



سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

و...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

<https://t.me/riazisara>



(@riazisara)

جزوه آموزش

ریاضی ۲

یازدهم تجربی

کارک از استاد بابالویان



دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

فصل اول : هندسه تحلیلی و جبر

درس اول : هندسه تحلیلی

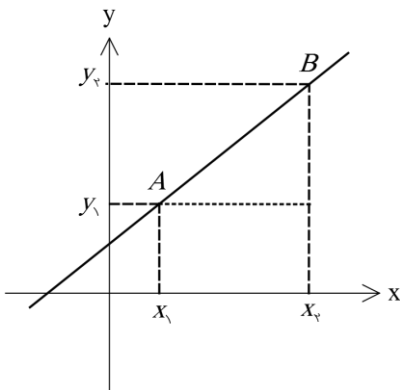
درس دوم : معادله درجه دوم و تابع درجه ۲

درس سوم : معادلات گویا و گنگ

درین اول : هندسه تحلیلی

هندسه تحلیلی در واقع ترکیب هندسه و جبر مقدماتیه . در واقع تو هندسه تحلیلی به هر نقطه تو صفحه یه آدرس داده میشه که بهش مختصات می گن و با همین آدرس ها معادلات جبری شکل ها نوشته میشن . بنیانگذاران هندسه تحلیلی دکارت و فرما تو قرن ۱۷ ام بودن .

شیب خط:



نسبت جابجایی عمودی به جابجایی افقی رو شیب خط می گن .

یعنی اگر دو نقطه دلخواه $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ از یک خط باشن

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{شیب خط برابره با :}$$

- شرط موازی بودن دو خط اینه که

- شرط عمود بودن دو خط اینه که یا $mm' = \dots$

- به نقطه ی برخورد خط با محور y ها می گن .

- معادله خط با شیب m و عرض از مبدأ h به صورت پس برای بدست آوردن شیب یک خط از روی

فرمول اون اول خط رو به صورت استاندارد (y تنها و بدون ضریب شود) می نویسیم و بعد شیب خط میشه .

-خطی که موازی محور x ها باشه دارای شیب و معادلش به صورت

تمرین : خطوط زیر نسبت به هم چه وضعیتی دارن ؟ (موازی ، عمود ، متقاطع غیر عمود)

$$2x - y = 1 \quad , \quad 2y + x = 5$$

$$2x - 4y = 1 \quad , \quad 2y - x = 5$$

$$y - x + 2 = 0 \quad , \quad 2y + x = 4$$

نوشتن معادله خط :

معادله خط در حالت کلی به صورت $y = m(x - x_0) + y_0$ هستش و بعد از ساده شدن در نهایت به صورت $y = mx + h$ ظاهر میشه. پس همیشه از هر دو راه برای نوشتن معادله خط استفاده کرد.

مثال : معادله خطی را بنویسید که از نقاط $A(-1, 6), B(1, 2)$ بگذرد.

روش اول :

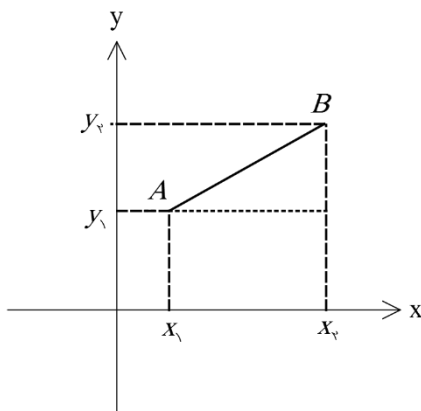
$$m = \frac{6-2}{1-(-1)} = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow y = 2(x-1) + 2 \Rightarrow y = 2x$$

روش دوم :

$$m = \frac{6-2}{1-(-1)} = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow y = 2x + h \xrightarrow{(1,2)} 2 = 2(1) + h \Rightarrow h = 0 \Rightarrow y = 2x$$

تمرین : معادله خطی را بنویسید که از $A(-2, 3)$ گذشته و با خط $y = 2x + 1$ موازی باشد.

