فصل اول: هندسه‌ی تحلیلی و جبر

درس دوم: معادله‌ی درجه‌ی دوم و تابع درجه‌ی دوم

روابط بین ضرایب و ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم

ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^۲+bx+c=۰$، به شرط این‌که $\Delta=b^۲-۴ac\ge ۰$، عبارت‌اند از

$$x_۱=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}$$

$$x_۲=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a}$$

در این صورت، اگر مجموع ریشه‌ها را با S و حاصل‌ضرب ریشه‌ها را با P نشان دهیم، آن‌گاه

$$S=x_۱+x_۲=-\frac{b}{a}$$

$$P=x_۱x_۲=\frac{c}{a}$$

همچنین، قدرمطلق تفاضل ریشه‌ها برابر می‌شود با

$$|x_۱-x_۲|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

تست ۱

پاسخ: چون حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله‌ی $x^۲-(a+۱)x+۳b=۰$ برابر با $۳b$ است، پس $ab=۳b$، و چون $b\ne ۰$، پس $a=۳$. از طرف دیگر، مجموع ریشه‌ها برابر $a+۱$ است، پس

$$a+b=a+۱\Rightarrow b=۱$$

بنابراین $a-b=۲$.

تست ۲

پاسخ: اولاً باید حاصل‌ضرب جواب‌های معادله منفی باشد:

$$\frac{-m+۵}{m}<۰\Rightarrow m<۰ \text{ یا } m>۵$$

ثانیاً باید مجموع جواب‌های معادله برابر صفر باشد:

$$\frac{m^۳-۴m}{m}=۰\Rightarrow m^۳-۴m=۰$$

$$\Rightarrow m(m^۲-۴)=۰$$

$$\Rightarrow m=-۲,\ m=۰,\ m=۲$$

از مقدارهای فوق فقط $m=-۲$ قابل قبول است.

تست ۳

پاسخ: توجه کنید که $|x_1-x_2|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$، بنابراین

$$|x_1-x_2|=\frac{\sqrt{(-4\sqrt{2})^2-4\times1\times(-17)}}{1}=\sqrt{100}=10$$

تست ۴

پاسخ: توجه کنید که $x_1+x_2=-(\frac{-2m}{m})=2$. بنابراین $x_2=2-x_1$. از طرف دیگر،

$$2x_1^2+x_1x_2-x_2^2=8\Rightarrow 2x_1^2+x_1(2-x_1)-(2-x_1)^2=8$$
$$\Rightarrow 2x_1^2+2x_1-x_1^2-4-x_1^2+4x_1=8$$
$$\Rightarrow 6x_1=12\Rightarrow x_1=2$$

چون x_1 ریشه‌ی معادله است، پس ۲ در معادله صدق می‌کند:

$$m(2)^2-2m(2)+1+m=0\Rightarrow m=-1$$

تست ۵

پاسخ: توجه کنید که

$$\begin{cases} x_1x_2=-8 \\ x_1=x_2^2 \end{cases}\Rightarrow x_2^3=-8\Rightarrow x_2=-2$$

چون x_2 ریشه‌ی معادله است، پس -2 در معادله صدق می‌کند:

$$(-2)^2-(m+1)(-2)-8=0\Rightarrow m=1$$

تست ۶

پاسخ: ابتدا توجه کنید که

$$\alpha+\beta=2,\quad \alpha\beta=-4$$

بنابراین

$$\frac{1}{\alpha+1}+\frac{1}{\beta+1}=\frac{\beta+1+\alpha+1}{(\alpha+1)(\beta+1)}=\frac{\alpha+\beta+2}{\alpha\beta+\alpha+\beta+1}$$
$$=\frac{2+2}{-4+2+1}=-4$$

تست ۷

پاسخ: فرض می‌کنیم $A=\frac{1}{\sqrt{x_1}}+\frac{1}{\sqrt{x_2}}$. در این صورت

$$A^2=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{2}{\sqrt{x_1x_2}}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}+\frac{2}{\sqrt{x_1x_2}}$$

چون $x_1+x_2=\frac{7}{2}$ و $x_1x_2=2$، پس

$$A^2=\frac{\frac{7}{2}}{2}+\frac{2}{\sqrt{2}}=\frac{7}{4}+\sqrt{2}=\frac{7+4\sqrt{2}}{4}$$

چون $A>0$، نتیجه می‌شود

$$A=\frac{\sqrt{7+4\sqrt{2}}}{2}$$

تست ۸

پاسخ: چون x_1 ریشه‌ی معادله‌ی مورد نظر است، پس

$$x_1^2-5x_1+3=0 \Rightarrow x_1^2=5x_1-3$$

از طرف دیگر،

$$x_1+x_2=5$$

بنابراین

$$x_1^2+5x_2+9=5x_1-3+5x_2+9=5(x_1+x_2)+6=5\times5+6=31$$

تشکیل معادله‌ی درجه‌ی دوم

اگر x_1 و x_2 عددهایی حقیقی باشند، آن‌گاه x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی $x^2-Sx+P=0$ هستند، که در آن $S=x_1+x_2$ و $P=x_1x_2$.

تست ۹

پاسخ: فرض می‌کنیم $x_1=2-\sqrt{3}$ و $x_2=2+\sqrt{3}$. در این صورت

$$S=x_1+x_2=2-\sqrt{3}+2+\sqrt{3}=4$$

$$P=x_1x_2=(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})$$

$$=2^2-\sqrt{3}^2=4-3=1$$

بنابراین معادله‌ی موردنظر $x^2-4x+1=0$ است.

تست ۱۰

پاسخ: اگـر جواب‌های معادله‌ی $x^2-3x-5=0$ را α و β بنامیم، جواب‌های معادله‌ی مورد نظر $-\frac{1}{\alpha}$ و $-\frac{1}{\beta}$ هستند. بنابراین

$$\alpha+\beta=3,\quad \alpha\beta=-5$$

$$S=(-\frac{1}{\alpha})+(-\frac{1}{\beta})=-\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=-\frac{3}{-5}=\frac{3}{5}$$

$$P=(-\frac{1}{\alpha})(-\frac{1}{\beta})=\frac{1}{\alpha\beta}=-\frac{1}{5}$$

پس معادله‌ی مورد نظر به شکل زیر است

$$x^2-Sx+P=0\Rightarrow x^2-\frac{3}{5}x-\frac{1}{5}=0\Rightarrow 5x^2-3x-1=0$$

تست ۱۱

پاسخ: توجه کنید که

$$x_1+x_2=x_1+2\Rightarrow x_2=2,\quad x_1x_2=3x_2\Rightarrow x_1=3$$

بنابراین ریشه‌های معادله‌ی مورد نظر برابرند با

$$x_1+1=3+1=4,\quad x_2+1=2+1=3$$

مجموع این ریشه‌ها ۷ و حاصل‌ضرب آن‌ها ۱۲ است، پس معادله‌ی مورد نظر $x^2-7x+12=0$ است.

صفرهای تابع

اگر f تابع باشد، جواب‌های معادله‌ی $f(x)=0$ را **صفرهای تابع** f می‌نامند. صفرهای تابع f طول نقطه‌های برخورد نمودار تابع با محور x هستند.

اگر x_1 و x_2 صفرهای تابع درجه‌ی دوم $f(x)=ax^2+bx+c$ باشند، آن‌گاه

$$f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$$

تست ۱۲

پاسخ: از روی شکل معلوم می‌شود که عرض نقطه‌ی برخورد سهمی با محور y مثبت است. در نتیجه $c>0$. همچنین

$$\text{مجموع صفرها}=S=-\frac{b}{a}$$

چون طول رأس سهمی برابر $-\frac{b}{2a}$ و عددی مثبت است، پس $S=-\frac{b}{a}>0$.

نکته

تست ۱۳

پاسخ: با توجه به فرض می‌دانیم که $f(۲)=۰$، پس

$$f(۲)=۸+۴a+۸=۰ \Rightarrow a=-۴$$

چون $x-۲$ عاملی از $x^۳-۴x^۲+x+۶$ است، پس

$$x^۳-۴x^۲+x+۶=(x-۲)Q(x)$$

برای به دست آوردن $Q(x)$ چندجمله‌ای $x^۳-۴x^۲+x+۶$ را بر $x-۲$ تقسیم می‌کنیم، که نتیجه می‌شود

$$Q(x)=x^۲-۲x-۳$$

بنابراین

$$f(x)=(x-۲)(x^۲-۲x-۳)=(x-۲)(x+۱)(x-۳)$$

پس به غیر از $x=۲$ صفرهای دیگر تابع -۱ و ۳ هستند که مجموع مربع‌های آن‌ها ۱۰ است.

رابطه‌ی بین ضرایب و علامت ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم

معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^۲+bx+c=۰$ را در نظر بگیرید و فرض کنید $\Delta \geq ۰$.

- اگر $\frac{c}{a}<۰$، آن‌گاه معادله دو ریشه‌ی مختلف‌العلامت دارد. در این صورت، اگر $-\frac{b}{a}>۰$، آن‌گاه قدرمطلق ریشه‌ی منفی از ریشه‌ی مثبت کوچک‌تر است. اگر $-\frac{b}{a}<۰$، آن‌گاه قدرمطلق ریشه‌ی منفی از ریشه‌ی مثبت بزرگ‌تر است.
- اگر $\frac{c}{a}>۰$، آن‌گاه معادله دو ریشه‌ی هم‌علامت دارد. در این‌صورت، اگر $-\frac{b}{a}>۰$، آن‌گاه هر دو ریشه مثبت‌اند. اگر $-\frac{b}{a}<۰$، آن‌گاه هر دو ریشه منفی‌اند.

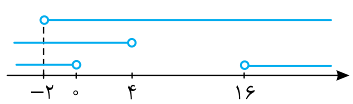
تست ۱۴

پاسخ: برای این‌که معادله‌ی $ax^۲+bx+c=۰$ دو ریشه‌ی مثبت داشته باشد، باید

$$\Delta>۰ \quad : \quad (m-۴)^۲-۴(۲m+۴)>۰ \Rightarrow m^۲-۱۶m>۰ \Rightarrow m<۰ \quad \text{یا} \quad m>۱۶$$

$$\frac{c}{a}>۰ \quad : \quad ۲m+۴>۰ \Rightarrow m>-۲$$

$$\frac{-b}{a}>۰ : \quad ۴-m>۰ \Rightarrow m<۴$$



با توجه به محور روبه‌رو، اشتراک سه جواب به‌دست آمده، $-۲<m<۰$ را مشخص می‌کند که شامل یک عدد صحیح است.

