

" یالطیف "

آموزش ریاضی ۲

(رشته تجربی)

تالیف وگرد آوری

فرزانه بایمانی

دانلود از سایت ریاضی سرا

www.riazisara.ir



سرشناسه : بایمانی، فرزانه، ۱۳۵۵ -

عنوان و نام پدیدآور : آموزش ریاضی ۲ رشته تجربی / تالیف و گرد آوری :فرزانه بایمانی.

مشخصات نشر : همدان: دانش مانا، ۱۳۹۸.

مشخصات ظاهری : ۲۶۵ صفحه. : مصور، جدول، نمودار

وضعیت فهرست نویسی : فیپای مختصر

شابک : ۹۷۸-۶۰۰-۷۹۰۵-۴۹-۴

شماره کتابشناسی ملی : ۵۴۸۵۶۹۲

عنوان کتاب.....آموزش ریاضی(۲)-رشته تجربی

مؤلف.....فرزانه بایمانی

ناشر..... دانش مانا صفحه آرای و طراحی

جلد.....تبلیغات آپادانا شابک.....۴۹-۴

۹۷۸-۶۰۰-۷۹۰۵-۴۹-۴ شماره گان.....۱۰۰۰ نسخه نوبت

چاپ.....دوم ۹۹-۱۳۹۸

قیمت.....۴۵۰۰۰ تومان

کلیه حقوق این اثر محفوظ و متعلق به نویسنده است

همه می گویند غم گذشته مخور که

گذشت و رفت

اما من اعتقاد دارم

مهمه که گذشته چطور گذشته و رفت

تقدیم به کودکی چون آروین که گریه های

معصومه اش قدرشناسی

را فریاد میزد

فهرست مطالب:

پیشگفتار: ۷

فصل اول : هندسه تحلیلی و جبر ۸

درس اول: هندسه تحلیلی ۹

نکات کلیدی:..... ۲۱

تست:..... ۲۴

تمریناتی برای تلاش بیشتر:..... ۲۶

درس دوم: معادله درجه دوم و تابع درجه ۲ ۲۸

نکات کلیدی:..... ۳۶

تست:..... ۳۸

تمریناتی برای تلاش بیشتر:..... ۴۱

درس سوم: معادلات گویا و معادلات رادیکالی: ۴۲

تمریناتی برای تلاش بیشتر:..... ۴۹

فصل دوم : هندسه ۵۰

درس اول: ترسیم هندسه: ۵۱

نکات کلیدی:..... ۵۴

تست:..... ۵۶

درس دوم: استدلال و قضیه تالس ۵۷

تست:..... ۶۶

تمریناتی برای تلاش بیشتر:..... ۶۸

درس سوم: تشابه مثلث ها ۶۹

تست:..... ۷۴

تمریناتی برای تلاش بیشتر:..... ۷۵

فصل سوم : تابع ۷۶

درس اول: آشنایی با انواع تابع:	۷۷
نکات کلیدی:	۸۶
تست:	۸۷
تمریناتی برای تلاش بیشتر:	۹۰
درس دوم : وارون یک تابع و تابع یک به یک:	۹۱
نکات کلیدی:	۹۶
تست:	۹۷
تمریناتی برای تلاش بیشتر:	۹۸
درس سوم: اعمال جبری روی توابع:	۹۹
تست:	۱۰۳
تمریناتی برای تلاش بیشتر:	۱۰۴
فصل چهارم : مثلثات	۱۰۵
درس اول: واحدهای اندازه گیری زاویه:	۱۰۶
درس دوم : روابط تکمیلی بین نسبتهای مثلثاتی :	۱۱۰
درس سوم توابع مثلثاتی:	۱۱۹
نکات کلیدی:	۱۲۵
تست:	۱۲۷
تمریناتی برای تلاش بیشتر:	۱۲۹
فصل پنجم : توابع نمایی و لگاریتمی	۱۳۰
درس اول: تابع نمایی و ویژگی های آن:	۱۳۱
تست:	۱۳۷
تمریناتی برای تلاش بیشتر:	۱۳۸
درس دوم: تابع لگاریتمی و ویژگی های آن:	۱۳۹
درس سوم: کاربرد توابع نمایی و لگاریتمی:	۱۴۸

تست:..... ۱۴۹

تمریناتی برای تلاش بیشتر:..... ۱۵۱

فصل ششم: حد و پیوستگی ۱۵۲

درس اول: فرآیندهای حدی: ۱۵۳

تمریناتی برای تلاش بیشتر:..... ۱۶۱

درس دوم: محاسبه حد توابع ۱۶۲

تمریناتی برای تلاش بیشتر:..... ۱۶۸

درس سوم: پیوستگی: ۱۶۹

نکات کلیدی:..... ۱۷۲

تست:..... ۱۷۴

تمریناتی برای تلاش بیشتر:..... ۱۷۸

فصل هفتم : آمار و احتمال ۱۷۹

درس اول: احتمال شرطی و پیشامدهای مستقل: ۱۸۰

نکات کلیدی:..... ۱۸۹

تست:..... ۱۹۱

تمریناتی برای تلاش بیشتر:..... ۱۹۴

درس دوم : آمار توصیفی: ۱۹۵

نکات کلیدی:..... ۲۰۳

تست:..... ۲۰۵

تمریناتی برای تلاش بیشتر:..... ۲۱۰

منابع:..... ۲۱۱

پیشگفتار:

دکتر غلامحسین مصاحب در مقدمه ای از کتابش (مجموعه کتابهای علوم پایه- آنالیز ریاضی- جلد اول تئوری اعداد حقیقی چاپ هشتم ۱۳۷۹) چنین میفرماید:

تعمق در استدلال های ریاضی برای پی بردن به گُنه آنها و به عمق احکام ریاضی منتهای ضرورت را دارد، از این راه است که تیزبین میشوید و فکر شما بیدار میشود و صاحب نیروی ابتکار و آماده برای تحقیق می گردید....

از این گفته پدر علم ریاضیات جدید ایران چنین برداشت میشود که تلاش و پیگیری و زحمت کشیدن، برای تحصیل ریاضیات ضروری است پس مطالعه یک یا چندین کتاب که بدون تلاش و تمرین و تکرار انجام شود کمک شایانی به آموزنده ریاضیات نخواهد کرد.

در این مجموعه سعی شده است که علاوه بر آموزش درس در قالب توضیح، مثال، نکات کلیدی و تست تمریناتی برای تلاش بیشتر در پایان هر درس گنجانده شود تا آموزنده روند تلاش و تمرین و تکرار را پیش گیرد و بدین وسیله لبخند شوقی که بر چهره اش می نشیند او را برای تحصیل ریاضیات مصمم تر سازد. ضمن آرزوی توفیق برای همه عزیزان، تقاضا می شود در صورت مشاهده هر نوع اشکال تایپی یا خطای علمی، کوتاهی حقیر را بخشیده و با آدرس: خوزستان، رامهرمز، خیابان شهید چراغزاده، جنب کلانتری ۱۱ - دبیرستان فاطمه زهرا (س) یا تلفن ۰۶۱-۴۳۵۲۲۲۰۷ و ۰۹۱۶۳۹۰۶۸۸۳ نظریات خویش را برای بهبود مسائل آموزشی در اختیار اینجانب قرار دهند.

سپاس از همراهی شما

فصل اول : هندسه تحلیلی و جبر

هندسه تحلیلی

معادله درجه ۲ و تابع درجه ۲

معادلات گویا و معادلات رادیکالی

درس اول: هندسه تحلیلی

یادآوری ۱: از هر دو نقطه متمایز، تنها یک خط عبور می کند بنابراین با داشتن ۲ نقطه از یک خط می توان معادله خط را بدست آورد.

یادآوری ۲: با داشتن معادله خط، می توان مختصات ۲ نقطه از آن را بدست آورد و نمودار آن را در دستگاه مختصات رسم کرد.

یادآوری ۳: شیب یک خط که دو نقطه $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ به آن تعلق دارند از رابطه: $m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ بدست می آید.

مثال: هر گاه خطی از دو نقطه $A(3, -1)$ و $B(1, -2)$ بگذرد معادله آن را بنویسید.

$$m = \frac{-2 - (-1)}{1 - 3} = \frac{-2 + 1}{-2} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{راه اول: } y = mx + h \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + h \xrightarrow[\text{صدق می دهیم}]{\text{نقطه A را در آن}} -1 = \frac{1}{2}(3) + h$$

$$\Rightarrow h = \frac{-1}{1} - \frac{3}{2} \Rightarrow h = \frac{-2-3}{2} = \frac{-5}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$$

$$\text{راه دوم: } y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - (-1) = \frac{1}{2}(x - 3) \Rightarrow y + 1 = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} - 1 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$$

سوال: دو نقطه $A(2, 4)$ و $B(6, 1)$ روی خط L قرار دارند. نمایش جبری خط L را بنویسید.

مثال: معادله خطی را بنویسید که از $A(2, -1)$ بگذرد و دارای شیب $-\frac{1}{2}$ باشد.

$$\text{راه اول: } y = mx + h \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + h \xrightarrow[\text{صدق}]{\text{نقطه A}} -1 = -\frac{1}{2}(2) + h$$

$$\Rightarrow h = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x$$

$$\text{راه دوم: } y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - (-1) = -\frac{1}{2}(x - 2)$$

$$\Rightarrow y + 1 = -\frac{1}{2}x + 1 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x$$

سوال: معادله خطی را بنویسید که از $A(-1, 2)$ بگذرد و دارای شیب $\frac{3}{2}$ باشد.

مثال: معادله خطی را بنویسید که محور طولها را در نقطه ای به طول ۱- قطع کند و شیب آن ۳ باشد.

$$\Rightarrow y = 0 \Rightarrow A(-1, 0)$$

$$y = mx + h \Rightarrow y = \frac{3}{2}x + h \Rightarrow 0 = \frac{3}{2}(-1) + h \Rightarrow h = \frac{3}{2} \Rightarrow y = \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$$

سوال: معادله خطی را بنویسید که محور عرض ها را در نقطه ای به عرض ۲ قطع کند و دارای شیب $\frac{1}{2}$ باشد.

مثال: معادله خطی را بنویسید که محور طولها را در نقطه ای به طول ۲ و محور عرض ها را در نقطه ای به عرض ۳- قطع کند.

$$\Rightarrow y = 0 \Rightarrow A(2, 0)$$

$$\Rightarrow x = 0 \Rightarrow B(0, -3)$$

$$\Rightarrow m = \frac{-3-0}{0-2} \Rightarrow m = \frac{+3}{+2}$$

$$y = mx + h \xrightarrow{\text{صدق } A} 0 = \frac{3}{2} \times 2 + h \Rightarrow h = -3 \Rightarrow y = \frac{3}{2}x - 3$$

سوال: معادله خطی را بنویسید که محور طولها را در نقطه ای به طول ۱ و محور عرضها را در نقطه ای به عرض ۲- قطع کند.

مثال: معادله خطی را بنویسید که از محل تقاطع دو خط $5x + 2y = 19$ و $4x + 3y = 18$ بگذرد و دارای شیب $\frac{1}{3}$ باشد.

$$\begin{cases} 5x + 2y = 19 \\ 4x + 3y = 18 \end{cases} \xrightarrow[\frac{1}{5}]{-\frac{4}{5}x} \begin{cases} -2x - 8y = -76 \\ 20x + 15y = 90 \end{cases} \Rightarrow 7y = 14 \Rightarrow y = 2$$

$$5x + 2y = 19 \xrightarrow{y=2} 5x + 4 = 19 \Rightarrow 5x = 15 \Rightarrow x = 3 \quad A(3, 2)$$

$$y = mx + h \xrightarrow[\text{شیب } \frac{1}{3}]{\text{صدق } A} 2 = \frac{1}{3}(3) + h \Rightarrow h = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$$

سوال: معادله خطی را بنویسید که از محل تقاطع دو خط $2x-3y=1$ و $x+5y=20$ بگذرد و دارای شیب ۳- باشد.

یادآوری ۴: هرگاه شیب های دو خط برابر باشند آنگاه دو خط موازیند

یادآوری ۵: هرگاه حاصل ضرب شیب های دو خط برابر ۱- باشد آنگاه دو خط برهم عمودند به عبارت دیگر شیب هر کدام عکس و قرینه شیب دیگری باشد.

یادآوری ۶: شیب محور طولها و هر خط موازی آن برابر صفر و شیب محور عرضها و هر خط موازی آن تعریف نشده است.

مثال: معادله خطی را بنویسید که از نقطه $A(1, 3)$ گذشته و با خط $2x+3y=6$ موازی باشد.

$$2x+3y=6 \Rightarrow m=\frac{-2}{3}$$

$$\text{راه اول: } y=mx+h \xrightarrow[m=\frac{-2}{3}]{\text{صدق A}} 3=-\frac{2}{3} \times 1 + h \Rightarrow h = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4+2}{3} = \frac{11}{3} \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{11}{3}$$

$$\text{راه دوم: } y-y_1=m(x-x_1) \Rightarrow y-3=-\frac{2}{3}(x-1) \Rightarrow y=-\frac{2}{3}x + \frac{2}{3} + \frac{3}{1} \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{11}{3}$$

توجه: شیب خط به معادله $ax+by+c=0$ از رابطه $m=\frac{\text{ضرب } -x}{\text{ضرب } y}$ محاسبه می شود

سوال: معادله خطی را بنویسید که از نقطه $A(-1, 2)$ گذشته و با خط $4x+2y=1$ موازی باشد.

مثال: معادله خطی را بنویسید که از نقطه $A(\frac{1}{2}, 1)$ گذشته و بر خط $2x-4y+3=0$ عمود باشد.

$$m=\frac{-2}{-4}=\frac{1}{2} \xrightarrow[\text{عکس و قرینه}]{\text{عمود}} m'=-2$$

$$\text{راه اول: } y=m'x+h \xrightarrow[m'=-2]{\text{صدق A}} 1=-2 \times \frac{1}{2} + h \Rightarrow h = 2 \Rightarrow y = -2x+2$$

$$\text{راه دوم: } y-y_1=m(x-x_1) \Rightarrow y-1=-2(x-\frac{1}{2}) \Rightarrow y-1=-2x+1 \Rightarrow y = -2x+1+1 \Rightarrow y = -2x+2$$

سوال: معادله خطی را بنویسید که از نقطه $A(1, 3)$ گذشته و بر خط $3x+2y-1=0$ عمود باشد.

مثال: معادله خطی را بنویسید که از مبدأ مختصات به موازات خط $3y-2x+4=0$ رسم شود.

$$3y - 2x + 4 = 0 \Rightarrow m = \frac{-(-2)}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\text{راه اول: } y = mx + h \xrightarrow[\text{م = } \frac{2}{3}]{\text{صدق مبدأ}} \cdot = \frac{2}{3} \times 0 + h \Rightarrow h = 0 \Rightarrow y = \frac{2}{3}x$$

$$\text{راه دوم: } y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 0 = \frac{2}{3}(x - 0) \Rightarrow y = \frac{2}{3}x$$

توجه: معادله خطی که از مبدأ میگذرند به صورت $y = mx$ می باشد.

سوال: معادله خطی را بنویسید که از مبدأ مختصات به موازات خط $2y - 4x + 1 = 0$ رسم شود.

مثال: معادله خطی را بنویسید که از مبدأ مختصات بر خط $x - 2y + 1 = 0$ عمود شود

$$x - 2y + 1 = 0 \Rightarrow m = \frac{-1}{-2} \xrightarrow[\text{عکس و قرینه}]{\text{عمود}} m' = -2$$

$$\text{راه اول: } y = m'x + h \xrightarrow[\text{m' = -2}]{\text{صدق مبدأ}} \cdot = -2 \times 0 + h \Rightarrow h = 0 \Rightarrow y = -2x$$

$$\text{راه دوم: } y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 0 = -2(x - 0) \Rightarrow y = -2x$$

$$\text{راه سوم: } x - 2y + 1 = 0 \Rightarrow m = \frac{1}{2} \xrightarrow[\text{عکس و قرینه}]{\text{عمود}} m' = -2 \xrightarrow{\text{مبدأ}} y = -2x$$

سوال: معادله خطی را بنویسید که از مبدأ مختصات بر خط $3y - x = 2$ عمود شود

مثال: مقدار k را چنان تعیین کنید که خط های $2kx - 2y = x - k$ و $3x + y = 2 - 4x$ باهم موازی باشند

$$2kx - 2y - x + k = 0 \Rightarrow (2k - 1)x - 2y + k = 0$$

$$\Rightarrow m = \frac{-(2k-1)}{-2}, 3x + y - 2 + 4x = 0 \Rightarrow 7x + y - 2 = 0 \rightarrow m = \frac{-7}{1} = -7$$

$$\text{شرط موازی بودن: } \frac{2k-1}{2} = -7 \Rightarrow 2k-1 = -14 \Rightarrow 2k = -13 \Rightarrow k = \frac{-13}{2}$$

سوال: مقدار a را چنان تعیین کنید که خط های $ax - 3y = 2x + a$ و $2x + y = 5x - 3$ باهم موازی باشند.

مثال: مقدار t را چنان تعیین کنید که دو خط $tx + t = -4y - 3x$ و $3x - 5y + 2 = 0$ برهم عمود باشند.

$$tx + t = -4y - 3x \Rightarrow tx + t + 4y + 3x = 0 \Rightarrow (t+3)x + 4y + t = 0$$

$$\Rightarrow m = \frac{-(t+3)}{4}, 3x - 5y + 2 = 0 \Rightarrow m' = \frac{-3}{-5} \xrightarrow{m = \frac{-1}{m'}} \frac{-(t+3)}{4} = \frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow 3t + 9 = 20 \Rightarrow 3t = 11 \Rightarrow t = \frac{11}{3}$$

سوال: مقدار k را چنان تعیین کنید که دو خط $2x - 4y = 1$ و $kx + y = k + x$ برهم عمود باشند.

مثال: معادله خطی را بنویسید که از محل تقاطع دو خط $2x + y = 2$ و $4x - 2y = 2$ می گذرد و با خط $4x - 8y + 2 = 0$ موازی باشد.

$$\begin{cases} 4x - 2y = 2 \\ 2x + y = 2 \end{cases} \xrightarrow{\times 2} \begin{cases} 4x - 2y = 2 \\ 4x + 2y = 4 \end{cases} \Rightarrow 4x = 6 \Rightarrow x = \frac{6}{4}$$

$$2x + y = 2 \Rightarrow 2 \times \frac{6}{4} + y = 2 \Rightarrow \frac{6}{2} + y = 2 \Rightarrow 2 - \frac{3}{2} = y$$

$$\Rightarrow y = \frac{4-3}{2} = \frac{1}{2}, 4x - 8y + 2 = 0 \rightarrow m = \frac{-4}{-8} = \frac{1}{2}$$

$$y - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left(x - \frac{6}{4} \right) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$$

سوال: معادله خطی را بنویسید که از محل تقاطع دو خط $x + y = 2$ و $x - 2y = 4$ می گذرد و با خط $3x + 6y - 2 = 0$ موازی است

مثال: معادله خطی را بنویسید که از محل تقاطع دو خط $3x - y = 11$ و $x + 2y = 6$ می گذرد و بر خط

$$-4x + 2y - 1 = 0 \text{ عمود است}$$

$$\begin{cases} x + 2y = 6 \\ 3x - y = 11 \end{cases} \xrightarrow{\times 2} \begin{cases} x + 2y = 6 \\ 6x - 2y = 22 \end{cases} \Rightarrow 7x = 28 \Rightarrow x = 4$$

$$x + 2y = 6 \Rightarrow 4 + 2y = 6 \Rightarrow 2y = 2 \Rightarrow y = 1 \rightarrow (4, 1)$$

$$-4x + 2y - 1 = 0 \rightarrow m = \frac{-(-4)}{2} = 2 \xrightarrow[\text{عکس و قرینه}]{\text{عمود}} -\frac{1}{2}$$

$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 4) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + 2 + 1 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + 3$$

سوال: معادله خطی را بنویسید که از محل تقاطع دو خط $2x + 6y = 16$ و $3x - 2y = 2$ بگذرد و بر خط $2x - y = 3$ عمود باشد.

مثال: مثلث $\triangle ABC$ با رئوسهای $A(2, 3)$ و $B(5, 1)$ و $C(1, -3)$ را در نظر بگیرید و معادله ارتفاع وارد بر ضلع AC را محاسبه کنید.

چون ارتفاع وارد بر ضلع AC را میخواهیم پس از رأس $B(5, 1)$ عمود رسم میشود

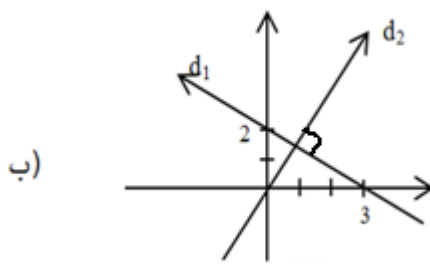
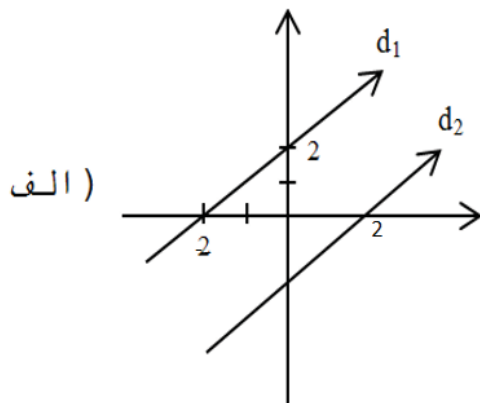
$$A(2, 3), C(1, -3) \Rightarrow m_{AC} = \frac{-3-3}{1-2} = \frac{-6}{-1} = 6 \Rightarrow m' = -\frac{1}{6}$$

$$\text{معادله ارتفاع: } y - y_1 = m'(x - x_1) \Rightarrow y - 1 = -\frac{1}{6}(x - 5)$$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{6}x + \frac{5}{6} + 1 \Rightarrow y = -\frac{1}{6}x + \frac{11}{6}$$

سوال: هرگاه $A(1, 2)$ و $B(3, 2)$ و $C(2, 1)$ رئوسهای یک مثلث باشند معادله ارتفاع وارد بر ضلع BC را بنویسید.