تمرین : معادله خطی را بنویسید که عرض از مبدا آن ۲ باشد و بر خط $3x - 2y + 1 = 0$ عمود باشد.



فاصله بین دو نقطه :

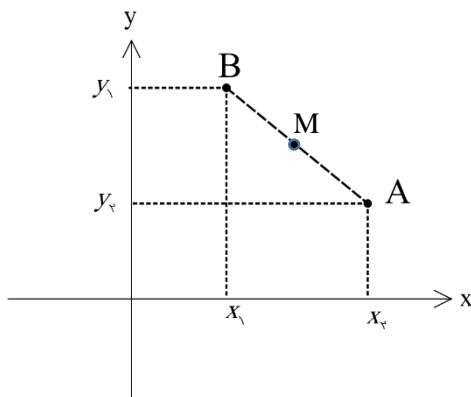
اگر $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ دو نقطه مثل شکل تو صفحه مختصات باشن به کمک قضیه فیثاغورس به فرمول برای بدست آوردن فاصله دو نقطه بدست بیارین.

تمرین : اگر $A(1, 3), B(-1, 2), C(5, -5)$ سه راس یک مثلث باشند .
الف) طول اضلاع را بیابید .

ب) نشان دهید این مثلث قائم الزاویه است .

تمرین : معادله عمود منصف پاره خطی را بنویسید که دو نقطه $A(1, 2), B(-1, 3)$ را به هم وصل می کند .

راهنمایی : هر نقطه روی عمود منصف یک پاره خط از دو سر آن به یک فاصله است بنابراین اگر $P(x, y)$ نقطه ای باشد که $PA = PB$ آنگاه این نقطه روی عمود منصف پاره خط است :



مختصات نقطه وسط پاره خط :

اگر $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ دو نقطه مثل شکل تو صفحه مختصات

باشند و M مختصات وسط پاره خط باشد تصویر این نقاط روی

محورهای مختصات تصور کن و فرمولی برای بدست آوردن مختصات

M بنویس :

تمرین: معادله عمود منصف پاره خط واصل دو نقطه $A(1, 2), B(-1, 3)$ را به کمک نقطه تقاطع و شیب پاره خط بنویسید.

تمرین: نقاط $A(1, 4), B(-3, 1), C(0, -1)$ رئوس مثلث هستند. طول میانه وارد بر ضلع BC را بیابید.

تمرین: قرینه نقطه $A(1, -2)$ را نسبت به نقطه $M(-1, 3)$ بدست آورید.

تمرین: قرینه نقطه $A(3, -4)$ را نسبت به مبدأ مختصات بدست آورید.

فاصله یک نقطه از یک خط:

اگر $A(x_0, y_0)$ یک نقطه و $ax + by + c = 0$ معادله یک خط باشد، فاصله نقطه و خط از این فرمول بدست میاد:

$$|AH| = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

تمرین: خط به معادله $y = \frac{4}{3}x + 4$ بر دایره ای به مرکز $A(-3, 4)$ مماس است. اندازه شعاع دایره را بیابید.

تمرین: فاصله نقطه $A(1, 2)$ از خط $3x + 4y = k$ برابر ۲ است. k را بیابید.

تمرین: اگر نقطه $A(2, 3)$ راس یک مربع و معادله یک ضلع مربع $3x - 4y = 9$ باشد، مساحت مربع چقدر است؟

تمرین: تمرین های صفحه ۹ را حل کنید.

درس دوم : معادله درجه دوم و تابع درجه ۲

معادلات دو مجزوری :

معادله هایی که به کمک تغییر متغیر قابل تبدیل به معادله درجه دوم باشند بهشون معادلات دو مجزوری می گن .

مثال : معادله $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$ را حل کنید .