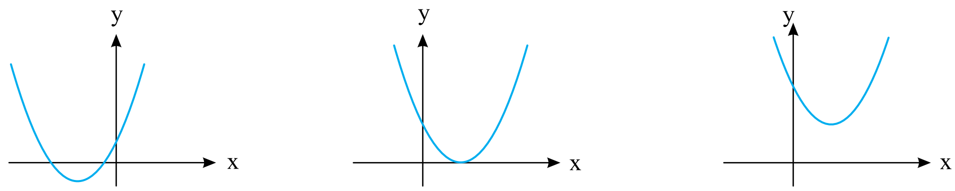
تست ۱۵

پاسخ: وقتی $\frac{c}{a}<۰$، معادله دو ریشه‌ی حقیقی مختلف‌العلامت دارد. توجه کنید که در این حالت حتماً $\Delta>۰$:

$$\frac{c}{a}=\frac{m^۲-۶}{۴}<۰\Rightarrow m^۲<۶\Rightarrow -\sqrt{۶}<m<\sqrt{۶}\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}} m\in\{\pm۲,\pm۱,۰\}$$

تست ۱۶

پاسخ: نمودار تابع در سه حالت زیر از ناحیه‌ی چهارم نمی‌گذرد:



$\Delta>۰,\frac{c}{a}\geq۰,-\frac{b}{a}<۰$ حالت سوم

$\Delta=۰$ حالت دوم

$\Delta<۰$ حالت اول

بنابراین Δ را حساب می‌کنیم:

$$\Delta=a^۲-۴(۴-a^۲)=۵a^۲-۱۶$$

اکنون توجه کنید که

حالت‌های اول و دوم: $\Delta\leq۰\Rightarrow ۵a^۲-۱۶\leq۰\Rightarrow -\frac{۴}{\sqrt{۵}}\leq a\leq\frac{۴}{\sqrt{۵}}$

حالت سوم: $\begin{cases}\Delta>۰\Rightarrow ۵a^۲-۱۶>۰\Rightarrow a<-\frac{۴}{\sqrt{۵}} \text{ یا } a>\frac{۴}{\sqrt{۵}}\\ \frac{c}{a}\geq۰\Rightarrow ۴-a^۲\geq۰\Rightarrow -۲\leq a\leq۲\\ -\frac{b}{a}<۰\Rightarrow -a<۰\Rightarrow a>۰\end{cases}\xrightarrow[\text{بازه‌های به‌دست آمده}]{\text{اشتراک گیری از}}\frac{۴}{\sqrt{۵}}<a\leq۲$

اجتماع محدوده‌های به‌دست آمده در حالت‌های اول، دوم و سوم برابر است با $-\frac{۴}{\sqrt{۵}}\leq a\leq۲$.

معادله‌هایی که به معادله‌ی درجه‌ی دوم تبدیل می‌شوند

برخی معادله‌ها را می‌توان با تغییر متغیر به معادله‌ای درجه‌ی دوم تبدیل و حل کرد.

تست ۱۷

پاسخ: فرض می‌کنیم $x^۲+x=t$. در این صورت

$$t^۲-۱۸t+۷۲=۰\Rightarrow(t-۶)(t-۱۲)=۰$$

$$\begin{cases}t=۶\Rightarrow x^۲+x=۶\Rightarrow x^۲+x-۶=۰\Rightarrow x_۱+x_۲=-۱\\ t=۱۲\Rightarrow x^۲+x=۱۲\Rightarrow x^۲+x-۱۲=۰\Rightarrow x_۳+x_۴=-۱\end{cases}\Rightarrow x_۱+x_۲+x_۳+x_۴=-۲$$

تست ۱۸

پاسخ: اگر فرض کنیم $x^{۲}=t$، به معادله‌ی زیر می‌رسیم.

$$t^{۲}-kt+\frac{۳-۲k}{۴}=۰$$

اگر این معادله یک ریشـــه‌ی مضاعف مثبت مانند $t_{۱}$ داشـــته باشـــد، معادله‌ی اصلی دو ریشه به صورت $x=\pm\sqrt{t_{۱}}$ دارد:

$$\begin{cases}\Delta=۰\\ t_{۱}=-\frac{b}{۲a}>۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k^{۲}-(۳-۲k)=۰\\ \frac{k}{۲}>۰\Rightarrow k>۰\end{cases}\Rightarrow k^{۲}+۲k-۳=۰\Rightarrow k=-۳\ (\text{غ.ق.ق}),\ k=۱$$

همچنین اگر معادله‌ی درجه‌ی دوم یک ریشه‌ی منفی و یک ریشه‌ی مثبت داشته باشد، ریشه‌ی منفی قابل‌قبول نیست، چون $x^{۲}$ نمی‌تواند منفی باشد. بنابراین معادله‌ی اصلی دو ریشه به صورت $x=\pm\sqrt{t}$ دارد، پس

$$\frac{c}{a}<۰\Rightarrow\frac{۳-۲k}{۴}<۰\Rightarrow ۳-۲k<۰\Rightarrow k>\frac{۳}{۲}$$

بنابراین $k>\frac{۳}{۲}$ یا $k=۱$ جواب مسئله است.

ماکسیمم و مینیمم تابع درجه‌ی دوم

بیش‌تریـــن یا کم‌ترین مقدار تابع درجه‌ی دوم $y=ax^{۲}+bx+c$ به ازای $x=-\frac{b}{۲a}$ به‌دســـت می‌آید و برابر با $-\frac{\Delta}{۴a}$ است.

تست ۱۹

پاسخ: محیط شکل برابر است با

$$۴x+۴y=۴۰\Rightarrow y=۱۰-x$$

مساحت شکل برابر است با

$$\begin{aligned}S&=۲xy+xy=۳xy\\&=۳x(۱۰-x)\\&=-۳x^{۲}+۳۰x\end{aligned}$$

بیش‌ترین مقدار این عبارت درجه‌ی دوم برابر $-\frac{\Delta}{۴a}$ است:

$$S_{max}=-\frac{۹۰۰}{۴(-۳)}=۷۵$$

تست ۲۰

پاسخ: اگر طول ضلع‌های قائمه‌ی مثلث را a و b فرض کنیم، مساحت مثلث از رابطه‌ی $S=\frac{ab}{۲}$ به‌دست می‌آید که بین a و b رابطه‌ی $a^{۲}+b^{۲}=۹$ برقرار است. ابتدا، بیش‌ترین مقدار $S^{۲}$ را به‌دست می‌آوریم. برای این کار، $S^{۲}$ را برحسب یک متغیر می‌نویسیم:

$$b^{۲}=۹-a^{۲}\Rightarrow S^{۲}=\frac{a^{۲}b^{۲}}{۴}=\frac{a^{۲}(۹-a^{۲})}{۴}=\frac{-(a^{۲})^{۲}+۹a^{۲}}{۴}$$

حاصل $S^{۲}$ به صورت یک عبارت درجه‌ی دوم برحسب $a^{۲}$ است که بیش‌ترین مقدار آن به ازای $a^{۲}=\frac{-۹}{-۲}=\frac{۹}{۲}$ به‌دست می‌آید. بنابراین بیش‌ترین مقدار $S^{۲}$ برابر است با

$$S^{۲}_{max}=\frac{-(\frac{۹}{۲})^{۲}+۹(\frac{۹}{۲})}{۴}=\frac{۸۱}{۱۶}$$

در نتیجه $S_{max}=\frac{۹}{۴}$.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۷۴- اگر عددهای غیرصفر a و b ریشه‌های معادله‌ی $x^2+ax+b=0$ باشند، مقدار b چقدر است؟

۱) -2 ۲) -1 ۳) 1 ۴) 2

۷۵- اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی $x^2-(x_1x_2)x-\frac{1}{6}=0$ باشند و $x_1>x_2$، مقدار $\frac{x_1}{x_2}$ چقدر است؟

۱) $-\frac{3}{2}$ ۲) $-\frac{2}{3}$ ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) -1

۷۶- اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی $x^2-3mx+6m+1=0$ باشند، کدام تساوی درست است؟

۱) $x_1x_2+x_1+x_2=1$ ۲) $x_1x_2-x_1-x_2=1$ ۳) $x_1x_2-2(x_1+x_2)=1$ ۴) $x_1x_2+2(x_1+x_2)=1$

۷۷- اگر مجموعه‌ی جواب‌های معادله‌ی $mx^2-nx+12=0$ به صورت $\{-\frac{n}{1+n},\frac{n}{1-n}\}$ باشد، مقدار n چقدر است؟

۱) 24 ۲) -24 ۳) 12 ۴) -12

۷۸- اگر $\frac{\beta}{\sqrt{\beta^2-1}}$ و $\frac{\beta}{\sqrt{\beta^2+1}}$ ریشه‌های معادله‌ی $x^2+bx+2=0$ باشند، مقدار b چقدر است؟

۱) $\pm\sqrt{3}$ ۲) $\pm2\sqrt{3}$ ۳) $\pm3\sqrt{2}$ ۴) $\pm\sqrt{2}$

۷۹- نوید ضریب x در معادله‌ی $x^2+13x+k=0$ را به اشتباه ۱۷ دید و وقتی معادله را حل کرد ریشه‌هایش -2 و -15 شدند. ریشه‌های معادله‌ی اصلی چه عددهایی هستند؟

۱) -6 و -7 ۲) -5 و -8 ۳) -4 و -9 ۴) -3 و -10

۸۰- از هر یک از جواب‌های معادله‌ی $x^2+2x=6$، دو واحد کم می‌کنیم. حاصل‌ضرب آن‌ها به اندازه‌ی .... واحد تغییر می‌کند.