سوال: معادله خط d_2 را در شکل‌های زیر بنویسید



فاصله دو نقطه: هرگاه دو نقطه A و B روی محور طولها باشند:

به طور کلی، بدون آنکه بدانیم از بین A و B کدام نقطه سمت چپ دیگری است داریم:

$$\text{فاصله بین } A \text{ و } B = |x_A - x_B|$$

و بطور کلی هرگاه دو نقطه A و B روی محور عرضها باشند داریم:

$$\text{فاصله بین } A \text{ و } B = |y_A - y_B|$$

توجه: از آنجا که فاصله همواره بزرگتر مساوی صفر است فاصله بین دو نقطه A و B یا طول AB را با نماد $|AB|$ نشان می‌دهیم.

هرگاه دو نقطه $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ دو نقطه در صفحه مختصات باشند طول AB یا همان فاصله A تا B برابر است با:

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

مثال: اگر $A(-3, 4)$ و $B(8, 6)$ در صفحه محورهای مختصات قرار داشته باشند و O مبدا مختصات باشد نشان دهید:

$$OA^2 + OB^2 = AB^2$$

$$OA = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

$$OB = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10$$

$$AB = \sqrt{(8 - (-3))^2 + (6 - 4)^2} = \sqrt{11^2 + 2^2} = \sqrt{121 + 4} = \sqrt{125}$$

$$OA^2 + OB^2 = AB^2 \Rightarrow 5^2 + 10^2 = \sqrt{125}^2 \Rightarrow 25 + 100 = 125$$

بنابراین رابطه درست است.

$$OA = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \quad \text{توجه: فاصله مبدأ مختصات از نقطه } A(x_1, y_1) \text{ برابر است با:}$$

سوال: سه نقطه $A(0, -1)$ و $B(3, 1)$ و $C(2, -4)$ سه رأس یک مثلث اند نوع مثلث را تعیین کنید.

مثال: مقدار k را چنان تعیین کنید که نقاط $A(k-1, 2k+2)$ و $B(-1, 3K+1)$ فاصله ای برابر $\sqrt{5}$ داشته باشند.

$$AB = \sqrt{(-1 - (K-1))^2 + (3K+1 - (2K+2))^2} \Rightarrow$$

$$AB = \sqrt{(-1 - K + 1)^2 + (3K+1 - 2K - 2)^2} \Rightarrow$$

$$\sqrt{5} = \sqrt{(-K)^2 + (K-1)^2} \Rightarrow \sqrt{5} = \sqrt{K^2 + K^2 - 2K + 1} \Rightarrow$$

$$\sqrt{5} = \sqrt{2K^2 - 2K + 1} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 5 = 2K^2 - 2K + 1 \Rightarrow$$

$$2K^2 - 2K + 1 - 5 = 0 \Rightarrow 2K^2 - 2K - 4 = 0 \Rightarrow K^2 - K - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (K-4)(K+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} K - 4 = 0 \Rightarrow K = 4 \xrightarrow{\div 2} K = 2 \\ K + 2 = 0 \Rightarrow K = -2 \xrightarrow{\div 2} K = -1 \end{cases}$$

توجه: معادله $2K^2 - 2K - 4 = 0$ را می توان از راه Δ نیز حل کرد و همین جوابها را بدست آورد.

سوال: هرگاه $A(k+1, 3k+2)$ و $B(2, 2K+1)$ فاصله ای برابر $\sqrt{7}$ داشته باشند مقدار K را محاسبه کنید.

مثال: نقطه ای در ناحیه اول دستگاه مختصات روی خط $y = x$ پیدا کنید که فاصله آن تا مبدأ مختصات برابر $\sqrt{8}$ باشد. (همانگ کشوری- خرداد ۸۰)

چون نقطه روی خط $y = x$ قرار دارد پس طول و عرض آن برابرند $A(x_1, x_1)$ و چون این نقطه در ناحیه اول است طول و عرض آن مثبتند پس:

$$OA = \sqrt{x_1^2 + x_1^2} = \sqrt{2}x_1 = |x|\sqrt{2} = x\sqrt{2}$$

$$x\sqrt{2} = \sqrt{8} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{8}{2}} = \sqrt{4} = 2$$

بنابراین: $A(2, 2)$

سوال: اگر نقاط $A\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right]$ و $B\left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right]$ دو راس مجاور یک لوزی باشند محیط این لوزی را محاسبه کنید.

توجه: محیط لوزی = (طول ضلع) $\times 4$

مختصات نقطه وسط پاره خط:

هرگاه $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ مختصات نقطه وسط پاره خط AB عبارت است از:

$$m\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

مثال: مثلث با رأس های $A(1, 9)$ و $B(3, 1)$ و $C(7, 11)$ را در نظر بگیرید.

الف) طول میانه Am را حساب کنید. (کار در کلاس کتاب درسی)

ب) معادله میانه Am را بنویسید.

الف) میانه ضلع مقابل را نصف می کند بنابراین مختصات m برابر است با:

$$m\left(\frac{7+3}{2}, \frac{11+1}{2}\right) \Rightarrow m(5, 6)$$

$$Am = \sqrt{(5-1)^2 + (6-9)^2} = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{16+9} = 5$$

$$\text{ب) } A(1, 9), m(5, 6) \Rightarrow \text{شیب} = \frac{6-9}{5-1} = \frac{-3}{4}$$

$$y = mx + h \xrightarrow[\text{را صدق } m]{\text{به دلخواه}} 6 = \frac{-3}{4} \times 5 + h \Rightarrow h = \frac{6}{1} + \frac{15}{4} = \frac{24+15}{4} = \frac{39}{4}$$

$$\Rightarrow y = -\frac{3}{4}x + \frac{39}{4}$$

سوال: هرگاه $A(1,2)$ و $B(3,2)$ و $C(-2,1)$ رأسهای یک مثلث باشند.

الف) طول میانه وارد بر ضلع AB را بدست آورید. ب) معادله میانه Cm را بنویسید.

فاصله نقطه از خط:

فاصله نقطه $A(x_1, y_1)$ از خط به معادله $ax+by+c=0$ برابر است با: $d = \frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

توجه: فاصله دو خط موازی $ax+by+c=0$ و $ax+by+c'=0$ برابر است با: $d = \frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

نکته: اگر دو خط موازی باشند ضرایب x و y در یک خط مضربی از ضرایب x و y در خط دیگر است به عبارت دیگر ابتدا x و y را در هر دو خط هم مضرب می کنیم و سپس از فرمول صفحه قبل استفاده می کنیم.

مثال: فاصله دو خط موازی $2x-4y+3=0$ و $4x-8y-5=0$ را محاسبه کنید.

$$2x-4y+3=0 \xrightarrow{\times 2} 4x-8y+6=0, \quad 4x-8y-5=0$$

$$\Rightarrow d = \frac{|6-(-5)|}{\sqrt{4^2+(-8)^2}} = \frac{11}{\sqrt{16+64}} = \frac{11}{\sqrt{80}}$$

سوال: نشان دهید دو خط با معادلات $5x-12y+8=0$ و $-10x+24y+10=0$ با یکدیگر موازی اند و سپس فاصله این دو خط را حساب کنید. (صفحه ۹ کتاب درسی)

مثال: روی محور y نقطه ای بیابید که فاصله اش از خط $2x+y-4=0$ برابر $\sqrt{5}$ باشد.

$x=0 \Rightarrow (0, a)$ روی محور y ها

$$d = \frac{|2 \times 0 + a - 4|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} \Rightarrow \sqrt{5} = \frac{|a - 4|}{\sqrt{5}} \Rightarrow |a - 4| = \sqrt{5}^2 = 5$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a - 4 = 5 \Rightarrow a = 9 \Rightarrow (0, 9) \\ a - 4 = -5 \Rightarrow a = -1 \Rightarrow (0, -1) \end{cases} \quad \text{دو تا نقطه داریم:}$$

سوال: نقطه ای روی محور x ها بیابید که فاصله اش از خط $x-2y+2=0$ برابر $\sqrt{5}$ باشد.

مثال: هرگاه $A(1, 2)$ و $B(3, 2)$ و $C(2, 1)$ رأسهای یک مثلث باشند اندازه ارتفاع وارد بر ضلع BC را محاسبه کنید.

باید معادله BC را بنویسیم و سپس فاصله A تا آنرا محاسبه کنیم.

$$\frac{B(3, 2)}{C(2, 1)} \Rightarrow m = \frac{1-2}{2-3} = \frac{-1}{-1} = 1$$

$$y = mx + h \xrightarrow[\text{را صدق } B, M]{\text{به دلخواه}} 2 = 1 \times 3 + h \Rightarrow h = -1 \Rightarrow y = x - 1 \Rightarrow x - y - 1 = 0$$

$$d = \frac{|1-2-1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \quad \text{اکنون فاصله } A \text{ تا این خط را محاسبه می کنیم: اندازه ارتفاع وارد بر } BC$$

سوال: در مثال فوق اندازه ارتفاع وارد بر ضلع AC را محاسبه کنید.

مثال: یکی از اضلاع مربعی بر خط $2y=3x+1$ واقع است. اگر $A(-4, 1)$ یکی از رئوس این مربع باشد محیط و مساحت آن را بدست آورید.

چون مختصات A در معادله خط صدق نمی کند پس A روی خط قرار ندارد به عبارت دیگر فاصله A تا خط ضلع مربع می شود: پس فاصله نقطه A تا خط $2y-3x-1=0$ محاسبه میکنیم:

$$d = \frac{|2 \times 1 - 3 \times (-4) - 1|}{\sqrt{(-3)^2 + 2^2}} = \frac{|2 + 12 - 1|}{\sqrt{9 + 4}} = \frac{|13|}{\sqrt{13}} = \frac{13}{\sqrt{13}} \times \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{13}} = \sqrt{13}$$

$$(\sqrt{13})^2 = 13 \quad \text{مساحت} \quad 4 \times \sqrt{13} = 4\sqrt{13} \quad \text{محیط}$$

سوال: یکی از اضلاع مربعی بر خط $y = 2x - 1$ واقع است. اگر $A(3, 0)$ یکی از رأسهای این مربع باشد مساحت آن را بدست آورید. (کتاب درسی صفحه ۹)

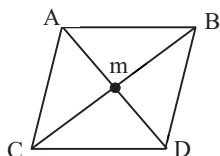
سوال: خط $3x + 2y + 1 = 0$ بر دایره ای به مرکز $O(2, 3)$ مماس است اندازه شعاع دایره را بیابید.

توجه: خط مماس بر دایره بر شعاع گذرنده از نقطه تماس عمود است.

مثال: نقاط $A(2, 1)$ و $B(-2, -1)$ و $C(-1, -1)$ در صفحه xOy می باشند. مختصات D رأس چهارم متوازی الاضلاع $ABCD$ را طوری تعیین کنید که AC و AB دو ضلع مجاور آن باشند.

میدانیم در متوازی الاضلاع قطرهای یکدیگر را نصف می کنند

بنابراین:



$$x_A + x_D = x_B + x_C \Rightarrow 2 + x_D = -2 - 1 \Rightarrow x_D = -5 \rightarrow D(-5, -3)$$

$$y_A + y_D = y_B + y_C \Rightarrow 1 + y_D = -1 - 1 \Rightarrow y_D = -3$$

سوال: قرینه نقطه $C(1, 2)$ نسبت به نقطه $M(-1, 4)$ را بدست آورید. (کتاب درسی صفحه ۷)

توجه: قرینه نقطه $A(x_1, y_1)$ نسبت به نقطه $B(a, b)$ عبارت است از $A'(2a - x_1, 2b - y_1)$

توجه: قرینه نقطه $A(x_1, y_1)$ نسبت به مبدأ عبارت است از $A'(-x_1, -y_1)$

سوال: قرینه نقطه $B(-1, 3)$ را نسبت به نقطه $A(2, 4)$ و همچنین نسبت به مبدأ بدست آورید.

نکات کلیدی:

۱- اگر شیب خطی مثبت باشد می توان نتیجه گرفت که خط با جهت مثبت محور X ها زاویه حاده می سازد . همچنین خط صعودی می باشد و نمودار خط از نواحی اول و سوم می گذرد.

۲- اگر شیب خط منفی باشد خط با جهت مثبت محور X ها زاویه منفرجه میسازد و خط نزولی می باشد . همچنین خط از نواحی دوم و چهارم میگذرد.

۳- شیب هر خط افقی برابر صفر است و برای هر خط قائم (موازی محور Y ها) شیب تعریف نمی شود. مثلاً شیب خط $y=2$ برابر صفر است و برای خط $x=2$ شیب تعریف نمی شود.

۴- برای بدست آوردن عرض از مبدأ یک خط در معادله خط مقدار X را برابر صفر قرار میدهیم.

۵- برای بدست آوردن طول از مبدأ یک خط در معادله خط مقدار Y را برابر صفر قرار میدهیم.

۶- همه خطوطی که طول از مبدأشان مساوی باشد در نقطه ای واقع بر محور طولها همدیگر را قطع می کنند.

۷- همه خطوطی که عرض از مبدأشان مساوی باشد در نقطه ای واقع بر محور عرضها همدیگر را قطع می کنند.

۸- اگر حالت کلی معادله خط به صورت $ax+by+c=0$ باشد آنگاه :

$$\text{شیب} = \frac{-a}{b} \qquad \text{عرض از مبدأ} = \frac{-c}{b} \qquad \text{طول از مبدأ} = \frac{-c}{a}$$

۹- دو خط $ax+by+c=0$ و $a'x+b'y+c'=0$:

الف) برهم منطبق اند هرگاه : $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$

ب) در یک نقطه متقاطعند هرگاه : $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$

ج) دو خط موازیند هرگاه : $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$

۱۰- اگر شیب و طول از مبدأ دو خط برابر باشند آن دو خط برهم منطبق اند.

به عنوان مثال: دو خط $2x-4y+6=0$ و $3x-6y+9=0$ دارای شیب های برابر و طول از مبدأهای برابرند پس برهم منطبق اند.

۱۱- اگر شیب و عرض از مبدأ دو خط برابر باشند آن دو خط برهم منطبق اند.

به عنوان مثال: دو خط $4x-2y+1=0$ و $-12x+6y-3=0$ دارای شیب های برابر و عرض از مبدأهای برابرند پس برهم منطبق اند.

۱۲- اگر طول از مبدأ و عرض از مبدأ یک خط باهم برابر باشند آنگاه بر نیمساز ربع اول و سوم عمود است به عنوان مثال: در خط $3x+3y-2=0$ طول از مبدأ و عرض از مبدأ باهم برابرند پس بر نیمساز ربع اول و سوم عمود است.

۱۳- اگر طول از مبدأ و عرض از مبدأ خطی قرینه باشند آنگاه بر نیمساز ربع دوم و چهارم عمود است. به عنوان مثال: در خط $2x - 2y + 3 = 0$ طول از مبدأ و عرض از مبدأ قرینه یکدیگرند پس بر نیمساز ربع دوم و چهارم عمود است.

۱۴- برای آنکه سه نقطه A و B و C بر یک خط راست واقع باشند باید رابطه $m_{AB} = m_{BC}$ برقرار باشد.

۱۵- اگر زاویه بین دو خط که دارای شیب های m_1 و m_2 می باشند برابر α باشد آنگاه مقدار این زاویه از رابطه $\tan \alpha = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right|$ بدست می آید.

۱۶- معادله خطی که طول از مبدأ آن a و عرض از مبدأ آن b باشد برابر است با:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

۱۷- دو خط موازی $ax + by + c = 0$ و $ax + by + c' = 0$ را در نظر می گیریم. معادله خطی که بین این دو خط و موازی هر دو و به یک فاصله از دو خط باشد از رابطه $ax + by + \frac{c+c'}{2} = 0$ بدست می آید.

۱۸- دو خط موازی $ax + by + c = 0$ و $ax + by + c' = 0$ را در نظر می گیریم.

فاصله این دو خط از رابطه $\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ بدست می آید.

۱۹- فاصله مبدأ مختصات تا خط $ax + by + c = 0$ برابر است با $\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

۲۰- اگر سه نقطه A و B و C تشکیل یک مثلث بدهند نقطه G محل برخورد میانه های آن برابر است با:
 $G \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \right)$

۲۱- اگر نقاط A و B و C سه رأس یک مثلث باشند مساحت مثلث Δ_{ABC} از رابطه زیر بدست می آید:

$$S_{\Delta_{ABC}} = \frac{1}{2} |(x_A - x_B)(y_A - y_C) - (x_A - x_C)(y_A - y_B)|$$

یا

$$S_{\Delta_{ABC}} = \frac{1}{2} |x_A(y_B - y_C) + x_B(y_C - y_A) + x_C(y_A - y_B)|$$

۲۲- اگر طول سه ضلع مثلث را محاسبه کنیم می توانیم از دستور هرون برای محاسبه مساحت مثلث استفاده کنیم. این دستور بیشتر برای زمانی بهتر است استفاده شود که اضلاع اعدادی صحیح یا گویا باشند چون محاسبات راحت

تری دارد. اگر p را نصف محیط مثلث در نظر بگیریم آنگاه:

$$S_{\Delta_{ABC}} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

۲۳- مساحت مثلثی که از تقاطع یک خط با محورها ایجاد می شود:

$$S = \frac{1}{2} \left| \text{عرض از مبدأ} \times \text{طول از مبدأ} \right|$$

۲۴- قرینه یک نقطه مثل $A : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

(۱) نسبت به مبدأ مختصات برابر است با $A' \begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix}$

(۲) نسبت به محور x ها برابر است با $A' \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$

(۳) نسبت به محور عرض ها برابر است با $A' \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}$

(۴) نسبت به خط $x = a$ برابر است با $A' \begin{bmatrix} 2a - x \\ y \end{bmatrix}$

(۵) نسبت به خط $y = b$ برابر است با $A' \begin{bmatrix} x \\ 2b - y \end{bmatrix}$

(۶) نسبت به نیمساز ربع اول و سوم ($y = x$) برابر است با $A' \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$

(۷) نسبت به نیمساز ربع دوم و چهارم ($y = -x$) برابر است با $A' \begin{bmatrix} -y \\ -x \end{bmatrix}$

۲۵- مبدأ دستگاه xoy را به $o'(a,b)$ منتقل می کنیم اگر $A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ در این دستگاه باشد مختصات آن در دستگاه

جدید برابر است با : $\begin{bmatrix} x - a \\ y - b \end{bmatrix}$

تست:

(۱) به ازای کدام مقدار a نقاط $(0,0)$ و $(a,3)$ و $(6,4a+1)$ روی یک خط راست قرار دارند؟ (کنکور تجربی ۸۸ خارج از کشور)

$$(۱) \quad -2, \frac{9}{4} \quad (۲) \quad -2, \frac{3}{4} \quad (۳) \quad 2, -\frac{3}{4} \quad (۴) \quad 2, -\frac{9}{4}$$

گزینه ۴: باتوجه به نکته ۱۴ حل می کنیم:

$$m_{AB} = m_{BC} \Rightarrow \frac{3-0}{a-0} = \frac{4a+1-3}{6-a} \Rightarrow \frac{3}{a} = \frac{4a-2}{6-a} \Rightarrow 4a^2 - 2a = 18 - 3a$$

$$\Rightarrow 4a^2 + a - 18 = 0 \Rightarrow \Delta = 289 \Rightarrow a = \frac{-1 \pm 17}{8} \begin{cases} a = \frac{-18}{8} = -\frac{9}{4} \\ a = \frac{16}{8} = 2 \end{cases}$$

(۲) دایره ای بر دوخط $5x-2y-3=0$ و $2y-5x-6=0$ مماس است کدام گزینه می تواند مرکز دایره باشد؟

$$(۱) \quad (0, -\frac{3}{4}) \quad (۲) \quad (1, \frac{13}{4}) \quad (۳) \quad (\frac{13}{4}, 1) \quad (۴) \quad (-\frac{3}{10}, 0)$$

باتوجه به شبیه دوخط موازیند پس مرکز دایره برخطی مابین این دو و به فاصله یکسان و موازی هر دو خط قرار دارد که معادله این خط بنا به نکته ۱۷ برابر است با:

$$5x-2y-3=0 \xrightarrow{\times -} 2y-5x+3=0 \Rightarrow 2y-5x+\frac{-6+3}{2}=0 \Rightarrow 2y-5x-\frac{3}{2}=0$$

در این معادله گزینه ۴ صدق می کند. در چنین سوالاتی بهتر است اول نقاطی را امتحان کنیم که یکی از مؤلفه های آنها صفر است.

(۳) اگر دو خط $y = (m^2-4)x+1$ و $y = (m^2-5m+6)x$ باهم موازی باشند آنگاه با خط $y=x+1$ چه زاویه ای می سازند؟

$$(۱) \quad 30 \quad (۲) \quad 60 \quad (۳) \quad 90 \quad (۴) \quad 45$$

راهنمایی: ابتدا با توجه به موازی بودن دو خط m را بدست آورید سپس با توجه به نکته ۱۵ حل کنید.

