



www.riazisara.ir **سایت ویژه ریاضیات**

درسنامه ها و جزوه های دروس ریاضیات

دانلود نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نمونه سوالات و پاسخنامه کنکور

دانلود نرم افزارهای ریاضیات

...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

<https://telegram.me/riazisara>

[@riazisara](https://t.me/riazisara)

ریاضی فور یازدهم (تجربی)

به سبک آبادانی

✓ موشکافی مسائل کتاب درسی

✓ مسائلی از امتحانات نهایی **آبادان** و هومه!

نویسنده: حسین ایزن



I ♥ Math



ریاضی فور یازدهم (تجربی)

به سبک آبادانی

(نسخه دست نویس - بخش اول)

✓ موشکافی مسائل کتاب درسی

✓ مسائلی از امتحانات نهایی آبادان و هومه!

حسین ایزن

مقدمه

به لطف خدا نوشتن قسمت اول کار جدید من یعنی **ریاضی فور یازدهم (تجربی) به سبک آبادانی** هم تموم شد بر خلاف کتاب های قبلی قصد دارم نسخه اولیه این کتاب رو به صورت دست نویس منتشر کنم این کارم هم پنتا دلیل داره:

اول اینکه نسخه آزمایشی کتاب ریاضی یازدهم تجربی به تازگی منتشر شده و نسخه نهایی هنوز بیرون نیومده
دوم اینکه بچه های زرنگی که می خوان درسای سال آینده رو پیش خوانی کنن منبعی واسه درس ریاضی ندارن
سوم اینکه به خاطر حجم زیاد مطالب ریاضی یازدهم، تایپ و صفحه آرایی کتاب زمان زیادی می بره و عملاً کتاب به موقع به دست بچه ها نمیرسه
بنابراین من سعی می کنم هر دو سه هفته یکبار یک بخش از کتاب ریاضی فور رو پکنویس و اسکن کنم و واستون بزارم روی اینترنت. هر چند کیفیت اسکن اونطور که می خواستم نشد ولی مطمئن باشید که از فوندن کتاب لذت می برید.

در مورد سبک نوشتن کتاب هم باید فرمتتون عرض کنم که حتی الامکان سعی کردم چهارچوب های کتاب درسی رو رعایت کنم یعنی اول از همه تمرین ها و مسائل کتاب درسی رو با هم بررسی می کنیم و در پایان هر درس هم قسمتی تحت عنوان **مسائل امتحانات نهایی آبادان و هومه** قرار دادم که مفصوص بچه های زرنگ تر هست.

بعد از هر مبحث هم پنتا تمرین قرار دادم که می تونید راهنمایی و جواب تمرین ها رو در کانال تلگرام ریاضی فور [@riazikhor](https://t.me/riazikhor) ببینید. اگر در مورد مطالب کتاب سوالی دارید از طریق تلگرام به همین شماره ای که دادم پیغام برید.

مثل همیشه سعی کردم که حاصل کارم کم اشتباه از آب در بیاد امیدوارم این تلاش مورد قبول دانش آموزان سرزمینم و دبیران عزیز قرار بگیره. مشتاقانه پذیرای نظرات ارزشمند همه عزیزان هستم.

در آفر لازمه تشکر ویژه ای داشته باشم از مدیران مفرم سایت های پی سی داندود، کنکور
(<http://konkur.in>)، ریاضی سرا (<http://riazisara.ir>)، پارس بوک (www.parsbook.org)،
کتابناک (<http://ketabnak.com>) و ... که زحمت انتشار کتابهای قبلی من رو بر عهده گرفتند.

و اما روشهای ارتباط:

کانال تلگرام ریاضی فور @riazikhor

SMS: 0938 572 5274

وبلاگ انتگرال فور: integralkhor.blogfa.com

ایمیل انتگرال فور: integralkhor@gmail.com

حسین ایزن

آبدان - ۴ تیرماه ۱۳۹۶

چون دوستان زیادی از من در مورد کتابهام سوال می کنند خدمتتون بگم که فعلا این سه کتاب از من چاپ شده که در زیر عکسشون رو ملاحظه می کنید و برای تهیه این کتابها کافیه به کتابفروشی های معتبر شهر خودتون مراجعه کنید !! چون همشون به صورت رایگان در اینترنت در دسترس همه هستن. (بگذریم که عده ای این کتابها رو به اسم خودشون به ملت می فروشن!!)



اولین کتابم انتگرال فور (جلد اول) هستش که حدود پنج سال پیش منتشر شده و در مورد انتگرال نامعین هست و بیشتر به کار دانش جوها میفوره البته دانش آموزای زرنگ و علاقمند هم چیزهای جالبی توی این کتاب پیدا می کنن. این کتاب علاوه بر ایران در افغانستان هم طرفدارای زیادی داره!

روشای عدم موفقیت در کنکور!
حسین ایزن



روشای عدم موفقیت در کنکور اسم دومین کتاب من هست که چند ماهیه منتشر شده و البته به معروفیت انتگرال فور نیست. این کتاب در اصل برای دانش آموزای دبیرستانی که قصد شرکت در کنکور سراسری رو دارن نوشته شده و حاصل تجربیات من در زمینه کنکور هست. این کتاب به زبان طنز نوشته شده و میتونه واسه دانش جوهایی که میفوان کنکور ارشد بدن و کلا واسه کسانی که دنبال شیوه های مناسب مطالعه هستن مفید باشه.



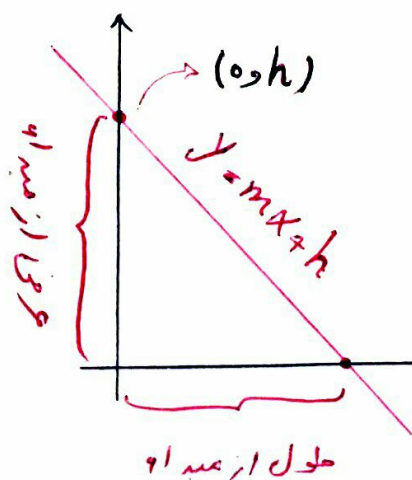
و اما سومین کتاب من اسمش دنباله فور هست این کتاب در مورد دنباله های حسابی و هندسی صحبت می کنه و برای دانش آموزای دبیرستانی و داوطلبان کنکور نوشته شده.

اولین فصل از کتاب ریاضی یازدهم تقریباً شامل سه درس هستند که درسی اول به هندسه تعلیلی، درسی دوم به معادلات درجه دوم و سهی و درسی سوم به معادلات گویا و کسرها اختصاص دارد و به نظر من مهمترین و در عین حال سوال خیزترین فصل کتاب هست پس خوب حواسون رو جمع کنید که این فصل رو با هم بترکونیم! پس بریم سراغ درسی اول.

درسی اول: هندسه تعلیلی

مبحث هندسه تعلیلی در واقع دنباله همون مباحث مربوط به معادله خط هست که در فصل ششم سال نهم خوندید (البته بعضی‌های آبدان اینها رو نوی دبستان می‌خونن!)

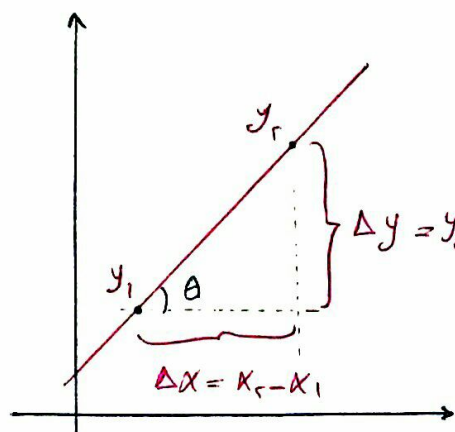
یا بدون هست که صورت کلی معادله خط به شکل $ax + by = c$ هست که البته ما ترجیح می‌دیم که اون رو به صورت $y = mx + h$ بنویسیم که در این حالت m شیب خط و h عرض از مبدا خط می‌باش.



یادآوری:

عرض محل برخورد خط به محور y ها را عرض از مبدا h و طول محل برخورد خط با محور x ها رو طول از مبدا خط می‌نامیم.

از طریقی شیب خط رو به صورت نسبت جابه جایی عمودی به جابه جایی افقی خط به صورت زیر تعریف کردیم :



$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

شیب خط در واقع تانژانت زاویه ای هست که خط با جهت مثبت محور x ها می سازد. (تکلیف که تعریف تانژانت یادتون رفته ! ...)

$$\tan \theta = m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

خب بریم به مثال دست گرمی باهم حل کنیم.

مثال : شیب و عرض از مبدا خطوط زیر را بدست آورید.

الف) $2y + x = 3$

خواستون باشه که برای بدست آوردن شیب و عرض از مبدا خط باید معادله خط رو به صورت $y = mx + h$ بنویسیم.

$$2y + x = 3 \Rightarrow 2y = -x + 3 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

که در این حالت ضریب x میشه m شیب خط و عدد ثابت میشه عرض از مبدا.

$$\Rightarrow m = -\frac{1}{2} \quad h = \frac{3}{2}$$

البته اگر $x=0$ رو در معادله قرار بدیم مقدار عرض از مبدا مستقیماً درمیاریم (برای)

$$x=0 \Rightarrow 2y + 0 = 3 \Rightarrow y = h = \frac{3}{2}$$

ب) $\frac{x-2}{3} + \Delta y = 0$

$\Rightarrow \Delta y = -\frac{x-2}{3} = -\frac{x}{3} + \frac{2}{3} \Rightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$

$m = -\frac{1}{3}$

شیب خط

$h = \frac{2}{3}$

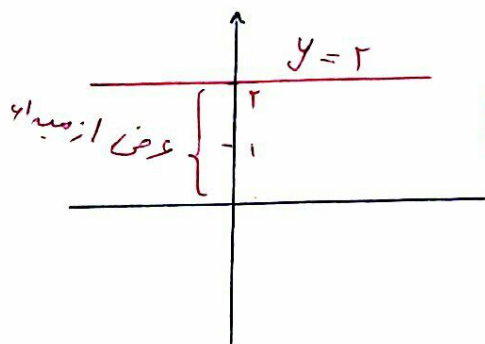
عرض از مبدا

ج) $y - 2x = 0 \Rightarrow y = 2x \quad m = 2 \quad h = 0$

یادآوری: $y = mx$ صورت کلی خط‌های هست که از مبدا مختصات می‌گذرند و عرض از مبدا آنها صفر است.

د) $y - 3 = 0 \Rightarrow y = 3 \quad m = 0 \quad h = 3$

یادآوری: $y = k$ صورت کلی خطوط افقی است که شیب آنها برابر صفر است.
مثلاً



$m = 0 \quad h = 3$

آقا اجازه: از کجا فهمیدیم شیب خط صفر است؟

استاد: کاری نداره بچه! دو نقطه دلخواه روی خط در نظر بگیر و شیب رو حساب کن فقط خواست باشه که توی خط بالا ۲ تمام نقاط برابر هست.

$A(1, 2) \text{ و } B(3, 2) \Rightarrow m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2-2}{3-1} = \frac{0}{2} = 0$

اینطوری هم میشه گفت که $y = 2$ در واقع بوده $y = (0)x + 2$ یعنی شیب ۰ که

شیب خط هست صفر بوده و اسمش همینه (اصلاً ننویسیم).

همانطور که می‌دانیم برای رسم خط به مختصات دو نقطه از خط نیاز داریم. به همین صورت برای نوشتن معادله خط هم مختصات دو نقطه از خط مورد نیاز است. به طور کلی معادله خطی که از دو نقطه (x_1, y_1) و (x_2, y_2) می‌گذرد از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right) (x - x_1)$$

که عبارت $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ همون شیب خط هست. بنابراین می‌تونیم معادله خط رو به صورت شیب‌دار زیر بنویسیم:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

دقت کنید در بسیاری از مسائل به جای مختصات دو نقطه، مختصات یک نقطه و شیب خط به ما داده می‌شه که در واقع کار ما رو ساده کردن که می‌تونیم مستقیماً از معادله بالا استفاده کنیم.