۱) -8 ۲) 8 ۳) 6 ۴) -6

۸۱- در معادله‌ی $2x^2-mx+m-1=0$ یکی از جواب‌ها عکس و قرینه‌ی جواب دیگر است. مقدار m کدام است؟

۱) 1 ۲) 2 ۳) -1 ۴) -2

۸۲- اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی $x^2+(k-1)x+8=0$ باشند و $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{3}{4}$، مقدار k چقدر است؟

۱) -5 ۲) -6 ۳) -7 ۴) -8

۸۳- در معادله‌ی $x^2-8x+m=0$ اگر یکی از ریشه‌ها از نصف ریشه‌ی دیگر ۵ واحد بیش‌تر باشد، مقدار m کدام است؟ (خارج از کشور ریاضی - ۹۱)

۱) 10 ۲) 12 ۳) 14 ۴) 15

۸۴- در معادله‌ی $2x^2-4x+m=0$ یکی از جواب‌ها از سه برابر جواب دیگر سه واحد بیش‌تر است. مقدار m کدام است؟

۱) $-\frac{9}{8}$ ۲) $\frac{9}{8}$ ۳) $\frac{9}{16}$ ۴) $-\frac{9}{16}$

۸۵- اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی $x^2+(m+1)x+2=0$ باشند و $3(x_1+x_2)-5x_1x_2=-19$، مقدار m چقدر است؟

۱) 1 ۲) 2 ۳) 3 ۴) 4

۸۶- اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی $x^2-x+2k-4=0$ باشند و $x_1^2-x_2^2=5$، مقدار k چقدر است؟

۱) -3 ۲) -2 ۳) -1 ۴) 1

۸۷- اگر α و β جواب‌های معادله‌ی $x^2-kx+k-1=0$ باشند و $\alpha+2\beta=5$، مجموع مقدارهای ممکن برای k کدام است؟

۱) 1 ۲) 5 ۳) 7 ۴) 8

۸۸- در معادله‌ی $x^2-mx-8=0$ یکی از جواب‌ها مربع جواب دیگر است. مقدار m کدام است؟

۱) 1 ۲) 2 ۳) -2 ۴) -1

۸۹- در معادله‌ی $x^2-mx-m=0$ یکی از جواب‌ها قرینه‌ی مربع جواب دیگر است. مقدار $\sqrt[3]{m}$ کدام است؟ $(m>0)$

۱) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ ۳) $\sqrt{2}-1$ ۴) $\sqrt{2}+1$

۹۰- اگر یکی از ریشه‌های معادله‌ی $x^2-mx+64=0$ مکعب ریشه‌ی دیگر باشد، مقدار m کدام می‌تواند باشد؟

۱) 16 ۲) 18 ۳) $16\sqrt{2}$ ۴) $18\sqrt{2}$

۹۱- اگر عددهای متمایز x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی $mx^2-2x-20=0$ باشند و $x_1+x_2^2=x_2+x_1^2$، مقدار m چقدر است؟

۱) -2 ۲) 2 ۳) 1 ۴) -1

۹۲- اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی $x^2-3kx+9=0$ باشند و $\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}=3$، مقدار k چقدر است؟

۱) -1 ۲) 1 ۳) 3 ۴) 5

۹۳- به ازای کدام مقدار m، مجموع جذر هر دو ریشه‌ی معادله‌ی درجه‌ی دوم $2x^2-(m+1)x+\frac{1}{8}=0$، برابر ۲ است؟ (ریاضی - ۹۶)

۱) 3 ۲) 4 ۳) 5 ۴) 6

۹۴- به ازای کدام مقدار m، هر یک از ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $8x^2-mx-8=0$، توان سوم ریشه‌های معادله‌ی $2x^2-x-2=0$ است؟
(خارج از کشور ریاضی - ۹۶)

۱) 9 ۲) 11 ۳) 13 ۴) 15

۹۵- اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی $x^2-2x+k+1=0$ باشند و $x_1^3+x_2^3=5$، مقدار k چقدر است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $-\frac{1}{3}$ ۴) $-\frac{1}{2}$

۹۶- اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی $x^2+4x-5k-3=0$ باشند و $x_1^2+5x_1+x_2=19$، مقدار k چقدر است؟

۱) 2 ۲) 3 ۳) 4 ۴) 5

۹۷- اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی $x^2-(k-2)x+8=0$ باشند و $x_1^2+x_2^2=20$، k چه عددهایی می‌تواند باشد؟

۱) -4 و -8 ۲) 4 و 8 ۳) -4 و 6 ۴) -4 و 8

۹۸- x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی $x^2-3mx+m-3=0$ هستند و $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}>4$. حدود m کدام است؟

۱) $(0,12)$ ۲) $(-\infty,12)$ ۳) $(3,12)$ ۴) $(12,+\infty)$

۹۹- اگر α و β ریشه‌های متمایز معادله‌ی $x^2+2x+k=0$ باشند و $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=-\frac{2}{k}$، حدود k کدام است؟

۱) $k\in(1,+\infty)$ ۲) $k\in(-\infty,1)$ ۳) $k\in(-\infty,1)-\{0\}$ ۴) $k\in\mathbb{R}$

۱۰۰- اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی $x^2-(3m+1)x+3=0$ باشند، $x_1=3x_2$ و m عددی مثبت باشد، مقدار m چقدر است؟

۱) 1 ۲) 2 ۳) 3 ۴) 4

۱۰۱- اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی $x^2-6x+k+3=0$ باشند و $3x_1^2+2x_1x_2-x_2^2=12$، مقدار k چقدر است؟

۱) 3 ۲) 4 ۳) 5 ۴) -5

۱۰۲- اگر α و β جواب‌های معادله‌ی $x^۲-(m+۱)x+m=۰$ باشند و $۲\alpha+۳\beta=\alpha\beta$، مجموع مقدارهای ممکن برای m کدام است؟

۱) -۴ ۲) ۴ ۳) ۲ ۴) -۲

۱۰۳- اگر α و β جواب‌های معادله‌ی $x^۲-mx+m-۱=۰$ باشند و $\frac{۱}{\alpha}+\frac{۲}{\beta}=۲$، مقدار m کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۰۴- اگر $x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌های معادله‌ی $x^۲+۵x+۳=۰$ باشند، حاصل $\frac{x_۱x_۲}{(x_۱+x_۲)^۲}$ چقدر است؟

۱) $\frac{۵}{۲۶}$ ۲) $-\frac{۴}{۲۵}$ ۳) $\frac{۳}{۲۵}$ ۴) $-\frac{۳}{۲۵}$

۱۰۵- در معادله‌ی $x^۲-۷x+۱=۰$ قدرمطلق تفاضل جواب‌ها کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۵}$ ۲) $۳\sqrt{۵}$ ۳) $\sqrt{۵۳}$ ۴) $\sqrt{۴۷}$

۱۰۶- درباره‌ی معادله‌ی $ax^۲+bx+c=۰$ می‌دانیم $\Delta=۵$. اگر $x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌های این معادله باشند، حاصل $۴a^۲(x_۱-x_۲)^۲$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۲۵ ۳) ۱۰ ۴) ۲۰

۱۰۷- اگر $x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌های معادله‌ی $x^۲-۳x-۵=۰$ باشند، حاصل $x_۱(x_۲-۲)+x_۲(x_۱-۲)$ کدام است؟

۱) -۸ ۲) -۲ ۳) -۱۶ ۴) -۴

۱۰۸- اگر $x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌های معادله‌ی $x^۲-۶x+۳=۰$ باشند، مقدار $x_۱^۲+x_۲^۲$ چقدر است؟

۱) ۲۰ ۲) ۲۵ ۳) ۳۰ ۴) ۳۵

۱۰۹- اگر $x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌های معادله‌ی $x^۲-۸x-۱۳=۰$ باشند، حاصل $\frac{۱}{x_۲-۲}+\frac{۱}{x_۱-۲}$ چقدر است؟

۱) $\frac{۴}{۲۵}$ ۲) $\frac{۲}{۲۵}$ ۳) $-\frac{۴}{۲۵}$ ۴) $-\frac{۲}{۲۵}$

۱۱۰- اگر α و β جواب‌های معادله‌ی $x^۲-۵x-۲=۰$ باشند، مقدار $\frac{\beta-۱}{\beta+۱}+\frac{\alpha-۱}{\alpha+۱}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $-\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۱۱۱- اگر α و β جواب‌های معادله‌ی $x^۲-۵x+۲=۰$ باشند، حاصل $(\alpha+\frac{۲}{\beta})^۲+(\beta+\frac{۲}{\alpha})^۲$ کدام است؟

۱) ۲۰ ۲) ۳۲ ۳) ۴۴ ۴) ۸۴

۱۱۲- اگر $x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌های معادله‌ی $x^۲-۴x-۴=۰$ باشند، مقدار $x_۱^۳+x_۲^۳$ چقدر است؟

۱) ۱۱۲ ۲) ۱۲۰ ۳) ۱۲۱ ۴) ۱۲۴

۱۱۳- عددهای ۲ و ۴ به‌ترتیب ریشه‌ای از معادله‌های $x^۲-ax+b=۰$ و $x^۲-cx+d=۰$ هستند و ریشه‌ی دیگر این دو معادله مشترک است. مقدار $a-c+\frac{b}{d}$ چقدر است؟

۱) $-\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $-\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

۱۱۴- اگر $x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌های معادله‌ی $x^۲-۱۲x+۹=۰$ باشند، مقدار $\sqrt{\frac{x_۱}{x_۲}}+\sqrt{\frac{x_۲}{x_۱}}$ چقدر است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

۱۱۵- اگر α و β جواب‌های معادله‌ی $x^۲-۴x-۱=۰$ باشند و $\alpha<\beta$، مقدار $\alpha^۲-\beta^۲$ کدام است؟

۱) $-۸\sqrt{۵}$ ۲) $۸\sqrt{۵}$ ۳) $۴\sqrt{۵}$ ۴) $-۴\sqrt{۵}$

۱۱۶- اگر $\tan\alpha$ و $\cot\alpha$ جواب‌های معادله‌ی $x^2-(m-3)x+2m-1=0$ باشند، مقدار $\tan^2\alpha+\cot^2\alpha$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۱۱۷- اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی $x^2-3x+1=0$ باشند، مقدار $x_1\sqrt{x_1}+x_2\sqrt{x_2}$ چقدر است؟

۱) $\sqrt{5}$ ۲) $2\sqrt{5}$ ۳) $3\sqrt{5}$ ۴) $4\sqrt{5}$

۱۱۸- اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی $x^2-4x-1=0$ باشند، مقدار $\sqrt[3]{x_1}+\sqrt[3]{x_2}$ چقدر است؟

۱) -1 ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۱۹- اگر α و β جواب‌های معادله‌ی $x^2-5x+1=0$ باشند، مقدار $\alpha^2+\frac{2}{\beta^2}+3\beta^2$ کدام است؟

۱) ۷۵ ۲) ۶۹ ۳) ۴۶ ۴) ۵۱

۱۲۰- اگر α و β جواب‌های معادله‌ی $3x^2-4x-1=0$ باشند، مقدار $10\alpha^2+(3\alpha-4)^2+\beta^2$ کدام است؟