جواب: گزینه ۴

(۴) قرینه خط به معادله $3y-2x=4$ را نسبت به خط $y=x$ خط d می نامیم. عرض از مبدأ خط d کدام است؟

(کنکور ۹۷ تجربی)

(۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۲

باتوجه به نکات: ۴ و ۲۴ حل کنید. پاسخ: گزینه ۱

(۵) فاصله نقطه $lm(x, 2)$ از نقطه $A(3, 6)$ دوبرابر فاصله آن از مبدأ مختصات است. x چه مقادیری می تواند داشته باشد؟

(۱) -۳ و -۱ (۲) ۱ و -۳ (۳) ۳ و -۱ (۴) ۱ و ۳

پاسخ: گزینه ۲

(۶) نقطه $A(3, -1)$ وسط قطر مربعی است که یک ضلع آن منطبق بر خط معادله $2y - x = 5$ می باشد مساحت این مربع کدام است؟ (کنکور تجربی خارج کشور ۹۳)

(۱) ۴۰ (۲) ۷۵ (۳) ۴۵ (۴) ۸۰

فاصله نقطه A از خط $2y - x = 5$ نصف اندازه ضلع مربع است بنابراین: $d = \frac{|2(-1) - 3 - 5|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{10}{\sqrt{5}}$

اگر اندازه ضلع مربع a باشد پس: $d = \frac{a}{2} \Rightarrow a = 2d \Rightarrow a = \frac{20}{\sqrt{5}} \Rightarrow S = \left(\frac{20}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{400}{5} = 80$

(۷) شعاع دایره ای به مرکز $(2, -1)$ و مماس بر خط به معادله $x - y = 1$ برابر است با:

(۱) $\sqrt{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳) $\frac{4}{\sqrt{2}}$ (۴) ۲

(۸) مساحت مثلثی با سه رأس به مختصات $A(2, 5)$ و $B(3, 0)$ و $C(0, 3)$ کدام است؟ (کنکور تجربی خارج کشور ۹۲)

(۱) ۶ (۲) $\frac{6}{5}$ (۳) ۷ (۴) $\frac{7}{5}$

باتوجه به نکته ۲۱ حل کنید.

البته می توان شیب AB ، AC ، BC را بدست آورد و اگر دوتا از آنها عکس و قرینه بودند یعنی برهم عمودند و از فرمول مساحت مثلث قائم الزاویه یعنی نصف حاصلضرب دو ضلع عمود هم مساحت را بدست آورد.

بهتر است هر دو را امتحان کنید. ☺

۱- دو نقطه $A \begin{bmatrix} a-1 \\ 2a \end{bmatrix}$ و $B \begin{bmatrix} 3a+5 \\ a-1 \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید در صورتیکه شیب خط AB برابر ۱ باشد مقدار a را بدست آورید.

۲- نقاط $A \begin{bmatrix} a+1 \\ -2 \end{bmatrix}$ و $B \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ و $C \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$ مفروضند. در صورتیکه شیب خط AB با شیب خط BC برابر باشند مقدار a را تعیین کنید.

۳- مقدار k را طوری بدست آورید که خط

$$2 = -3y + kx \text{ محور طولها را در نقطه ای به طول } \sqrt{2} \text{ قطع کند.}$$

۴- معادله خطی را بنویسید که خط $2x - y = 3$ را در نقطه ای به طول ۲ و خط $3y + x = 1$ را در نقطه ای به عرض ۳ قطع کند.

۵- معادله خطی را بنویسید که از نقطه $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ گذشته و در ربع دوم با محورهای مختصات مثلثی به مساحت ۱ واحد تشکیل دهد.

۶- معادله خطی را بنویسید که از نقطه $A(-1, 2)$ بگذرد و بر خط گذرنده از دو نقطه $B(2, -1)$ و $C(-3, 2)$ عمود باشد.

۷- معادله خطی را بنویسید که از نقطه ای به عرض $\frac{1}{2}$ واقع بر خط $3x - 2y = 5$ بگذرد و با خط $y = -2x + 3$ موازی باشد.

۸- معادله خطی را بنویسید که بر محور x ها عمود باشد و خط $x = 3y + 2$ را در نقطه ای به عرض ۲ قطع کند

۹- خط $0 = (a-1)x + (a+3)y + a - 5$ را در نظر بگیرید. مقدار a را چنان تعیین کنید که این خط :

الف) موازی محور عرض ها باشد. ب) موازی محور طولها باشد.

توجه: خط موازی محور عرضها به صورت $x = k$ و خط موازی محور طولها معادله آن به صورت $y = k$ می باشد.

۱۰- مقدار k را طوری تعیین کنید که نقاط $A(K+2, -4)$ و $B(-2, 3K+1)$ روی خطی واقع شوند که بر خط $x = -5$ عمود است.

۱۱- اگر $A(1, -2)$ و $B(-2, 3)$ و $C(a+1, -4)$ سه رأس مثلث ABC باشند مقدار a را طوری بیابید که ضلع AB بر ضلع BC عمود باشد.

۱۲- فاصله نقطه $(1, -2)$ از خط به معادله

$$5x - 12y - m = 0 \text{ برابر } 5 \text{ واحد است مقدار } m \text{ را بدست آورید.}$$

۱۳- خط d به معادله $3x - 4y - 10 = 0$ مفروض است. چند نقطه روی خط $x + y + 1 = 0$ وجود دارد که فاصله آنها از خط d برابر ۵ باشد؟

۱۴- نقطه $A(-1, 1)$ یک رأس و نقطه $m(2, 1)$ نقطه برخورد قطرهای یک مربع اند مختصات سه رأس دیگر مربع را پیدا کنید.

۱۵- نقاط $A(2, 3)$ و $B(3, 5)$ و $C(-1, 7)$ سه رأس متوازی الاضلاع $ABCD$ هستند. مساحت متوازی الاضلاع را پیدا کنید.

۱۶- مساحت مثلثی را بدست آورید که خط $5x - 2y = 7$ با محورهای مختصات می سازد.

۱۷- دایره ای از دو نقطه $(0, 1)$ و $(3, 0)$ گذشته و معادله یک قطر آن به صورت $x - y = 2$ است. شعاع دایره را بدست آورید

درس دوم: معادله درجه دوم و تابع درجه ۲

حل معادله: سال قبل حل معادلات درجه ۲ رابه روشهای تجزیه، مربع کامل و روش کلی (Δ) آموختیم اما معادلاتی وجود دارند که درجه ۲ نیستند ولی می توان آنها را تبدیل به معادله درجه ۲ کرد و به شیوه معادلات درجه ۲ حل نمود. این تبدیل معادلات به درجات پائینتر به نام روش تغییر متغیر معروف است.

مثال: معادله $X^4 - 8X^2 + 12 = 0$ رابه روش تغییرمتغیر حل کنید.

$$x^2 = u \Rightarrow x^4 = u^2 \Rightarrow u^2 - 8u + 12 = 0.$$

$$\Rightarrow (u-6)(u-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} u-6 = 0 \Rightarrow u = 6 \Rightarrow x^2 = 6 \Rightarrow x = \pm\sqrt{6} \\ u-2 = 0 \Rightarrow u = 2 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$$

سوال: معادلات زیر را به روش تغییر متغیر حل کنید.

الف) $(x^2-1)^4 + (x^2-1)^2 - 2 = 0.$

ب) $x^6 - 3x^2 + 2 = 0.$

ج) $(\frac{x^2}{3}-2)^2 - 7(\frac{x^2}{3}-2) + 6 = 0.$

$$\frac{x^2}{3} - 2 = u \Rightarrow u^2 - 7u + 6 = 0 \Rightarrow (u-1)(u-6) = 0.$$

$$\begin{cases} u-1 = 0 \Rightarrow u = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{3} - 2 = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{3} = 3 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3 \\ u-6 = 0 \Rightarrow u = 6 \Rightarrow \frac{x^2}{3} - 2 = 6 \Rightarrow \frac{x^2}{3} = 8 \Rightarrow x^2 = 24 \Rightarrow x = \pm\sqrt{24} \end{cases}$$

د) $(4-x^2)^2 - 2(4-x^2) - 15 = 0.$

مجموع و حاصل ضرب ریشه های معادله درجه ۲:

معمولا مجموع دو ریشه را با S و حاصلضرب آنها را با p نمایش میدهیم.

اگر α و β ریشه های معادله $ax^2+bx+c=0$ باشند آنگاه داریم:

$$\alpha+\beta = -\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

مثال: معادله درجه دومی بنویسید که ریشه های آن $1 \pm \sqrt{3}$ باشد.

$$\alpha+\beta = S = 1+\sqrt{3}+1-\sqrt{3}=2$$

$$\alpha\beta = p = (1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3}) = 1-3 = -2 \Rightarrow x^2-2x-2=0$$

توجه: هرگاه α و β ریشه های یک معادله باشند آن معادله درجه ۲ را به صورت $x^2-Sx+p=0$ می نویسیم.

سوال: معادله درجه دومی بنویسید که ریشه های آن $\frac{1}{5}$ و $\frac{4}{5}$ باشد.

مثال: اگر α و β ریشه های معادله درجه دوم

$x^2-2x-1=0$ باشند ای بنویسید که ریشه های آن $\frac{1}{\alpha+1}$ و $\frac{1}{\beta+1}$ باشند. (همه‌نگ کشوری خرداد ۹۵ - حسابان)

$$\alpha+\beta = \frac{-b}{a} = \frac{-(-2)}{1} = 2, \quad \alpha.\beta = \frac{c}{a} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$\begin{cases} S = \frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\beta+1} = \frac{\alpha+\beta+2}{\alpha\beta+\alpha+\beta+1} = \frac{2+2}{-1+2+1} = 2 \\ p = \frac{1}{\alpha+1} \times \frac{1}{\beta+1} = \frac{1}{\alpha\beta+\alpha+\beta+1} = \frac{1}{-1+2+1} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow x^2-2x+\frac{1}{2}=0$$

مثال: بدون حل معادله در وجود و علامت ریشه های معادلات زیر بحث کنید.

$$\Delta = 49-100 = -51 < 0 \Rightarrow \text{الف)}$$

معادله $x^2-14x+49=0$ ریشه حقیقی دارد $\Delta = 49+100 = 149 > 0$

$$\Rightarrow \alpha+\beta = \frac{7}{5} \Rightarrow \text{عدد بزرگتر مثبت است}$$

$$\alpha\beta = -1$$

دو ریشه دو علامت متفاوت دارند.

$$\text{ب) } x^2+4x+4=0 \Rightarrow \Delta = 16-16=0$$

* معادله یک ریشه مضاعف دارد.

$$\text{* (۲ ریشه مثل هم هر دو + یا هر دو -) } \quad x_1x_2=4$$

$$x_1+x_2=-4$$

* ریشه مضاعف منفی است (دو ریشه مثل هم منفی اند).

سوال: بدون حل معادله در وجود و علامت ریشه های معادلات زیر بحث کنید.

الف) $-x^2 + 3x - 1 = 0$

ب) $x^2 - 7x + 12 = 0$

سوال: بدون حل معادله و با استفاده از p, S, Δ در وجود و علامت جوابهای معادله $x^2 + x - 5 = 0$ بحث کنید

(هماهنگ کشوری شهریور ۹۴ - حسابان)

سوال: اگر α و β ریشه های معادله $x^2 - 5x + 3 = 0$ باشند بدون یافتن ریشه ها مقدار عددی $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}$ را محاسبه کنید

مثال: اگر α و β ریشه های معادله $x^2 - 2x + m = 0$ باشند و داشته باشیم: $-\frac{1}{4} = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}$

مقدار m را بیابید.

$$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta} = \frac{2^2 - 2 \times m}{m} = \frac{4 - 2m}{m} = -\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow -m = 4 - 2m \Rightarrow 2m = 4 \Rightarrow m = 2$$

سوال: اگر α و β جواب های معادله $x^2 - 3x + 1 = 0$ باشند معادله درجه دومی تشکیل دهید که ریشه های آن دو برابر

ریشه های معادله درجه دوم فوق باشد. (حسابان - ایرانیان استانبول دی ۹۲)

مثال: در معادله $x^2 + mx - 2 = 0$ مقدار m را طوری تعیین کنید که بین ریشه ها رابطه $2\alpha + \beta = 0$ برقرار باشد.

$$\alpha + \beta = \frac{-b}{a} = -m, \quad 2\alpha + \beta = 0 \xRightarrow{\text{تفاضل}} -\alpha = -m \Rightarrow \alpha = m$$

یعنی m ریشه معادله است پس در معادله صدق می کند.

$$x^2 + mx - 2 = 0 \xrightarrow{x=m} m^2 + m^2 - 2 = 0 \Rightarrow 2m^2 = 2 \Rightarrow m^2 = 1 \Rightarrow m = \pm 1$$

سوال: اگر α و β ریشه های معادله $x^2 - 7x + 1 = 0$ باشند بدون حل معادله مقدار عددی رابطه زیر را بدست آورید.

$$(\alpha - 1)^2 + \beta(\beta - 2) =$$

سوال: معادله $x^2 - 5x + 3 = 0$ مفروض است. مطلوب است معادله درجه دومی که ریشه های آن ازدو برابرقرینه ریشه های معادله مذکور یک واحد بیشتر باشند.

$$\alpha + \beta = \frac{-b}{a} = 5, p = \frac{c}{a} = 3$$

اکنون ریشه های معادله جدید $1 - 2\alpha - 2\beta + 1$ و $3 - 2\alpha - 2\beta + 1$ پس:

$$S = (-2\alpha + 1) + (-2\beta + 1) = 2 - 2(\alpha + \beta) = 2 - 2 \times 5 = -8$$

$$p = (1 - 2\alpha)(1 - 2\beta) = 1 - 2(\alpha + \beta) + 4\alpha\beta = 1 - 2 \times 5 + 4 \times 3 = 3$$

$$\Rightarrow x^2 - Sx + p = 0 \Rightarrow x^2 + 8x + 3 = 0.$$

ماگزیمم و می نی مم سهمی:

سهمی باضابطه $y = ax^2 + bx + c$ را در نظر می گیریم، نکات زیر را از سالهای قبل به یاد داریم:

نکته ۱: طول رأس این سهمی $x = -\frac{b}{2a}$ است.

نکته ۲: اگر $a > 0$ ، دهانه سهمی رو به بالاست U و به ازای $x = -\frac{b}{2a}$ کمترین (مینیمم) مقدار سهمی به دست می آید.

نکته ۳: اگر $a < 0$ ، دهانه سهمی رو به پائین است $\cap$ و به ازای $x = -\frac{b}{2a}$ بیشترین (ماکزیمم) مقدار سهمی حاصل می شود.

مثال: هرگاه مقدار مینیمم $y = x^2 - 4x + a$ برابر -8 باشد مقدار a را بدست آورید. (تهران-غیرانتفاعی احمدیه-۸۶)

$$x = -\frac{b}{2a} = \frac{-(-4)}{2} = 2$$

$$f(2) = 2^2 - 4 \times 2 + a \Rightarrow f(2) = 4 - 8 + a = a - 4 \Rightarrow a - 4 = -8 \Rightarrow a = -4$$

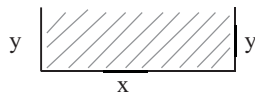
سوال: هرگاه مقدار ماکزیمم $f(x)=x^2-10x+k$ برابر ۴ باشد مقدار k را بدست آورید.

مثال: در معادله $12x^2-6x+3y=-5$ مقدار ماکزیمم یا مینیمم تابع y را محاسبه کنید.

$$3y = -12x^2 + 6x - 5 \Rightarrow y = -4x^2 + 2x - \frac{5}{3}$$

$$x = -\frac{b}{2a} = \frac{-2}{2(-4)} = \frac{1}{4} \Rightarrow y = -4\left(\frac{1}{4}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{5}{3} \Rightarrow y = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{5}{3} = \frac{-6+12-40}{24} = \frac{34}{24} = \frac{-17}{12}$$

مثال: بیشترین مساحت قطعه زمین مستطیل شکل کنار دریا که می توان آن را فقط با ۱۲۰ متر نرده محصور کرد چقدر است؟

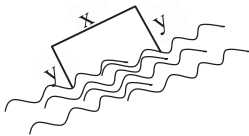


$$x+2y=120 \Rightarrow y = \frac{120-x}{2}$$

$$S = xy = x \times \frac{120-x}{2} = x\left(60 - \frac{x}{2}\right) = -\frac{x^2}{2} + 60x$$

$$\Rightarrow x = \frac{-b}{2a} = \frac{-60}{2 \times -\frac{1}{2}} = 60 \Rightarrow y = \frac{120-60}{2} = 30 \Rightarrow S = xy = 60 \times 30 = 1800$$

سوال: ابعاد مستطیلی که کنار دریا لازم است سه ضلع آن با ۱۰۰ متر نرده محصور شود چقدر باشد تا مساحت آن بیشترین مقدار ممکن گردد. (کتاب درسی کار در کلاس صفحه ۱۵)



سوال: کدام سهمی ماکزیمم و کدامیک مینیمم دارد؟ مقدار آن را محاسبه کنید.

الف) $f(x) = -(x+2)^2 - 1 \Rightarrow$

ب) $f(x) = x^2 - 6x + 5 \Rightarrow$

صفه‌های تابع درجه ۲:

محل برخورد نمودار تابع با محور x ها صفه‌های تابع یا همان ریشه‌های معادله نامیده می‌شود که در این نقاط مقدار تابع برابر صفر است. اگر نمودار $f(x)=0$ ، محور x ها را در دو نقطه قطع کند ۲ جواب و اگر بر محور x ها مماس باشد یک ریشه مضاعف دارد و در صورتیکه محور x ها را قطع نکند جواب ندارد.

توجه: در تابع $y = ax^2 + bx + c$ عدد ثابت c نشان دهنده محل برخورد نمودار آن با محور y هاست به عبارت دیگر اگر نمودار تابع محور y ها را در قسمت مثبت دستگاه مختصات قطع کرد نتیجه می‌گیریم $c > 0$ و اگر نمودار، محور y ها را در قسمت منفی دستگاه مختصات قطع کرد نتیجه می‌گیریم $c < 0$ و اگر از مبدأ مختصات عبور کرد نتیجه می‌گیریم $c = 0$.

توجه: در صورت داشتن نمودار برای نوشتن معادله سهمی از حالت‌های زیر می‌توان بهره برد:

(۱) اگر نمودار سهمی محور x ها را در دو نقطه x_1 و x_2 قطع کرده باشد از معادله $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$ استفاده می‌کنیم و با قرار دادن مختصات نقطه‌ای دیگر مقدار a را محاسبه می‌کنیم.

(۲) اگر نمودار سهمی از مبدأ مختصات بگذرد از معادله $f(x) = ax(x-x_1)$ استفاده کرده و با قرار دادن مختصات نقطه‌ای دیگر مقدار a را محاسبه می‌کنیم.

(۳) اگر نمودار سهمی بر محور x ها مماس باشد از معادله $f(x) = a(x-x_1)^2$ استفاده کرده و با قرار دادن مختصات نقطه‌ای دیگر مقدار a را محاسبه می‌کنیم.

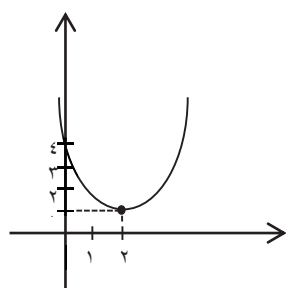
(۴) درحالتی که رأس سهمی مشخص است و محور x ها را قطع نکرده از فرم $y = a(x-h)^2 + k$ استفاده می‌کنیم و با استفاده از نقطه دیگر مقدار a را بدست می‌آوریم

توجه ۱: شماره ۲ و ۳ در واقع حالت خاصی از شماره ۱ هستند و از همان فرمول شماره ۱ هم حل میشوند.

توجه ۲: در حالت کلی میتوان با توجه به نمودار، مختصات نقاط مشخص را در نظر گرفته و از معادله

$$f(x) = ax^2 + bx + c \text{ استفاده کرد تا معادله سهمی را نوشت.}$$

مثال: معادله سهمی مقابل را بنویسید.



$$\text{رأس سهمی} : x = -\frac{b}{2a} \Rightarrow 2 = -\frac{b}{2a} \Rightarrow b = -4a \quad \textcircled{1}$$

$$(2, 1) \xrightarrow{f(x) = ax^2 + bx + c} 1 = 4a + 2b + c$$

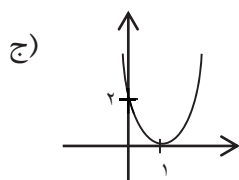
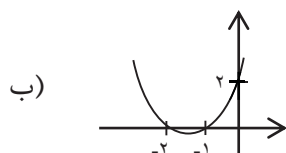
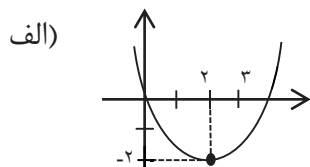
از طرفی چون نمودار محور y ها را در عرض ۴ قطع کرده است پس $c = 4$

$$\Rightarrow 4a + 2b + 4 = 1 \xrightarrow{\textcircled{1}} 4a - 8a + 4 = 1 \Rightarrow -4a = -3$$

$$\Rightarrow a = \frac{-3}{-4}, \quad b = -4 \times \frac{3}{4} = -3 \quad \Rightarrow f(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3x + 4$$

دانش آموزان عزیزاز شماره ۴ استفاده کنید ومثال را دوباره حل کنیدخواهید دید به همان جواب میرسید

سوال: معادله سهمی های زیر را بنویسید.