توجه: دقت کنید که توی دو تا فرمول بالا x و y رو با آبی و بقیه پارامترها رو با قرمز نوشتیم. دلیل این کار این هست که حواسمون باشه که x_1 و y_1 و x_2 و y_2 اعدادی هستن که باید از مسئله در معادله خط جایگزین کنیم اما x و y به همین صورت باقی می‌مونن. حالا بریم به مثال دست‌گرمی با هم حل کنیم.

مثال: معادله خطوط زیر را بنویسید.

الف) خطی که از دو نقطه $(2, 0)$ و $(3, 2)$ می‌گذرد.
 x_1, y_1 x_2, y_2

اول شیب خط رو بدست میاریم.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - 0}{3 - 2} = \frac{2}{1} = 2$$

حالا با خیال راحت معادله خط رو می‌نویسیم!

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 0 = 2(x - 2)$$

$$\Rightarrow y = 2x - 4$$

ب) خطی که از نقطه $(0, 2)$ می‌گذرد و شیب آن برابر $\frac{3}{2}$ باشد.

خب اینجا کار ما راحت‌تره!

$$m = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 2 = \frac{3}{2}(x - 0)$$

$$\Rightarrow y = \frac{3}{2}x + 2$$

یک روش دیگه برای نوشتن معادله خط استفاده از فرم $y = mx + h$ می‌باشد.

این روش به خصوص زمانی که یکی از نقاط داده شده عرض از مبدا خط باشد مفید است.

* خواستون باشه که عرض از مبدا خط به صورت $(h, 0)$ داده شده یعنی

نقطه‌ای که طولش صفر باشه عرض اول نقطه می‌شه عرض از مبدا

مثال: معادله خطوط خواسته شده را با استفاده از فرمول $y = mx + h$ بنویسید.

الف) معادله خطی که از دو نقطه $A(0, 7)$ و $B(3, 1)$ بگذرد.
عرض از مبدا h

چون خط خواسته شده از دو نقطه A و B می‌گذرد بنابراین معتمات این دو نقطه در معادله خط صدق می‌کنند.

بنابراین معادله خط رو به صورت $y = mx + h$ فرض می‌کنیم و معتمات A و B را در خط جایگذاری می‌کنیم.

$$A(0, 7) \Rightarrow 7 = m(0) + h \Rightarrow h = 7 \quad \left| \text{عرض از مبدا } h \right.$$

$$B(3, 1) \Rightarrow 1 = m(3) + 7 \Rightarrow 1 = 3m + 7$$

$$3m = -6 \Rightarrow m = -2 \quad \Rightarrow y = -2x + 7 \quad \left| \text{معادله خط} \right.$$

ب) معادله خطی که از دو نقطه $A(2, 0)$ و $B(3, 2)$ بگذرد.

$$A(2, 0) \Rightarrow 0 = m(2) + h \Rightarrow 2m + h = 0 \quad (1)$$

$$B(3, 2) \Rightarrow 2 = m(3) + h \Rightarrow 3m + h = 2 \quad (2)$$

روابط (1) و (2) تشکیل یک دستگاه 2 معادله دو مجهول را می‌دهند که با حل آن مقادیر m و h به دست می‌آید.

$$\begin{cases} 2m + h = 0 \\ 3m + h = 2 \end{cases} \xrightarrow{\times (-1)} \begin{cases} -2m - h = 0 \\ 3m + h = 2 \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع دو معادله}} \begin{cases} -2m - h = 0 \\ 3m - 2m = 2 \end{cases} \Rightarrow m = 2$$

$$3m + h = 2 \Rightarrow 3(2) + h = 2 \Rightarrow h = -4$$

$$\Rightarrow y = 2x - 4 \quad \left| \text{معادله خط} \right.$$

در مثال هم یاد گرفتیم که شرط موازی بودن دو خط این است که شیب آنها برابر باشد.

مثلاً شیب دو خط $y + 2x = 1$ و $2y = 3 - 4x$ با هم برابر است پس این دو خط با

هم موازی هستند. (یک حالت خاص از خطوط موازی زمانی هست که دو خط برهم منطبق

باشند که بعداً در موردش صحبت می‌کنیم)

به همین صورت می‌توان داد که شرط عمود بودن دو خط این است که حاصل ضرب

شیب‌های آنها برابر -1 باشد. مثلاً دو خط زیر برهم عمودند.

$$L_1: y + 2x = 3 \quad L_2: 2y = x - 5$$

$$y + 2x = 3 \Rightarrow y = -2x + 3 \Rightarrow m_1 = -2$$

$$2y = x - 5 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2} \Rightarrow m_2 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow m_1 \cdot m_2 = -1 \Rightarrow L_1 \perp L_2 \quad \left| \begin{array}{l} \text{خط } L_1 \text{ بر } L_2 \text{ عمود است} \end{array} \right.$$

به عبارت دیگر:

ی
دو خط غیر موازی با محورهای مختصات برهم عمودند هرگاه حاصل ضرب شیب‌ها آنها برابر (-1) باشد یعنی $m \cdot m' = -1$ به عبارت دیگر شیب هر کدام عکس‌المتقابل دیگری باشد.

مثال: در هر قسمت مشخص کنید که خطوط داده شده نسبت به هم چه وضعیتی دارند.

الف) $L: y = 5x - 2$

$$\hookrightarrow m = 5$$

d: $y = -\frac{1}{5}x + 2$

$$\hookrightarrow m' = -\frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow m \cdot m' = 5 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) = -1 \quad \left| \begin{array}{l} \text{خط } L \text{ بر خط } d \text{ عمود است} \end{array} \right. \quad L \perp d$$

ب) $L: 2x - 3y + 3 = 0$

$d: 2x + 2y = 0$

$3y = 2x + 3$

$\hookrightarrow 2y = -2x$

$y = -\frac{1}{2}x \Rightarrow m' = -\frac{1}{2}$

$y = \frac{2}{3}x + 1 \Rightarrow m = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow m \cdot m' = -1 \Rightarrow L \perp d$ دو خط برهم عمودند.

ج) $L: y = \frac{1}{2}x + 7$

$d: x - 2y = 1$

$m = \frac{1}{2}$

$\hookrightarrow 2y = x - 1$

$y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

$\hookrightarrow m' = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow m = m' \Rightarrow$ دو خط باهم موازی هستند.

مثال: نشان دهید دو خط زیر متقاطع هستند پس مختصات نقاط تقاطع دو خط را بیابید.

$L: y + 2x = 1$

$d: y = x + 3$

$\hookrightarrow m = -2$

$\hookrightarrow m' = 1$

چون دو خط موازی نیستند پس متقاطع هستند (یعنی یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند)

که برای پیدا کردن نقطه تقاطع کافیست معادله دو خط را در یک دستگاه ۲ معادله ۲ مجهول بنویسیم و x و y را پیدا کنیم.

$$\begin{cases} y + 2x = 1 \\ y - x = 3 \end{cases} \xrightarrow{x(-1)} \begin{cases} y + 2x = 1 \\ -y + x = -3 \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع دو معادله}} \begin{cases} y + 2x = 1 \\ x = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 5 \end{cases}$$

$\Rightarrow y = 3 + x = 3 - 2 = 1$

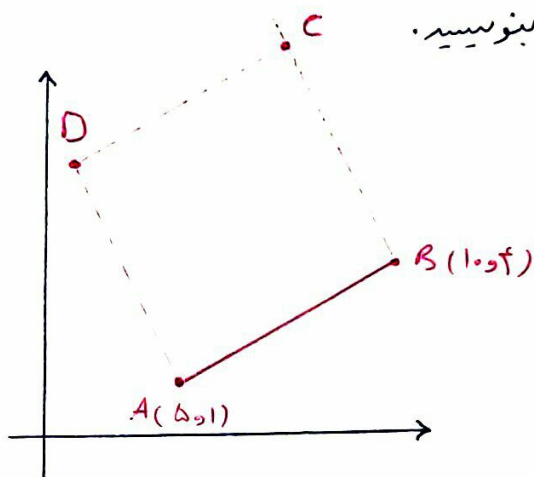
پس دو خط یکدیگر را در نقطه $(-2, 1)$ قطع می‌کنند.

به مثال ساده ولی خیلی مهم از کتاب درسی

مثال: مربع $ABCD$ در ناحیه اول صفحه مختصات واقع است به طوری که $A(5,1)$ و $B(10,4)$ دو رئی معاد AB آن هستند.

الف) شیب خط AB را بیابید و معادله آن را بنویسید.

خب این قسمت که خیلی ساده است



$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{4 - 1}{10 - 5} = \frac{3}{5}$$

$$y - y_A = m(x - x_A)$$

$$\Rightarrow y - 1 = \frac{3}{5}(x - 5) \Rightarrow y = \frac{3}{5}x - 2$$

ب) شیب ضلع AD را حساب کنید و معادله این ضلع را هم بنویسید.

خب اینجا به کوچولو دقت می‌خواد!

چون $ABCD$ مربع هست پس ضلع AD بر AB عمود هست بنابراین داریم:

$$m_{AD} = \frac{-1}{m_{AB}} = \frac{-1}{\frac{3}{5}} = -\frac{5}{3}$$

بنابراین با داشتن شیب خط AD و یک نقطه از آن (نقطه A) می‌تونیم معادله خط AD را بنویسیم:

$$y - y_A = m_{AD}(x - x_A)$$

$$\Rightarrow y - 1 = -\frac{5}{3}(x - 5) \Rightarrow y - 1 = -\frac{5}{3}x + \frac{25}{3}$$

$$\Rightarrow y = -\frac{5}{3}x + \frac{26}{3}$$

پ) اگر به اینتر نقطه $C(7, 9)$ رأس سوم مربع است معتمات راس D را بیابید.

اینجا هم به خورده دقت لازمه!

نقطه D در واقع نقطه تقاطع خطوط CD و AD هست بنابراین کافیست معادله خط CD رو بدست بیاریم (معادله خط AD رو هم که در قسمت قبل بدست آوردیم) و بعد با تشکیل یک دستگاه 2 معادله 2 مجهول نقطه تقاطع D را بدست بیاریم.

پس بریم سراغ نوشتن معادله خط CD :

چون ضلع CD موازی AB هست بنابراین

$$m_{CD} = m_{AB} = \frac{3}{5}$$

الکون با داشتن شیب خط CD و معتمات نقطه C می‌تونیم معادله خط CD رو بنویسیم:

$$y - y_c = m_{CD} (x - x_c) \Rightarrow y - 9 = \frac{3}{5} (x - 7)$$

$$\Rightarrow y = \frac{3}{5}x + \frac{24}{5}$$

حالا معادله خطوط CD و AD را در یک دستگاه می‌نویسیم تا نقطه تقاطع دو خط یعنی نقطه D در بیاد:

$$\begin{cases} y = -\frac{5}{3}x + \frac{21}{3} \\ y = \frac{3}{5}x + \frac{24}{5} \end{cases} \times (-1) \Rightarrow \begin{cases} y = -\frac{5}{3}x + \frac{21}{3} \\ -y = -\frac{3}{5}x - \frac{24}{5} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 0 = -\frac{5}{3}x - \frac{3}{5}x + \frac{21}{3} - \frac{24}{5} \Rightarrow x = 2 \text{ و } y = 4$$

$$\Rightarrow D(2, 4)$$

دقت کنید در این مسئله بدون داشتن مفتحات نقطه C هم می‌توانید
مسئله رو حل کنید البته حل مسئله یکم مشکل تر می‌شه (البته نه برای بچه‌هاش با دان!)
که بعداً بهش اشاره می‌کنیم.