۱) $\frac{100}{9}$ ۲) $\frac{110}{9}$ ۳) $\frac{130}{9}$ ۴) $\frac{220}{9}$

۱۲۱- اگر α و β جواب‌های معادله‌ی $x^2-\sqrt{5}x+1=0$ باشند و $\alpha<\beta$، مقدار $2\alpha+4\beta$ کدام است؟

۱) $3\sqrt{5}-1$ ۲) $3\sqrt{5}+1$ ۳) $\sqrt{5}+3$ ۴) $\sqrt{5}-1$

۱۲۲- اگر α و β جواب‌های معادله‌ی $2x^2-3x-1=0$ باشند، مقدار $4\alpha^2+6\beta(1+\alpha)$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۱۰

۱۲۳- اگر α و β جواب‌های معادله‌ی $x^2-2x-1=0$ باشند، مقدار $\alpha^3+5\beta$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱۱ ۴) ۱۲

۱۲۴- اگر α و β جواب‌های معادله‌ی $x^2-3x-1=0$ باشند، مقدار $\alpha^4+33\beta$ کدام است؟

۱) ۹۹ ۲) ۱۰۹ ۳) ۱۱۱ ۴) ۱۱۹

۱۲۵- کدام گزینه درباره‌ی بیش‌ترین یا کم‌ترین مقدار تابع $f(x)=-x^2+6x-4$ درست است؟

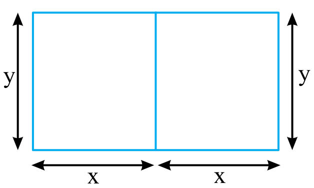
۱) بیش‌ترین مقدار آن ۵ است.
۲) کم‌ترین مقدار آن ۵ است.
۳) بیش‌ترین مقدار آن -4 است.
۴) کم‌ترین مقدار آن -31 است.

۱۲۶- اگر حداقل مقدار عبارت $4x^2+ax+13$ برابر با ۹ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) ± 4 ۲) ± 2 ۳) ± 8 ۴) ± 6

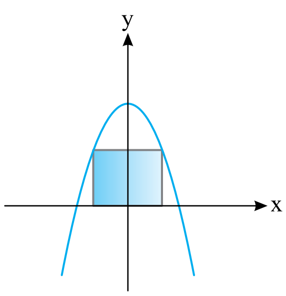
۱۲۷- یک ماهی‌گیر می‌خواهد کنار رودخانه‌ای، محوطه‌ای مستطیل‌شکل را حصار بکشد. اگر طول حصار $100\,m$ باشد، ابعاد مستطیل چه باشد تا مساحت آن بیش‌ترین مقدار ممکن باشد؟

۱) 30×40 ۲) $25\times 37/5$ ۳) $12/5\times 75$ ۴) 25×50



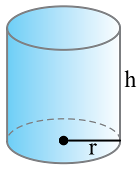
۱۲۸- مطابق شکل با $200\,m$ نرده‌ی چوبی، اصطبلی درست کرده‌ایم. حداکثر مقدار مساحت این اصطبل چقدر است؟

۱) ۵۰۰۰ ۲) ۱۰۰۰۰
۳) $\frac{5000}{3}$ ۴) $\frac{10000}{3}$



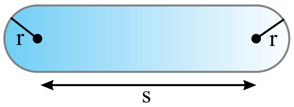
۱۲۹- در شکل مقابل دو رأس مستطیل روی محور x و دو رأس دیگر روی سهمی $y=4-x^2$ است. بیش‌ترین مقدار محیط مستطیل چقدر است؟

۱) ۸
۲) ۱۰
۳) ۱۲
۴) $6\sqrt{3}$



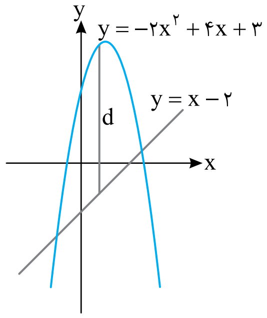
۱۳۰- اگر مجموع طول قطر قاعده و ارتفاع یک استوانه‌ی قائم برابر ۳۰ باشد، ارتفاع استوانه چه باشد تا مساحت جانبی استوانه بیش‌ترین مقدار ممکن شود؟

۱) ۱۰ ۲) ۲۰ ۳) ۱۵ ۴) ۱۲/۵



۱۳۱- در شکل مقابل، محیط زمین برابر با $1800m$ است. اگر مساحت زمین حداکثر مقدار ممکن باشد، مقدار r چقدر است؟ $(\pi \simeq 3)$

۱) ۲۷۰ ۲) ۳۰۰ ۳) ۳۳۰ ۴) ۳۵۰



۱۳۲- در شکل مقابل، حداکثر مقدار فاصله‌ی عمودی، d، میان خط و سهمی چقدر است؟

۱) $\frac{49}{8}$
۲) $\frac{17}{4}$
۳) 4
۴) $\frac{31}{8}$

۱۳۳- مفتولی به طول ۲ متر را به دو قسمت تقسیم می‌کنیم و با یکی مربع و با دیگری دایره درست می‌کنیم. اگر مجموع مساحت مربع و دایره کم‌ترین مقدار ممکن باشد، نسبت طول قطعه‌ی بزرگ‌تر به طول قطعه‌ی کوچک‌تر کدام است؟

۱) π ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) 2

۱۳۴- به ازای چه مقداری از a مجموع مربع‌های ریشه‌های معادله‌ی $x^2-(a-2)x-a+1=0$ کم‌ترین مقدار ممکن است؟

۱) ۲ ۲) صفر ۳) ۳ ۴) ۱

۱۳۵- اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی $2a^2(x-a)x=\sqrt{2}$ باشند، کم‌ترین مقدار $x_1^4+x_2^4$ کدام است؟

۱) $2+\sqrt{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}+4$ ۳) $2\sqrt{2}+1$ ۴) $2+2\sqrt{2}$

۱۳۶- معادله‌ی درجه‌ی دومی که جواب‌های آن $a+\sqrt{a^2+1}$ و $a-\sqrt{a^2+1}$ باشند، کدام است؟

۱) $x^2-2ax-1=0$ ۲) $x^2-2ax+1=0$ ۳) $x^2+2ax-1=0$ ۴) $x^2+2ax+1=0$

۱۳۷- واسطه‌ی حسابی ریشه‌های معادله‌ای درجه‌ی دوم ۳/۵ و واسطه‌ی هندسی ریشه‌های آن ۲/۵ است. این معادله کدام است؟

۱) $4x^2-28x+25=0$ ۲) $4x^2+28x+25=0$ ۳) $x^2-14x+25=0$ ۴) $x^2+14x+25=0$

۱۳۸- اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$ باشند، ریشه‌های معادله‌ی $cx^2-bx+a=0$ کدام هستند؟

۱) $\frac{1}{\alpha}$ و $\frac{1}{\beta}$ ۲) $\frac{1}{\alpha}$ و $-\frac{1}{\beta}$ ۳) α و $\frac{1}{\beta}$ ۴) $-\frac{1}{\alpha}$ و $-\frac{1}{\beta}$

۱۳۹- اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $2x^2-3x-4=0$ باشند، مجموعه‌ی جواب‌های کدام معادله به‌صورت $\{\frac{1}{\alpha}+1,\frac{1}{\beta}+1\}$ است؟

(ریاضی - ۹۲)

۱) $4x^2-5x+1=0$ ۲) $4x^2-3x+1=0$ ۳) $4x^2-5x-1=0$ ۴) $4x^2-3x-1=0$

۱۴۰- اگر α و β جواب‌های معادله‌ی $x^2+x-1=0$ باشند، معادله‌ی درجه‌ی دومی که جواب‌های آن $\alpha^2+\frac{1}{\beta}$ و $\beta^2+\frac{1}{\alpha}$ باشند، کدام است؟

۱) $x^2-4x-1=0$ ۲) $x^2+4x+1=0$ ۳) $x^2-3x-1=0$ ۴) $x^2+3x-1=0$

۱۴۱- اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی $3x^2-6x-4=0$ باشند، معادله‌ای که ریشه‌هایش $x_1^2+x_1x_2$ و $x_2^2+x_1x_2$ باشند، کدام است؟

۱) $x^2-4x+16=0$ ۲) $3x^2-12x+16=0$ ۳) $x^2-12x+16=0$ ۴) $3x^2-12x-16=0$

۱۴۲- اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2-x-3=0$ باشند، معادله‌ی درجه‌ی دومی که ریشه‌های آن $(\alpha-\beta)^2$ و $(\alpha+\beta)^2$ باشند، کدام است؟

۱) $x^2+14x-13=0$ ۲) $x^2-14x+13=0$ ۳) $x^2-13x-14=0$ ۴) $x^2+13x-14=0$

۱۴۳- اگر ریشه‌های معادله‌ی $9x^2+ax+b=0$ از مربع معکوس ریشه‌های معادله‌ی $2x^2-3x=9$، ۲ واحد کم‌تر باشند، مقدار a کدام است؟

۱) ۲۰ ۲) ۳۱ ۳) ۴۲ ۴) ۱۷

۱۴۴- جواب‌های کدام معادله مکعب جواب‌های معادله‌ی $x^2-3x-5=0$ هستند؟

۱) $x^2-72x-125=0$ ۲) $x^2-25x-27=0$ ۳) $x^2-18x-125=0$ ۴) $x^2-18x-27=0$

۱۴۵- اگر $x_1+x_2+x_1x_2=-1$ و $x_1+x_2-x_1x_2=-11$، معادله‌ای که ریشه‌هایش x_1 و x_2 هستند کدام است؟

۱) $x^2+6x-5=0$ ۲) $x^2-6x-5=0$ ۳) $x^2+6x+5=0$ ۴) $x^2-12x+6=0$

۱۴۶- اگر هر یک از ریشه‌های معادله‌ی $x^2-3mx+20=0$ دو واحد از یکی از ریشه‌های معادله‌ی $x^2-(m+2)x+n=0$ بیش‌تر باشد، مقدار m چقدر است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

۱۴۷- هر یک از ریشه‌های معادله‌ی $x^2+mx+n=0$ یک واحد از ریشه‌ای از معادله‌ی $mx^2+3x-1=0$ بیش‌تر است. اگر m مثبت باشد، مقدار n چقدر است؟

۱) -3 ۲) -2 ۳) -1 ۴) ۱

۱۴۸- چند عدد مانند k می‌توان پیدا کرد که معادله‌ی $x^2-3x+k=0$ دو ریشه‌ی مختلف در بازه‌ی $(0,1)$ داشته باشد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) نامتناهی