مثال: در شکل زیر سهمی به معادله $p(x) = ax^2 + bx + c$ داده شده است. علامت ضرایب a و b و c و تعداد جواب های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ را تعیین کنید. (حسابان خرداد ۹۲)

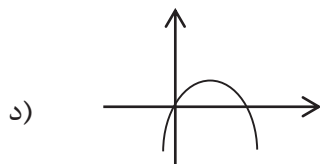
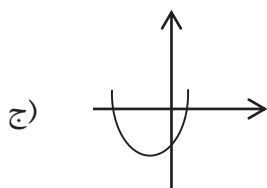
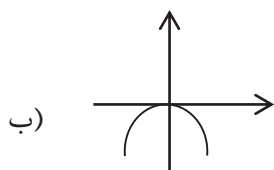
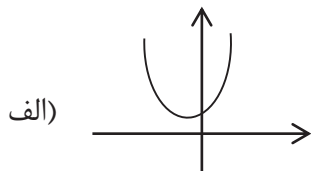


چون محور x ها را در دو نقطه قطع کرده پس معادله ۲ جواب دارد. نمودار رو به پائین است بنابراین در نهایت محور y ها در قسمت منفی ها قطع می شود یعنی $c < 0$ ، نمودار ماکزیمم دارد پس $a < 0$

چون رأس سهمی در قسمت منفی هاست (محور X ها) پس:

$$x = -\frac{b}{2a} < 0 \Rightarrow b < 0$$

سوال: در سهمی های داده شده علامت ضرایب a و b و c و تعداد جواب های معادله $ax^2+bx+c=0$ را تعیین کنید.



بیندیشیم:

امید

شخصی را به جهنم می بردند. در راه برمیگشت و به عقب خیره میشد. ناگهان خدا فرمود: او را به بهشت ببرید

فرشتگان پرسیدند: خداوند! چرا؟

پروردگار فرمود: او چند بار به عقب نگاه کرد... او **امید** به بخشش داشت...

نکات کلیدی:

(۱) ویژگی های معادله درجه دوم: $ax^2+bx+c=0$

(الف) اگر $c=0$ باشد یک ریشه صفر است و ریشه دیگر برابر $-\frac{b}{a}$ می باشد.

(ب) اگر $b=0$ معادله ۲ ریشه قرینه دارد.

(ج) اگر جای a و c را عوض کنیم ریشه ها عکس ریشه های معادله اصلی می شوند.

(د) اگر جای a و c را عوض و هر دو را قرینه کنیم ریشه ها عکس و قرینه ریشه های معادله اصلی می شوند.

(ه) اگر $a+b+c=0$ در این صورت یکی از ریشه ها 1 و دیگری برابر $\frac{c}{a}$ است.

(ی) اگر $a+c=b$ در این صورت یکی از ریشه ها -1 و دیگری برابر $-\frac{c}{a}$ است.

(۲) با توجه به نکته ۱ با فرض معادله $ax^2+bx+c=0$

(الف) اگر بخواهیم معادله ای بنویسیم که ریشه هایش قرینه ریشه های آن معادله باشند کافیست علامت b را قرینه کنیم.

(ب) اگر بخواهیم معادله ای بنویسیم که ریشه هایش عکس ریشه های آن معادله باشند جای a و c را عوض می کنیم.

(ج) اگر بخواهیم معادله ای بنویسیم که ریشه هایش k برابر ریشه های آن معادله باشند ضریب x را در k و مقدار ثابت را در k^2 ضرب می کنیم.

(د) اگر بخواهیم معادله ای بنویسیم که ریشه هایش k واحد بیشتر از ریشه های آن معادله باشند در معادله x را به $x-k$ تبدیل می کنیم.

(ه) اگر بخواهیم معادله ای بنویسیم که ریشه هایش k واحد کمتر از ریشه های آن معادله باشند در معادله x را به $x+k$ تبدیل می کنیم.

(ی) اگر بخواهیم معادله ای بنویسیم که ریشه هایش عکس و قرینه معادله اصلی شوند جای a و c را عوض می کنیم و علامت b را قرینه می کنیم یا اینکه : جای a و c را عوض و هر دو را قرینه می کنیم.

(۳) هرگاه در معادله $ax^2+bx+c=0$ جمع و ضرب دو ریشه را به صورت S و p تعریف کنیم که $S=-\frac{b}{a}$ و $p=\frac{c}{a}$ بهتر است روابط زیر را به ذهن بسپاریم:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{S}{p} (a)$$

$$x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2p \quad (c)$$

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{S^2 - 2P}{p^2} \quad (b)$$

$$x_1^3 + x_2^3 = S^3 - 3pS \quad (d)$$

$$x_1^4 + x_2^4 = (S^2 - 2p)^2 - 2p^2 \quad (e)$$

$$x_1^6 + x_2^6 = (S^3 - 3ps)^2 - 3p^3 \quad (f)$$

$$\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = \sqrt{S + 2\sqrt{p}} \quad (g)$$

$$|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \sqrt{S^2 - 4p} \quad (h)$$

توجه: روابط a, c, d, h کاربرد بیشتری دارند

$$y = ax^2 + bx + c \quad \text{در سهمی (۴)}$$

(الف) اگر $a > 0$ سهمی رو به بالا و دارای مینیمم است.

(ب) اگر $a < 0$ سهمی رو به پائین و دارای ماکزیمم است.

(پ) مختصات رأس سهمی $S(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a})$ می باشد.

(ت) اگر $\Delta = 0$ و $a > 0$ در اینصورت سهمی بالای محور x ها و بر آن مماس است.

(ث) اگر $\Delta = 0$ و $a < 0$ در اینصورت سهمی پائین محور x ها و بر آن مماس است.

(ج) اگر $\Delta < 0$ و $a < 0$ سهمی همواره پائین محور x هاست.

(ح) اگر $\Delta < 0$ و $a > 0$ سهمی همواره بالای محور x هاست.

(۵) هرگاه $\frac{c}{a} < 0$ باشد یعنی دو ریشه مختلف علامه دارد پس از چهار ناحیه دستگاه مختصات عبور می کند.

(۶) در حالتی که معادله سهمی به صورت $f(x) = a(x-h)^2 + k$ باشد رأس سهمی یا همان نقطه ماکزیمم (یا مینیمم) برابر است با $S(h, k)$

(۷) در حالتی که معادله سهمی به صورت

$$f(x) = a(x-x_1)(x-x_2) \quad \text{باشد رأس سهمی یا همان نقطه ماکزیمم (یا مینیمم) برابر است با}$$

$$S(\frac{x_1+x_2}{2}, f(\frac{x_1+x_2}{2}))$$

(۸) هرگاه حاصلضرب ریشه های یک معادله درجه ۲ برابر ۱ باشد نتیجه میگیریم دو ریشه عکس یکدیگرند.

تست:

۱- به ازای کدام مقادیر a معادله درجه دوم

$$2x^2 + ax + a - \frac{3}{4} = 0 \text{ دارای دو ریشه حقیقی متمایز است؟ (کنکور تجربی ۸۱)}$$

$$(1) a > 2 \text{ یا } a < 2 \quad (2) a > 4 \text{ یا } a < 3 \quad (3) 2 < a < 6 \quad (4) 3 < a < 4$$

$$\Delta > 0 \Rightarrow a^2 - 4(2)(a - \frac{3}{4}) > 0 \Rightarrow a^2 - 8a + 12 > 0 \quad \text{گزینه ی ۱:}$$

$$a^2 - 8a + 12 = 0 \Rightarrow (a-2)(a-6) = 0 \quad \begin{cases} a = 2 \\ a = 6 \end{cases}$$

اگر جدول تعیین علامت را تصور کنیم بین دوریشه، مخالف یعنی منفی می شود و طرفین، مثبت می شود که مد نظر صورت سوال است ($\Delta > 0$) یعنی $a > 6$ یا $a < 2$

(۲) به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، معادله درجه دوم $2x^2 + (m+1)x + \frac{1}{4}m + 2 = 0$ فاقد ریشه حقیقی است؟ (کنکور تجربی خارج از کشور ۸۹)

$$(1) -3 < m < 5 \quad (2) -3 < m < 4 \quad (3) -2 < m < 4 \quad (4) -1 < m < 5$$

جواب: گزینه ۱

(۳) معادله $(x^2 - 2x)^2 - (x^2 - 2x) = 2$ چند ریشه حقیقی متمایز دارد؟ (کنکور ریاضی ۹۷)

$$(1) 1 \quad (2) 2 \quad (3) 3 \quad (4) 4$$

جواب: گزینه ۳

(۴) به ازای کدام مقادیر m ، معادله درجه دوم

$$(m-6)x^2 - 2mx - 3 = 0 \text{ دارای دو ریشه حقیقی منفی است؟ (کنکور تجربی ۹۷)}$$

$$(1) m < -6 \quad (2) m > 3 \quad (3) 0 < m < 3 \quad (4) 3 < m < 6$$

گزینه ۴: شرایط $\Delta > 0$, $\frac{-b}{a} < 0$, $\frac{c}{a} > 0$ را اعمال کنید و بین ۳ مجموعه جواب بدست آمده اشتراک بگیرید.

۵) به ازای کدام مقدار a معادله درجه دوم $x^2 - 2(a-2)x + 14 - a = 0$ دارای دو ریشه مثبت است؟ (کنکور ریاضی ۹۶)

(۱) $-2 < a < 2$ (۲) $2 < a < 5$ (۳) $2 < a < 14$ (۴) $5 < a < 14$

جواب: گزینه ۴

شرط های $\Delta > 0$, $S > 0$, $p > 0$ را اعمال کنید و بین ۳ مجموعه جواب بدست آمده اشتراک بگذارید.

۶) به ازای کدام مقدار m مجموع جذر هر دو ریشه معادله $x^2 - (m+1)x + \frac{1}{\lambda} = 0$ برابر ۲ می باشد؟ (کنکور ریاضی ۹۶)

(۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

$$k = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} \Rightarrow k^2 = \alpha + 2\sqrt{\alpha\beta} + \beta \Rightarrow k^2 = S + 2\sqrt{p} \Rightarrow \frac{m+1}{2} + 2\sqrt{\frac{1}{16}}$$

$$\Rightarrow \frac{m+1}{2} + \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{m+1}{2} = \frac{7}{2} \Rightarrow m = 6$$

۷) مجموعه ریشه های حقیقی معادله $(x^2+x)^2 - 18(x^2+x) + 72 = 0$ کدام است؟ (کنکور تجربی ۹۰)

(۱) -۴ (۲) -۲ (۳) ۲ (۴) ۴

$$x^2 + x = t \Rightarrow t^2 - 18t + 72 = 0 \Rightarrow (t-12)(t-6) = 0$$

$$t = 12 \Rightarrow x^2 + x = 12 \Rightarrow x^2 + x - 12 = 0 \Rightarrow x = -4, x = 3$$

$$t = 6 \Rightarrow x^2 + x = 6 \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow x = -3, x = 2$$

بنابراین: $-4 + 3 - 3 + 2 = -2$

۸) در معادله درجه دوم $2x^2 + ax + 9 = 0$ یک ریشه دو برابر ریشه دیگر است. مجموع دو ریشه مثبت کدام است؟ (کنکور تجربی خارج کشور ۸۴)

(۱) ۳/۵ (۲) ۴ (۳) ۴/۵ (۴) ۵

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a} \Rightarrow x_1 x_2 = \frac{9}{2} \Rightarrow 2x_1 x_2 = \frac{9}{2} \Rightarrow x_1^2 = \frac{9}{4}$$

$$\xRightarrow{\text{ریشه های مثبت}} x_1 = \frac{3}{2} \Rightarrow x_1 = 2 \times \frac{3}{2} = 3 \Rightarrow 3 + \frac{3}{2} = \frac{3}{2} = \frac{4}{5}$$

۹) اگر α و β ریشه های معادله $x(5x+3)=2$ باشند به ازای کدام مقدار k مجموعه جواب های معادله $4x^2-kx+25=0$ به صورت $\{\frac{1}{\alpha^2}, \frac{1}{\beta^2}\}$ است (کنکور ریاضی ۹۰)

۲۷ (۱) ۲۸ (۲) ۲۹ (۳) ۳۱ (۴)

جواب: گزینه ۳ راهنمایی: از نکته ۱ قسمت ه وی استفاده کنید.

۱۰) اگر α و β ریشه های معادله $4x^2-12x+1=0$ باشند مقدار $\frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}}$ چقدر است؟ (کنکور ریاضی ۸۵)

۲ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴)

جواب: گزینه ۳

۱۱) در معادله $x^2-8x+m=0$ یک ریشه از نصف ریشه دیگر ۵ واحد بیشتر است مقدار m کدام است؟ (کنکور ریاضی خارج کشور ۹۱)

۱۰ (۱) ۱۲ (۲) ۱۴ (۳) ۱۵ (۴)

جواب: گزینه ۲

۱۲) بیشترین مساحت زمینی که می توان توسط یک طناب به طول ۸۸ متر و به شکل مستطیلی که یک طرف آن رودخانه است محصور نمود چند متر مربع است؟ (کنکور ریاضی خارج کشور ۹۱)

۹۵۸ (۱) ۹۶۸ (۲) ۹۷۸ (۳) ۹۸۸ (۴)

جواب: گزینه ۲

تمریناتی برای تلاش بیشتر:

۱) اگر α و β ریشه های معادله $x^2 + 2x - 5 = 0$ باشند مقدار عددی $\alpha^3\beta + \alpha\beta^3$ را محاسبه کنید.

۲) در معادله درجه دوم $4x^2 - 16x + m = 0$ یکی از ریشه ها دو واحد بیشتر از ریشه دیگر است مقدار m و هر دو ریشه معادله را بیابید.

۳) اگر α و β ریشه های معادله درجه دوم $x^2 - 4x + 1 = 0$ باشند بدون حل معادله مقدار عددی عبارت $\alpha^2 + \frac{1}{\alpha} + \beta^2 + \frac{1}{\beta}$ را تعیین کنید.

۴) اگر α و β ریشه های معادله $mx^2 - 2x - (4m+1) = 0$ باشند و داشته باشیم: $\alpha(1+\alpha) + \beta(1+\beta) = 11$ مقدار m را بیابید.

۵) اگر α و β ریشه های معادله $x^2 - 7x + 4 = 0$ باشند بدون محاسبه α و β مقدار عددی $\alpha\sqrt{\beta} + \beta\sqrt{\alpha}$ را تعیین کنید

۶) اگر α و β ریشه های معادله $x^2 + 4x - 3 = 0$ باشند بدون حل معادله حاصل عبارت $A = \frac{\alpha^3\beta + \alpha\beta^3}{(\alpha^2 + 4\alpha - 2)(\beta^2 + 4\beta - 2)}$ را بیابید. (قائم شهر فرزندگان)

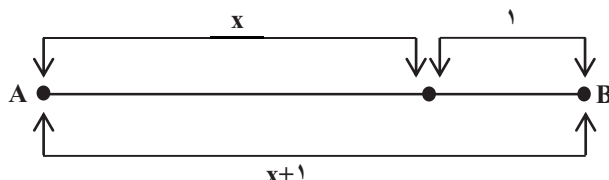
۷) معادله درجه دومی تشکیل دهید که ریشه های آن از ۳ برابر عکس ریشه های معادله $x^2 + 6x + 2 = 0$ دو واحد بیشتر باشد.

۸) در معادله درجه دوم $(m+1)x^2 - (m+4)x + 3m - 1 = 0$ مقدار m را چنان تعیین کنید که ریشه های معادله معکوس یکدیگر باشند.

۹) معادله درجه دومی تشکیل دهید که ریشه های آن ۴ واحد بیشتر از ریشه های معادله $x^2 - 5x + 6 = 0$ باشند.

درس سوم: معادلات گویا و معادلات رادیکالی:

نسبت طلایی: (Golden ratio) : این نسبت در ریاضیات و هنر هنگامی رخ میدهد که نسبت بخش بزرگتر به بخش کوچکتر برابر با نسبت کل به بخش بزرگتر باشد.



$$\frac{x+1}{x} = \frac{x}{1} \Rightarrow x^2 = x+1 \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 5$$

$$x = \frac{+1 \pm \sqrt{5}}{2} \begin{cases} x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ نسبت طلایی} \\ x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

عدد $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1/618$ به عدد طلایی معروف است.

خواندنی: عدد $1/618$ یکی از زیبایی های دنیای ریاضی است که در گوشه و کنار این دنیای بزرگ از اندام های بدن انسان تا آثار برجسته و مشهور هنری و معماری در سطح دنیا و حتی نحوه ی رشد دانه های گل آفتابگردان می توان ردپایی از آن پیدا کرد. عدد طلایی یا نسبت طلایی $1/618$ حاصل تلاش دانشمندانی از جمله اقلیدس ، لوکا پاشیولی و لئوناردو فیبوناتچی است. محققان بر این باورند زیباترین سطوح و اشکال آنهایی است که نسبت طلایی در آنها به کار رفته باشد. اجسام و اشیایی که با این نسبت ساخته می شوند دارای تقارن و زیبایی خاصی هستند که از نظر چشم انسان بسیار زیبا جلوه گر می شوند. حوزه های مختلف وجود نسبت طلایی:

۱- اگر در پاره خطی ، نسبت قسمت بزرگتر به کوچکتر برابر با نسبت کل خط به قسمت بزرگ باشد این نسبت قطعا عدد طلایی و برابر $1/618$ می باشد.

۲- تعریف دیگر از این قرار است که عدد طلایی عددی (ثابت) مثبت است که اگر به آن یک واحد اضافه کنیم ، به مربع آن خواهیم رسید ($a^2 = a+1$) تعبیر هندسی این مورد مستطیل طلایی می باشد که عبارت است از مستطیلی به مساحت واحد که عرض آن یک واحد کمتر از طول آن است.

۳- یکی دیگر از حوزه هایی که نشانی از نسبت طلایی در آن پیدا می کنید دنباله فیبوناتچی است. در این دنباله که عبارت است از

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \dots$$

اگر اعداد پس از ۲ را در نظر بگیریم و هرکدام را به عدد ماقبل خود تقسیم کنیم شاهد اعدادی بسیار نزدیک به عدد نسبت طلایی یا $1/618$ خواهیم بود. هرچه بیشتر این تقسیم را ادامه دهیم عدد حاصل به نسبت طلایی نزدیکتر می شود.

نحوه ترسیم مستطیل طلایی و مارپیچ طلایی یا فیبوناتچی: از رأس (گوشه) هر مربع یک کمان به شعاعی برابر ضلع آن مربع رسم می کنیم. به این مارپیچ به دست آمده اسپیرال لگاریتمی هم گفته می شود.

* در بسیاری از ساختارهای هستی از مارپیچ های دی ان ای گرفته تا مارپیچ گوش انسان ، حلزون ، ساختار مارپیچی کهکشان ها و تمام زیبایی های طبیعت از جمله برگ های درختان ، خطوط و نقش و رنگ روی پره های طاووس و مارپیچ های آفتابگردان این نسبت رعایت شده است.

* این عدد در معماری باستان و معاصر ایران و جهان نیز کاربرد دارد. از جمله می توان به هرم جیزا در مصر ، برج آزادی در تهران ، قلعه دالاهو در کرمانشاه ، بنای بیستون کرمانشاه و مقبره ابن سینا در همدان اشاره کرد. برای مثال ابعاد بنای بیستون کرمانشاه پنج کیلومتر در سه کیلومتر ذکر شده که اعداد چهارم و پنجم دنباله فیبوناتچی اند. با تقسیم این دو عدد به عدد $\frac{1}{6}$ می رسیم که بسیار نزدیک به عدد طلایی است.

* این عدد در بدن انسان نیز بسیار کاربرد دارد. زیبایی چهره ، زیبایی خنده ، تناسب اندام و خوش تیپی همه و همه از شاهکارهای الهی در آفرینش انسان است. اگر نگاهی به تاریخچه عدد طلایی بیندازید می بینید لئوناردو داوینچی اولین نفری است که نسبت دقیق استخوان های انسان را اندازه گیری و ثابت کرد این نسبت ضریبی از عدد طلایی است. در سنجش تناسب اندام خود می توانید فاصله انگشتان پا تا ناف را بر فاصله ناف تا بالای سر تقسیم و حاصل را با عدد $\frac{1}{618}$ مقایسه کنید. هرچه این عدد به $\frac{1}{618}$ نزدیکتر باشد به این معنی است که تناسب اندام خوبی دارید. چنین نشانه هایی که در آنها می توان به نسبت طلایی رسید در بدن انسان بسیار زیاد است.

* کاربرد نسبت طلایی در معماری ایرانی:

۱- **برج و میدان آزادی** : طول بنا ۶۳ و عرض آن ۴۲ است که $\frac{63}{42} = 1,5$ و به عدد طلایی نزدیک می باشد. سبک معماری آن نیز طاق بزرگی است که تلفیقی از سبک هخامنشی و ساسانی و اسلامی است که منحنی آن با الهام از طاق کسری معماری ایران باستان را تداعی می نماید.

۲- **قلعه دالاهو، کرمانشاه**: خطی از استحکامات به طول دو و نیم کیلومتر و عرض چهار متر با قلوه و لاشه سنگ به همراه ملات دیوار گچ را می سازد. سرتاسر نمای خارجی این دیوار با مجموعه ای از برج های نیم دایره ای شکل تقویت شده است. می دانیم $\frac{4}{2,5} = 1,6$ که همان عدد طلایی است.