حل : اگر اسم x^2 رو تغییر بدیم بذاریم u یعنی $u = x^2$ (اونوقت معادله به صورت $u^2 - 6u + 8 = 0$ میشه که اگر حلش کنیم (به هر روشی : تجزیه ، مربع کامل ، دلتا ...) جواباش میشه $u = 4, u = 2$ حالا وقتشه که دوباره اسم اولشون رو بهشون پس بدیم یعنی $x^2 = 4, x^2 = 2$ که هر کدوم از اینا دو تا جواب دارن پس : $x = 2, -2, \sqrt{2}, -\sqrt{2}$

تمرین : معادلات زیر را حل کنید .

$$3x^4 + 2x^2 + 8 = 0$$

$$x^4 - 13x^2 - 36 = 0$$

رابطه مجموع و حاصل ضرب ریشه های معادله درجه ۲ با ضرایب معادله :

میدونیم جواب های معادله درجه دوم در حالت کلی به صورت $\alpha = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \beta = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ هستش با جمع و ضرب این دو جواب جاهای خالی رو کامل کنید و رابطه مورد نظرو بدست بیارید :

$$S = \alpha + \beta =$$

$$P = \alpha\beta =$$

تمرین: بدون حل معادله، مجموع و حاصل ضرب ریشه های معادله $-2x^2 + x + 5 = 0$ را بیابید.

نمونه معادله درجه دوم با داشتن جواب های آن:

فرض کنید جواب های یک معادله یعنی α, β رو دارید حالا می تونید بنویسید $(x - \alpha)(x - \beta) = 0$ چون این همون معادله درجه دومه که ریشه هاش α, β هستش. حالا شما همین معادله رو ساده کنید تا به صورت $x^2 + \square x + \square = 0$ ظاهر بشه بعد معادله رو به کمک S, P بازنویسی کنید:

تمرین: دو عددی را بیابید که مجموع آن $2/3$ و حاصل ضرب آن $1/2$ باشد.

تمرین: معادله درجه دومی بنویسید که ریشه های آن $1 + 2\sqrt{3}, 1 - 2\sqrt{3}$ باشد.

تمرین: طول و عرض مستطیلی را بیابید که محیط آن $\frac{13}{3}$ و مساحت آن ۱ باشد.

ماکزیمم و مینیمم سهمی :

از سال قبل می‌دونیم که طول راس سهمی $y = ax^2 + bx + c$ برابر $x_0 = \frac{-b}{2a}$ هستش :

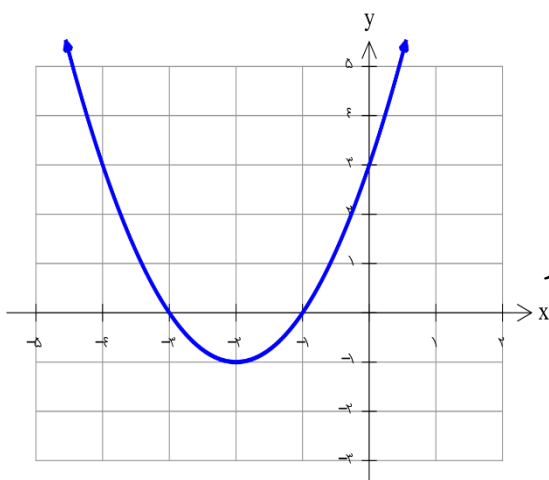
الف) اگر $a > 0$ باشد سهمی رو به بالائه و $f(x_0)$ مقدار مینیمم (کمترین) سهمی رو میده .

ب) اگر $a < 0$ باشد سهمی رو به پایینه و $f(x_0)$ مقدار ماکسیمم (بیشترین) سهمی رو میده .

تمرین : در بین مستطیل هایی که طول آنها از عرض آنها ۳ واحد بیشتر است کدام یک بیشترین مساحت را دارد ؟

تمرین : سهمی $y = -(2x + 1)^2 - 1$ دارای ماکسیمم است یا مینیمم ؟ مقدار آن را بیابید .

صفرهای تابع :



نمودار تابع $f(x) = x^2 + 4x + 3$ در شکل روبرو رسم شده است .

الف) معادله $f(x) = 0$ را حل کنید .

