a ، h و c رابیابید.

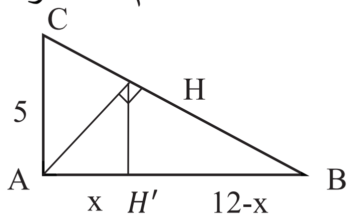
ج) $c=10$ ، $h=3$ مقادیر m ، a و b رابیابید.

د) $h=4$ ، $n=2$ مقدار m رابیابید.

ه) $c=8$ ، $b=4$ مقادیر a و h رابیابید.

<u>تست:</u>

۱) در شکل زیرارتفاع هر دو مثلث قائم الزاویه رسم شده است اندازه x کدام است؟



۱) $\frac{300}{169}$ ۲) $\frac{144}{25}$ ۳) $\frac{25}{13}$ ۴) $\frac{144}{13}$

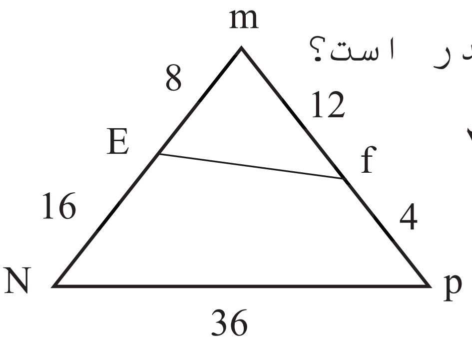
$AB = \cancel{x} + 12 - \cancel{x} \Rightarrow BC^2 = 5^2 + 12^2 = 144 + 25 = 169 \rightarrow BC = 13$

در مثلث قائم الزاویه از روابط طولی استفاده می کنیم. $AH.BC = 5 \times 12$

$\Rightarrow AH = \frac{60}{13}$, $\overset{\Delta}{AHB}$: $AB.\ AH' = AH^2 \Rightarrow (\frac{60}{13})^2 = 12x$

$\Rightarrow x = \frac{\frac{3600}{169}}{12} \Rightarrow x = \frac{3600}{12\times169} = \frac{300}{169}$

توجه: از روابط طولی شماره : ۵ و ۲ استفاده کردیم.



۲) در شکل زیر محیط مثلث mEF چقدر است؟

۱) ۳۸ ۲) ۳۲ ۳) ۳۴ ۴) ۳۶

پاسخ: گزینه ۱

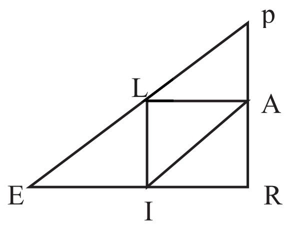
دو مثلث $\overset{\Delta}{mNp}$ و $\overset{\Delta}{mEF}$ را در نظر بگیرید تشابه را بنویسید تا Ef محاسبه شود.

تمریناتی برای تلاش بیشتر:

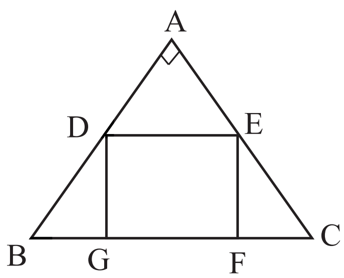
۱- در دو مثلث متشابه ثابت کنید نسبت میانه های نظیر در آنها برابر است با نسبت تشابه دو مثلث (خرداد ۷۶ هماهنگ استان تهران)

۲- ثابت کنید در دو مثلث متشابه نسبت مساحت های آن دو مثلث برابر توان دوم نسبت تشابه است. (دی ۷۶ منطقه ۲ تهران)

۳- در شکل زیر ، نقاط A ، L و I به ترتیب نقاط وسط ضلع های pR ، pE ، ER هستند چرا دو مثلث ALI وpRE متشابه اند؟



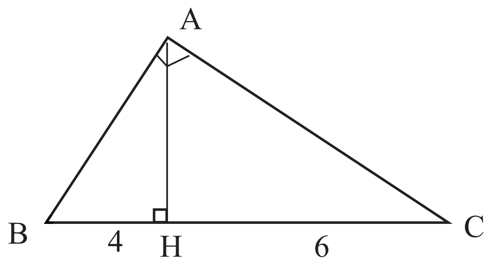
۴- در شکل زیر DEFG مربع است. اگر AC=3 و AB=4 باشد طول ضلع این مربع چقدر است؟ (استعداد های درخشان علامه حلی دی ۹۶) پاسخ: $\frac{60}{37}$



(از تشابه مثلث ABC بادومثلث BDGوCEF استفاده کنید و اینکه

(BC=BG+GF+FC)

۵- در بزرگترین مثلث قائم الزاویه شکل مقابل اندازه بزرگترین میانه چقدر است؟ (استعداد های درخشان علامه حلی دی ۹۶)



(راهنمایی: فاصله رأس C تا ضلع روبرویش از بقیه رأس ها تا ضلع روبرویشان بیشتر است پس میانه Cm را باید محاسبه کنید . از روابط طولی استفاده کنید.)