۱۴۹- اگر ریشه‌های معادله‌ی $ax^2+2ax+3a-1=0$ هم‌علامت نباشند، حدود a کدام است؟

۱) $0<a<\frac{1}{2}$ ۲) $0<a<\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{3}<a<\frac{1}{2}$ ۴) $a>\frac{1}{3}$

۱۵۰- اگر معادله‌ی $4ax^2-4(a+2)x+9=0$ دو ریشه‌ی حقیقی مثبت داشته باشد، حدود a کدام است؟

۱) $(4,+\infty)$ ۲) $(-\infty,1)\cup(4,+\infty)$ ۳) $(-\infty,-1)$ ۴) $(0,1)\cup(4,+\infty)$

۱۵۱- اگر معادله‌ی $2x^2+mx+m-2=0$ دو جواب منفی داشته باشد، حدود m کدام است؟

۱) $m\in(2,+\infty)-\{4\}$ ۲) $m\in(2,+\infty)$ ۳) $m\in(2,4)$ ۴) $m\in(0,4)$

۱۵۲- x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی $x^2-(m+1)x+m=0$ هستند و $0<x_1<2<x_2$. حدود m کدام است؟

۱) $(2,+\infty)$ ۲) $(-\infty,2)$ ۳) $(2,4)$ ۴) $(-4,-2)$

۱۵۳- معادله‌ی $(k+6)x^2+17(k+1)x+5(k-2)=0$ دو ریشه مانند x_1 و x_2 دارد که $x_1<0<x_2$ و $|x_1|>x_2$. حدود k کدام است؟

۱) $(-6,-1)$ ۲) $(-1,3)$ ۳) $(0,3)$ ۴) $(-1,2)$

۱۵۴- بـه ازای کـدام مجموعه‌ی مقدارهای m، منحنی به معادله‌ی $y=(m+2)x^2+3x+1-m$ محـور x را در هر دو طرف مبدأ مختصات قطع می‌کند؟ (خارج از کشور ریاضی - ۹۵)

۱) $m>1$ یا $m<-2$ ۲) $-2<m<1$ ۳) فقط $m<-2$ ۴) فقط $m>1$

۱۵۵- بـه ازای کدام مجموعه‌ی مقدارهای m، منحنی به معادلـه‌ی $y=(m-2)x^2-2(m+1)x+12$ محور x را دو نقطه به طول‌های منفی قطع می‌کند؟ (ریاضی - ۹۵)

۱) $m>2$ ۲) $-1<m<2$ ۳) هر مقدار m ۴) هیچ مقدار m

۱۵۶- به ازای کدام مقدار a، معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2-2(a-2)x+14-a=0$، دو ریشه‌ی مثبت دارد؟ (ریاضی - ۹۶)

۱) $-2<a<2$ ۲) $2<a<5$ ۳) $2<a<14$ ۴) $5<a<14$

۱۵۷- به ازای کدام مقدار a، نمودار تابع $y=(1-a)x^2+2\sqrt{6}x-a$، همواره بالای محور x است؟ (خارج از کشور ریاضی - ۹۶)

۱) $a<1$ ۲) $a<-2$ ۳) $a>3$ ۴) $-2<a<1$

۱۵۸- نمودار $y=2mx^2+4mx+m-2$ از چهار ناحیه‌ی صفحه‌ی مختصات عبور می‌کند. حدود m کدام است؟

۱) $0<m<2$ ۲) $1<m<2$ ۳) $m>2$ ۴) $m<0$

۱۵۹- به ازای کدام مجموعه‌ی مقدارهای a، نمودار تابع $f(x)=(a-3)x^2+ax-1$ از ناحیه‌ی اول محورهای مختصات نمی‌گذرد؟ (ریاضی - ۹۲)

۱) $a\le 2$ ۲) $0<a\le 2$ ۳) $2<a<3$ ۴) $0<a<3$

۱۶۰- اگر یکی از جواب‌های معادله‌ی $4x^3+16x^2+9x+a=0$ برابر $\frac{1}{2}$ باشد، اختلاف دو جواب دیگر کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) 1 ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) 2

۱۶۱- اگر $x=\frac{1}{3}$، $x=-1$ و $x=k$ جواب‌های معادله‌ی $6x^3-5x^2+ax+b=0$ باشند، مقدار $\frac{ab}{k}$ کدام است؟

۱) 14 ۲) -8 ۳) -16 ۴) 7

۱۶۲- معادله‌ی $(x^2-x)^2-5(x^2-x)+4=0$

۱) فقط دو جواب مثبت دارد. ۲) فقط دو جواب منفی دارد.

۳) دو جواب مثبت و دو جواب منفی دارد. ۴) چهار جواب مثبت دارد.

۱۶۳- کدام‌یک جواب معادله‌ی $3(6x^2+\frac{1}{3})^2-7(6x^2+\frac{1}{3})+4=0$ نیست؟

۱) $\frac{1}{\sqrt{6}}$ ۲) $-\frac{1}{3}$ ۳) $-\frac{1}{\sqrt{6}}$ ۴) $\frac{1}{4}$

۱۶۴- مجموع ریشه‌های معادله‌ی $(x^2-x)^2+2x^2-2x-3=0$ کدام است؟

۱) -2 ۲) 2 ۳) 1 ۴) -1

۱۶۵- معادله‌ی $(x^2-7x+11)^2=3x^2-21x+37$ چند جواب دارد؟

۱) 4 ۲) 3 ۳) 2 ۴) 1

۱۶۶- معادله‌ی $x^3+2x^2-mx-m-1=0$ سه جواب متمایز دارد. حدود m کدام است؟

۱) $m\in(\frac{1}{4},+\infty)$ ۲) $m\in(-\frac{5}{4},+\infty)$ ۳) $m\in(-\frac{1}{4},+\infty)$ ۴) $m\in(-\frac{5}{4},+\infty)-\{-1\}$

۱۶۷- اگر معادله‌ی $mx^6-x^3+m-1=0$ دو جواب مختلف‌العلامت داشته باشد، حدود m کدام است؟

۱) $-1<m<1$ ۲) $-1<m<0$ ۳) $0<m<1$ ۴) $m>1$

۱۶۸- معادله‌ی $x^4-2x^2+m^2-1=0$ چهار جواب دارد. حدود m کدام است؟

۱) $m\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ ۲) $m\in(-1,1)$

۳) $m\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})-[-1,1]$ ۴) $m\in(-\infty,-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},+\infty)$

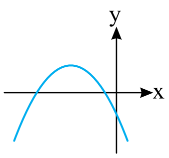
۱۶۹- اگر معادله‌ی $x^4-mx^2+m-1=0$ دو جواب داشته باشد، حدود m کدام است؟

۱) $m\in(-\infty,1)$ ۲) $m\in(-\infty,2]$ ۳) $m\in(-\infty,1)\cup\{2\}$ ۴) $m\in(-\infty,2]-\{1\}$

۱۷۰- اگر معادله‌ی $x^4-2mx^2+m^2-4=0$ جواب حقیقی نداشته باشد، حدود m کدام است؟

۱) $m>2$ ۲) $0<m<2$ ۳) $m<-2$ ۴) $-2<m<0$

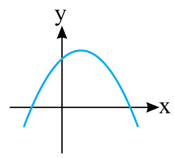
۱۷۱- نمودار تابع $f(x)=ax^2+bx-c$ به شکل مقابل است. کدام گزینه علامت a، b و c را درست نشان می‌دهد؟

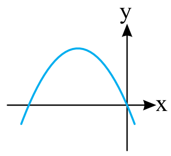


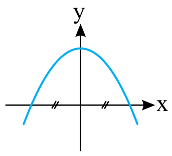
۱) $a<0$، $b<0$ و $c<0$ ۲) $a<0$، $b<0$ و $c>0$

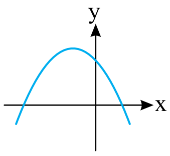
۳) $a>0$، $b>0$ و $c<0$ ۴) $a>0$، $b<0$ و $c<0$

۱۷۲- درباره‌ی سهمی $y=ax^{۲}+bx+c$ می‌دانیم $a<۰$، $b<۰$ و $c>۰$. نمودار این سهمی کدام شکل می‌تواند باشد؟

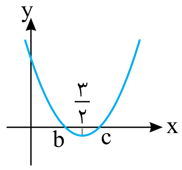
۱) 

۲) 

۳) 

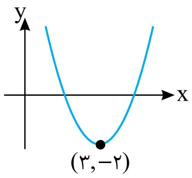
۴) 

۱۷۳- نمودار تابع $y=x^{۲}+ax+a^{۲}-a-۱۰$ شکل روبه‌رو است. مقدار abc کدام است؟



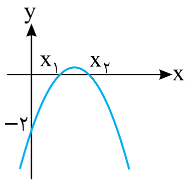
۱) -۶
۲) ۳
۳) ۶
۴) -۳

۱۷۴- در شکل روبه‌رو نمودار سهمی $y=x^{۲}+bx+c$ رسم شده است. کدام گزینه صفرهای تابع $y=x^{۲}+bx+c$ را درست نشان می‌دهد؟



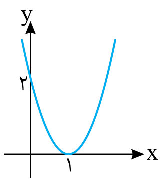
۱) -۱ و ۷
۲) $۳+\sqrt{۲}$ و $۳-\sqrt{۲}$
۳) -۱ و -۷
۴) $۳+۲\sqrt{۲}$ و $۳-۲\sqrt{۲}$

۱۷۵- در شکل مقابل نمودار تابع $f(x)=-x^{۲}+bx+c$ رسم شده است. اگر $x_۱+x_۲=\frac{۳}{۲}x_۱x_۲$، بیش‌ترین مقدار تابع f چقدر است؟



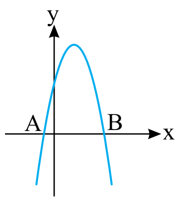
۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) $\frac{۱}{۳}$
۳) $\frac{۱}{۴}$
۴) $\frac{۱}{۸}$

۱۷۶- نمودار سهمی $y=(a+۱)x^{۲}+(b-۱)x+c$ در شکل مقابل رسم شده است. مقدار abc چقدر است؟



۱) ۲
۲) -۲
۳) -۴
۴) -۶

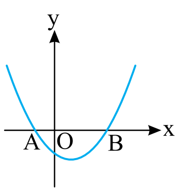
۱۷۷- در شکل مقابل نمودار سهمی $y=-x^{۲}+۴x+c+۵$ رسم شده است. اگر طول پاره‌خط AB برابر ۶ باشد، مقدار c چقدر است؟