ب) چه رابطه ای بین ریشه های معادله قبل و محل تلاقی تابع با محور

طول ها وجود دارد ؟

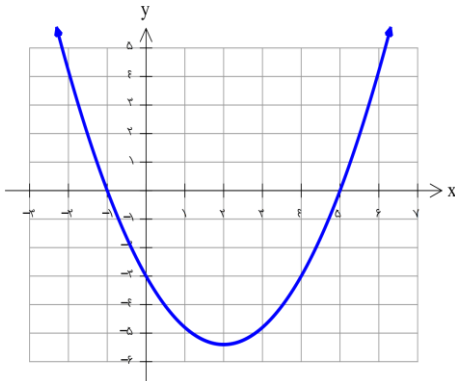
برای هر تابع f جواب های معادله $f(x) = 0$ رو در صورت وجود ، صفرهای تابع f می گن و از نظر هندسی محل برخورد نمودار تابع با محور x ها ست .

نکته: اگر $x = a$ یکی از صفرهای تابع f باشد حتماً تابع f عاملی به صورت $(x - a)$ دارد. در نتیجه اگر x', x'' صفر

های سهمی $f(x) = ax^2 + bx + c$ باشد، همیشه تابع رو به صورت زیر نوشت:

$$f(x) = a(x - x')(x - x'')$$

تمرین: اگر نمودار سهمی f به صورت زیر باشد. ضابطه سهمی را بنویسید.



تمرین: $x = 1$ یکی از صفرهای تابع $f(x) = x^3 - kx^2 - x + 2$ است. k و صفرهای دیگر تابع را بیابید.

راهنمایی: تابع دارای عامل $(x - 1)$ است و با تقسیم می توان عوامل دیگر را یافت.

تمرین: بدون حل معادله و فقط به کمک Δ, P, S تعداد و علامت صفرهای توابع زیر را مشخص کنید.

$$y = x^2 - 7x + 12$$

$$y = 2x^2 - x - 6$$

$$y = x^2 + x + 1$$

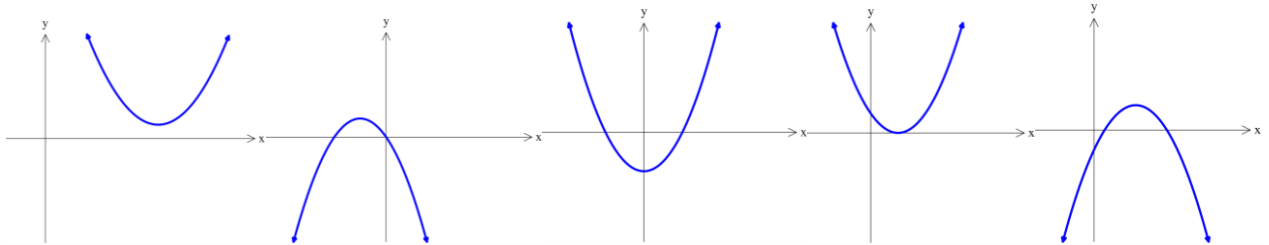
تشخیص علامت ضرایب ضابطه سهمی از روی نمودار آن :

سال قبل فهمیدیم که تو سهمی $f(x) = ax^2 + bx + c$ علامت a بستگی به جهت بازوهای سهمی دارد یعنی اگر بازو ها به سمت بالا باشن a مثبت و اگر به سمت پایین باشن a منفیه .

و از اونجایی که $f(0) = c$ هستش پس در واقع c محل برخورد تابع با محور عرض ها هستش پس می تونیم با نگاه کردن به محل برخورد تابع با محور عرض ها ، علامت c رو تشخیص بدیم .

ولی برای تشخیص علامت b میخوام که شما پیشنهاد خودتون رو بدید راهنمایی من به شما استفاده از طول راس سهمی هستش !!!

تمرین : نمودارهای زیر مربوط به تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ هستند ، علامت ضرایب a, b, c را مشخص کنید .



تمرین : تمرین های صفحه ۱۸ را حل کنید .