۳- **بیستون از دوره هخامنشی**: به طول ۵ کیلومتر و عرض ۳ کیلومتر است. که $\frac{5}{3} = 1,6$ و ابعاد برجسته کاری ۱۸ در ۱۰ پاست که قامت داریوش ۵ پا و ۸ اینچ (۱۷۰ cm) بلندی دارد که هر دو اعداد فیبوناتچی هستند.

۴- یکی از هنرهای معماری در تخت جمشید این است که نسبت ارتفاع سر درها به عرض آنها و همین طور نسبت ارتفاع ستون ها به فاصله بین دو ستون نسبت طلایی است. نسبت طلایی نسبت مهمی در هندسه است که در طبیعت وجود دارد. این نشانگر هنر ایرانیان باستان در معماری است.

۵- **پل ورسک در مازندران**: این پل بر روی رودخانه ورسک در مجاورت سواد کوه بنا شد. بلندی این پل ۱۱۰ متر است و طول قوس آن ۶۶ متر می باشد. ($\frac{110}{66} = 1,6$)

۶- **مقبره ابن سینا**: آرامگاه در وسط تالاری مربع شکل قرار گرفته که پله مدور (مارپیچ فیبوناتچی) و پایه های دوازده گانه برج را احاطه کرده اند. سطح حیاط با سه پله سراسری به ایوان متصل است. ایوان با دری به ارتفاع ۳,۲ متر و عرض ۱,۹ متر به سرسرای آرامگاه متصل است ($\frac{3,2}{1,9} = \frac{1}{6}$)

در دو طرف سرسرا دو تالار قرار دارد یکی در جنوب که تالار سخنرانی و اجتماعات است و یکی در شمال که کتابخانه آرامگاه است. طول تالار کتابخانه ۹/۴۵ متر و عرض آن ۵/۷۵ متر است ($۹/۴۵ \div ۵/۷۵ = ۱/۶$)

۷- **ارگ بم:** این بنا ۳۰۰ متر طول و ۲۰۰ متر عرض داشته و از ۲ قسمت تشکیل شده است. این دژ ۵ شیوه ساختاری از خشت خام دارد (۳ و ۲ و ۵ اعداد دنباله فیبوناتچی هستند).

۸- **میدان نقش جهان و مسجد لطف‌الله:** در کتب اخیر، نویسندگان: جیسون الیوت بر این باور است که نسبت طلایی توسط طراحان میدان نقش جهان و در مجاورت مسجد لطف‌الله مورد استفاده قرار گرفته است.

۹- **خوشنویی میرعماد حسنی:** با بررسی اکثریت قاطع حروف و کلمات میرعماد متوجه می‌شویم که این نسبت به عنوان یک الگو در تار و پود حروف و واژه‌ها وجود دارد و زاویه $۶۳/۴۴۸$ درجه که مبنای ترسیم مستطیل طلایی است در شروع قلم‌گذاری و ادامه رانش قلم، حضوری تعیین‌کننده دارد.

حل معادلات گویا: ابتدا مخرج ها را تجزیه می کنیم و سپس دو طرف تساوی را در کوچک ترین مضرب مشترک (ک م م) مخرج ها ضرب می کنیم تا معادله از شکل کسری خارج شود و سپس به شیوه های آموخته شده

(تجزیه Δ ، مربع کامل و ...) آن را حل می کنیم.

توجه: جواب های بدست آمده نباید مخرج کسر را صفر کنند و همچنین این جوابها باید در معادله اولیه صدق کنند در غیر اینصورت قابل قبول نیستند.

توجه: می توان ابتدا دامنه معادله گویا را یافت و سپس اگر جواب معادله در دامنه وجود داشت قابل قبول و در غیر اینصورت قابل قبول نیست.

مثال: معادلات گویای زیر را حل کنید.

$$\begin{aligned} \text{الف)} \quad \frac{2x+3}{x-1} - \frac{2x-3}{x+1} &= \frac{10}{x^2-1} \\ \text{ک م م : } (x-1)(x+1) \Rightarrow \frac{2x+3}{x-1} - \frac{2x-3}{x+1} &= \frac{10}{(x-1)(x+1)} \\ \Rightarrow \frac{(2x+3)(x+1) - (2x-3)(x-1)}{(x-1)(x+1)} &= \frac{10}{(x-1)(x+1)} \\ \Rightarrow 2x^2 + 2x + 3x + 3 - 2x^2 + 2x - 3x + 3 &= 10 \Rightarrow 10x = 10 \Rightarrow x = 1 \end{aligned}$$

چون مخرج کسر اول را صفر می کند قابل قبول نیست.

$$\text{ب)} \quad \frac{2x+3}{2x-2} - \frac{5}{x^2-1} = \frac{2x-3}{2x+2} \quad 2x-2=2(x-1), \quad x^2-1=(x-1)(x+1)$$

$$2x+2=2(x+1) \Rightarrow \quad \text{ک م م : } 2(x-1)(x+1)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{2(x+1)}{2(x-1)(x+1)} - \frac{5}{(x-1)(x+1)} &= \frac{2x-3}{2(x-1)(x+1)} \\ \Rightarrow \frac{2x+2-5}{(x-1)(x+1)} &= \frac{2x-3}{2(x-1)(x+1)} \\ \Rightarrow 2x+2-5 &= 2x-3 \Rightarrow 2x-3=2x-3 \Rightarrow 0=0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 5x-10=-5x \Rightarrow 10x=10 \Rightarrow x=1, \quad 2(x-1)(x+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \rightarrow x=1 \\ x+1=0 \rightarrow x=-1 \end{cases}$$

$$D=R-\{1,-1\}$$

چون ۱ در دامنه وجود ندارد قابل قبول نیست.

$$\begin{aligned} \text{ج)} \quad \frac{x^2-2x+2}{x^2-2x} - \frac{1+x}{x} &= \frac{x-1}{x-2} \\ \text{ک م م : } x(x-2) \Rightarrow x(x-2) &= 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x-2=0 \Rightarrow x=2 \end{cases} \Rightarrow D=R-\{0,2\} \\ \frac{x(x-2)}{x(x-2)} \cdot \frac{x^2-2x+2}{x(x-2)} - \frac{1+x}{x} &= \frac{x-1}{x-2} \\ \Rightarrow \frac{x^2-2x+2}{x-2} - \frac{1+x}{x} &= \frac{x-1}{x-2} \\ \Rightarrow \frac{x^2-2x+2}{x-2} - \frac{1+x}{x} &= \frac{x-1}{x-2} \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \end{aligned}$$

۲ چون در دامنه نیست قابل قبول نمی باشد و اگر دامنه را محاسبه نکرده باشیم چون عدد ۲ مخرج ۲ کسر را صفر می کند قابل قبول نیست.

سوال: معادلات گویای زیر را حل کنید.

الف)
$$\frac{x+2}{x-2} - \frac{x-2}{x+2} = \frac{8}{x^2-4}$$

(فجر ایرانیان استانبول حسابان دی ۹۲)

ب)
$$\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2}$$

ج)
$$\frac{3x-2}{x+2} - \frac{x-1}{x-2} = \frac{3x^2-7x}{x^2-4}$$

مثال: به ازای چه مقدار a ، معادله $\frac{x}{a-x} + \frac{a-x}{x} = \frac{a}{x}$ دارای جواب $x=2$ است؟
به جای x عدد ۲ قرار می‌دهیم:

$$\frac{2}{a-2} + \frac{a-2}{2} = \frac{a}{2} \Rightarrow \frac{4+(a-2)^2}{2(a-2)} = \frac{a}{2} \Rightarrow$$

$$4+(a-2)^2 = a(a-2) \Rightarrow 4+a^2-4a+4 = a^2-2a \Rightarrow 2a=8 \Rightarrow a=4$$

سوال: به ازای چه مقدار از k معادله $\frac{x-2}{5x} = \frac{1}{k} - \frac{4}{15x}$ دارای مجموعه جواب $\{4\}$ است؟

سوال: به ازای چه مقدار از k معادله $\frac{k}{3t} = \frac{t-5}{t^2-4t}$ دارای مجموعه جواب $\{5\}$ است؟

حل معادلات رادیکالی:

برای حل یک معادله رادیکالی می توانیم جملات را طوری در طرفین تساوی جابه جا کنیم که یک عبارت رادیکالی به تنهایی در یک طرف تساوی قرار گیرد. سپس با به توان رساندن طرفین معادله آن را از حالت رادیکالی خارج و معادله بدست آمده را حل کنیم.

توجه: ممکن است نیاز به بیش از یک بار استفاده از عمل توان رسانی باشد.

توجه: جواب های بدست آمده در صورت صدق در معادله اولیه قابل قبول اند و در غیر اینصورت قابل قبول نیستند

توجه: مثل معادلات گویا می توان از طریق دامنه قابل قبول بودن جواب را تشخیص داد اما بهترین راه برای معادلات رادیکالی با توجه به گستردگی حالت های متفاوت دامنه توابع رادیکالی همان صدق جواب در معادله اصلی است.

مثال: معادلات زیر را حل کنید.

$$\text{الف) } \sqrt{x} + \sqrt{x+5} = 5$$

$$\sqrt{x+5} = 5 - \sqrt{x} \Rightarrow (\sqrt{x+5})^2 = (5 - \sqrt{x})^2 \Rightarrow x+5 = 25 - 10\sqrt{x} + x$$

$$\Rightarrow 10\sqrt{x} = 20 \Rightarrow \sqrt{x} = 2 \Rightarrow (\sqrt{x})^2 = 2^2 \Rightarrow x = 4$$

$$\text{امتحان: } \sqrt{4} + \sqrt{4+5} = 5 \Rightarrow 2+3=5$$

بنابراین $x=4$ قابل قبول است.

$$\text{ب) } \sqrt{x} - x = -20$$

$$\sqrt{x} = x - 20 \Rightarrow \sqrt{x}^2 = (x - 20)^2 \Rightarrow x = x^2 - 40x + 400$$

$$\Rightarrow x^2 - 41x + 400 = 0 \Rightarrow (x-16)(x-25) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 16 = 0 \Rightarrow x = 16 \\ x - 25 = 0 \Rightarrow x = 25 \end{cases}$$

$$\text{غ ق ق } x=16 \Rightarrow \sqrt{16} - 16 = -20 \Rightarrow -12 = -20$$

$$\text{ق ق ق } x=25 \Rightarrow \sqrt{25} - 25 = -20 \Rightarrow -20 = -20$$

$$\text{ج) } \sqrt{2 + \sqrt{x-5}} = \sqrt{13-x}$$

$$\sqrt{2 + \sqrt{x-5}}^2 = \sqrt{13-x}^2 \Rightarrow 2 + \sqrt{x-5} = 13-x \Rightarrow \sqrt{x-5} = 11-x$$

$$\Rightarrow (\sqrt{x-5})^2 = (11-x)^2 \Rightarrow x-5 = 121 - 22x + x^2 \Rightarrow x^2 - 23x + 126 = 0$$

$$\Rightarrow (x-14)(x-9) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 14 = 0 \Rightarrow x = 14 \\ x - 9 = 0 \Rightarrow x = 9 \end{cases}$$

$$\text{غ ق ق} \quad \Rightarrow \sqrt{2 + \underbrace{\sqrt{14-5}}_9} = \sqrt{13-14} \Rightarrow \sqrt{5} = \sqrt{-1}$$

$$\text{ق ق} \quad \Rightarrow \sqrt{2 + \underbrace{\sqrt{9-5}}_4} = \sqrt{13-9} \Rightarrow 2=2$$

سوال: معادلات زیر را حل کنید.

$$\text{الف)} \quad \sqrt{2 + \sqrt{x+3}} = \sqrt{5-x}$$

$$\text{ب)} \quad x + \sqrt{x} = 6$$

$$\text{ج)} \quad 2 + \sqrt{1+x} = x-3$$

سوال: بدون حل معادله توضیح دهید چرا مجموعه جواب $\sqrt{1-x} + \sqrt{2-x} + 3 = 0$ تهی است؟

سوال: بدون حل معادله توضیح دهید چرا مجموعه جواب $\sqrt{1-x} + \sqrt{x-2} = 0$ تهی است؟ (کاردرکلاس کتاب درسی صفحه ۲۳)

سوال: آیا عدد صحیحی وجود دارد که جمع آن با جذرش برابر ۲ باشد؟ (با راه حل)

تست کنکور تجربی ۹۸: اگر $2 = a + \sqrt{(4a + 2a^2)}$ عدد $\frac{a+1}{a}$ کدام است؟

۴/۵ (۴)

۳/۵ (۳)

۲/۵ (۲)

۱/۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

تمریناتی برای تلاش بیشتر:

۱- معادلات گویای زیر را حل کنید.

$$\text{الف)} \frac{3}{3x^2-3x-28} = \frac{5}{5x^2-x-20}$$

$$\text{ب)} \frac{3y+5}{y^2+5y} + \frac{y+4}{y+5} = \frac{y+1}{y}$$

$$\text{ج)} 2 + \frac{5}{3k-1} = \frac{-2}{(3k-1)^2}$$

$$\text{د)} \frac{x+1}{x-1} - \frac{2x}{x+2} = \frac{-x^2+3}{x^2+x-2}$$

۲- معادلات رادیکالی زیر را حل کنید.

$$\text{الف)} \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{625x} = 2(1 + \sqrt[4]{x}) \quad \text{ج)} \frac{1}{\sqrt{x+2}} + \frac{1}{2-\sqrt{x}} = 2$$

$$\text{ب)} x\sqrt{3} - \sqrt{6} = \sqrt{150} - x\sqrt{27} \quad \text{د)} \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} = 1-x$$

۳- معادلات زیر را حل کنید. (به تغییر متغیر هم نیاز دارید ☺)

$$\text{الف)} \frac{x^2+3}{6x+2} + 2 = \frac{-6x-2}{x^2+3}$$

$$\text{ب)} \left(\frac{x^2+3}{x^2+1} \right)^2 + \frac{6}{x^2+1} - 7 = 0$$

$$\text{ج)} \sqrt{x^2+x+4} + \sqrt{x^2+x+1} = \sqrt{2x^2+2x+9}$$

$$\text{د)} \sqrt{x+8+2\sqrt{x+7}} + \sqrt{x+1-\sqrt{x+7}} = 4$$

(پرورش استعدادهای درخشان علامه حلی دی ۹۶)

فصل دوم : هندسه

ترسیم های هندسی

استدلال و قضیه تالس

تشابه مثلثها

درس اول: ترسیم هندسه:

تعریف: یک مکان هندسی مجموعه نقاطی است از صفحه که دارای یک ویژگی معین هستند و هر نقطه دیگری که دارای این ویژگی باشد در این مجموعه نقاط قرار دارد به عنوان مثال دایره ای که شعاع ۳ سانتی متر و به مرکز O رسم می شود در واقع مکان هندسی نقاطی از صفحه است که فاصله آنها تا مرکز برابر ۳ سانتی متر است.

توجه: هر واقعیت که بدیهی بوده و نیازمند استدلال نباشد را اصل می نامند.

به عنوان مثال:

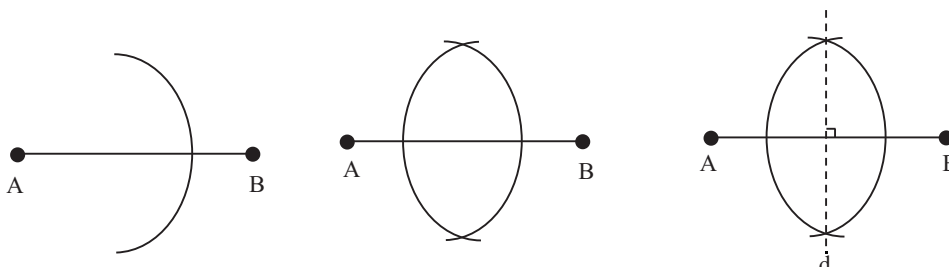
- از یک نقطه روی صفحه بینهایت خط می گذرد.
- از هر دو نقطه متمایز روی صفحه فقط و فقط یک خط راست میگذرد.
- از هر نقطه خارج یک خط راست تنها و تنها یک خط موازی آن می توان رسم کرد.

تعریف: عمود منصف مکان هندسی نقاطی از صفحه است که از دو سر یک پاره خط به یک فاصله هستند. البته می توان تعریف ساده تری نیز ارائه داد: هر خط که بر وسط یک پاره خط عمود باشد عمود منصف آن پاره خط نامیده می شود.

بنابراین تعریف داریم:

- هر نقطه روی عمود منصف تا دو سر پاره خط به یک فاصله است.
- اگر فاصله نقطه ای تا دو سر یک پاره خط به یک اندازه باشد آن نقطه حتما روی عمود منصف پاره خط قرار دارد.

رسم عمود منصف: دهانه پرگار را به اندازه کمی بیش تر از نصف طول پاره خط باز کرده ، به مرکزهای دو سرپاره خط دو کمان می زنیم. خط گذرا از نقاط تلاقی این دو کمان عمود منصف پاره خط مفروض است.



توجه: اگر در یک مثلث هر سه زاویه حاده باشند محل تلاقی عمود منصف ها داخل مثلث است و اگر مثلث قائم الزاویه باشد محل تلاقی عمود منصف ها دقیقا وسط وتر است و اگر مثلث زاویه منفرجه (باز) داشته باشد محل تلاقی عمود منصف ها نقطه ای در خارج از مثلث است.

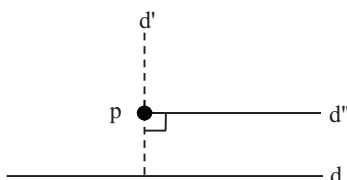
توجه: چون محل تلاقی سه عمود منصف از ۳ رأس مثلث به یک فاصله است این نقطه مرکز دایره محیطی مثلث (دایره ای که از رأس های آن میگذرد) است.

سوال: خط d و نقطه m روی آن داده شده اند از m عمودی بر d رسم کنید. (کتاب درسی صفحه ۲۸)

سوال: خط d و نقطه p خارج آن مفروضند. از p عمودی بر خط d رسم کنید. (کتاب درسی صفحه ۲۸)

سوال: خط d و نقطه p خارج آن مفروضند. از p خطی به موازات خط d رسم کنید. (کتاب درسی صفحه ۲۸)

ابتدا از نقطه p عمود d' را بر خط d رسم می کنیم. سپس از p روی خط d' عمود d'' را بر d' رسم می کنیم این خط با خط d موازی است زیرا دو خط عمود بر یک خط باهم موازی اند.



تعریف: نیمساز زاویه خطی است که از رأس زاویه می گذرد و آن را به دو زاویه مساوی تقسیم می کند به عبارت دیگر: نیمساز یک زاویه در واقع مکان هندسی نقاطی در درون زاویه است که از دو ضلع زاویه به یک فاصله اند.

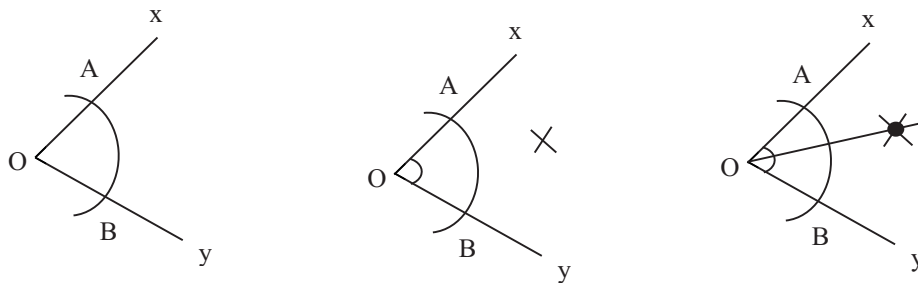
بنابراین تعریف داریم:

- هر گاه نقطه ای از دو ضلع زاویه ای به یک فاصله باشد آن نقطه روی نیمساز زاویه قرار دارد.

- هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است.

رسم نیمساز یک زاویه:

ابتدا از رأس زاویه کمان دلخواهی می زنیم تا اضلاع زاویه را در دو نقطه قطع کند سپس سوزن پرگار را روی این دو نقطه گذاشته و دو کمان می زنیم و در نهایت محل برخورد دو کمان را به رأس زاویه وصل می کنیم. در صفحه بعد ترسیم شکل نشان داده شده است.



توجه: در هر مثلث محل تلاقی سه نیمساز داخلی همواره داخل مثلث است.

توجه: چون هر نقطه روی نیمساز از دو ضلع زاویه به یک فاصله است بنابراین محل تلاقی سه نیمساز داخلی هر مثلث از هر سه ضلع مثلث به یک فاصله است.

توجه: محل تلاقی سه نیمساز داخلی مثلث مرکز دایره محاطی داخلی (دایره ای است که بر هر سه ضلع مثلث مماس است) مثلث می باشد.

توجه: محل تلاقی نیمسازهای خارجی مثلث مرکز دایره های محاطی خارجی (دایره هایی که به یک ضلع و امتداد دو ضلع دیگر مماس است) مثلث می باشد.