فلاً بریم سراغ به مسئله دست بزنیم دیکه

مثال: نشان دهید که خطوط L_1 و L_2 و L_3 از یک نقطه می‌گذرنه.

$$L_1: 2y - x = 8 \quad L_2: y = 3x - 1 \quad L_3: 2x + y - 9 = 0$$

حل: این مسئله ظاهراً سخت می‌زنه ولی چیزی نداره!
برای اینکه نتونیم به سه خط از یک نقطه می‌گذرنه کاغذ اول
نقطه تقاطع دوتا از خط‌ها رو بدست بیاریم بعد نتونیم به سه خط
خط سوم هم از این نقطه می‌گذره.

پس اول نقطه تقاطع خطوط L_1 و L_2 رو بدست می‌اریم:

$$\begin{cases} 2y - x = 8 \\ y - 3x = -1 \end{cases} \times (-2) \Rightarrow \begin{cases} 2y - x = 8 \\ -2y + 4x = +2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y - x = 8 \\ 3x = 10 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2y - 2 = 8 \\ x = \frac{10}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y = 10 \\ x = \frac{10}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 5 \\ x = \frac{10}{3} \end{cases}$$

$$\text{محل تقاطع خطوط } L_1 \text{ و } L_2 \text{ } O\left(\frac{10}{3}, 5\right)$$

حالا کافیست مفتحات نقطه O را در خط L_3 قرار بدیم و نتونیم به سه خط
روی L_3 قرار داره.

$$\Rightarrow 0 = 0 \Rightarrow 9 - 9 = 0 \Rightarrow 2(2) + 5 - 9 = 0 \Rightarrow L_3 \rightarrow 0$$

چون مفتحات O در L_3 صدق می‌کنه پس L_3 هم از O می‌گذرنه به عبارت
دیگه هر سه خط L_1 و L_2 و L_3 از نقطه O می‌گذرنه.

* براسر جواب تمرین‌ها به کانال تلگرام ریاضی سر (riazikhor) مراجعه کنید

① معادله خطی را بنویسید که از محل برخورد دو خط $x+y-3=0$ و $2x-y+5=0$

عبور کرده و برخط $\frac{x}{6} - \frac{y}{3} = 1$ عمود باشد.

② نقاط $A(2,3)$ و $B(-1,0)$ و $C(1,-2)$ سه رأس از یک مستطیل هستند

مقتضات رأس چهارم مستطیل را بیابید.

③ مقدار m را چنان بیابید که سه خط $x-y=3$ و $2x+y=0$ و

$5x+(m+1)y=5$ از یک نقطه بگذرند.

④ اگر نقاط $A(4,2)$ و $B(1,4)$ و $C(4,8)$ سه رأس یک متوازی الاضلاع باشند

رأس چهارم را بیابید.

⑤ در مثل ABC اگر $M(2,0)$ وسط ضلع BC باشد نشان دهید مثلث

ABC متساوی الساقین است.

⑥ نقاط تقاطع خطوط داده شده را بیابید و آن را روی دستگاه مختصات رسم

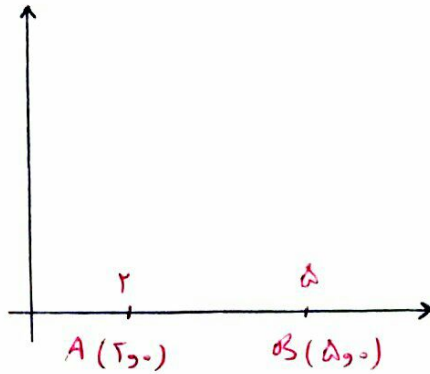
کنید. شکل حاصل چه شکلی است؟

$$L_1: 2x+y=3 \quad L_2: y=\frac{2x-2}{5} \quad L_3: 2y=5-4x$$

$$L_4: 10y-1=4x$$

توجه: برای حل مسائل بالا تنها از مطالب گفته شده تا این قسمت استفاده کنید.

دو نقطه $A(2,0)$ و $B(5,0)$ را روی محور x ها در نظر بگیرید اگر بخوایم فاصله بین این دو نقطه را حساب کنیم چون عرضی دو نقطه برابر است خیلی راحت می توانیم طول دو نقطه را از هم کم کنیم.



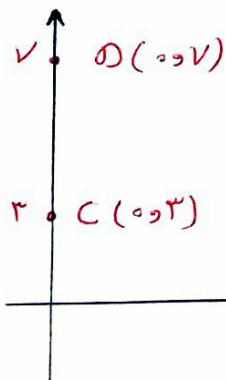
$$AB = x_B - x_A = 5 - 2 = 3$$

چون فاصله بین دو نقطه همیشه مثبت در نظر گرفته می شود ما عبارت $x_B - x_A$ را

داخل قدر مطلق می زاریم تا جواب همیشه مثبت بشود:

$$AB = |x_B - x_A|$$

به همین صورت اگر دو نقطه هم عرضی مثل $C(0,3)$ و $D(0,7)$ داشته باشیم فاصله CD از رابطه زیر بدست می آید:

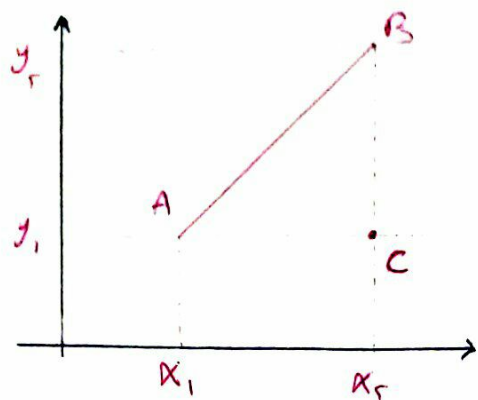


$$CD = |y_D - y_C| = |7 - 3| = 4$$

دقت کنید چون از علامت قدر مطلق استفاده

می کنیم وقتی نمی گوییم بنویسیم $|y_D - y_C|$ یا $|y_C - y_D|$

حالا اگر طول دو نقطه یا عرضی دو نقطه یکسان نبود باید چه کار کنیم؟
مثلاً به شکل زیر دقت کنید وقتی می خواهیم فاصله دو نقطه $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ را بدست بیاوریم اگر از A خط افقی و از B خطی عمودی رسم کنیم تا مثلث قائم الزامیه ABC تشکیل بشود اونوقت داریم:



او نوشت و اصفه که مختصات نقطه C
به صورت $C(x_2, y_1)$ هست بنابراین
فاصله‌های AC و BC به صورت زیر می‌باشد
می‌شوند

$$AC = |x_2 - x_1| = |x_2 - x_1|$$

$$BC = |y_2 - y_1| = |y_2 - y_1|$$

از طرفی طبق قضیه فیثاغورث داریم :

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

$$\Rightarrow AB^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2$$

چون $(x_2 - x_1)$ و $(y_2 - y_1)$ به توان ۲ رسیده بنابراین حتماً مثبت هستند
و نیازی به نوشتن قدر مطلق نیست و می‌توانیم بنویسیم

$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

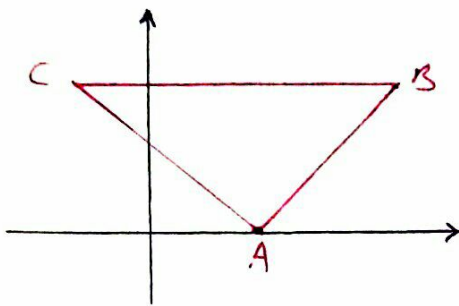
که البته بهره به صورت زیر بنویسیم :

$$AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

رابطه بالا به رابطه مهم و کاربردی در هندسه تحلیلی هست. فقط حواستون
باشه موقع تفرین کردن و جایگذاری اعداد در رابطه بالا یه توی ندیه!

مثال : نقاط $A(2,0)$ ، $B(5,4)$ و $C(-2,3)$ را در نظر بگیرید و آنها را روی



دستگاه معورها را مقیاسات نشان دهید.

الف) محیط مثلث ABC را با معادله طول امتزاع آن بدست آورید.

خب این قسمت خیلی آسونه کافیه طول تک تک امتزاع مثلث رو بدست بیاریم و با هم جمع کنیم

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(5-2)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(-2-2)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(-2-5)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$\text{محیط مثلث} = AB + AC + BC = 5 + 5 + 5\sqrt{2} = 10 + 5\sqrt{2}$$

ب) ABC چه نوع مثلثی است ؟

اینجا یکم دقت لازمه. وقتی از شما نوع مثلث رو می پرسن ۴ حالت پیش میاد

① اگر سه ضلع مثلث با هم برابر باشه مثلث متساوی الساقین هست.

② اگر فقط دو ضلع مثلث با هم برابر باشه مثلث متساوی الساقین هست.

③ اگر رابطه فیثاغورث در مثلث برقرار باشه مثلث قائم الزاویه هست.

④ اگر هر دو حالت ۲ و ۳ برقرار باشه مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین هست.

چون در اینجا $AB = AC$ پس مثلث ABC متساوی الساقین هست

و بیون داریم:

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow \Delta^2 + \Delta^2 = (5\sqrt{2})^2$$

$$\Rightarrow 2\Delta + 2\Delta = 28(2) \Rightarrow 50 = \Delta \quad \checkmark$$

پس رابطه فیثاغورث برقرار هست و مثلث ABC قائم الزاویه هم می باشد.

پ) به دوروشی نشان دهیم مثلث ABC قائم الزاویه است پس صاحت

آن را حساب کنیم.

یک روشی برای تشخیص مثلث قائم الزاویه استفاده از قضیه فیثاغورث هست که در قسمت قبل بهش اشاره کردیم.

اما روشی دوم برای این کار این هست که نتونیم به هم دو ضلع AB و AC برهم

عمودند یا برای شیب این دو خط رد معادله می کنیم.

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{4 - 0}{5 - 2} = \frac{4}{3} \quad \left. \begin{array}{l} \text{شیب خط } AB \end{array} \right\}$$

$$m_{AC} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{3 - 0}{-1 - 2} = \frac{3}{-4} = -\frac{3}{4} \quad \left. \begin{array}{l} \text{شیب خط } AC \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow m_{AB} \cdot m_{AC} = \left(\frac{4}{3}\right) \left(-\frac{3}{4}\right) = -1$$

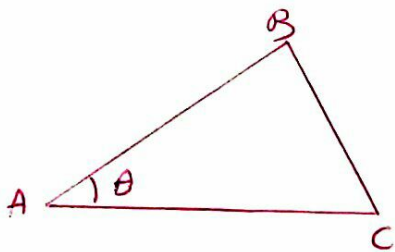
$\Rightarrow AB \perp AC$ دو خط AB و AC برهم عمود هستند پس زاویه A قائم است.