درین سوم : معادلات گویا و کنگ

معادلات شامل عبارات های گویا :

در بعضی از معادله ها عبارت های کسری بوجود میاد که صورت و مخرج چند جمله ای هستند . به این نوع معادله ها معادله های گویا می گن . به مساله زیر دقت کنید :

مساله : در یک مغازه ماهی های تزئینی ، برای ننگ داری ماهی های آب شود محلول آب نمک ۵ درصد نیاز است ولی کارگر مبتدی مغازه ۲۰۰ کیلو گرم محلول آب ۳ درصد درست کرده است . اگر در مغازه به اندازه کافی نمک وجود داشته باشد چقدر نمک لازم است تا محلول ۵ درصد شود ؟

بیاید با کمک هم حلش کنیم :

گام اول : وزن نمک و وزن محلول فعلی چقدره ؟

گام دوم : اگر ما x گرم نمک دیگه بهش اضافه کنیم وزن نمک و وزن محلول هر کدوم چقدر میشه ؟

گام سوم : اینکه میگییم محلول ۷ درصد یعنی نسبت چی به چی باید $۰/۰۷$ بشه ؟ درستون رو بنویسید .

گام چهارم : حالا آیا همیشه گفت اینی که بدست اومده معادله گویاست ؟ پیشنهاد من برای حلش اینه که بجوری مخرج ها رو از بین ببریم ، روش شما برای از بین بردن مخرج ها چیه ؟ خوب حلش کنید .

تمرین : مساله قبل رو با فرض اینکه تو مغازه هیچ نمک دیگه ای موجود نباشه و کارگر مغازه مجبور بشه کمی از آب محلول رو تبخیر کنه حلش کنید . یعنی در واقع وزن آبی که باید تبخیر بشه رو بدست بیارین .

نکته: در حل معادلات گویا جوابهایی که مخرج را صفر کنند مورد قبول نیستند.

تمرین: معادلات زیر را حل کنید.

$$\frac{3}{x+2} + \frac{2}{x} = \frac{4x-4}{x^2-4} \quad (\text{الف})$$

$$\frac{1}{(x-2)^2} + \frac{2}{x-2} = 3 \quad (\text{ب})$$

$$\frac{24}{10+x} + 1 = \frac{24}{10-x} \quad (\text{ج})$$

تمرین: به ازای چه مقدار a ، معادله $\frac{a}{a-x} + \frac{a-x}{x} = \frac{a}{x}$ دارای جواب $x=2$ است.

تمرین: دو کارگر کاری را ۱۸ روزه انجام می دهند، اگر هر کدام به تنهایی کار کنند، کارگر اول این کار را ۱۵ روز زودتر از کارگر دوم تمام می کند. هر کدام به تنهایی در چند روز این کار را تمام می کنند؟

تمرین: قطاری یک مسیر ۶۰ کیلومتری را طی می کند ولی در راه برگشت از سرعت خود ۱۰ کیلومتر بر ساعت کاسته و به همین دلیل نیم ساعت دیر تر می رسد. زمان رفت این قطار چقدر بوده است؟

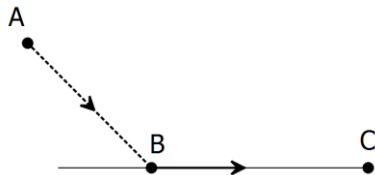
تمرین: با ۱۳۰۰ تومان می توان تعدادی اسباب بازی مشابه خرید و با ۱۰۰ تومان تخفیف با همان پول ۴ اسباب بازی بیشتر می توان خرید. قیمت اسباب بازی قبل از تخفیف چقدر بوده است؟

تمرین: « مصریان باستان معتقد بودند مستطیلی که نسبت طول به عرض آن برابر با نسبت مجموع این دو به طول است زیباترین مستطیل خواهد بود ($\frac{L}{W} = \frac{L+W}{L}$) و این نسبت را در ریاضیات نسبت طلایی می نامند. این نسبت در بیشتر اندامهای بدن و شبکه چشم انسان رعایت شده است و از این نسبت برای ساخت بناهای تاریخی بسیاری استفاده شده است. اگر بخواهیم زمینی با محیط ۱۴۴ متر و نسبت طولی بسازیم طول و عرض آن چقدر باید باشد؟