توجه: تمام نقاطی که به فاصله k سانتیمتر از خط d هستند دو خط موازی d در طرفین آن و به فاصله k سانتیمتر از آنرا تشکیل میدهند

توجه: اگر نقطه p به فاصله k سانتی متر از خط d قرار داشته باشد: الف) تمام نقاطی که به فاصله a سانتی متر از p هستند دایره ای به مرکز p و شعاع a را تشکیل میدهند

ب) نقاطی از خط d که به فاصله a سانتی متر از نقطه p هستند محل های برخورد دایره ایست به شعاع a سانتیمتر و به مرکز p با خط d

نکات کلیدی:

۱- یک مثلث در حالت کلی یک دایره محیطی دارد که مرکزش محل برخورد سه عمود منصف اضلاع مثلث است. همچنین یک دایره محاطی داخلی دارد که مرکزش محل برخورد سه نیمساز داخلی مثلث است. همچنین ۳ دایره محاطی خارجی نیز دارد که مرکزهریک محل برخورد نیمساز داخلی یک زاویه و نیمساز دو زاویه خارجی دو رأس دیگر است.

۲- اگر p را نصف محیط مثلث و S را مساحت مثلث و همچنین شعاع دایره محاطی داخلی را با r و شعاع های دایره های محاطی خارجی را با r_a, r_b, r_c نشان دهیم داریم:

$$r_a = \frac{S}{p-a}, \quad r_b = \frac{S}{p-b}, \quad r_c = \frac{S}{p-c}$$

و همچنین: $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}$ و یا $s = pr$ در نتیجه $r = \frac{S}{p}$

۳- میانه نظیر یک رأس، پاره خطی است که ضلع مقابل به آن را به دو قسمت مساوی تقسیم می کند.

۴- میانه هر رأس از نصف مجموع دو ضلع مجاور خود کوچکتر است.

۵- با سه عدد a, b, c یک مثلث قابل رسم است هرگاه مجموع هر دو عدد دلخواه از این سه عدد از دیگری بزرگتر باشد.

۶- محل تلاقی میانه های هر مثلث مرکز ثقل مثلث است همچنین میانه های هر مثلث همدیگر را به نسبت $\frac{2}{3}$ از رأس و $\frac{1}{3}$ از پای میانه قطع می کنند. به عبارت دیگر:

$$(\text{میانه}) = \frac{1}{3} = \text{فاصله وسط هر ضلع تا محل تلاقی و (میانه)} = \frac{2}{3} = \text{فاصله رأس تا محل تلاقی میانه ها}$$

۷- رسم مثلث در حالتی که دو ضلع از آن مشخص اند و زاویه ای که بین آن دو ضلع نیست نیز مشخص است. در این صورت دو حالت داریم:

حالت اول) زاویه داده شده روبه رو به ضلع بزرگتر است: در این حالت تنها یک مثلث قابل رسم است.

حالت دوم) زاویه داده شده روبه رو به ضلع کوچکتر است: در این حالت برای پیدا کردن تعداد حالات ممکن رسم مثلث از قضیه سینوس ها استفاده می کنیم.

مثلا اگر b و $\hat{B}$ معلوم باشند:

$$\frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} \Rightarrow \sin \hat{C} = \frac{c \sin \hat{B}}{b} \Rightarrow \begin{cases} \sin \hat{C} > 1 \Rightarrow \text{مثلثی قابل رسم نیست} \\ \sin \hat{C} = 1 \Rightarrow \text{یک مثلث قابل رسم است} \\ \sin \hat{C} < 1 \Rightarrow \text{دو مثلث قابل رسم است} \end{cases}$$

۸- در حالت های : ض ز ض ، ض ض ض ، ض ز ض تنها یک مثلث منحصر به فرد می توان رسم کرد.

۹- اگر در مثلثی هر سه زاویه حاده باشند محل تلاقی ارتفاع ها داخل مثلث است و اگر مثلث قائم الزاویه باشد محل تلاقی سه ارتفاع رأس قائمه است و اگر مثلث دارای زاویه منفرجه باشد محل تلاقی ۳ ارتفاع خارج مثلث است.

۱۰- معادله دایره ای به مرکز (a, b) و شعاع r به صورت

$$r^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 \text{ می باشد}$$

توجه: برای آنکه ببینیم نقطه $(1, 3)$ روی دایره ای به شعاع ۳ سانتی متر و مرکز $(0, -2)$ قرار دارد یا خیر از نکته شماره ۱۰ استفاده میکنیم.

قدرت بخشش

بیندیشیم :

مرد خردمندی در کوهستان سفر میکرد. به مسافری رسید که گرسنه بود. مرد خردمند کیفش را باز کرد تا درغذایش با مسافر شریک شود. مسافر گرسنه سنگ قیمتی و زیبایی را در کیف او دید. آن خوشش آمد و از او خواست که آن سنگ را به وی بدهد.

مرد خردمند هم بیدرنگ سنگ را به او داد. مسافر بسیار شادمان شد و از اینکه شانس به او روی کرده بود از خوشحالی سر از پا نمیشناخت.

او میدانست که جواهر به قدری باارزش است که تا آخر عمر میتواند راحت زندگی کند ولی چندروز بعد مرد مسافربه راه افتاد تا هرچه زودتر آن مرد خردمند را پیدا کند.

بلاخره هنگامی که او را یافت سنگ قیمتی را به او پس داد و گفت: خیلی فکر کردم. میدانم این سنگ چقدر با ارزش است اما آن را به تو پس میدهم با این امید که چیزی ارزشمندتر از آن به من بدهی. اگر میتوانی آن محبتی را به من بده که به تو این قدرت را داد که این سنگ را به من ببخشی.

تست:

۱- در یک مثلث متساوی الاضلاع به محیط ۱۲ شعاع دایره محاطی داخلی و خارجی به ترتیب عبارتند از:

$$(۱) \quad ۳\sqrt{۶}/۲, ۲\sqrt{۳}/۳ \quad (۲) \quad ۲\sqrt{۳}, ۶\sqrt{۳}$$

$$(۳) \quad ۲\sqrt{۳}/۳, ۲\sqrt{۳} \quad (۴) \quad ۲\sqrt{۳}, ۶$$

جواب : گزینه ۳

با استفاده از نکته ۲ حل کنید.

توجه: چون مثلث متساوی الاضلاع است سه شعاع دایره محاطی خارجی برابرند.

۲- کدام نقطه درون مثلث از سه راس مثلث به یک فاصله است؟

(۱) محل تلاقی نیمسازها (۲) محل برخورد میانه ها

(۳) محل تقاطع عمودمنصفها (۴) محل تقاطع ارتفاع ها

پاسخ: گزینه ۳. به صفحه توصیف عمود منصف مراجعه کنید

۳- چند نقطه درون مثلث وجود دارد که از سه ضلع به یک فاصله است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

پاسخ: گزینه ۱. به توضیحات نیمسازها مراجعه کنید

ببیندیشیم:**وین دایر**

دکتر وین دایر: بدانید که شما هیچ گاه در جایی گیر نمیکنید و در جا نمی زنید و محبوس نمی شوید

مگر آنکه خودتان بخواهید

درس دوم: استدلال و قضیه تالس

نسبت و تناسب: نسبت بین دو عدد a و b عبارت است از کسر $\frac{a}{b}$ که b نباید صفر باشد چون تقسیم کردن یک عدد بر صفر معنی ندارد. تساوی بین دو نسبت $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ (که c و d صفر نیستند) یک تناسب نامیده می شود.

ویژگی های تناسب: (بافرض اینکه a, b, c, d صفر نیستند)

$$۱) \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow ad = bc$$

برای اثبات طرفین سمت چپ را در bd ضرب کنید.

این خاصیت را طرفین وسطین می نامند.

$$۲) ad = bc \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

با توجه به قسمت قبل برای اثبات باید سمت چپ را

(تبدیل حاصل ضرب به تناسب)

$$۳) \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$$

برای اثبات طرفین تساوی سمت چپ را در $\frac{bd}{ac}$ ضرب کنید. (معکوس کردن تناسب)

$$۴) \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{d}{b}$$

برای اثبات طرفین تساوی سمت چپ را در $\frac{d}{a}$ ضرب کنید. (جابجایی طرفین)

$$۵) \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \text{ (جابجایی وسطین)}$$

برای اثبات: طرفین تساوی سمت چپ را در $\frac{b}{c}$ ضرب کنید

$$۶) \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$$

(ترکیب نسبت در صورت)

برای اثبات طرفین تساوی سمت چپ را با ۱ جمع کنید.

$$۷) \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b+a} = \frac{c}{d+c}$$

(ترکیب نسبت در مخرج)

برای اثبات ابتدا ویژگی شماره ۳ استفاده کنید و سپس عدد ۱ را به طرفین تساوی اضافه کنید و باز از شماره ۳ استفاده کنید.

$$۸) \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d} \quad (\text{تفاضل نسبت در صورت})$$

برای اثبات با یک تغییر کوچک از اثبات شماره ۶ کمک بگیرید.

$$۹) \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b-a} = \frac{c}{d-c} \quad (\text{تفاضل نسبت در مخرج})$$

برای اثبات با یک تغییر کوچک از اثبات شماره ۷ کمک بگیرید.

سوال: در هریک از موارد زیر مقادیر مجهول را بیابید.

$$۱) \frac{x}{18-x} = \frac{3}{7}$$

$$۲) \frac{9}{12} = \frac{x}{20} = \frac{21}{y}$$

$$۳) \frac{4}{x+1} = \frac{2}{3x-2}$$

تذکر: نسبت با کسر فرق دارد زیرا: در کسرها می توان جنس و واحد آنرا قید کرد اما نسبت ها مطلق اند و واحد ندارند
مثلا: $\frac{3}{4}$ متر یا $\frac{2}{3}$ پاره خط نمونه هایی از کسرند اما نسبت $\frac{3}{4}$ یعنی اگر اولی سه باشد دومی چهار است ، اگر اولی $\frac{3}{4}$ باشد دومی ۴۰ است، اگر اولی ۹ باشد دومی ۱۲ است و ...

تذکر: در کسرها صورت و مخرج عدد صحیح اند ولی در نسبت ها لازم نیست چنین باشد به عبارت دیگر صورت و مخرج نسبت ، عدد کسری و رادیکالی هم می توانند باشند.

مثال: یک چوب ۲ متری را روی زمین به طور قائم نصب کرده ایم در یک ساعت از روز سایه این چوب ۱ متر است. درختی کاملا قائم در مجاور همین چوب قرار دارد و در همین ساعت از روز سایه اش تا پای درخت ۳ متر است. طول درخت چقدر است؟

توجه: سایه اشیا در یک ساعت معین به یک اندازه کم یا زیاد می شود پس تغییرات باهم متناسب اند

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{x} \Rightarrow x=6$$

نسبت سایه چوب به طولش $\frac{1}{2}$ و نسبت سایه درخت به طولش $\frac{3}{x}$ (هر دو قائم اند) پس متناسبند.

سوال: اگر قیمت ۱۰ عدد از یک کالا ۴۰۰ تومان باشد ، قیمت چند عدد از آن ، ۸۰ تومان خواهد بود؟

استدلال:

استدلال استقرایی: استدلالی که در آن با مشاهده و بررسی یک موضوع در چند حالت، نتیجه کلی از آن گرفته می شود به عبارت دیگر از جزء به کل می رسیم استدلال استقرایی نامیده می شود.

نتیجه این استدلال قطعیت ندارد یعنی نمی توانیم آن را تعمیم یا عمومیت بخشیم.

به عنوان مثال اگر وارد دهکده ای شویم که خانه های ورودی گنبدی شکل باشند نمی توان نتیجه گرفت که همه خانه های آن دهکده گنبدی شکل است به عبارت دیگر: اگر تا صدخانه را بررسی کنیم و نتیجه گنبدی بودن آنها باشد نمی توانیم تعمیم دهیم که مثلاً هر ۲۵۰ خانه آن دهکده گنبدی شکلند.

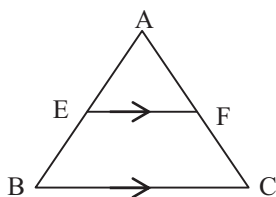
استدلال استنتاجی: روش نتیجه گیری کلی بر مبنای حقایقی است که درستی آنها را پذیرفته ایم مثل: جمع زاویه های داخلی هر مثلث ۱۸۰ درجه است.

توجه: نتایج مهمی که از استدلال استنتاجی به دست می آیند قضیه نامیده می شوند.

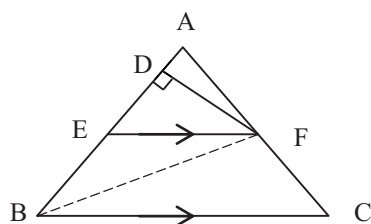
سوال: دو زاویه $\hat{A}$ و $\hat{B}$ متمم یکدیگرند اگر اندازه یکی از ۲ برابر دیگری 15° کمتر باشد اندازه این دو زاویه را بر حسب درجه بدست آورید

قضیه تالس: اگر خطی با یک ضلع مثلث موازی باشد و دو ضلع دیگر را قطع کند، نسبت پاره هایی که روی یک ضلع پدید می آورد، برابر است با نسبت پاره هایی که روی ضلع دیگر ایجاد می کند به عبارت دیگر:

$$\frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FC} \quad \text{اگر در مثلث } \triangle ABC, EF \text{ موازی } BC \text{ باشد آنگاه}$$



اثبات: از F به B وصل کرده و پاره خط FD را بر AB عمود می کنیم در این صورت داریم:



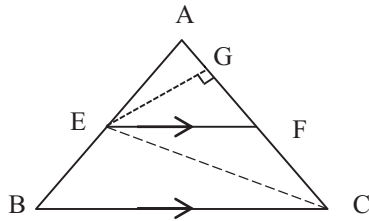
$$\Delta_{AFE} \text{ مساحت} = \frac{1}{2} AE \times FD$$

$$\Delta_{EFB} \text{ مساحت} = \frac{1}{2} EB \times FD$$

(در واقع FD حکم ارتفاع دو مثلث را دارد.)

$$\Rightarrow \frac{\text{مساحت } \triangle AFE}{\text{مساحت } \triangle FEB} = \frac{AE}{EB} \quad ①$$

همینکار را اینبار از رأس E انجام میدهیم یعنی از E به C وصل کرده و پاره خط EG را بر AC عمود می کنیم.

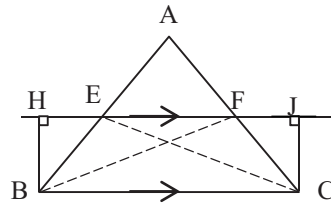


(در واقع EG حکم ارتفاع دو مثلث AEF و EFC را دارد.)

$$\Rightarrow \frac{\text{مساحت } \triangle AFE}{\text{مساحت } \triangle EFC} = \frac{\frac{1}{2} AF \times EG}{\frac{1}{2} FC \times EG} = \frac{AF}{FC} \quad ②$$

اکنون برای آنکه نشان دهیم طرف های دوم تساوی های ① و ② باهم برابرند باید نشان دهیم مساحت $\triangle EFB$ و $\triangle EFC$ باهم مساوی اند بنابراین:

پاره خط EF را از دو طرف امتداد می دهیم. از B و C بر امتداد این پاره خط عمود های BH و CJ را رسم می کنیم.



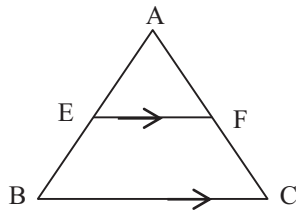
چون $HJ \parallel BC$ و $\hat{H} = \hat{J} = 90^\circ$ طبق قضیه

خطوط موازی $\hat{B} = \hat{C} = 90^\circ$ (چهار زاویه قائمه) پس چهار ضلعی BCJH مستطیل است.

در نتیجه : $BH = CJ$ (اضلاع روبرو در مستطیل باهم مساویند.)

$$\begin{cases} \text{مساحت مثلث } \triangle EFB = \frac{1}{2} BH \times EF \\ \text{مساحت مثلث } \triangle EFC = \frac{1}{2} CJ \times EF \end{cases} \Rightarrow \text{③ مساحتها برابرند}$$

$$\text{①, ②, ③} \Rightarrow \frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FC}$$



$$\boxed{EF \parallel BC \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC}}$$

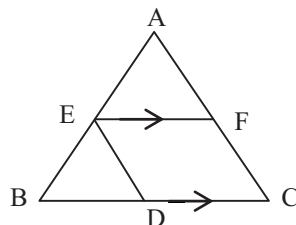
نتیجه ۱ تالس:

$$EF \parallel BC \xRightarrow{\text{تالس}} \frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FC} \xrightarrow{\text{ترکیب نسبت در مخرج}}$$

$$\frac{AE}{AE+EB} = \frac{AF}{AF+FC} \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC}$$

$$\boxed{EF \parallel BC \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC}}$$

نتیجه ۲ تالس:



$$EF \parallel BC \xRightarrow{\text{نتیجه ①}} \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} \quad \text{①}$$

از E خطی موازی AC رسم می کنیم

$$ED \parallel AC \xRightarrow{\text{نتیجه ①}} \frac{AE}{AB} = \frac{CD}{BC} \quad \text{②}$$

از طرفی چهارضلعی EFCD متوازی الاضلاع است (اضلاع دو به دو موازی اند)

بنابراین : $EF=DC$ پس رابطه ② را به صورت زیر بازنویسی می کنیم:

$$\frac{AE}{AB} = \frac{EF}{BC} \quad \text{③} \quad \text{①, ③} \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC}$$

توجه: اگر فرض و حکم یک قضیه را جابجا کنیم آنچه حاصل می شود عکس قضیه است که ممکن است درست یا نادرست باشد به مثال زیر توجه کنید:

قضیه: اگر مثلثی متساوی الساقین باشد آنگاه زاویه های رو به رو ساقها باهم برابرند.

عکس قضیه: اگر زاویه های روبه رو به ساقها برابر باشند آنگاه مثلث متساوی الساقین است.

توجه: عبارت هایی که به صورت اگر و آنگاه بیان می شوند (جمله های شرطی) قضیه های شرطی نامیده می شوند. قضیه های شرطی در هندسه دارای نقش مهمی هستند و اغلب برای سادگی بیان ، قضیه شرطی ، قضیه نامیده می شود.

توجه: اگر عکس یک قضیه شرطی خود یک قضیه شرطی باشد آنگاه این دو قضیه شرطی را می توان به صورت یک قضیه بیان کرد. چنین قضیه ای، قضیه دو شرطی نامیده می شود. در واقع قضیه دو شرطی زمانی نوشته می شود که قضیه و عکس آن هر دو درست باشند.

قضیه دو شرطی: یک مثلث متساوی الساقین است اگر و تنها اگر زاویه های رو به رو به ساقها باهم برابر باشند.

توجه: نماد قضیه دو شرطی به صورت $\Leftrightarrow$ می باشد.

برهان خلف: معمولا برای اثبات قضیه ها به طور مستقیم از داده ها که همان فرض ها هستند شروع می کنیم و با استفاده از سایر قضیه ها و اصل ها و تعریف ها یعنی حقایقی که درستی آنها را پذیرفته ایم برقرای حکم را نشان می دهیم. با این حال، برای اثبات بعضی از قضیه ها نمی توان به سادگی به طور مستقیم پیش رفت و راه غیر مستقیم (برهان خلف) را مدنظر قرار می دهیم.

توجه: این حقیقت که یک عبارت ریاضی نمی تواند همزمان هم درست و هم نادرست باشد اساس روش اثبات غیر مستقیم است.

توجه: برای اثبات به روش برهان خلف ابتدا فرض می کنیم حکم درست نباشد (فرض خلف) پس نقیض حکم درست است بنابراین نشان می دهیم نقیض حکم با حقایق دانسته شده یا فرض اولیه در تناقض است و در نهایت با نادرست بودن نقیض حکم نتیجه می گیریم که حکم درست است.

مثال: با استفاده از برهان خلف نشان دهید اگر $a \parallel b$ و c سه خط راست باشند بطوریکه $a \parallel b$ و $c \parallel b$ آنگاه $c \parallel a$

فرض می کنیم $a \nparallel c$ (فرض خلف) پس خط a یا (امتداد آن) خط c (یا امتداد آن) را قطع می کند و چون $c \parallel b$ پس خط b را نیز قطع می کند و این متناقض است با فرض $a \parallel b$. بنابراین فرض خلف اشتباه بود و $a \parallel c$.

مثال: می دانیم $\sqrt{5}$ گنگ است. با استفاده از برهان خلف ثابت کنید $2+\sqrt{5}$ گنگ است. (نهایی جبر دی ۸۴)

فرض می کنیم $2+\sqrt{5}$ گنگ نباشد پس گویاست و می توان آن را به صورت یک عبارت کسری نوشت:

$$2+\sqrt{5} = \frac{a}{b} \Rightarrow \sqrt{5} = \frac{a}{b} - 2 \Rightarrow \sqrt{5} = \frac{a-2b}{b}$$

و این عبارت تناقض است زیرا طبق فرض $\sqrt{5}$ گنگ است و نمی تواند برابر یک عدد گویا شود چون به تناقض رسیدیم نتیجه میگیریم: $2+\sqrt{5}$ گنگ است.