روش اول : چون اضلاع AB و AC برهم عمود هستند می توانیم بنویسیم :

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} (\text{قاعده}) (\text{ارتفاع}) = \frac{1}{2} (AB) (AC) = \frac{1}{2} (5)(5) = \frac{25}{2}$$

روش دوم :

در سال قبل یاد گرفتیم که مساحت مثلث رو می‌توان از رابطه زیر هم حساب کرد.



$$\Rightarrow S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \theta$$

در اینجا چون مثلث ABC قائم الزامی متساوی الساقین هست پس $\hat{ABC} = 45^\circ$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2} (AB) (BC) \sin \hat{ABC} = \frac{1}{2} (5) (5\sqrt{2}) \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{25}{2}$$

* یک حالت خاص فاصله بین دو نقطه زمانی هست که بتوانیم فاصله یک نقطه از مبدأ $O(0,0)$ رو بدست بیاریم که در این حالت فرمول فاصله دو نقطه به صورت زیر ساده می‌شه

$$OA = \sqrt{(x_A - x_0)^2 + (y_A - y_0)^2} = \sqrt{(x_A - 0)^2 + (y_A - 0)^2} = \sqrt{x_A^2 + y_A^2}$$

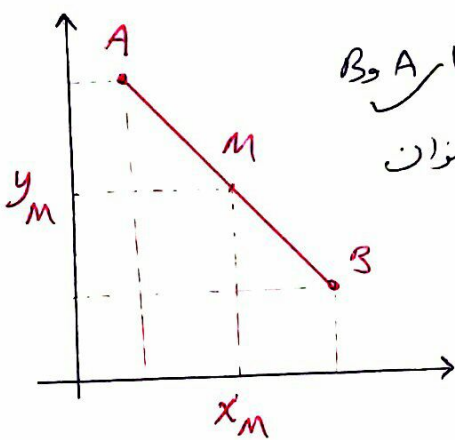
مثال : دایره ای به مرکز مبدأ مختصات از نقطه $N(-4, 8)$ که شش است شعاع دایره را بیابید

شعاع دایره همون فاصله ON هست

$$ON = R = \sqrt{(-4)^2 + 8^2} = 10$$

با روشی مشابه قسمت قبل (در نظر گرفتن حالت افقی، حالت عمودی و در نهایت حالت کلی) می‌توانیم نتوان بدیم که اگر M وسط پاره خط AB باشد، مختصات این نقطه برابر است با

$$\left[\begin{array}{l} x_m = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_m = \frac{y_A + y_B}{2} \end{array} \right]$$



به بیان ساده‌تر طول نقطه M میانه میانگین طول‌های A و B و عرض نقطه M میانه میانگین عرض‌های A و B به عنوان مثال اگر مختصات A برابر $(2, 5)$ و مختصات B برابر $(4, 3)$ باشد مختصات M می‌شود

$$x_m = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{2 + 4}{2} = 3$$

$$y_m = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{5 + 3}{2} = 4$$

پس $M(3, 4)$ وسط پاره خط AB است.

نقطه وسط پاره خط AB عبارت است از $M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$

آقا اجازه: این که خیلی آسونه!

استاد: حالا سیر بره سیر! همیشه هم این قدر آبی نیست

به قول بچه‌ها: ShooVey, shooVey

مسئله: مثلث ABC با رئوس $A(1, 9)$ ، $B(3, 1)$ و $C(7, 11)$ را در نظر بگیرید.

و آنها را در دستگاه مختصات رسم کنید.

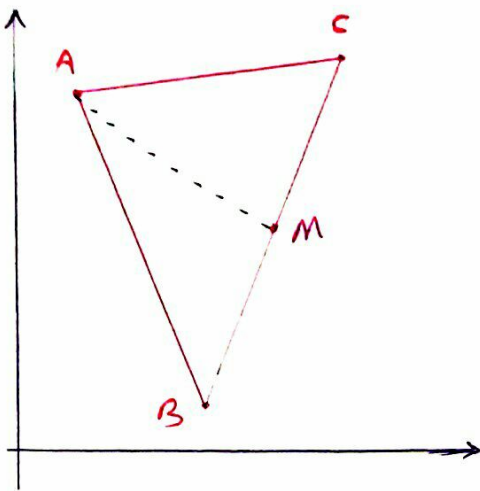
الف) مختصات M وسط ضلع BC را مشخص کنید.

این که خیلی راحت.

$$x_m = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{3 + 7}{2} = 5$$

$$y_m = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{1 + 11}{2} = 6$$

$$\rightarrow M(5, 6)$$



ب) طول میانه AM را حساب کنید.

توجه: میانه خطی است که یک رأس مثلث رو به وسط ضلع مقابل وصل می‌کند.

$$AM = \sqrt{(x_m - x_A)^2 + (y_m - y_A)^2} = \sqrt{(5 - 1)^2 + (6 - 9)^2} = 5$$

ج) معادله میانه AM را بدست آورید.

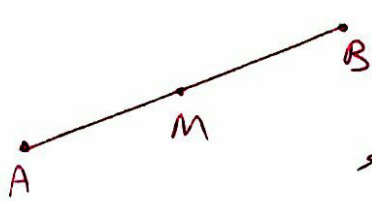
اول شیب خط AM رو بدست میاریم.

$$m_{AM} = \frac{y_m - y_A}{x_m - x_A} = \frac{6 - 9}{5 - 1} = -\frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow y - y_A = m(x - x_A) \Rightarrow y - 9 = -\frac{3}{4}(x - 1)$$

$$\Rightarrow y - 9 = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{4} \Rightarrow 4y + 3x = 39$$

مثال: نقطه M به مختصات $M(5, -4)$ وسط پاره خط واصل بین دو نقطه A و $B(7, 2)$ است. مختصات نقطه A را بیابید.



اینجا بکم توجه لازمه:

در این مسئله مختصات وسط پاره خط داده شده و مختصات یکی از دوسر پاره خط را می‌خواهند

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow 5 = \frac{x_A + 7}{2} \Rightarrow x_A = 3$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \Rightarrow -4 = \frac{y_A + 2}{2} \Rightarrow y_A = -6$$

$$\Rightarrow A(3, -6)$$

ب) قرینه نقطه $A(1, 2)$ نسبت به نقطه $M(-1, 4)$ را بدست آورید.
این تمرین در عین سادگی خیلی مهمه! خوب توجه کنید!

اگر قرینه نقطه A نسبت به M رو B بنامیم M میانه وسط AB به همی‌راحتی!

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow -1 = \frac{1 + x_B}{2} \Rightarrow x_B = -3$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \Rightarrow 4 = \frac{2 + y_B}{2} \Rightarrow y_B = 6$$

$$\Rightarrow B(-3, 6)$$

* به شکل جالب تر این مسئله زمانی هست که بخواهیم قرینه یک نقطه نسبت به یک خط رو پیدا کنیم که بعداً راجع بهش صحبت می‌کنیم.

مثال: دو نقطه $A(14, 3)$ و $B(10, -13)$ را در نظر بگیرید

الف) فاصله مبدا و معینات را از وسط پاره خط AB بدست آورید

خط اول وسط پاره خط AB رو پیدا می کنیم

$$\left[\begin{aligned} x_m &= \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{14 + 10}{2} = 12 \\ y_m &= \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{3 - 13}{2} = -5 \end{aligned} \right]$$

$$M(12, -5) \quad \text{معینات وسط } AB$$

$$\Rightarrow OM = \sqrt{x_m^2 + y_m^2} = \sqrt{(12)^2 + (-5)^2} = \sqrt{149} = 13$$

فاصله مبدا و معینات
نقطه M

ب) معادله عمود منصف پاره خط AB را بنویسید

این قسمت خیلی خیلی مهمه! دقت کنید که عمود منصف AB یعنی خطی که بر

AB عمود هست (پس شیب اون قرینه معکوسی شیب AB میشه) و در ضمن پاره

خط AB رو نصف می کنه (پس از نقطه M وسط AB می گذره)

علاوه بر این هر نقطه روی عمود منصف از دو سر پاره خط به یک فاصله هست

خط اول از همه شیب AB رو بدست میاریم:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-13 - 3}{10 - 14} = \frac{-16}{-4} = 4$$

$$m' = \frac{-1}{m_{AB}} = \frac{-1}{4} \quad \text{شیب عمود منصف } AB$$

حالا معادله عمود منصف رو با داشتن شیب و معینات یک نقطه (نقطه M) می نویسیم

$$y - y_m = m'(x - x_m) \Rightarrow y + 5 = -\frac{1}{4}(x - 12)$$

$$\Rightarrow y + 5 = -\frac{1}{4}x + 3 \Rightarrow y = -\frac{1}{4}x - 2$$

$$\Rightarrow \boxed{4y + x + 8 = 0} \quad \text{معادله عمود منصف } AB$$

جواب تمرین‌ها در کمال تکدرام ریاضی خور riazikhor (a)

① دو استهای یکی از قطرهای دایره ای نقاط $A(2, -2)$ و $B(4, 4)$ هستند

الف) اندازه شعاع و مختصات مرکز دایره را بیابید.

ب) آیا نقطه $C(7, 3)$ بر روی محیط این دایره قرار دارد چرا؟

② نشان دهید مثلث با رئوس $A(1, 2)$ و $B(2, 5)$ و $C(4, 1)$ یک مثلث متساوی الساقین قائم الزاویه است.

③ فاصله دو خط موازی $3x + 4y = 1$ و $3x + 4y = 14$ را بیابید

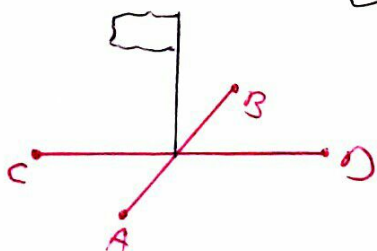
④ نقاط A و B به ترتیب روی خطوط $2y - x = 3$ و $y = x + 1$ قرار دارند اگر مختصات نقطه M وسط A و B به صورت $(\frac{A}{4}, 1)$ باشد مختصات نقاط A و B را بیابید.

⑤ نقاط $A(2, 3)$ و $B(-1, 0)$ و $C(1, -2)$ سه رأسی از یک مستطیل هستند یا داشتن این مطلب که در هر مستطیل قطرهای منصف یکدیگر هستند مختصات رئوس چهارم مستطیل را بیابید.

⑥ یک میله به حجم بزرگ مطابق شکل توسط کابل‌هایی به چهار نقطه در زمین

مکمل شده است. به طوریکه فاصله هر نقطه تا میله برابر است با فاصله نقطه مقابل آن تا میله. مختصات نقطه D را بدست

آورید. $A(-3, -2)$ $B(5, 2)$ $C(0, 1)$



✓ اگر مفتحات وسط‌های اضلاع مثلثی نقاط $(۱۰۲-)$ ، (۵۲) و $(۳-۱۲)$ باشد. مفتحات رئوس مثلث را به دست آورید.

۱) اگر مفتحات رئوس مثلث ABC به صورت $A(۱۰۲-)$ و $B(۲۰۴)$ و $C(۲-۹)$ باشد نشان دهید خطی که وسط‌های دو ضلع AB و AC را به هم وصل می‌کند موازی BC بوده و طول آن نصف طول BC است. آیا این مسئله در مورد بقیه اضلاع مثلث هم صادق است؟

۹) نشان دهید دو خط $y = \frac{1}{3}x + 2$ و $y = 2x + 1$ با هم زاویه ۴۵° می‌سازند

۱۰) اگر نقطه (۲۰۶) یکی از دو سر قطر دایره و $(۱۰۴-)$ مرکز دایره باشد

الف) مفتحات انتهایی دایره این قطر را بیابید

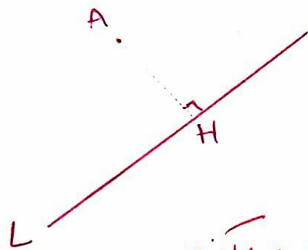
ب) اگر دو سر قطر دایره در قسمت قبل را AB بنامیم

مفتحات دو سر قطری را بیابید که بر قطر AB عمود باشد.

توجه: برای حل مسائل بالا تنها از مطالب گفته شده تا این قسمت استفاده کنید.