۱) صفر
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۱۰

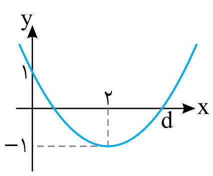
۱۷۸- در شکل مقابل نمودار سهمی $y=ax^{۲}+bx+c$ رسم شده است و $OA<OB$. چند تا از نابرابری‌های زیر درست‌اند؟

$$b^{۲}-۴ac>۰,\quad ab>۰,\quad ac<۰,\quad b+c<۰$$



۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۱۷۹- نمودار یک تابع درجه‌ی دوم در شکل روبه‌رو رسم شده است. مقدار d کدام است؟



۱) ۳
۲) $\frac{۵}{۲}$
۳) $۲+\sqrt{۲}$
۴) $\frac{۲+\sqrt{۲}}{۲}$

۱۸۰- درباره‌ی تابع f با دامنه‌ی $\mathbb{R}$ می‌دانیم $f(x+۱)=x^{۲}-x-۶$. مجموع صفرهای تابع f چقدر است؟

۱) -۳
۲) ۱
۳) ۳
۴) ۴

فاصله‌ی دو خط موازی $ax+by+c_1=0$ و $ax+by+c_2=0$ برابر است با

$$\frac{|c_1-c_2|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

ابتدا دو طرف معادله‌ی $ax+3y+c=0$ را در ۳ ضرب می‌کنیم

$$3ax+9y+3c=0$$

چون این خط با خط $12x+9y-2=0$ موازی است، پس شیب آن‌ها برابر است

$$-\frac{3a}{9}=-\frac{12}{9}\Rightarrow a=4$$

چون فاصله‌ی دو خط برابر با ۳ است، پس

$$\frac{|3c-(-2)|}{\sqrt{12^2+9^2}}=3\Rightarrow |3c+2|=3\times 15$$

$$c=-\frac{47}{3}\ (\text{غ.ق.ق})\ ,\ c=\frac{43}{3}$$

بنابراین

$$\frac{a}{c}=\frac{12}{43}$$

شیب خط $x+3y-1=0$ برابر $-\frac{1}{3}$ است.

بنابراین شیب خط موردنظر هم برابر $-\frac{1}{3}$ و معادله‌ی آن به‌صورت $x+3y+c=0$ است. چون فاصله‌ی این خط از خط‌های داده شده برابر است، پس

$$\frac{|c+1|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\frac{|c-4|}{\sqrt{1^2+3^2}}\Rightarrow |c+1|=|c-4|$$

$$c+1=\pm(c-4)\Rightarrow c=\frac{3}{2}$$

بنابراین معادله‌ی خط موردنظر $x+3y+\frac{3}{2}=0$ یا $2x+6y+3=0$ است.

توجه کنید که حاصل‌ضرب ریشه‌ها برابر b است، پس $ab=b$، و چون $b\neq 0$، پس $a=1$. از طرف دیگر مجموع ریشه‌ها برابر $-a$ است، پس

$$a+b=-a\Rightarrow b=-2a=-2$$

حاصل‌ضرب ریشه‌ها برابر $-\frac{1}{6}$ است، پس $x_1x_2=-\frac{1}{6}$. بنابراین معادله‌ی داده شده به‌صورت زیر در می‌آید:

$$x^2+\frac{x}{6}-\frac{1}{6}=0\Rightarrow 6x^2+x-1=0$$

ریشه‌های این معادله $-\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{3}$ هستند. در نتیجه

$$x_1=\frac{1}{3},\quad x_2=-\frac{1}{2}$$

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{\frac{1}{3}}{-\frac{1}{2}}=-\frac{2}{3}$$

توجه کنید که

$$x_1+x_2=3m$$

$$x_1x_2=6m+1=2(3m)+1=2(x_1+x_2)+1$$

بنابراین $x_1x_2-2(x_1+x_2)=1$.

فرض می‌کنیم

$$r=\frac{-n}{1+n},\quad s=\frac{n}{1-n}$$

در نتیجه

$$\frac{1}{r}=-\frac{1+n}{n}=-\frac{1}{n}-1,\quad \frac{1}{s}=\frac{1-n}{n}=\frac{1}{n}-1$$

پس $\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=-2$. اکنون توجه کنید که

$$r+s=\frac{n}{m},\quad rs=\frac{12}{m}$$

پس

$$\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=\frac{r+s}{rs}=\frac{n}{12}=-2$$

بنابراین $n=-24$.

فرض می‌کنیم $r=\frac{\beta}{\sqrt{\beta^2+1}}$ و $s=\frac{\beta}{\sqrt{\beta^2-1}}$. در نتیجه

$$\frac{1}{r^2}=\frac{\beta^2+1}{\beta^2}=1+\frac{1}{\beta^2},\quad \frac{1}{s^2}=\frac{\beta^2-1}{\beta^2}=1-\frac{1}{\beta^2}$$

بنابراین

$$\frac{1}{r^2}+\frac{1}{s^2}=2$$

توجه کنید که

$$r+s=-b,\quad rs=2$$

بنابراین

$$\frac{1}{r^2}+\frac{1}{s^2}=\frac{r^2+s^2}{(rs)^2}=\frac{(r+s)^2-2rs}{(rs)^2}=\frac{b^2-4}{4}=2$$

در نتیجه

$$b^2=12\Rightarrow b=\pm 2\sqrt{3}$$

چون k در دو معادله یکسان بوده، پس $k=(-۲)(-۱۵)=۳۰$. بنابراین معادله‌ی اصلی $x^{۲}+۱۳x+۳۰=۰$ است، که ریشه‌هایش ۱۰- و ۳- هستند.

جواب‌های معادله‌ی $x^{۲}+۲x-۶=۰$ را با α و β نشان می‌دهیم. در نتیجه باید حاصل $(\alpha-۲)(\beta-۲)=(۲-\alpha)(۲-\beta)$ را بیابیم. می‌دانیم

$$x^{۲}+۲x-۶=(x-\alpha)(x-\beta)$$

اگر در این تساوی به‌جای x قرار دهیم ۲، به‌دست می‌آید

$$(۲-\alpha)(۲-\beta)=۲$$

چون $\alpha\beta=-۶$، پس حاصل‌ضرب به‌اندازه‌ی ۸ واحد تغییر کرده است.

اگر α و β جواب‌های معادله باشند، آن‌گاه $\alpha=-\frac{۱}{\beta}$ و در نتیجه $\alpha\beta=-۱$. بنابراین

$$\frac{m-۱}{۲}=-۱\Rightarrow m-۱=-۲\Rightarrow m=-۱$$

ابتدا توجه کنید که

$$x_{۱}+x_{۲}=-(k-۱)=۱-k\,,\quad x_{۱}x_{۲}=۸$$

بنابراین

$$\frac{۱}{x_{۱}}+\frac{۱}{x_{۲}}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow\frac{x_{۱}+x_{۲}}{x_{۱}x_{۲}}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow\frac{۱-k}{۸}=\frac{۳}{۴}$$

بنابراین $k=-۵$.

اگر α و β ریشه‌های معادله باشند، آن‌گاه

$$\alpha+\beta=۸\,,\quad \alpha=\frac{\beta}{۲}+۵$$

از حل دستگاه معادله‌های بالا به‌دست می‌آید $\alpha=۶$ و $\beta=۲$.

از طرف دیگر،

$$\alpha\beta=m\Rightarrow m=۱۲$$

اگر جواب‌های معادله را α و β بنامیم، آن‌گاه

$$\alpha+\beta=۲\,,\quad \alpha=۳\beta+۳$$

از حل دستگاه فوق به‌دست می‌آید $\alpha=\frac{۹}{۴}$ و $\beta=-\frac{۱}{۴}$. از طرف دیگر،

$$\alpha\beta=\frac{m}{۲}\Rightarrow(\frac{۹}{۴})(-\frac{۱}{۴})=\frac{m}{۲}\Rightarrow m=-\frac{۹}{۸}$$

توجه کنید که $x_{۱}+x_{۲}=-(m+۱)$ و $x_{۱}x_{۲}=۲$. بنابراین

$$۳(x_{۱}+x_{۲})-۵x_{۱}x_{۲}=-۱۹$$

$$۳(-(m+۱))-۵\times۲=-۱۹$$

$$-۳m-۳=-۹\Rightarrow m=۲$$

توجه کنید که $x_{۱}+x_{۲}=۱$ و

$$|x_{۱}-x_{۲}|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\sqrt{\Delta}=\sqrt{۱-۴(۲k-۴)}$$

از طرف دیگر،

$$x_{۱}^{۲}-x_{۲}^{۲}=۵\Rightarrow(x_{۱}-x_{۲})(x_{۱}+x_{۲})=۵$$

پس $x_{۱}-x_{۲}>۰$، در نتیجه

$$\sqrt{۱۷-۸k}=۵\Rightarrow۱۷-۸k=۲۵\Rightarrow k=-۱$$

توجه کنید که

$$\alpha+\beta=k\,,\quad \alpha\beta=k-۱$$

از حل دستگاه معادله‌های $\begin{cases}\alpha+\beta=k\\ \alpha+۲\beta=۵\end{cases}$ به‌دست می‌آید

$$\alpha=۲k-۵\,,\quad \beta=۵-k$$

بنابراین

$$\alpha\beta=(۲k-۵)(۵-k)=k-۱\Rightarrow k^{۲}-۷k+۱۲=۰$$

$$(k-۴)(k-۳)=۰\Rightarrow k=۳ \text{ یا } k=۴$$

پس مجموع مقدارهای ممکن برای k برابر ۷ است.