سوال: $\sqrt{3}$ عددی گنگ است ثابت کنید $1+\sqrt{3}$ گنگ است. (برهان خلف)

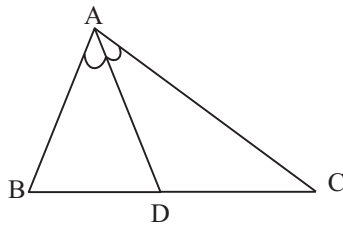
مثال: با استفاده از برهان خلف ثابت کنید اگر $y \neq 1$ و $x^2 + 2y = 10$ آنگاه $x \neq 2$ است. (نهایی جبر دی ماه ۷۹)

فرض می کنیم $x = 2$ (فرض خلف) پس در عبارت به جای x عدد ۲ قرار می دهیم:

$$2^2 + 2y = 10 \Rightarrow 2y = 10 - 4 \Rightarrow 2y = 6 \Rightarrow y = 3$$

و این با فرض اولیه ($y \neq 1$) در تناقض است پس حکم برقرار است یعنی $x \neq 2$

سوال: فرض کنید AD نیمساز زاویه $\hat{A}$ در مثلث ABC باشد اگر $BD \neq CD$ ثابت کنید $AB \neq AC$ (برهان خلف)



مثال: اگر n^2 مضربی از ۳ باشد ثابت کنید n نیز مضربی از ۳ است. (برهان خلف)

فرض می کنیم n مضربی از ۳ نباشد (فرض خلف) بنابراین باقیمانده تقسیم n بر ۳ برابر ۱ یا ۲ می باشد:

$$n = 3k + 1 \Rightarrow n^2 = 9k^2 + 6k + 1 \Rightarrow n^2 = 3(\underbrace{3k^2 + 2k}_{k'}) + 1 = 3k' + 1$$

$$n = 3k + 2 \Rightarrow n^2 = 9k^2 + 12k + 4 \Rightarrow n^2 = 3(\underbrace{3k^2 + 4k}_{k'}) + 4 = 3k' + 4$$

$$= 3k' + 3 + 1 = 3(\underbrace{k' + 1}_{k''}) + 1 = 3k'' + 1$$

در هر دو حالت می بینیم که n^2 مضربی از ۳ نیست و این با فرض تناقض دارد. پس حکم درست است و n مضربی از ۳ می باشد.

سوال: با استفاده از برهان خلف ثابت کنید اگر n^2 زوج باشد آنگاه n زوج است ($n \in \mathbb{N}$).

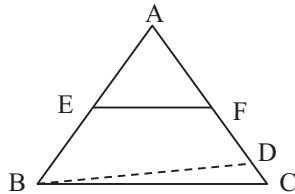
راهنمایی: نماد اعداد زوج را $2k$ و نماد اعداد فرد را $2k+1$ در نظر میگیریم.

نتیجه ۳ تالس: نتیجه سوم به عکس قضیه تالس معروف است.

هرگاه پاره خط EF پاره خط های AB و AC را به گونه ای قطع کرده باشد که داشته باشیم $\frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FC}$

در این صورت $EF \parallel BC$

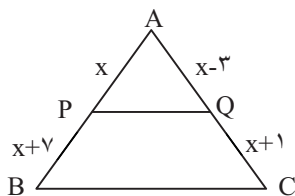
اثبات: از برهان خلف استفاده میکنیم یعنی فرض میکنیم EF موازی BC نباشد پس از B خطی موازی EF رسم می کنیم تا AC را در نقطه D قطع کند در این صورت طبق قضیه تالس داریم:



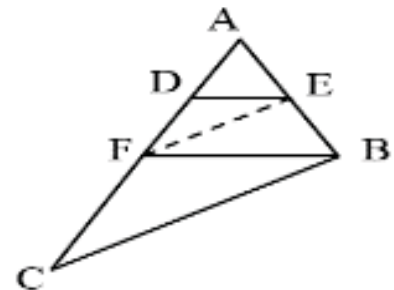
$$\left\{ \begin{array}{l} EF \parallel BD \Rightarrow \frac{AE}{BE} = \frac{AF}{FD} \\ \text{طبق فرض} \Rightarrow \frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FC} \end{array} \Rightarrow \frac{AF}{FD} = \frac{AF}{FC} \Rightarrow FD = FC$$

یعنی نقطه D بر C منطبق است به عبارت دیگر BD همان BC است و این یک تناقض است زیرا EF موازی BC نیست ولی با BD موازیست پس از اول فرض خلف غلط بوده و $EF \parallel BC$

سوال: در شکل زیر PQ موازی است. به کمک قضیه تالس طول X را حساب کنید.



سوال: در مثلث $\triangle ABC$ در شکل زیر DE با FB و EF با BC موازی است ثابت کنید: $\frac{AD}{DF} = \frac{AF}{FC}$



مثال نقض:

استدلال استنتاجی به ما اطمینان می دهد که نتیجه به دست آمده حتما درست است.

این جامعیت یکی از نشانه های اقتدار و زیبایی این نوع استدلال است اما گاهی اتفاق می افتد که با مثالی، عمومیت نتیجه ای که حدس می زنیم نقض می شود بنابراین:

به مثالی که نشان میدهد یک نتیجه گیری یا یک حدس کلی نادرست است مثال نقض گفته می شود.

توجه: برای نشان دادن درستی یک حکم کلی باید آن را اثبات کنیم.

توجه: اگر درستی یا نادرستی یک حکم کلی بر ما مشخص نباشد و برای رد آن ، مثال نقض نیز نتوانیم ارائه دهیم ، نمی توان درباره درستی یا نادرستی آن حکم کلی نتیجه ای گرفت.

مثال: آیا هر عدد طبیعی را می توان بصورت مجموع چند عدد طبیعی متوالی نوشت؟ اگر بلی چرا و اگر خیر مثال نقض بزنید. پاسخ: خیر مثلا عدد ۲

مثال: با یک مثال نقض نشان دهید مجموع دو عدد گنگ همیشه یک عدد گنگ نمی شود.

$$\begin{cases} x = \sqrt{2} \\ y = -\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow x+y = \sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0$$

سوال: با مثال نقض نشان دهید عبارت توان دوم یک عدد همیشه از آن بزرگتر است صحیح نیست.

سوال: آیا به ازای هر عدد طبیعی n عبارت $2^n + 3$ اول است؟

سوال: آیا حاصلضرب هر عدد طبیعی در یک عدد فرد ، عددی فرد است؟

سوال: با یک مثال نقض گزاره های زیر را رد کنید.

الف) همه اعداد اول فرد هستند.

ب) در هر مثلث ارتفاع ها درون آن قرار می گیرند.

ج) هیچ عدد اول بزرگتر از ۱۲۷ وجود ندارد. (کتاب درسی صفحه ۴۱)

تست:

(۱) اگر $\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5}$ عدد b چه کسری از $a+b+c$ است؟

- (۱) ۴ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) ۳

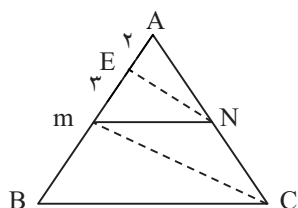
$$\frac{a+b+c}{3+4+5} = \frac{b}{4} \Rightarrow \frac{a+b+c}{12} = \frac{b}{4} \Rightarrow b = \frac{4}{12} (a+b+c) = \frac{1}{3} (a+b+c)$$

(۲) اگر $\frac{a}{4} = \frac{3}{4}$ باشد مقدار $\frac{3a+2b}{2a+b}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{10}{21}$ (۲) $\frac{21}{10}$ (۳) ۲ (۴) $\frac{1}{2}$

$$\begin{cases} a = 3k \\ b = 4k \end{cases} \Rightarrow \frac{3a+2b}{2a+b} = \frac{9k+8k}{6k+4k} = \frac{17k}{10k} = \frac{17}{10}$$

(۳) در شکل مقابل $EN \parallel MC$ و $mN \parallel BC$ اندازه MB کدام است؟



- (۱) ۶ (۲) ۶/۵ (۳) ۷ (۴) ۷/۵

$$\begin{cases} \Delta_{ABC}: mN \parallel Bc \Rightarrow \frac{Am}{mB} = \frac{AN}{NC} \\ \Delta_{AmC}: EN \parallel mc \Rightarrow \frac{AE}{Em} = \frac{AN}{NC} \end{cases} \Rightarrow \frac{Am}{mB} = \frac{AE}{mE} \Rightarrow \frac{5}{mB} = \frac{2}{3} \Rightarrow mB = 7.5$$

راه دوم: با استفاده از فرمول:

$$(AM)^2 = AE \times AB \Rightarrow 25 = 2(AM + MB) \Rightarrow 25 = 2(5 + MB) \Rightarrow 2MB = 25 - 10 \Rightarrow MB = \frac{15}{2} = 7.5$$

(۴) در یک دوزنقه قائم الزاویه، از نقطه O محل تلاقی قطرها، خطی موازی قاعده ها رسم می شود ساق قائم را در

A و ساق مایل را در B قطع می کند نسبت $\frac{OA}{OB}$ چگونه است (کنکور تجربی ۹۷)

- (۱) کوچکتر از ۱ (۲) مساوی ۱ (۳) بزرگتر از ۱ (۴) نسبت به اضلاع متغیر

پاسخ: گزینه ۲. (نیاز دارید در مثلثهای ایجاد شده تالس را بنویسید.)

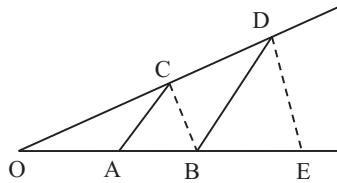
۵) در شکل زیر، دو جفت پاره خط موازی اند و $OA=3$ و $AB=5$ اندازه BE کدام است؟ (کنکور خارج کشور تجربی ۹۴)

$$10 \frac{2}{3} \quad (4)$$

$$11 \frac{1}{3} \quad (3)$$

$$12 \frac{2}{3} \quad (2)$$

$$13 \frac{1}{3} \quad (1)$$



پاسخ: گزینه ۱

از ق تالس ۲ بار در ۲ مثلث $\triangle OBD$ و $\triangle ODE$ استفاده کنید یا مثل تست ۳ از فرمول استفاده کنید.

۶) روی پاره خط $AB=a$ دو نقطه M و N را بطوری اختیار می کنیم که $\frac{Am}{mB} = \frac{BN}{AN} = 2$ در این صورت طول پاره خط mN چقدر است؟

$$\frac{2a}{3} \quad (4)$$

$$\frac{a}{3} \quad (3)$$

$$\frac{a}{2} \quad (2)$$

$$\frac{a}{4} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۳. از ترکیب نسبت در صورت استفاده کنید و اینکه $mN=AB-(Bm+AN)$

۷) اگر $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ و $k > 0$ آنگاه حاصل $\sqrt{\frac{2a^2+3c^2}{2b^2+3d^2}}$ کدام است؟

$$-\frac{1}{k} \quad (4)$$

$$\frac{1}{k} \quad (3)$$

$$-k \quad (2)$$

$$k \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۱. توان ۲، و ترکیب در صورت و مخرج نیاز دارید.

تمریناتی برای تلاش بیشتر:

۱- اگر بدانیم برای سه عدد m و n و t رابطه $2n=4m=5t$ برقرار است حاصل $\frac{3m+2n-t}{n+m}$ را بدست آورید
(باید $2n=4m=5t=20k$ قرار دهید و ..)

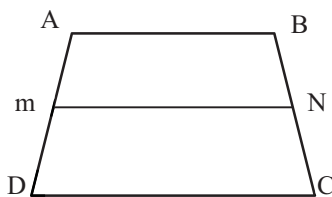
۲- اگر $\frac{a}{b} = \frac{5}{3}$ باشد مقدار $\frac{a-b}{a+b}$ را بدست آورید.

از خاصیت ترکیب نسبت در مخرج و تفاضل نسبت در صورت استفاده کنید.

۳- اگر $\frac{x+y}{5} = \frac{y+z}{6} = \frac{z+x}{7}$ و $(x, y, z) \neq 0$ ابتدا $x+y+z$ را محاسبه کنید و سپس مقدار عددی $\frac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2}$ را بدست آورید. (استعدادهای درخشان علامه حلی دی ماه ۹۶)

توجه: ابتدا $k = \frac{(x+y)+(y+z)+(z+x)}{5+6+7}$ تا $x+y+z$ را محاسبه کنید سپس هر کدام را جداگانه برابر k قرار دهید تا x و y و z بدست آیند. (بر حسب k)

۴- اگر $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{1}{3}$ باشد نسبت $\frac{5a-2c}{5b-2d}$ را مشخص کنید. (اردیبهشت ۹۷- شهید بهشتی اهواز)



۵- در شکل روبرو $AB \parallel MN \parallel DC$

ثابت کنید $\frac{Am}{mD} = \frac{BN}{NC}$

A)B را به C)D وصل کرده و در ۲ مثلث

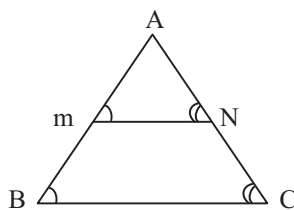
ایجاد شده تالس را بنویسید.

درس سوم: تشابه مثلث ها

تعریف: دو مثلث را متشابه گویند ، اگر زاویه های نظیر در آنها برابر و ضلع های نظیر متناسب باشند مثلاً: هر دو مثلث متساوی الاضلاع متشابه هستند.

قضیه اساسی تشابه مثلث ها: اگر خطی موازی یکی از اضلاع مثلث دو ضلع دیگر را قطع کند در این صورت مثلث کوچکی که به وجود می آید با مثلث بزرگ اولیه متشابه است.

اثبات: طبق تعریف باید ثابت کنیم اضلاع متناسب و زاویه ها برابر هستند:



$$mN \parallel BC \xrightarrow{\text{تعمیم تالس}} \frac{Am}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{mN}{BC} \quad ①$$

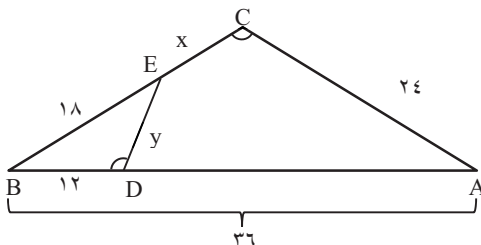
$$\begin{cases} mN \parallel BC \xrightarrow{\text{مورب } AB} \hat{m} = \hat{B} \\ mN \parallel BC \xrightarrow{\text{مورب } AC} \hat{N} = \hat{C} \end{cases}, \hat{A} \text{ مشترک} \quad ②$$

$$①, ② \Rightarrow \Delta AmN \sim \Delta ABC$$

حالت های تشابه دو مثلث:

- ۱- هرگاه دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشند دو مثلث متشابه اند.
- ۲- هرگاه اندازه های دو ضلع از مثلثی با اندازه های دو ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند و زاویه بین آنها برابر باشد دو مثلث متشابه اند.
- ۳- هرگاه اندازه های سه ضلع از مثلثی با اندازه های سه ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند دو مثلث متشابه اند.

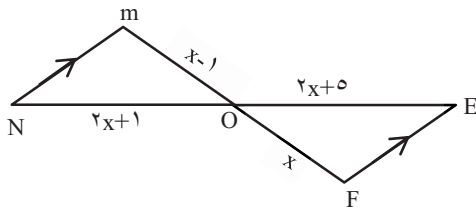
مثال: در شکل زیر $\widehat{C} = \widehat{BDE}$ طول x و y را پیدا کنید.



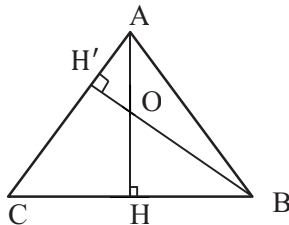
$$\Delta ABC, \Delta BDE \begin{cases} \widehat{C} = \widehat{BDE} \text{ فرض} \\ \widehat{B} \text{ مشترک} \end{cases} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta BDE \Rightarrow \widehat{E} = \widehat{A}$$

$$\frac{AB}{BE} = \frac{AC}{DE} = \frac{BC}{BD} \Rightarrow \frac{36}{18} = \frac{24}{y} = \frac{18+x}{12} \Rightarrow 2 = \frac{24}{y} \Rightarrow y = 12, 2 = \frac{18+x}{12} \Rightarrow 18+x = 24 \Rightarrow x = 6$$

سوال: در شکل زیر:

الف) آیا دو مثلث $\triangle ONM$ و $\triangle FEO$ متشابهند. چرا؟

ب) مقدار X را محاسبه کنید.

سوال: در مثلث $\triangle ABC$ ارتفاع های AH و BH را رسم می کنیم ثابت کنید دو مثلث OAH و OBH متشابهند.

پاره خط های متناسب در دو مثلث متشابه:

۱- در دو مثلث متشابه نسبت ارتفاع های نظیر برابر با نسبت تشابه است.

۲- در دو مثلث متشابه نسبت میانه های نظیر برابر با نسبت تشابه است.

۳- در دو مثلث متشابه نسبت محیط ها برابر با نسبت تشابه است.

۴- در دو مثلث متشابه ، نسبت مساحت ها برابر با توان دوم نسبت تشابه است.

مثال: مثلث های $\triangle ABC$ و $\triangle A'B'C'$ متشابه اند. اگر طول ضلع های مثلث $\triangle ABC$ برابر ۵ و ۸ و ۱۱ سانتی متر و محیط مثلث $\triangle A'B'C'$ برابر ۶۰ سانتی متر باشد طول ضلع های مثلث $\triangle A'B'C'$ را بدست آورید.

طبق شماره ۳ بالا:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{P}{P'} \Rightarrow \frac{5}{A'B'} = \frac{8}{A'C'} = \frac{11}{B'C'} = \frac{44}{60} = \frac{2}{5}$$

$$P = 5 + 8 + 11 = 24 \Rightarrow \frac{5}{A'B'} = \frac{2}{5} \Rightarrow A'B' = 12/5$$

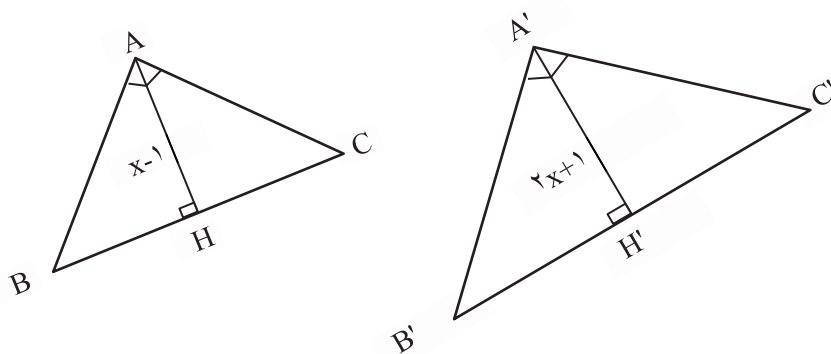
$$\Rightarrow \frac{8}{A'C'} = \frac{2}{5} \Rightarrow A'C' = 20, \quad \frac{11}{B'C'} = \frac{2}{5} \Rightarrow B'C' = 27/5$$

سوال: طول ضلع های مثلث $\triangle ABC$ برابر ۷ و ۹ و ۱۴ سانتی متر است. مثلث $\triangle PQR$ با این مثلث متشابه است و طول بزرگترین ضلع آن ۲۱ سانتی متر است. محیط مثلث $\triangle PQR$ را محاسبه کنید.

سوال: اگر نسبت مساحت های دو مثلث متشابه ۲۵ باشد نسبت محیط های آنها را بدست آورید

سوال: اگر محیط دو مثلث متشابه ۲۵ و ۴۵ سانتی متر و مساحت مثلث کوچکتر ۵۰ سانتی متر مربع باشد مساحت مثلث بزرگتر را بدست آورید.

سوال: پاره خط های AH و $A'H'$ دو ارتفاع متناظر از دو مثلث متشابه قائم الزویه $\triangle ABC$ و $\triangle A'B'C'$ می باشند که نسبت مساحت های آنها برابر $\frac{4}{25}$ است. مقدار x را بیابید.



روابط طولی در مثلث قائم الزاویه:

اگر مثلث $\triangle ABC$ را که در رأس A قائمه است در نظر بگیریم مهمترین روابطی که برقرار است عبارتند از:

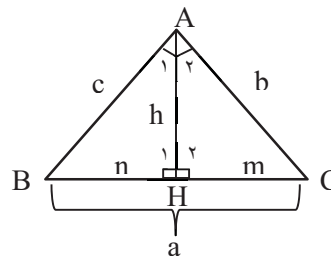
$$۱) a^2 = b^2 + c^2 \quad (\text{فیثاغورس})$$

$$۲) b^2 = a \times m$$

$$۳) c^2 = a \times n$$

$$۴) h^2 = m \times n$$

$$۵) a \times h = b \times c$$



با قضیه فیثاغورس آشنایی دارید و حتی کاربردش را بارها دیده اید. اما روابط دیگر را اثبات می کنیم:

$$\Rightarrow \begin{cases} \widehat{B} \text{ مشترک} \\ \widehat{A} = \widehat{H} = 90^\circ \end{cases} \quad \triangle ABH \sim \triangle ABC \quad \text{اثبات رابطه ۳ و ۲}$$

به حالت دوزاویه ① $\triangle ABH \sim \triangle ABC$

$$\Rightarrow \begin{cases} \widehat{C} \text{ مشترک} \\ \widehat{A} = \widehat{H} = 90^\circ \end{cases} \quad \triangle ACH \sim \triangle ABC \quad \text{به حالت دوزاویه ②}$$

$$\text{②} \Rightarrow \frac{h}{c} = \frac{b}{a} = \frac{m}{b} \Rightarrow b^2 = a \times m$$

$$\text{①} \Rightarrow \frac{h}{b} = \frac{c}{a} = \frac{n}{c} \Rightarrow c^2 = a \times n$$

برای اثبات رابطه ۴ بدین ترتیب عمل می کنیم:

$$\text{①}, \text{②} \Rightarrow \triangle ACH \sim \triangle ABH \Rightarrow \frac{b}{c} = \frac{h}{n} = \frac{m}{h} \Rightarrow h^2 = n \times m$$

توجه: در دو مثلث $\triangle ABH$ و $\triangle ACH$ تساوی زاویه ها به این

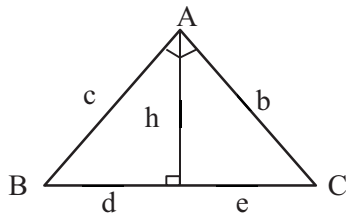
$$\widehat{B} = \widehat{A_2}, \widehat{H_1} = \widehat{H_2}, \widehat{A_1} = \widehat{C} \quad \text{صورت است که:}$$

(اگر مثلث $\triangle ABH$ را بچرخانید تا حالت قائم مثلث $\triangle ACH$ را به خود بگیرد متوجه تساوی زاویه ها خواهید شد.)