فاصله نقطه از خط

اگر A نقطه‌ای خارج از خط L باشد فاصله این نقطه از خط برابر است با طول عمودی که از A بر خط L رسم می‌شود دقت کنید که این فاصله کوتاه‌ترین مسیر از A به L می‌باشد.



$$\boxed{\text{فاصله نقطه } A \text{ از خط } L = AH}$$

حالاً در قالب یک مثال فاصله نقطه از خط رو با هم کار می‌کنیم

مثال: فاصله نقطه $A(5, 7)$ از خط L به معادله $4x + 3y = 18$

به دست آورید

حل: اگر خطی که از نقطه A می‌گذره و بر L عمود هست رو با L' بنویس
بدین چون L و L' بر هم عمود هستند داریم

$$\boxed{m \cdot m' = -1} \Rightarrow \boxed{m' = -\frac{1}{m}}$$

شیب L' و شیب L

پس اول شیب خط L رو بدست میاریم:

$$\Rightarrow 4x + 3y = 18 \Rightarrow 3y = 18 - 4x \Rightarrow y = 6 - \frac{4}{3}x$$

$$\Rightarrow \boxed{m = -\frac{4}{3}} \Rightarrow \boxed{m' = \frac{3}{4}}$$

حالاً با داشتن شیب m' و معادلات نقطه A می‌تونیم معادله خط L' رو بنویسیم.

$$L' : y - y_A = m'(x - x_A) \Rightarrow y - 5 = \frac{3}{4}(x - 7)$$

$$\Rightarrow y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4} \Rightarrow 4y - 3x + 1 = 0 \quad \text{معادله } L'$$

حالا اگر معادله خطوط L و L' رو در یک دستگاه ۲ معادله ۲ مجهول بنویسیم
از حل دستگاه معادلات نقطه H یعنی محل برخورد دو خط بدست میاد:

$$\begin{cases} 4x + 3y = 18 \rightarrow x(3) \\ 3x - 4y = 1 \rightarrow x(-4) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12x + 9y = 54 \\ -12x + 14y = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} &\text{جمع} \\ &\Rightarrow 25y = 50 \Rightarrow y = 2 \end{aligned}$$

پایه ای

$$\Rightarrow 4x + 3(2) = 18 \Rightarrow x = 3$$

بنابراین معادلات نقطه H (محل برخورد دو خط L و L') می شود $H(3, 2)$

و در آخر کافیست فاصله AH رو بدست بیاریم.

$$AH = \sqrt{(x_H - x_A)^2 + (y_H - y_A)^2} = \sqrt{(3 - 7)^2 + (2 - 5)^2}$$

$$\Rightarrow AH = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

خب قبول داریم که روشی بالا برای بدست آوردن فاصله یک نقطه از خط خیلی طولانی هست بنابراین در ادامه فرمولی را یاد می گیریم که با استفاده از ادن بنویسیم فاصله نقطه از خط رو راحت تر حساب کنیم البته این روشی رو هم که در اینجا رفتیم خوب یاد بگیریم. تلیه تلفظ!

اگر خط نقطه $A(x_0, y_0)$ از خط L به معادله کلی $ax+by+c=0$ در فاصله d بنامیم. برای محاسبه d از رابطه زیر استفاده می‌کنیم

$$AH = d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

حالا مثال قبل رو از این فرمول حل می‌کنیم

$$A(7, 5) \quad L: 4x + 3y = 18$$

اول از همه ۱۸ رو می‌بریم سمت چپ تا معادله خط L به صورت $ax+by+c=0$ در بیاد. $A(x_0, y_0)$

$$\Rightarrow 4x + 3y - 18 = 0$$

$$\Rightarrow d = \frac{|4(7) + 3(5) - 18|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{25}{5} = 5$$

دیدیم که مسئله سه گونه حل شده!

فقط حواسمون باشه که اول معادله خط داده شده رو به صورت استاندارد $ax+by+c=0$ در بیاریم بعدش توی فرمول d جایگزین کنیم. خیلی از بچه‌ها همینجا توی بی‌دنی!

به نکته دیگه اینکه بهره معادله خط رو طوری بنویسیم که عدد کسری نداشته باشیم مثلا

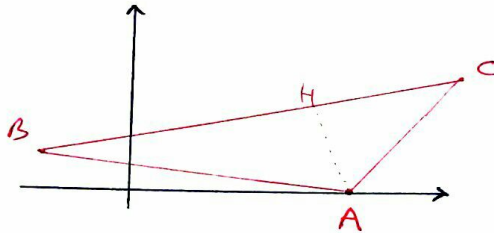
$$y = \frac{3}{4}x + 5 \quad \times 4 \Rightarrow 4y = 3x + 20$$

$$\Rightarrow 4y - 3x - 20 = 0$$

به مثال ساده اما مهم از کتاب درسی

مثال: مثلث با رئوس $A(3,0)$ و $B(-5,1)$ و $C(7,2)$ را در نظر بگیرید

الف) شیب ضلع BC را بدست آورید و معادله آن را بنویسید



اول از همه بپرس که مثلث رو

رسم کنیم

قیمت الف که آسونه

$$m_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{2 - 1}{7 - (-5)} = \frac{1}{12} = \frac{1}{12}$$

$$\Rightarrow L_{BC}: y - y_B = m_{BC}(x - x_B) \Rightarrow y - 1 = \frac{1}{12}(x + 5)$$

$$\Rightarrow 12y - 12 = x + 5 \Rightarrow 12y - x - 17 = 0$$

ب) فاصله راس A تا ضلع BC را بدست آورید.

$$AH = \frac{|12(x_A) - x_A - 17|}{\sqrt{12^2 + 1^2}} = \frac{|12(3) - 3 - 17|}{\sqrt{145}} = \frac{12}{\sqrt{145}} = \frac{12}{\sqrt{145}}$$

ج) طول ضلع BC را بدست آورید و سپس با استفاده از طول ارتفاع AH مساحت مثلث را بیابید.

$$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(7 - (-5))^2 + (2 - 1)^2} = \sqrt{145} = \sqrt{145}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC = \frac{1}{2} \left(\frac{12}{\sqrt{145}} \right) (\sqrt{145}) = 6$$

مساحت مثلث ABC

2A

د) نسبت های مثلثاتی زاویه $\hat{A}BC$ را از دد روشی به دست آورید (این قسمت رو خودم (فنا کردم))

$$\hat{A}BC = \theta$$

روش اول: اول طول AB رو بدست میاریم:

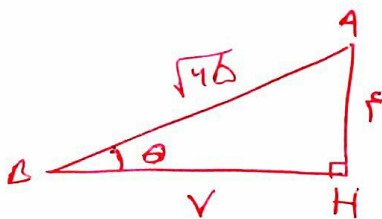
$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(-5 - 3)^2 + (1 - 0)^2} = \sqrt{45}$$

حالا در مثل ABH با داشتن طول AB و AH از قضیه فیثاغورث

طول BH رو بدست میاریم:

$$BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{45 - 12} = \sqrt{33} = \sqrt{V}$$

حالا در مثل ABH داریم:



$$\sin \theta = \frac{4}{\sqrt{45}} \quad \cos \theta = \frac{\sqrt{V}}{\sqrt{45}}$$

$$\tan \theta = \frac{4}{\sqrt{V}} \quad \cot \theta = \frac{\sqrt{V}}{4}$$

روش دوم: در قسمت ج) مساحت مثلث رو برابر 24 بدست آوردیم از طرفی مساحت مثلث رو می تونیم از فرمول زیر هم محاسبه کنیم

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin \theta \Rightarrow 24 = \frac{1}{2} (\sqrt{45})(12) \sin \theta$$

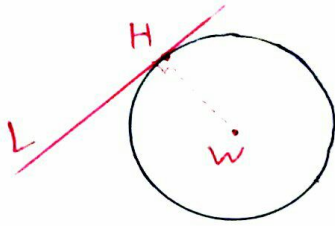
$$\Rightarrow \sin \theta = \frac{4}{\sqrt{45}} \quad \cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \sqrt{1 - \frac{16}{45}} = \frac{\sqrt{V}}{\sqrt{45}}$$

$$\Rightarrow \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{4}{\sqrt{V}} \quad \cot \theta = \frac{\sqrt{V}}{4}$$

به مثال هم دیکه از کتاب

مثال: خط $3x - 4y = 0$ بر دایره ای به مرکز $W(2, -1)$ مماسی است

تقاطع دایره را بیابید.



راهنمایی: خط مماسی بر دایره بر تقاطع گذشته از نقطه W مماسی عمود است.

حل: خوشفشانه کتاب راهنمای اصلی رو انجام داده در واقع اگر نقطه مماسی خط با دایره رو H بنامیم تقاطع دایره میسه همون فاصله نقطه W تا خط L یا فاصله WH

$$R = WH = \frac{|3(2) - 4(-1)|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{10}{5} = 2$$

آقا اجازه: این که خیلی ساده بود! شما گفتید مهمه!

استاد: باز هم میلم که مهمه! به قول یکی از دوستان بعضی از مسئله ها مسئله گوشت چرخ کرده می مونن! که میسه باهاشون هزار جور غذا درست کرد!

این مسئله هم از اون دسته مسائلی هست که میسه سوالای جانبی از نویسنه در آورد. مثلاً این مثال رو خودت حل کن.

مثال: در مثال قبل مختصات نقطه H را به دست آورید.

آقا اجازه: چون خط HW بر L عمود هست پس سبب اون راهی نویسنه

از ردی سبب L به دست بیاریم و معادله ی رو بنویسیم. بعدش به دستگاه ۲ معادله و ۲ مجهول می نویسیم که مختصات نقطه H میسه معلوم بشود خط L و خط HW

اسناد : اهمیت ! به قول ربه ها دست نزن !

حالا این راه حل که گفتی رو می نویسیم.

اول شیب خط L رو می نویسیم :

$$L : 3x - 4y = 0 \Rightarrow 4y = 3x \Rightarrow y = \frac{3}{4}x \Rightarrow m = \frac{3}{4}$$

اگر خط حادی نقاط H و L' بنامیر چون $L \perp L'$ پس

$$m' = -\frac{1}{m} = -\frac{4}{3} \quad \text{شیب خط } L'$$

حالا می توانیم معادله خط L' رو هم بنویسیم.

$$L' : y - y_w = m' (x - x_w) \Rightarrow y + 1 = -\frac{4}{3} (x - 2)$$

$$\Rightarrow y = -\frac{4}{3}x + \frac{5}{3} \quad \text{معادله خط } L'$$

حالا معادله خطوط L و L' رو نویسیم که از حل دستگاه

محل برخورد دو خط یعنی نقطه H بدست میاد :

$$\begin{cases} y = -\frac{4}{3}x + \frac{5}{3} \\ y = \frac{3}{4}x \end{cases} \Rightarrow y = y \Rightarrow \frac{3}{4}x = -\frac{4}{3}x + \frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4}x + \frac{4}{3}x = \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{25}{12}x = \frac{5}{3} \Rightarrow x = \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow y = \frac{3}{4}x = \frac{3}{4} \left(\frac{4}{5} \right) = \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow H \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5} \right) \quad \text{مقاطع } H$$

استاد : این راه خیلی که رفتیم خوب بود البته بعدها یادمان
این مسئله رو حداقل از سه چهار روش حل می‌کنیم!

آقا اعازه : مده میته ؟!

استاد : چرا نمیشه ! الان سه روش دیگه واست می‌نویسیم.

روشی دوم : ^{از}مقتصات نقطه H روی صورت $H(x, y)$ فرض کنیم چون

نقطه H روی خط $L: y = \frac{3}{4}x$ قرار داده پس می‌توانیم

مقتصات H روی صورت $H(x, \frac{3}{4}x)$ بنویسیم. (از طرفی چون

خط L' بر L عموده شیب خط L' برابر $-\frac{4}{3}$ میشه چون نقاط
 H و W دو نقطه روی L' هستن می‌تونیم بنویسیم :

$$m' = \frac{y_H - y_W}{x_H - x_W} = -\frac{4}{3} \Rightarrow \frac{\frac{3}{4}x + 1}{x - 2} = -\frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{9}{4}x + 3 = -4x + 8 \Rightarrow$$

$$\frac{9}{4}x + 4x = 5 \Rightarrow \frac{25}{4}x = 5 \Rightarrow x = \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow y = \frac{3}{4}x = \frac{3}{4}\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow H\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right) \quad \left. \begin{array}{l} \text{مقتصات نقطه } H \end{array} \right\}$$

* دقت کنید ایده این مسئله یعنی نوشتن مقتصات H به صورت $H(x, \frac{3}{4}x)$
خیلی به کار میاد.