اگر α و β جواب‌های معادله باشند، آن‌گاه $\alpha=\beta^{۲}$. از طرف دیگر،

$$\alpha\beta=-۸\Rightarrow\beta^{۳}=-۸\Rightarrow\beta=-۲$$

پس $\alpha=۴$، همچنین

$$\alpha+\beta=m\Rightarrow m=۴-۲=۲$$

اگر $x_{۱}$ و $x_{۲}$ جواب‌های معادله باشند، $x_{۲}=-x_{۱}^{۲}$. از طرف دیگر $x_{۱}x_{۲}=-m$، پس

$$-x_{۱}^{۳}=-m\Rightarrow m=x_{۱}^{۳}$$

در معادله به جای m مقدار $x_{۱}^{۳}$ را قرار می‌دهیم:

$$x^{۲}-x_{۱}^{۳}x-x_{۱}^{۳}=۰$$

چون $x_{۱}$ جواب معادله است، پس در آن صدق می‌کند:

$$x_{۱}^{۲}-x_{۱}^{۳}x_{۱}-x_{۱}^{۳}=۰\Rightarrow x_{۱}^{۲}(۱-x_{۱}-x_{۱}^{۲})=۰$$

$$x_{۱}^{۲}=۰\Rightarrow x_{۱}=۰\Rightarrow m=۰ \text{ (غ.ق.ق)}$$

$$۱-x_{۱}-x_{۱}^{۲}=۰\Rightarrow x_{۱}^{۲}+x_{۱}-۱=۰\Rightarrow x_{۱}=\frac{-۱\pm\sqrt{۵}}{۲}=\sqrt[۳]{m}$$

توجه کنید که چون معادله دو جواب دارد، پس $m^{۲}+۴m>۰$ و در نتیجه $m>۰$ یا $m<-۴$. بنابراین $m=(\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲})^{۳}\simeq۰/۲$ قابل قبول است. البته $m=(\frac{-\sqrt{۵}-۱}{۲})^{۳}\simeq-۴/۲$ هم قابل قبول است که چون $m>۰$ شرط مسئله است این عدد در گزینه‌ها نیامده است.

اگر α و β ریشه‌های معادله باشند، آن‌گاه

$$\alpha+\beta=m\,,\quad \alpha\beta=64\,,\quad \beta=\alpha^3$$

بنابراین

$$\alpha(\alpha^3)=64\Rightarrow\alpha^4=64\Rightarrow\alpha=\sqrt{8}\Rightarrow\beta=8\sqrt{8}$$

در نتیجه

$$\alpha+\beta=\sqrt{8}+8\sqrt{8}=m\Rightarrow m=9\sqrt{8}=18\sqrt{2}$$

از فرض مسئله نتیجه می‌شود

$$x_1-x_2=x_1^2-x_2^2=(x_1-x_2)(x_1+x_2)$$

$$\xrightarrow{x_1\neq x_2} x_1+x_2=1$$

بنابراین

$$x_1+x_2=\frac{2}{m}=1$$

پس $m=2$.

توجه کنید که

$$x_1+x_2=3k\,,\quad x_1x_2=9$$

از طرف دیگر،

$$\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}=3\Rightarrow(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})^2=9$$

$$\Rightarrow x_1+x_2-2\sqrt{x_1x_2}=9$$

$$\Rightarrow 3k-2\sqrt{9}=9$$

پس $k=5$.

فرض می‌کنیم x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی موردنظر باشند. در این صورت

$$x_1+x_2=\frac{m+1}{2},\quad x_1x_2=\frac{1}{16}$$

از طرف دیگر،

$$\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}=2\xrightarrow[\text{می‌رسانیم}]{\text{به توان دو}}x_1+x_2+2\sqrt{x_1x_2}=4$$

$$\frac{m+1}{2}+2\sqrt{\frac{1}{16}}=4\Rightarrow\frac{m+1}{2}=\frac{7}{2}\Rightarrow m=6$$

فرض می‌کنیم x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی $2x^2-x-2=0$ و α و β ریشه‌های معادله‌ی $8x^2-mx-8=0$ باشند. در این صورت

$$x_1+x_2=\frac{1}{2}\,,\quad x_1x_2=-1$$

$$\alpha+\beta=\frac{m}{8},\quad \alpha\beta=-1$$

$$\alpha=x_1^3\,,\quad \beta=x_2^3$$

دو طرف تساوی $x_1+x_2=\frac{1}{2}$ را به توان سه می‌رسانیم

$$x_1^3+x_2^3+3x_1x_2(x_1+x_2)=\frac{1}{8}$$

$$\alpha+\beta-3(\frac{1}{2})=\frac{1}{8}$$

$$\frac{m}{8}=\frac{1}{8}+\frac{3}{2}\Rightarrow m=13$$

توجه کنید که بنابر اتحاد مکعب دوجمله‌ای،

$$(x_1+x_2)^3=x_1^3+x_2^3+3x_1x_2(x_1+x_2)\qquad(1)$$

از طرف دیگر، $x_1+x_2=2$ و $x_1x_2=k+1$. در نتیجه، از تساوی (۱) و این که $x_1^3+x_2^3=5$ به‌دست می‌آید

$$8=5+3(k+1)(2)$$

بنابراین $k=-\frac{1}{2}$.

ابتدا توجه کنید که

$$x_1+x_2=-4\Rightarrow x_2=-4-x_1$$

بنابراین

$$x_1^2+5x_1+x_2=19\Rightarrow x_1^2+5x_1-4-x_1=19$$

$$x_1^2+4x_1=23$$

از طرف دیگر، چون x_1 ریشه‌ی معادله است، پس

$$x_1^2+4x_1-5k-3=0\Rightarrow 23-5k-3=0$$

بنابراین $k=4$.

ابتدا توجه کنید که

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2\qquad(1)$$

از طرف دیگر، $x_1+x_2=k-2$ و $x_1x_2=8$. بنابراین از تساوی (۱) نتیجه می‌شود

$$20=(k-2)^2-2\times8\Rightarrow(k-2)^2=36$$

$$k-2=\pm6\Rightarrow k=8\,,\ k=-4$$

توجه کنید که

$$x_1+x_2=3m,\quad x_1x_2=m-3$$

بنابراین

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}>4\Rightarrow\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}>4$$

$$\frac{3m}{m-3}>4\Rightarrow\frac{3m}{m-3}-4>0$$

$$\frac{3m-4(m-3)}{m-3}>0\Rightarrow\frac{-m+12}{m-3}>0$$

بنابراین $m\in(3,12)$.

ابتدا توجه کنید که $\alpha+\beta=-2$ و $\alpha\beta=k$.

بنابراین

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{-2}{k}$$

بنابراین تساوی داده شده بین ریشه‌های معادله به دو شرط زیر برقرار است:

- حاصل‌ضرب ریشه‌ها صفر نباشد، یعنی $k\neq 0$.
- معادله دو ریشه داشته باشد. یعنی

$$\Delta=4-4k>0\Rightarrow k<1$$

بنابراین تساوی داده شده برای $k\in(-\infty,1)-\{0\}$ برقرار است.

توجه کنید که

$$\begin{cases} x_1x_2=3 \\ x_1=3x_2 \end{cases}\Rightarrow 3x_2^2=3\Rightarrow x_2^2=1$$

بنابراین $x_2=1$ یا $x_2=-1$.

اگر $x_2=1$، آن‌گاه

$$1^2-(3m+1)\times 1+3=0\Rightarrow m=1$$

اگر $x_2=-1$، آن‌گاه

$$(-1)^2-(3m+1)(-1)+3=0\Rightarrow m=-\frac{5}{3}$$

چون مقدار مثبت m موردنظر است، پس $m=1$ قابل قبول است.

توجه کنید که $x_1+x_2=6$، بنابراین $x_2=6-x_1$. در نتیجه

$$3x_1^2+2x_1x_2-x_2^2=12$$

$$3x_1^2+2x_1(6-x_1)-(6-x_1)^2=12$$

$$3x_1^2+12x_1-2x_1^2-x_1^2-36+12x_1=12$$

$$24x_1=48\Rightarrow x_1=2$$

چون x_1 ریشه‌ی معادله‌ی مورد نظر است، پس ۲ در این معادله صدق می‌کند

$$2^2-6(2)+k+3=0\Rightarrow k=5$$

ابتدا توجه کنید که $\alpha+\beta=m+1$ و $\alpha\beta=m$. از طرف دیگر،

$$2(\alpha+\beta)+\beta=\alpha\beta\Rightarrow 2(m+1)+\beta=m$$

$$\beta=-2-m$$

چون β ریشه‌ی معادله‌ی مورد نظر است، در معادله صدق می‌کند

$$(-2-m)^2-(m+1)(-2-m)+m=0$$

$$m^2+4m+3=0$$

بنابراین مجموع مقدارهای ممکن برای m برابر است با مجموع جواب‌های معادله‌ی فوق که -4 است.

ابتدا توجه کنید که $\alpha+\beta=m$ و $\alpha\beta=m-1$. از طرف دیگر،

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{2}{\beta}=2\Rightarrow 2\alpha+\beta=2\alpha\beta\Rightarrow \alpha+(\alpha+\beta)=2\alpha\beta$$

$$\alpha+m=2m-2\Rightarrow \alpha=m-2$$

چون α ریشه‌ی معادله‌ی مورد نظر است، در معادله صدق می‌کند

$$(m-2)^2-m(m-2)+m-1=0$$

$$m^2-4m+4-m^2+2m+m-1=0$$

بنابراین $m=3$.

توجه کنید که $x_1+x_2=-5$ و $x_1x_2=3$.

بنابراین

$$\frac{x_1x_2}{(x_1+x_2)^2}=\frac{3}{25}$$

اگر α و β جواب‌های معادله باشند، آن‌گاه

$$\alpha+\beta=7,\quad \alpha\beta=1$$

بنابراین

$$|\alpha-\beta|=\sqrt{(\alpha-\beta)^2}=\sqrt{\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta}$$

$$=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}$$

$$=\sqrt{49-4}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$$

راه‌حل اول توجه کنید که

$$4a^2(x_1-x_2)^2=4a^2((x_1+x_2)^2-4x_1x_2)$$

$$=4a^2\left(\left(-\frac{b}{a}\right)^2-\frac{4c}{a}\right)$$

$$=4(b^2-4ac)=4\Delta=20$$

راه‌حل دوم فرض می‌کنیم $A=4a^2(x_1-x_2)^2$. در این صورت

$$\sqrt{A}=2|a|\times|x_1-x_2|=2|a|\times\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=2\sqrt{\Delta}=2\sqrt{5}$$

بنابراین $A=(2\sqrt{5})^2=20$.

توجه کنید که $x_1x_2=-5$ و $x_1+x_2=3$.

در نتیجه

$$x_1(x_2-2)+x_2(x_1-2)=2x_1x_2-2(x_1+x_2)$$

$$=2(-5)-2(3)=-16$$

توجه کنید که

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$$

از طرف دیگر،

$$x_1+x_2=6,\quad x_1x_2=3$$

بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر است با $6^2-2\times 3=30$.