معادلات شامل عبارات های گنگ :

در بعضی از معادله ها عبارت های رادیکالی بوجود میاد که به این نوع معادله ها معادله های گنگ می گن . به مساله زیر دقت کنید :

مساله : معمولاً مرغای دریایی برای شکار ماهی قسمتی از مسیر خودشونو تو هوا و قسمتیشو



هم رو سطح آب طی می کنن تا کمترین انرژی ممکنو مصرف کنن !!! حالا یه مرغ

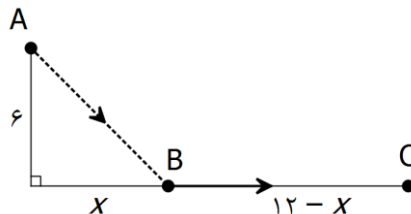
دریای رو تصور کن که مثل شکل پایین میخواد اول تو نقطه B خودشو به سطح

آب برسونه بعدش رو سطح آب تا محل شکار یعنی نقطه C حرکت کنه .

اگر انرژی لازم برای هر متر پرواز در هوا برایشون ۱۴ کیلو کالری و انرژی لازم برای پرواز به موازات سطح آب ۱۰ کیلو کالری باشه و فاصله مرغ دریایی از سطح آب ۶ متر و فاصله افقی از محل شکار ۱۲ متر باشه طبق محاسبه زیست شناسان این پرنده با مصرف ۱۸۰ کیلو کالری به محل شکار میرسه چون این عدد بهینه ترین مقدار مصرف انرژی هستش !!! هدف ما اینه که محاسبه کنیم بینیم نقطه فرود یعنی B تو چه فاصله ای از نقطه شکار یعنی C قرار میگیره ؟؟؟

حالا بیایید با هم مساله رو حل کنیم :

در این مساله اعداد مربوط به فاصله ها ۶ و ۱۲ متره که می تونه تو شکل برای مشخص کردن مجهولات مورد استفاده قرار بگیره .



حالا شما میتونید فاصله AB رو حساب کنید و یه تساوی بنویسید که مجموع انرژی مصرف شده در کل مسیر ۱۸۰ بشه . سوال اصلی من از شما اینه : روش پیشنهادیتون برای حل معادله چیه ؟

نکته : در حل معادلات گنگ جواب ها حتماً باید در معادله صدق کنند در غیر این صورت پذیرفته نیستن چون عمل توان رسانی میتونه جواب های اضافی وارد معادله کنه.

مثلاً: در حل معادله $\sqrt{x+2} = x - 4$ پس از توان رسانی و حل دو جواب ۲ و ۷ بدست می آید که فقط یکی از آنها درست است و آن هم عدد ۷ است زیرا $\sqrt{2+2} \neq 2-4$ ولی $\sqrt{7+2} = 7-4$

تمرین: مختصات نقاطی روی محور x را بیابید که فاصله آنها از نقطه (۳, ۲) برابر ۵ باشد.

تمرین: معادلات زیر را حل کنید.

$$\sqrt{2x+3} + x = 6 \quad (\text{الف})$$

$$\frac{3}{\sqrt{x+1}} + \frac{1}{\sqrt{x-1}} = 2 \quad (\text{ب})$$

$$\sqrt{2x+1} - \sqrt{x} = 1 \quad (\text{ج})$$

$$د) \sqrt{x^2 - 4} + 2\sqrt{x} = 0 \text{ (آیا می توان بدون حل به نتیجه رسید ؟!!!)}$$

تمرین: بدون حل معادله بگویید چرا معادله $\sqrt{x^2 - 4} + 2\sqrt{x} = 0$ ریشه حقیقی ندارد.

تمرین های صفحه ۲۳ و ۲۴ را حل کنید.