روشی سوم: فاصله WH رو در مسئله اصلی برابر $\sqrt{2}$ در آوریم
از طرفی طبق فرمول فاصله دو نقطه داریم:

$$WH = \sqrt{(x_H - x_W)^2 + (y_H - y_W)^2} = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x_H - 2)^2 + (y_H + 1)^2} = \sqrt{2}$$

از طرفی چون H روی خط $L: y = \frac{3}{4}x$ قرار دارد می‌توانیم مختصات H را به صورت $H(x, \frac{3}{4}x)$ بنویسیم

$$\Rightarrow \sqrt{(x - 2)^2 + (\frac{3}{4}x + 1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow (x - 2)^2 + (\frac{3}{4}x + 1)^2 = 2$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 + \frac{9}{16}x^2 + \frac{3}{2}x + 1 = 2$$

$$\Rightarrow \frac{20}{16}x^2 - \frac{5}{4}x + 1 = 0 \quad \times 16 \Rightarrow$$

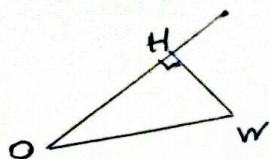
$$\Rightarrow 20x^2 - 20x + 16 = 0 \Rightarrow (5x - 4)^2 = 0$$

$$\Rightarrow 5x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow y = \frac{3}{4}x = \frac{3}{4}(\frac{4}{5}) = \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow \underline{H(\frac{4}{5}, \frac{3}{5})}$$

روش چهارم : دقت کنید که خط L از مبدا افتحات می‌گذرد
بنابراین مثلث OHW یک مثلث قائم الزامیه هست



فاصله WH رو که قبلاً برابر ۱ بدست آوردیم.

فاصله OW خیلی راحت محاسبه میشه

$$OW = \sqrt{x_W^2 + y_W^2} = \sqrt{(2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$$

از طرفی طبق قضیه فیثاغورث داریم:

$$OH^2 + HW^2 = OW^2 \Rightarrow OH^2 + 1 = 5$$

$$\Rightarrow OH = 1$$

از طرفی می‌دانیم $OH = \sqrt{x_H^2 + y_H^2}$ بنابراین

$$\Rightarrow OH = \sqrt{x_H^2 + y_H^2} = 1$$

و مقابله روشها را قبل افتحات H رو به صورت $H(x, \frac{3}{4}x)$ در نظر
می‌گیریم و در رابطه بالا جایگزین می‌کنیم.

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 + (\frac{3}{4}x)^2} = 1 \Rightarrow x^2 + \frac{9}{16}x^2 = 1$$

$$\Rightarrow \frac{25}{16}x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm \frac{4}{5} \quad y = \frac{3}{5} \Rightarrow H(\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$$

استاد : کافی یا لازم بدیم ؟!

آقا اجازه : نه دیدم کافی هست کردیم !

مثال: نشان دهید دو خط با معادلات $5x - 12y + 8 = 0$ و $-10x + 24y + 10 = 0$

با یکدیگر موازی هستند

خب این تیکه که خیلی آسونه

$$L: 5x - 12y + 8 = 0 \Rightarrow 12y = 5x + 8 \Rightarrow y = \frac{5}{12}x + \frac{8}{12}$$

$$\Rightarrow m = \frac{5}{12} \quad \left| \text{شیب خط } L \right.$$

$$L': -10x + 24y + 10 = 0 \Rightarrow 24y = 10x - 10$$

$$\Rightarrow y = \frac{10}{24}x - \frac{10}{24} \Rightarrow m' = \frac{10}{24} = \frac{5}{12}$$

$$m' = \frac{5}{12} \quad \left| \text{شیب خط } L' \right.$$

$$\Rightarrow m = m' \Rightarrow L \parallel L'$$

ب) فاصله دو خط L و L' را معادل کنید. (راهنمایی: یک نقطه دلخواه روی یکی از خطوط در نظر بگیرید و فاصله آن را از خط دیگر حساب کنید)

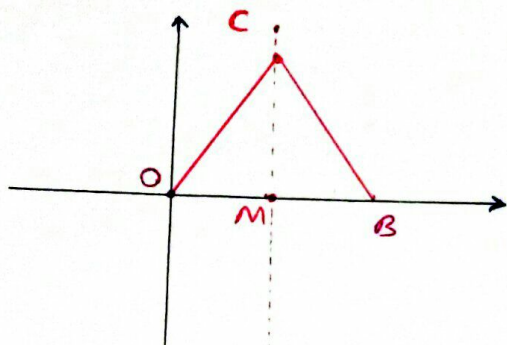
$$L' \quad 24y = 10x - 10 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 0 \quad (1, 0) \quad \left| \text{نقطه روی } L' \right.$$

$$d = \frac{|5(1) - 12(0) + 8|}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = \frac{13}{13} = 1$$

پس فاصله نقطه $(1, 0)$ از خط L که همان فاصله بین دو خط موازی L و L' می باشد

مثال: نقاط $(0,0)$ و $(4,0)$ دو رأس از یک مثلث متساوی الاضلاع هستند

مقتضات راس سوم آن را بیابید. مسأله حین جواب دارد؟ ردی اول



حل: این مسئله جالبیه خوب دقت کنید

قبل از شروع حل شکل مسئله رو رسم می کنیم

اگر مثلث رو به صورت OBC نام گذاری

کنیم چون مثلث متساوی الاضلاع هست

$$\text{بنابراین} \quad OB = OC = BC$$

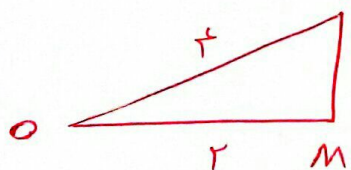
از طرعی واضح است که:

$$OB = |x_B - x_O| = 4$$

بنابراین $OB = OC = BC = 4$ به عبارت دیگر نقطه C از دو سر O و B

به یک فاصله هست بنابراین نقطه C روی عمود منصف OB قرار داره

اگر M نقطه وسط OB باشه در مثلث قائم الزاویه OCM داریم:



$$\Rightarrow CM = |y_C - y_M| = |y_C - 0| = \sqrt{4^2 - 2^2}$$

$$\Rightarrow |y_C| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow y_C = \pm 2\sqrt{3} \quad \left| \quad x_C = x_M = \frac{0+4}{2} = 2 \right.$$

$$\Rightarrow C(2, 2\sqrt{3}) \quad \text{و} \quad C'(2, -2\sqrt{3})$$

دقت کنید نقطه C' قرینه C هست نسبت به محور x ها. پس مسئله دو جواب دارد.

روش دوم : در روش قبل اگر نقاط O روی محور x ها قرار نداشته باشند به مقدار
به مشکل می خوردیم بنابراین در اینجا از به روشی کامل تر و دیر
حل مسئله استفاده می کنیم

چون مثلث OBC متساوی الساق است و همچنین داریم

$$OB = |x_B - x_O| = 4$$

بنابراین $OC = CB = 4$ از طرفی طبق قول فاصله دو نقطه داریم

$$OC = \sqrt{x_C^2 + y_C^2} = 4 \quad \left| \quad CB = \sqrt{(x_C - 4)^2 + y_C^2} = 4 \right|$$

از مقایسه دو عبارت بالا ضلای راحت متوجه می شویم که

$$x_C^2 = (x_C - 4)^2 \Rightarrow x_C^2 = x_C^2 - 8x_C + 16$$

$$\Rightarrow 8x_C = 16 \Rightarrow x_C = 2$$

$$\Rightarrow \sqrt{x_C^2 + y_C^2} = 4 \Rightarrow \sqrt{2^2 + y_C^2} = 4$$

جایگذاری درستی
از روابط

$$\Rightarrow y_C^2 = 16 - 4 = 12 \Rightarrow y_C = \pm \sqrt{12} = \pm 2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow C(2, 2\sqrt{3}) \quad \left| \quad C'(2, -2\sqrt{3}) \right|$$

همونطور که گفتیم مسئله دو جواب دارد

نقاط C و C' نسبت به محور x ها قرینه هستند.

خب ! تا اینجا خسته نباشید. بچه از یاد گرفتن اصول هندسه تعلیمی در این قسمت با هم برخی از مسائل مغرری رو با هم حل می کنیم این مسائل عمدتاً از امتحانات نهایی آبادان و حومه انتخاب شدن ! بنابراین در نگاه اول ممکنه به خورده مشکل به نظر برسن اما تامل هستم اصلاً فکر نکنید نباشه !

حب بریم سراغ اولین مسئله

مسئله : در مسئله ص ۹ (مربع $ABCD$...) بدون داشتن مختصات نقطه C مختصات نقطه D را بیابید. سپس با داشتن مختصات D نقطه C را بیابید.

اگر یادتون باشه نوی ص ۱۱ گفتیم که بدون داشتن مختصات نقطه C هم می تونه مسئله رو حل کرد. که در اینجا با هم حلش می کنیم
قبلاً در این مسئله سبب خط AB رو برابر $\frac{5}{3}$ بدست آوردیم و چون AD بر AB عمود هست بنابراین

$$m_{AD} = -\frac{5}{3}$$

از طرفی چون چهار ضلعی $ABCD$ مربع هست پس $AD=AB$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(10 - 5)^2 + (4 - 1)^2} = \sqrt{34}$$

$$\Rightarrow AD = AB = \sqrt{34}$$

$$AD = \sqrt{(x_D - x_A)^2 + (y_D - y_A)^2} = \sqrt{34}$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x_D - 5)^2 + (y_D - 1)^2} = \sqrt{34}$$

$$\Rightarrow (x_D - 5)^2 + (y_D - 1)^2 = 34 \quad *$$

دقت کنید رابطه بالا ۲ مجهول دارد بنابراین باید به دنبال یک رابطه دیگر باشیم.

دقت کنید که نقطه D روی خط AD هست بنابراین اول معادله خط AD رو می نویسیم:

$$\Rightarrow y - y_A = m_{AD} (x - x_A)$$

$$\Rightarrow y - 1 = \frac{-5}{3} (x - 5) \quad ** \quad \text{معادله AD}$$

بنابراین اگر در رابطه * به جای $y - 1$ عبارت $\frac{-5}{3} (x - 5)$

روا در رابطه ** قرار بدهیم داریم: (دقت کنید که متغیر D در معادله AD صرف می کند)

$$\Rightarrow (x_D - 5)^2 + \left[\frac{-5}{3} (x_D - 5) \right]^2 = 34$$

$$\Rightarrow (x_D - 5)^2 + \frac{25}{9} (x_D - 5)^2 = 34 \Rightarrow \frac{34}{9} (x_D - 5)^2 = 34$$

$$\Rightarrow x_D - 5 = \pm 3 \Rightarrow \underline{x_D = 8} \quad \text{و} \quad \underline{x_D = 2}$$



حالاً معادله بدست آورده و آنرا x_D به در معادله خط AD قرار می دهیم تا معادله y_D بدست بیاید.

$$\Rightarrow y_D - 1 = -\frac{5}{3}(x_D - 5) \Rightarrow$$

$$x_D = 1 \Rightarrow y_D - 1 = -\frac{5}{3}(1 - 5) \Rightarrow y_D = -4$$

بنابراین نقطه D روی مستقیم AD و CD است. در ربع اول قرار داشته باشد.

$$x_D = 2 \Rightarrow y_D - 1 = -\frac{5}{3}(2 - 5) \Rightarrow y_D = 4$$

$$\Rightarrow D(2, 4)$$

مختصات نقطه D

ب) اکنون با داشتن مختصات نقطه D مختصات نقطه C را بیابیم.

در مثال ۹ مختصات D را با استفاده از C پیدا کردیم. در اینجا هم می توانیم از همین روش استفاده کنیم (یعنی معادله خطوط BC و CD ردیف کنیم که محل تقاطع خطها می باشد نقطه C).

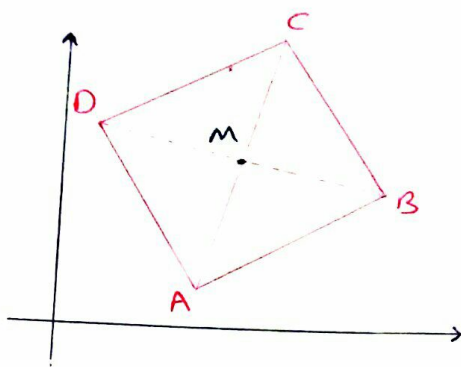
اما در اینجا از به روش آسونتر استفاده می کنیم (مثابه تری لا است کتاب) در واقع در اینجا از این نکته استفاده می کنیم که در مربع قطرهای یکدیگر را نصف می کنند (در متوازی الاضلاع و مستطیل هم این نکته برقراره).