راه‌حل اول توجه کنید که

$$\frac{1}{x_1-2}+\frac{1}{x_2-2}=\frac{(x_1+x_2)-4}{x_1x_2-2(x_1+x_2)+4}$$

$$=\frac{8-4}{-13-16+4}=-\frac{4}{25}$$

راه‌حل دوم توجه کنید که $x_1+x_2=8$. همچنین

$$x^2-8x-13=(x-x_1)(x-x_2)$$

در نتیجه

$$(2-x_1)(2-x_2)=2^2-8\times2-13=-25$$

بنابراین

$$\frac{1}{x_1-2}+\frac{1}{x_2-2}=\frac{x_1+x_2-4}{(x_1-2)(x_2-2)}$$

$$=\frac{8-4}{-25}=-\frac{4}{25}$$

ابتدا توجه کنید که

$$\alpha+\beta=5,\quad \alpha\beta=-2$$

بنابراین

$$\frac{\alpha-1}{\alpha+1}+\frac{\beta-1}{\beta+1}=\frac{(\alpha-1)(\beta+1)+(\alpha+1)(\beta-1)}{(\alpha+1)(\beta+1)}$$

$$=\frac{\alpha\beta+\alpha-\beta-1+\alpha\beta-\alpha+\beta-1}{\alpha\beta+\alpha+\beta+1}$$

$$=\frac{2\alpha\beta-2}{\alpha\beta+\alpha+\beta+1}=\frac{-4-2}{-2+5+1}=-\frac{3}{2}$$

توجه کنید که $\alpha\beta=2$. در نتیجه

$$\frac{2}{\alpha}=\beta,\quad \frac{2}{\beta}=\alpha$$

بنابراین باید حاصل عبارت زیر را حساب کنیم

$$(2\alpha)^2+(2\beta)^2=4(\alpha^2+\beta^2)$$

$$=4(\alpha+\beta)^2-8\alpha\beta$$

$$=4(5)^2-8\times2=84$$

راه‌حل اول توجه کنید که $x_1+x_2=4$ و $x_1x_2=-4$. بنابراین از اتحاد چاق و لاغر نتیجه می‌شود

$$x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)(x_1^2+x_2^2-x_1x_2)$$

$$=(x_1+x_2)((x_1+x_2)^2-2x_1x_2-x_1x_2)$$

$$=(x_1+x_2)((x_1+x_2)^2-3x_1x_2)$$

$$=4(4^2+3\times4)=112$$

راه‌حل دوم بنابر اتحاد مکعب دوجمله‌ای،

$$(x_1+x_2)^3=x_1^3+x_2^3+3x_1x_2(x_1+x_2)$$

$$4^3=x_1^3+x_2^3-3\times4\times4$$

بنابراین $x_1^3+x_2^3=112$.

ریشه‌ی مشترک دو معادله را t در نظر می‌گیریم. در این صورت، چون ۲ و t ریشه‌های $x^2-ax+b=0$ هستند، پس

$$2+t=a,\quad 2t=b$$

و چون ۴ و t ریشه‌های $x^2-cx+d=0$ هستند، پس

$$4+t=c,\quad 4t=d$$

بنابراین

$$a-c+\frac{b}{d}=(2+t)-(4+t)+\frac{2t}{4t}=-2+\frac{1}{2}=-\frac{3}{2}$$

توجه کنید که $x_1+x_2=12$ و $x_1x_2=9$.

بنابراین

$$\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}+\sqrt{\frac{x_2}{x_1}}=\frac{\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_2}}+\frac{\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1}}=\frac{\sqrt{x_1}^2+\sqrt{x_2}^2}{\sqrt{x_1x_2}}$$

$$=\frac{x_1+x_2}{\sqrt{x_1x_2}}=\frac{12}{\sqrt{9}}=4$$

ابتدا توجه کنید که $\alpha+\beta=4$ و $\alpha\beta=-1$.

همچنین

$$\alpha-\beta=-|\alpha-\beta|=-\sqrt{(\alpha-\beta)^2}=-\sqrt{\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta}$$

$$=-\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}=-\sqrt{16+4}=-2\sqrt{5}$$

بنابراین

$$\alpha^2-\beta^2=(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)=(-2\sqrt{5})\times4=-8\sqrt{5}$$

البته می‌توانستیم $|\alpha-\beta|$ را به‌صورت زیر نیز به‌دست آوریم

$$|\alpha-\beta|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\frac{\sqrt{20}}{1}=2\sqrt{5}$$

ابتدا توجه کنید که حاصل‌ضرب جواب‌های معادله برابر $2m-1$ است. بنابراین

$$\tan\alpha\cot\alpha=2m-1\Rightarrow1=2m-1\Rightarrow m=1$$

اکنون توجه کنید که مجموع جواب‌های معادله برابر $m-3$ است. پس

$$\tan\alpha+\cot\alpha=m-3=-2$$

دو طرف تساوی فوق را به توان دو می‌رسانیم

$$(\tan\alpha+\cot\alpha)^2=4\Rightarrow\tan^2\alpha+\cot^2\alpha+2=4$$

$$\Rightarrow\tan^2\alpha+\cot^2\alpha=2$$

توجه کنید که $x_1+x_2=3$ و $x_1x_2=1$.

از طرف دیگر،

$$\begin{aligned}&(x_1\sqrt{x_1}+x_2\sqrt{x_2})^2\\&=(x_1\sqrt{x_1})^2+(x_2\sqrt{x_2})^2+2x_1\sqrt{x_1}x_2\sqrt{x_2}\\&=x_1^3+x_2^3+2x_1x_2\sqrt{x_1x_2}\\&=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)+2x_1x_2\sqrt{x_1x_2}\\&=3^3-3(1)(3)+2(1)\sqrt{1}=20\end{aligned}$$

اکنون توجه کنید که ریشه‌های معادله عددهایی مثبت‌اند، پس عبارت مورد نظر هم مثبت است. بنابراین

$$x_1\sqrt{x_1}+x_2\sqrt{x_2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$$

توجه کنید که $x_1+x_2=4$ و $x_1x_2=-1$.

از طرف دیگر،

$$\begin{aligned}&(\sqrt[3]{x_1}+\sqrt[3]{x_2})^3\\&=\sqrt[3]{x_1}^{\,3}+\sqrt[3]{x_2}^{\,3}+3\sqrt[3]{x_1}\sqrt[3]{x_2}(\sqrt[3]{x_1}+\sqrt[3]{x_2})\\&=x_1+x_2+3\sqrt[3]{x_1x_2}(\sqrt[3]{x_1}+\sqrt[3]{x_2})\\&=4-3(\sqrt[3]{x_1}+\sqrt[3]{x_2})\end{aligned}$$

بنابراین، اگر فرض کنیم $\sqrt[3]{x_1}+\sqrt[3]{x_2}=A$، آن‌گاه

$$\begin{aligned}&A^3=4-3A\Rightarrow A^3+3A-4=0\\&A^3+3A-3-1=0\\&(A^3-1)+3(A-1)=0\\&(A-1)(A^2+A+1)+3(A-1)=0\\&(A-1)(A^2+A+4)=0\end{aligned}$$

چون A^2+A+4 همواره مثبت است، پس $A=1$.

ابتدا توجه کنید که $\alpha+\beta=5$ و $\alpha\beta=1$.

بنابراین

$$\alpha^2+\frac{2}{\beta^2}+3\beta^2=\alpha^2+2\alpha^2+3\beta^2=3(\alpha^2+\beta^2)$$

$$=3((\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta)=3(25-2)=69$$

ابتدا توجه کنید که $\alpha+\beta=\frac{4}{3}$ و $\alpha\beta=-\frac{1}{3}$. بنابراین $3\alpha-4=-3\beta$. پس عبارت خواسته شده به شکل زیر در می‌آید

$$10\alpha^2+(3\alpha-4)^2+\beta^2=10\alpha^2+(-3\beta)^2+\beta^2=10(\alpha^2+\beta^2)$$

$$=10((\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta)=10(\frac{16}{9}+\frac{2}{3})=\frac{220}{9}$$

راه‌حل اول ابتدا توجه کنید که $\alpha+\beta=\sqrt{5}$ و $\alpha\beta=1$. بنابراین

$$\begin{aligned}A&=2\alpha+4\beta=3\alpha-\alpha+3\beta+\beta=3(\alpha+\beta)+\beta-\alpha\\&=3(\alpha+\beta)+\sqrt{(\beta-\alpha)^2}=3(\alpha+\beta)+\sqrt{\beta^2+\alpha^2-2\alpha\beta}\\&=3(\alpha+\beta)+\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}\end{aligned}$$

بنابراین

$$A=3\sqrt{5}+\sqrt{\sqrt{5}^2-4\times1}=3\sqrt{5}+\sqrt{1}=3\sqrt{5}+1$$

راه‌حل دوم جواب‌های معادله به‌صورت زیر هستند

$$\alpha=\frac{\sqrt{5}-1}{2},\quad \beta=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

بنابراین

$$2\alpha+4\beta=2(\frac{\sqrt{5}-1}{2})+4(\frac{\sqrt{5}+1}{2})=\sqrt{5}-1+2\sqrt{5}+2$$

$$=3\sqrt{5}+1$$

α جواب معادله است، پس در معادله صدق می‌کند

$$2\alpha^2-3\alpha-1=0\Rightarrow 2\alpha^2=3\alpha+1\Rightarrow 4\alpha^2=6\alpha+2$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}A&=4\alpha^2+6\beta(1+\alpha)=6\alpha+2+6\beta+6\alpha\beta\\&=6(\alpha+\beta+\alpha\beta)+2\end{aligned}$$

چون $\alpha+\beta=\frac{3}{2}$ و $\alpha\beta=-\frac{1}{2}$، بنابراین

$$A=6(\frac{3}{2}-\frac{1}{2})+2=8$$

چون α ریشه‌ی معادله است، پس در آن صدق می‌کند

$$\alpha^2-2\alpha-1=0\Rightarrow\alpha^2=2\alpha+1$$

دو طرف تساوی فوق را در α ضرب می‌کنیم

$$\alpha^3=2\alpha^2+\alpha\Rightarrow\alpha^3=2(2\alpha+1)+\alpha=5\alpha+2$$

بنابراین

$$\alpha^3+5\beta=5\alpha+2+5\beta=5(\alpha+\beta)+2=5\times2+2=12$$

چون α ریشه‌ی معادله است، پس در آن صدق می‌کند

$$\alpha^2-3\alpha-1=0\Rightarrow\alpha^2=3\alpha+1$$

دو طرف تساوی فوق را به توان دو می‌رسانیم

$$\alpha^4=(3\alpha+1)^2=9\alpha^2+6\alpha+1=9(3\alpha+1)+6\alpha+1$$

$$=33\alpha+10$$

بنابراین

$$\alpha^4+33\beta=33\alpha+10+33\beta=33(\alpha+\beta)+10$$

$$=33\times3+10=109$$