بنابراین محل تقاطع قطرهای AC و BD نقطه M می باشد. M هم وسط AC هست و هم وسط BD .

f.

از طریق جوت مختصات نقاط (B و D) رو داریم می توینم مختصات نقطه

M رو ضلعی، ابعث بدست بیاریم.



$$x_M = \frac{x_B + x_D}{2} = \frac{10 + 2}{2} = 4$$

$$y_M = \frac{y_B + y_D}{2} = \frac{4 + 4}{2} = 4$$

$$\Rightarrow M(4, 4)$$

حالا با داشتن مختصات نقطه M و A می توینم مختصات C رو بدست

بیاریم (درست مثل مسئله برچم - سوال 4 کتاب درسی)

$$\Rightarrow x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = 4 \Rightarrow x_A + x_C = 12$$

$$\Rightarrow 5 + x_C = 12 \Rightarrow x_C = 7$$

به همین صورت

$$\Rightarrow y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = 4 \Rightarrow y_A + y_C = 10$$

$$\Rightarrow 1 + y_C = 10 \Rightarrow y_C = 9$$

$$\Rightarrow C(7, 9)$$

مختصات C

* دقت کنید از این مسئله مربع میانه مسائل جابجی طرح کرد که فعلاً فرصت

نسبت بیشتر بهش بپردازیم. مثلاً فرض کنید مختصات نقاط A و C رو

به ما بدن و مختصات B و D رو بتوانیم ...

مثال: نشان دهید سه نقطه A و B و C با مختصات داده شده روی یک خط راست قرار دارند.
 $A(4, -5)$ $B(5, -2)$
 $C(4, 1)$

به مثال کلاسیک و قدیمی!

این مسئله رو می‌تونیم از روشهای منطقی حل کرد که ما دو تا از این روشها رو با هم مرور می‌کنیم

روش اول: اول دو نقطه دلخواه از سه نقطه داده شده (مثلاً A و B) رو در نظر می‌گیریم و معادله خط AB رو می‌نویسیم:

$$L_{AB}: y - y_A = m(x - x_A)$$

اول شیب رو حساب می‌کنیم

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-2 + 5}{5 - 4} = -3$$

$$\Rightarrow y + 5 = -3(x - 4) \Rightarrow y = -3x + 13$$

حالا مختصات نقطه C رو در معادله خط AB قرار می‌دهیم که اگر صدق کرد یعنی نقطه C روی خط AB قرار داره.

$$\Rightarrow y = -3x + 13 \Rightarrow 1 = -3(4) + 13 \Rightarrow 1 = 1 \quad \checkmark$$

پس نقطه C روی AB قرار داره به عبارت دیگر هر سه نقطه روی یک خط راست قرار دارند.

می‌دانیم که اگر شیب دو خط برابر باشد آن دو خط با هم موازی هستند
 یک حالت خاص موازی بودن زمانی هست که دو خط برهم منطبق هستند
در واقع زمانی دو خط برهم منطبق هستند که شیب آنها برابر بوده و
یک نقطه مشترک داشته باشند

الکون کافیست بپذیریم $m_{AB} = m_{AC}$ و چون دو خط AB و AC در
 نقطه A مشترک هستند پس برهم منطبق می‌باشند

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-2 + 5}{5 - 4} = -3$$

$$m_{AC} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{1 + 5}{4 - 4} = -3$$

$$\rightarrow m_{AB} = m_{AC}$$

پس دو خط AB و AC برهم منطبق هستند.

وایه این مسئله راه حل‌ها را چالش‌دهنده‌ای هم می‌توانست مثلاً اگر
 نقطه B بین A و C باشد کافیست بپذیریم که

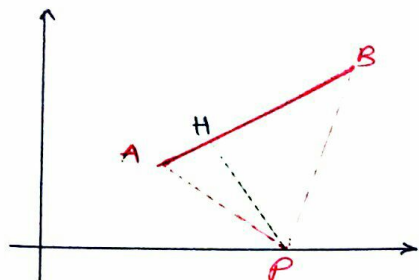
$$AB + BC = AC$$

در این صورت سه نقطه A و B و C روی یک خط راست قرار
 دارند.

مسئله: دو نقطه A و B به مختصات $A(3, 5)$ و $B(11, 11)$ معروفی است

مختصات نقطه P روی محور x ها را حیات بیابید که مساحت مثلث

ABP برابر ۳ واحد باشد



حل: ابتدا شکل مسئله رو رسم می‌کنیم

و می‌کنیم مختصات P به صورت

$P(a, 0)$ باشد

در این صورت مساحت مثلث ABP برابر است با:

$$S_{ABP} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot PH$$

طول ارتفاع PH همان فاصله نقطه P تا خط AB می‌باشد بنابراین

ابتدا طول AB و معادله خط AB را معادله می‌کنیم

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(11 - 3)^2 + (11 - 5)^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$$

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{11 - 5}{11 - 3} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$$L_{AB}: y - y_B = m_{AB} (x - x_B) \Rightarrow y - 11 = \frac{3}{4} (x - 11)$$

$$(x, y) \Rightarrow 4y - 44 = 3x - 33 \Rightarrow 4y - 3x = 11$$

$$4y - 3x - 11 = 0$$

معادله خط AB

۴۴

حالا فاصله نقطه P به معتمات $P(a, 0)$ رو از خط AB به معادله
 $4y - 2x - 11 = 0$ محاسبه می‌کنیم.

$$PH = \frac{|4(0) - 2(a) - 11|}{\sqrt{4^2 + 2^2}} = \frac{|-2a - 11|}{5}$$

از طرفی در مسئله مساحت مثلث ABP برابر 30 داده شده است.
بنابراین:

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot PH = 30$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} (10) \frac{|-2a - 11|}{5} = 30$$

$$\Rightarrow |-2a - 11| = 30 \Rightarrow -2a - 11 = \pm 30$$

$$\Rightarrow -2a - 11 = 30 \Rightarrow 2a = -41 \Rightarrow a = -\frac{41}{2}$$

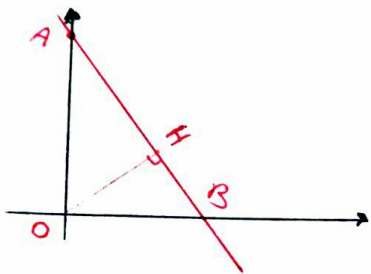
$$-2a - 11 = -30 \Rightarrow 2a = 19 \Rightarrow a = \frac{19}{2}$$

$$P_1\left(-\frac{41}{2}, 0\right) \quad P_2\left(\frac{19}{2}, 0\right)$$

بنابراین مسئله دو جواب دارد. و چون در صورت مسئله محدودیتی
ذکر نشده هر دو جواب قابل قبول هستند.

مسئله: خط L دارای شیب برابر -2 بوده و فاصله آن از مبدا

مختصات برابر 2 است. مساحت مثلثی را که این خط با محورهای مختصات می‌سازد بدست آورید.



حل: اول از همه شکل مسئله رو رسم می‌کنیم

اگر معادله خط رو به صورت $y = mx + h$ در نظر

بگیریم چون $m = -2$ هست پس معادله خط به صورت

$$y = -2x + h \text{ در میاد.}$$

حالا فاصله مبدا مختصات را از این خط پیدا می‌کنیم

$$y + 2x - h = 0 \Rightarrow OH = \frac{|(0) + 2(0) - h|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{|h|}{\sqrt{5}} = 2 \Rightarrow |h| = 2\sqrt{5} \Rightarrow h = \pm 2\sqrt{5}$$

و اضافه که مقدار منفی h مربوط به مثلثی هست که در ناحیه سوم قرار داره چون هر دو ضلع مساحت یکسان دارند کافیه مقدار مثبت h رو در نظر بگیریم

که در این صورت معادله خط به صورت $y = -2x + 2\sqrt{5}$ در میاد.

حالا برای محاسبه مساحت مثلث کافیه مقادیر A و B یعنی عرض از مبدا و طول از مبدا خط رو پیدا کنیم.

$$\left. \begin{array}{l} x=0 \Rightarrow OA = h = 2\sqrt{5} \\ y=0 \Rightarrow 0 = -2x + 2\sqrt{5} \Rightarrow OB = x = \sqrt{5} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{که عرض از مبدا} \\ \text{طول از مبدا} \end{array}$$

$$\Rightarrow S_{ABO} = \frac{1}{2} (OA)(OB) = \frac{1}{2} (2\sqrt{5})(\sqrt{5}) = 5$$

که مساحت مثلث ABO

مثال: قطار سریع السیر آبادان - برزیل در مسیر خود در ایستگاههای C و D توقف می کند اگر مقصات آبادان A(۳-۱) و مقصات برزیل B(۹،۷) باشد. مقصات ایستگاههای C و D را بیابید. فرض کنید ایستگاههای A و C و D و B هم فاصله هستند.

حل: همونطور که در شکل رد کرد



می بینید ایستگاههای C و D مسیر AB رو به سه قسمت مساوی تقسیم

می کنند. بنابراین می توانیم بگوییم C وسط AD و D وسط CB هستند پس داریم:

$$\text{C وسط AD} : x_c = \frac{x_A + x_D}{2} = \frac{-1 + x_D}{2} \Rightarrow 2x_c - x_D = -1 \quad (1)$$

$$y_c = \frac{y_A + y_D}{2} = \frac{-1 + y_D}{2} \Rightarrow 2y_c - y_D = -1 \quad (5)$$

$$\text{D وسط CB} : x_D = \frac{x_C + x_B}{2} = \frac{x_C + 9}{2} \Rightarrow 2x_D - x_C = 9 \quad (3)$$

$$y_D = \frac{y_C + y_B}{2} = \frac{y_C + 7}{2} \Rightarrow 2y_D - y_C = 7 \quad (4)$$

اگر روابط (1) و (3) رو با هم و روابط (5) و (4) رو با هم بنویسیم خیلی راحت مقصات x_C و x_D و y_C و y_D بدست میان. (حل رد می زارم به همراه خودتون)

$$x_C = 5 \quad x_D = 7 \quad y_C = \frac{5}{3} \quad y_D = \frac{14}{3}$$

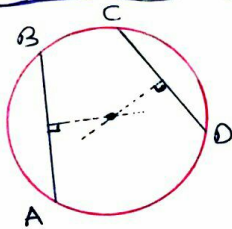
$$\Rightarrow C(5, \frac{5}{3}) \quad D(7, \frac{14}{3})$$

مثال: اگر $A(۱,۵)$ و $B(-۲,۲)$ و $C(۴,۲)$ سه نقطه از یک دایره باشند

- الف) معتمات مرکز دایره را بیابید
ب) شعاع دایره را محاسبه کنید.

به مسئله جالبیناک! برای حل این مسئله از یک نکته هم استفاده می‌کنیم.

در یک دایره، عمود منصف دو وتر دلخواه (غیر موازی) یکدیگر را در مرکز دایره قطع می‌کنند.



آقا اجازه: این نکته یادمون نیاد!

استاد: یعنی وجه‌اش نکته به این خوشگلی یادت نیاد!

همین الان ببر برو فصل ششم ریاضی شمر رو مرور کن (همونیایی که عکس بستاب شکسته داره!)

خب بریم سراغ حل مسئله. برای حل این مسئله معادله عمود منصف خطوط AB و AC رو بدست آورده و بعدش نقطه تقاطع اونها که همون مرکز دایره هست رو محاسبه کنیم.

نقطه یادتون باشه برای نوشتن معادله عمود منصف به نقطه وسط پاره خط و شیب خط نیاز داریم.

(شیب خط رو معکوسی و قرینه می‌کنیم تا شیب عمود منصف دربیاد.)



۴۸

عمود منصف AB

ادل شیب خط AB رو محاسب می‌کنیم

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2 - 5}{-1 - 1} = 1 \quad \text{شیب AB}$$

$$m'_{AB} = \frac{1}{m_{AB}} = -1 \quad \text{شیب عمود منصف AB}$$

در قدم بعدی مقدمات نقطه وسط AB رو پیدا می‌کنیم.

$$x_{m_1} = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1 + (-1)}{2} = -\frac{1}{2} \quad y_{m_1} = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{5 + 2}{2} = \frac{7}{2}$$

$$M_1 \left(-\frac{1}{2}, \frac{7}{2} \right) \quad \text{مقدمات نقطه وسط AB}$$

در آخر معادله عمود منصف AB رو می‌نویسیم:

$$L': y - y_{m_1} = m'_{AB} (x - x_{m_1}) \Rightarrow y - \frac{7}{2} = (-1) \left(x + \frac{1}{2} \right)$$

$$\Rightarrow y = 3 - x \quad \text{معادله عمود منصف AB}$$

به همین صورت معادله عمود منصف AC رو می‌نویسیم (اینجا خلاصه می‌نویسیم)

$$m_{AC} = -1 \Rightarrow m'_{AC} = 1 \Rightarrow M_2 \left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2} \right) \Rightarrow y = x + 1 \quad \text{معادله عمود منصف AC}$$

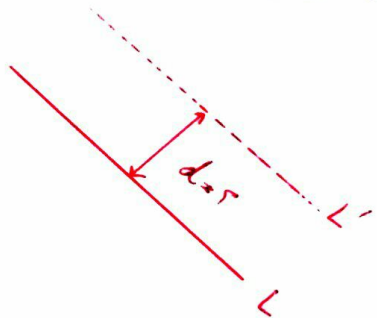
حالا معادله دو عمود منصف رو در یک دستگاه می‌نویسیم و نقطه تقاطع اون‌ها یعنی مرکز دایره رو پیدا می‌کنیم.

$$\begin{cases} y = 3 - x \\ y = 1 + x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{مرکز دایره } (1, 2)$$

$$R = OA = \sqrt{(1-1)^2 + (2-2)^2} = 2 \quad \text{شعاع دایره هم خیلی راحت درمیاد}$$

مثال معادله خطی را بنویسید که با خط $3x + 4y = 12$ موازی بوده و فاصله آن از این خط برابر ۲ واحد باشد. مسئله معین جواب دارد؟



حل اگر خط موازی با L رود L' نام گذاری کنیم داریم:

$$L \parallel L' \Rightarrow m_L = m_{L'}$$

به عبارت دیگر چون دو خط موازی هستند شیب اونها هم برابر هست پس اول شیب خط L رو بدست میاریم.

$$L: 3x + 4y = 12 \Rightarrow 4y = 12 - 3x \Rightarrow y = 3 - \frac{3}{4}x \\ \Rightarrow m_L = -\frac{3}{4}$$

بنابراین $m_{L'} = -\frac{3}{4}$ می شود پس می توانیم خط L' رو به صورت

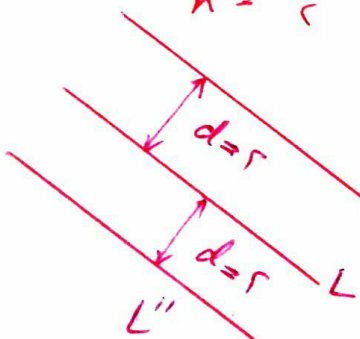
$y = -\frac{3}{4}x + h$ در نظر بگیریم حالاً به نقطه دلخواه از خط L' مثلاً $(0, h)$ رو در نظر می گیریم و فاصله اون رو تا خط L حساب می کنیم و برابر ۲ قرار می دیم.

$$\begin{aligned} 3x + 4y &= 12 \\ \downarrow \\ 3x + 4y - 12 &= 0 \end{aligned} \quad d = \frac{|3(0) + 4(h) - 12|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|4h - 12|}{5} = 2$$

$$\Rightarrow 4h - 12 = \pm 10 \Rightarrow h_1 = \frac{1}{2} \text{ و } h_2 = \frac{11}{2}$$

$$h = \frac{11}{2} \Rightarrow y = -\frac{3}{4}x + \frac{11}{2} \Rightarrow 4y + 3x = 22 \quad L'$$

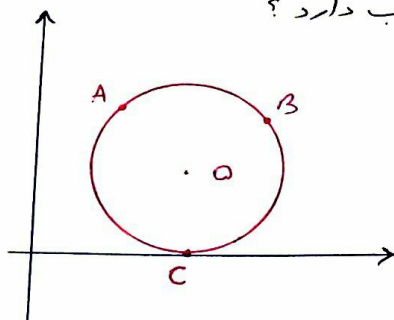
$$h = \frac{1}{2} \Rightarrow y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{2} \Rightarrow 4y + 3x = 2 \quad L''$$



همانطور که می بینید مسئله دارای دو جواب L' و L'' می باشد که یکی از خطوط در بالای L و خط دیگر در پایین L قرار می گیرد.

۵.

مثال: شعاع دایره‌ای را بیابید که از نقاط $A(10,9)$ و $B(18,18)$ گذشته و بر محور x ها مماس باشد. مسئله چینه جواب دارد؟



حل: مشخصات مرکز دایره رو با $O(x, y)$ و محل مماسی دایره با محور x ها رو با $C(x, 0)$ بنویس. می‌دیم. واضع که داریم:

$$OA = OB = OC$$

از طرفی داریم:

$$OA = \sqrt{(x-1)^2 + (y-9)^2} \quad OB = \sqrt{(x-18)^2 + (y-18)^2}$$

$$OC = \sqrt{(x-x)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{y^2} = y \quad \rightarrow \text{همون شعاع دایره می‌شه!}$$

اول قرار می‌دیم $OA = OB$ که داریم:

$$OA = OB \Rightarrow (x-1)^2 + (y-9)^2 = (x-18)^2 + (y-18)^2$$

با به توان رساندن و ساده سازی طرفین معادله بالا داریم:

$$\Rightarrow -2x - 18y + 128 = -14x - 14y + 128 \Rightarrow y = 7x - 23 \quad (1)$$

به همین صورت قرار می‌دیم: $OB = OC$

$$(x-18)^2 + (y-18)^2 = y^2 \xrightarrow{\text{ساده سازی}} x^2 - 14x - 14y + 128 = 0 \quad (2)$$

$$(1) \rightarrow (2) \Rightarrow x^2 - 14x - 14(7x - 23) + 128 = 0 \Rightarrow x^2 - 128x + 494 = 0$$

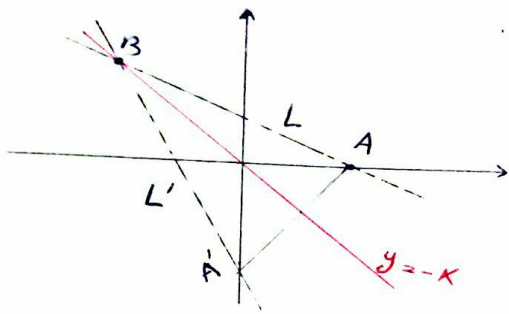
$$(x-4)(x-124) = 0 \quad \begin{cases} x=4 \xrightarrow{(1)} y=7(4)-23=5 \\ x=124 \xrightarrow{(1)} y=7(124)-23=845 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} R=y=5 \\ R=y=845 \end{cases}$$

مسئله دو جواب دارد.

مثال: دینیه خط $L: 2x + 3y = 2$ را نسبت به خط $y = -x$

رسم کرده ایم معادله خط جدید را بیابید.



حل: برای پیدا کردن دینیه خط نسبت به

خط $y = -x$ کافیست دو نقطه دلخواه از خط

L رو در نظر گرفته و دینیه آنها را نسبت

به خط $y = -x$ بیابیم. البته چون خط L با $y = -x$ برخورد می کند (نقطه B)

می توان تنها دینیه یک نقطه را پیدا نمود.

الکون نقطه $A(2, 0)$ را روی خط L در نظر می گیریم برای پیدا کردن

دینیه A یعنی A' (نسبت به خط $y = -x$) ابتدا باید معادله خط AA' را که بر $y = -x$ عمود است بنویسیم.

چون شیب $y = -x$ برابر -1 است پس شیب ~~خط~~ خط AA' برابر 1 می شود.

$$AA': y - y_A = m(x - x_A) \Rightarrow y - 0 = (1)(x - 2)$$

$$\Rightarrow \underline{y = x - 2} \quad \text{معادله خط } AA'$$

حالا باید محل تقاطع خط AA' و $y = -x$ پیدا کنیم واضح است که این

نقطه همان M یعنی وسط AA' است.

$$\Rightarrow \begin{cases} y = x - 2 \\ y = -x \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} x - 2 &= -x \Rightarrow 2x = 2 \\ x &= \frac{2}{2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \underline{y = -x = -\frac{2}{2}} \Rightarrow \underline{M\left(\frac{2}{2}, -\frac{2}{2}\right)}$$

۵۲

حالا L داشتن معضات A و M می نویسیم معضات نقطه A'
رو بدست بیاریم :

$$x_M = \frac{x_A + x_{A'}}{2} \Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{2 + x_{A'}}{2} \Rightarrow x_{A'} = 0$$

$$y_M = \frac{y_A + y_{A'}}{2} \Rightarrow -\frac{3}{2} = \frac{0 + y_{A'}}{2} \Rightarrow y_{A'} = -3$$

$$\Rightarrow A'(0, -3)$$

حالا باینه محل تقاطع خط L با خط $y = -x$ یعنی نقطه B رو بدست بیاریم

$$\begin{cases} 2x + 2y = 4 \\ y = -x \end{cases} \Rightarrow 2x + 2(-x) = 4 \Rightarrow x = -4$$
$$y = 4$$

$$\Rightarrow B(-4, 4)$$

حالا می نویسیم معادله خط L' رو با داشتن معضات A' و B بنویسیم

$$y - y_{A'} = m(x - x_{A'}) \Rightarrow m = \frac{y_B - y_{A'}}{x_B - x_{A'}} = \frac{4 + 3}{-4 - 0} = -\frac{7}{4}$$

$$\Rightarrow y + 3 = -\frac{7}{4}(x - 0)$$

$$\Rightarrow y = -\frac{7}{4}x - 3 \Rightarrow 4y + 7x = -12$$

له قرینه خط L نسبت به خط $y = -x$

جواب نری ها (به زودی) در کانال تلگرام @riazikhor

۱) نشان دهید نقاط زیر روی یک خط راست واقع هستند

الف) $(0, 5)$ و $(5, 0)$ و $(-1, 4)$

ب) $(-a, 2b)$ و $(2a, -b)$ و $(a, 0)$

۵) یک خط عمودی مثلث به رئوس $O(0,0)$ و $C(9,0)$ و $D(18,4)$ را به دو ناحیه با مساحت‌های مساوی تقسیم می‌کند. معادله خط مذکور را بیابید.

۳) مثال قبل را با فرضی خط افقی حل کنید.

۴) نقطه A روی خط $4x + 3y = 48$ ، نقطه B روی خط $x + 3y + 10 = 0$ واقع است اگر مختصات نقطه وسط AB برابر $M(4, 5)$ باشد. مطلوبست محاسبه مختصات A و B

۵) نشان دهید که خط راست به معادله $(2m+1)x - (m-1)y + 7m-1 = 0$

به ازای تمامی مقادیر حقیقی m همیشه از یک نقطه ثابت می‌گذرد
مختصات این نقطه ثابت را بیابید.

۶) مطلوبست محاسبه مساحت چهارضلعی $ABCD$ به مختصات زیر

$A(0,0)$ $B(2,3)$ $C(4,2)$ $D(1,0)$