به تساوی زاویه ها برای نوشتن درست نسبت هانیا داریم زیرا هر نسبت درواقع نسبت اضلاع روبروی زاویه های مساویست.

$$\begin{cases} S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} a \times h \\ S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} b \times c \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2} a \times h = \frac{1}{2} b \times c \Rightarrow a \times h = b \times c$$

مثال: در مثلث زیر اگر $h=5$ و $d=7$ مقدار e را محاسبه کنید. (کارد در کتاب درسی صفحه ۴۵)



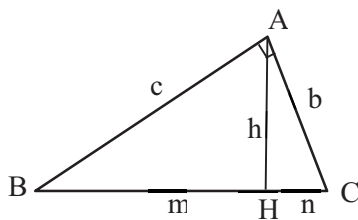
$$h^2 = de \Rightarrow 25 = 7e \Rightarrow e = \frac{25}{7}$$

مثال: اگر در مثلث فوق $b=4$ و $c=3$ مقدار h را بیابید.

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow a^2 = 9 + 16 \Rightarrow a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$$

$$bc = ha \Rightarrow 12 = 5h \Rightarrow h = \frac{12}{5}$$

سوال: با توجه به مثلث زیر در هر حالت مقادیر خواسته شده را محاسبه کنید.



الف) $n=2, m=4$ مقادیر b و c را بیابید.

ب) $b=5, n=2$ مقادیر h و c را بیابید.

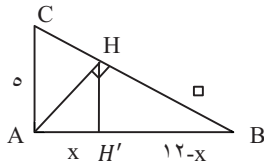
ج) $c=10, h=3$ مقادیر a, m و b را بیابید.

د) $h=4, n=2$ مقدار m را بیابید.

ه) $c=8, b=4$ مقادیر a و h را بیابید.

تست:

(۱) در شکل زیر ارتفاع هر دو مثلث قائم الزاویه رسم شده است اندازه x کدام است؟



(۱) $\frac{300}{169}$ (۲) $\frac{144}{25}$ (۳) $\frac{25}{13}$ (۴) $\frac{144}{13}$

$$AB = x + 12 - x \Rightarrow BC^2 = 5^2 + 12^2 = 144 + 25 = 169 \Rightarrow BC = 13$$

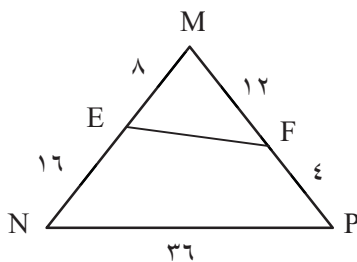
$$AH \cdot BC = 5 \times 12$$

در مثلث قائم الزاویه از روابط طولی استفاده می کنیم.

$$\Rightarrow AH = \frac{60}{13}, \Delta AHB : AB. AH' = AH^2 \Rightarrow \left(\frac{60}{13}\right)^2 = 12x \Rightarrow x = \frac{\frac{3600}{169}}{12} \Rightarrow x = \frac{3600}{12 \times 169} = \frac{300}{169}$$

توجه: از روابط طولی شماره ۵ و ۲ استفاده کردیم.

(۲) در شکل زیر محیط مثلث m_{EF} چقدر است؟



(۱) ۳۸ (۲) ۳۴ (۳) ۳۶ (۴) ۳۴

پاسخ: گزینه ۱

دو مثلث ΔMEF و ΔMNP را در نظر بگیرید تشابه را بنویسید تا EF محاسبه شود.

خوب بخوایم

بیندیشیم:

دخترک طبق معمول هر روز جلوی ویتترین کفش فروشی ایستاد و به کفشهای قرمز رنگ باحسرت نگاه کرد. بعد به بسته های چسب زخمی که در دست داشت خیره شد و یاد حرف پدرش افتاد: اگر تا پایان ماه هر روز بتوانی تمام چسب زخمی رو که داری بفروشی آخر ماه کفش های قرمز رو برات میخرم. دخترک به کفش ها نگاه کرد و با خودش گفت: یعنی من باید دعا کنم هر روز دست و پایا صورت ۱۰۰ نفر زخم بشه تا... بعدشانه هایش را بالا انداخت و به راه افتاد و گفت: نه خدانکنه... اصلا کفش نمیخواهم

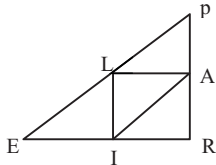
یاد بگیریم هرگز برای کسی بدی و دردو... نخواهیم.

تمریناتی برای تلاش بیشتر:

۱- در دو مثلث متشابه ثابت کنید نسبت میانه های نظیر در آنها برابر است با نسبت تشابه دو مثلث

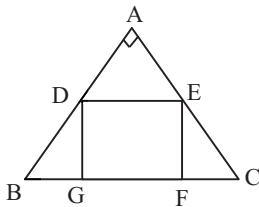
۲- ثابت کنید در دو مثلث متشابه نسبت مساحت های آن دو مثلث برابر توان دوم نسبت تشابه است.

۳- در شکل زیر ، نقاط A ، L و I به ترتیب نقاط وسط ضلع های pR ، pE ، ER هستند چرا دو مثلث ALI و pRE متشابه اند؟



۴- در شکل زیر $DEFG$ مربع است. اگر $AC=3$ و $AB=4$ باشد طول ضلع این مربع چقدر است؟ (استعداد های

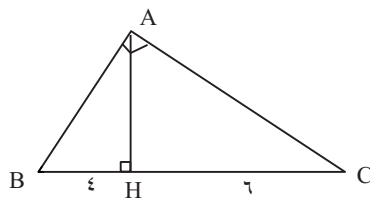
درخشان علامه حلی دی ۹۶) پاسخ: $\frac{60}{37}$



(از تشابه مثلث ABC با دو مثلث BDG و CEF استفاده کنید و اینکه

$$(BC = BG + GF + FC)$$

۵- در بزرگترین مثلث قائم الزاویه شکل مقابل اندازه بزرگترین میانه چقدر است؟ (استعداد های درخشان علامه حلی دی ۹۶)



(راهنمایی: فاصله رأس C تا ضلع روبرویش از بقیه رأس ها تا ضلع روبرویش بیشتر است پس میانه Cm

را باید محاسبه کنید . از روابط طولی استفاده کنید.)

فصل سوم : تابع

آشنایی با برخی از انواع تابع

وارون یک تابع و تابع یک به یک

اعمال جبری روی توابع

درس اول: آشنایی با انواع تابع:

یادآوری:

- ۱- مجموعه ای از زوجهای مرتب (رابطه) را که هیچ دو زوج مرتب عضو اول یکسان نداشته باشند را تابع مینامند و اگر نقاط نظیر مختصات زوج های مرتب تابع را در صفحه محورهای مختصات تعیین کنیم مجموعه ای از نقاط بدست می آید که آن را نمودار تابع می نامند.
- ۲- مجموعه مختصه های اول (X ها) همه زوجها ، دامنه تابع نامیده می شود و مجموعه مختصه های دوم (Y ها) همه زوجها ، برد تابع خوانده می شود.
- ۳- از نظر نموداری رابطه ای تابع است که هر خط موازی محور Y ها نمودار آن را حداکثر در یک نقطه قطع کند.
- ۴- اگر f تابعی از A به B باشد دامنه آن A است ولی لزومی ندارد که برد آن همان مجموعه B باشد. مجموعه B را هم دامنه یا مقصد تابع f می نامند. برد یک تابع زیر مجموعه ای از هم دامنه آن است و ممکن است مساوی هم دامنه نیز بشود.
- ۵- اگر تابعی از A به B با نمودار ون نمایش داده شده باشد اولاً از هر عضو A باید دقیقاً یک پیکان خارج شود و دوم اینکه لازم نیست به هر عضو B دقیقاً یک پیکان وارد شود ممکن است به یک عضو B یک پیکان ، یا بیش از یک پیکان وارد شود یا آن که اصلاً پیکانی وارد نشود.
- ۶- نمودار هر تابع به صورت $y = ax + b$ (تابع درجه اول) خط راست است از اینرو تابع درجه اول را تابع خطی نیز می نامند.
- ۷- تابع به صورت $y = ax^2 + bx + c$ را تابع درجه دوم می نامند. نمودار این تابع منحنی به نام سهمی است که دارای محور تقارنی به صورت $x = \frac{-b}{2a}$ می باشد.
- ۸- به دستور یا قانون بیانگر تابع ، ضابطه آن تابع گفته می شود.
- ۹- برای مشخص بودن یک تابع ضابطه و دامنه آن باید مشخص باشند.
- ۱۰- در صورت عدم بیان دامنه ، بزرگترین مجموعه ای که آن تابع در آن قابل تعریف است را به عنوان دامنه در نظر میگیریم.

انواع توابعی که در این فصل با آنها سروکار داریم:

۱- توابع گویا: هر عبارتی به صورت $f(x) = \frac{g(x)}{t(x)}$ که در آن $g(x)$ و $t(x)$ چند جمله ای هستند و همچنین $t(x) \neq 0$ یک تابع گویا نامیده می شود. مثال:

$$h(x) = \frac{7}{x}, \quad g(x) = \frac{2x-1}{x^2-5x+1}, \quad f(x) = \frac{x+7}{3x-1}$$

دامنه توابع گویا: از قبل میدانیم که تقسیم بر صفر در ریاضیات تعریف نشده است بنابراین ریشه های مخرج جزو دامنه توابع گویا نیستند.

مثال: دامنه توابع گویای زیر را بیابید.

$$۱) f(x) = \frac{3x+2}{x^2-x} \Rightarrow x^2-x=0 \Rightarrow x(x-1)=0 \Rightarrow x=0 \text{ یا } x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{0, \pm 1\}$$

$$۲) f(x) = \frac{x+2}{2x^2-5x+3} \Rightarrow 2x^2-5x+3=0 \Rightarrow x^2-5x+6=0 \Rightarrow (x-3)(x-2)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-3=0 \Rightarrow x=3 \xrightarrow{\div 2} x=\frac{3}{2} \\ x-2=0 \Rightarrow x=2 \xrightarrow{\div 2} x=1 \end{cases} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{3}{2}, 1\right\}$$

توجه: می توان ریشه ها را از راه Δ هم بدست آورد.

$$۳) f(x) = \frac{x-2}{x^2-8} \Rightarrow$$

$$۴) f(x) = \frac{2x^2+4x+1}{x^4-3x^2-4} \Rightarrow$$

$$۵) f(x) = \frac{x-1}{x^2+9} \Rightarrow$$

توجه: در توابع گویا قبل از تعیین دامنه اجازه ساده کردن توابع را نداریم ☹

توجه: دامنه توابع چند جمله ای مثل $f(x)=2x+1$ یا $g(x)=x^3-2x^2$ یا $h(x)=\sqrt{2}x+1$ برابر R می باشد.

تذکر: دامنه توابع گویا برابر $\{ \text{ریشه های مخرج} \}$ - R می باشد.

تذکر: برای حل سوالات جذابتر از دامنه اندکی صبور باشید چون توابع رادیکالی و جزء صحیح را هم باید بخوانید تا بشود سوال ترکیبی نوشت

تساوی دو تابع: دو تابع f و g مساویند اگر و فقط اگر:

الف) دامنه آنها مساوی باشد: $D_f = D_g$

ب) به ازای هر x از دامنه آنها، $f(x) = g(x)$ باشد.

در واقع ابتدا دامنه دو تابع را حساب می کنیم در صورت تساوی آنها سراغ شرط دوم می رویم که باید نشان دهیم به ازای هر عضو دامنه، ضابطه دو تابع برابر است.

$$\text{مثال: اگر } f(x) = x-4 \text{ و } g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-5x+4}{x-1} & x \neq 1 \\ a-2 & x = 1 \end{cases} \text{ مساوی باشند } a \text{ را به دست آورید}$$

$$D_f = D_g = R$$

$$\forall x \neq 1 \in D : g(x) = \frac{(x-1)(x-4)}{x-1} = x-4 = f(x)$$

$$\text{اگر } x=1 \quad f(1) = -3, g(1) = a-2 \Rightarrow a-2 = -3 \Rightarrow a = -1$$

$$\text{سوال: اگر } f(x) = x-4 \text{ و } g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-16}{x+4} & x \neq -4 \\ k & x = -4 \end{cases} \text{ داشته باشیم } f(x) = g(x)$$

را چنان بیابید که به ازای هر x مقدار k را چنان بیابید که به ازای هر x

$$\text{سوال: آیا دو تابع } f(x) = \frac{x^4-4}{x^2+2} \text{ و } g(x) = x^2-2 \text{ مساوی اند؟ چرا؟}$$

سوال: آیا دو تابع $g(x) = |x| - 1$ و $f(x) = \frac{x^2 - 1}{|x| + 1}$ مساوی اند؟ چرا؟

راهنمایی: $x^2 - 1 = |x|^2 - 1$

انتهای درس اول که با توابع رادیکالی و پله ای آشنا شدید باز هم از تساوی دو تابع سوال حل می کنیم.

۲- توابع رادیکالی:

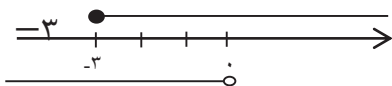
الف) دامنه توابع به صورت $\sqrt[n]{f(x)}$ از حل نامعادله $f(x) \geq 0$ بدست می آید.

ب) دامنه توابع به صورت $\frac{1}{\sqrt[n]{f(x)}}$ از حل نامعادله $f(x) > 0$ بدست می آید.

ج) دامنه توابع به صورت $\sqrt[n+1]{f(x)}$ همان دامنه $f(x)$ می باشد.

مثال: دامنه $f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{2-x}}$ و $g(x) = \frac{2+\sqrt{2+x}}{\sqrt{-x}}$ را بیابید.

$$D_f: 2 - |x| > 0 \Rightarrow |x| < 2 \Rightarrow -2 < x < 2 \Rightarrow D_f: (-2, 2)$$

$$D_g: \begin{cases} 3 + x \geq 0 \Rightarrow x \geq -3 \\ -x > 0 \Rightarrow x < 0 \end{cases}$$


$$D_g: [-3, 0)$$

سوال: دامنه $f(x) = \sqrt{\frac{x+2}{x-1}}$ را بیابید.

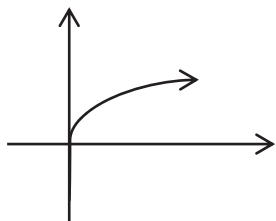
سوال: دامنه تابع $f(x) = \frac{\sqrt{2-x}}{x^2-9}$ را تعیین کرده و به صورت بازه نمایش دهید.

توجه: در درس سوم که عملیات جبری روی توابع را می خوانید با دامنه های ترکیبی از توابع گویا، رادیکالی، جزء صحیح و ... آشنا می شوید.

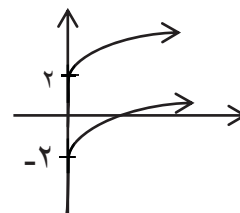
رسم توابع رادیکالی به کمک انتقال:

۱- برای رسم $\sqrt{x}+a$: نمودار $\sqrt{x}$ را به اندازه $|a|$ واحد در امتداد محور y ها انتقال می دهیم اگر $a>0$ انتقال در جهت مثبت و اگر $a<0$ انتقال در جهت منفی خواهد بود.

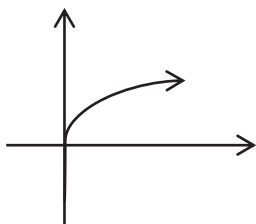
به عبارت دیگر: a را روی محور y ها مشخص کرده و از روی آن $\sqrt{x}$ را رسم می کنیم.



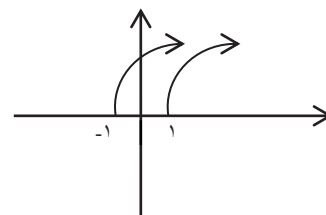
$$\begin{array}{c} \sqrt{x}+2 \\ \hline \sqrt{x}-2 \end{array}$$



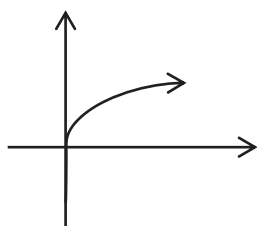
۲- برای رسم $\sqrt{x+a}$: نمودار $\sqrt{x}$ را به اندازه $|a|$ واحد در امتداد محور x ها انتقال می دهیم. اگر $a>0$ انتقال به سمت چپ و اگر $a<0$ انتقال به سمت راست خواهیم داشت به عبارت دیگر می توان عددی که در پرانتز کنار x نوشته شده را در نظر گرفت و قرینه آن را روی محور x ها مشخص کرده و نمودار $\sqrt{x}$ را از روی آن رسم کرد.



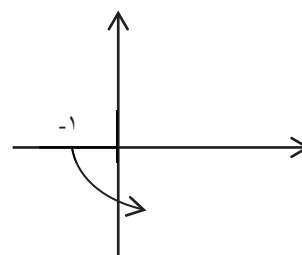
$$\begin{array}{l} \textcircled{1} \sqrt{x+1} \rightarrow -1 \\ \textcircled{2} \sqrt{x-1} \rightarrow +1 \end{array}$$



۳- برای رسم $-\sqrt{x}$: نمودار $\sqrt{x}$ نسبت به محور x ها قرینه می شود. به عبارت دیگر جهت آن به سمت پائین می باشد.

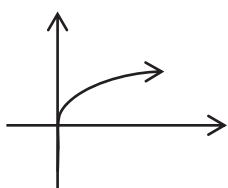


$$-\sqrt{x+1}$$

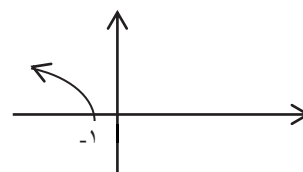


در واقع منفی قبل از رادیکال نشان می دهد به سمت پائین حرکت کنیم چون y های منفی سمت پائین هستند.

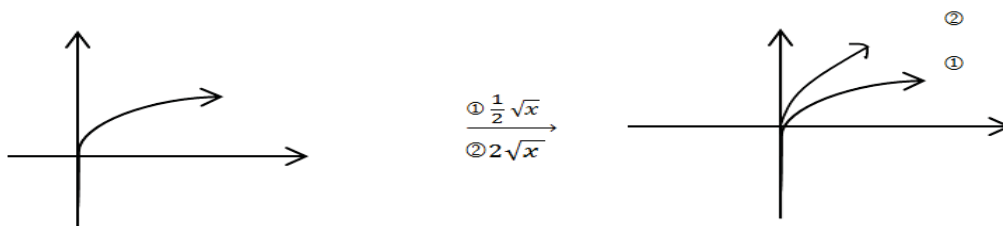
۴- برای رسم $\sqrt{-x}$: نمودار $\sqrt{x}$ به جهت x های منفی رسم می شود.



$$\sqrt{-(x+1)}$$



۵- برای رسم $y = a\sqrt{x}$ اگر a عدد صحیح باشد نمودار جمع تر می شود به عبارت دیگر به محور y ها نزدیکتر می شود و اگر $0 < a < 1$ باشد نمودار بازتر میشود و به محور x ها نزدیکتر می شود



سوال: نمودارهای زیر را به روش انتقال رسم کنید

۱) $y = \sqrt{x-2} + 1$

۲) $y = -\sqrt{x-2} + 1$

۳) $y = \sqrt{-x+3} - 1$

۴) $y = \sqrt{-x} - 1$

۳- توابع پله ای و تابع جزء صحیح:

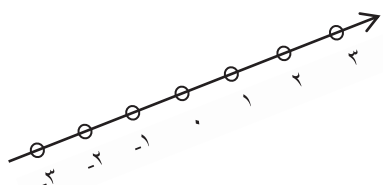
تعریف: هر تابعی که بتوان دامنه آن را به تعدادی بازه تقسیم بندی کرد که تابع روی هر کدام از این بازه ها تابع ثابت باشد یک تابع پله ای نامیده میشود

نوع خاصی از توابع پله ای تابع جزء صحیح می باشد.

تعریف: تابعی که به هر عدد حقیقی، جزء صحیح آن را نسبت می دهد تابع جزء صحیح (یا براکت) نامیده می شود و با $f(x) = [x]$ نمایش داده می شود.

توجه: جزء صحیح هر عدد صحیح برابر خود آن عدد میباشد

توجه: جزء صحیح هر عدد حقیقی (که صحیح نباشد) اولین عدد سمت چپ آن عدد می باشد به بیان ساده تر به شکل زیر دقت می کنیم:



اگر محور اعداد را کمی بچرخانیم تا مایل شود: و اعداد صحیح را یک حفره در نظر بگیریم هر عدد

بین آنها در حفره قبلش (سمت چپ) می افتد:

$$[1/5] = 1 \quad [-2/25] = -3 \quad [\sqrt{3}] = 1 \quad [-\sqrt{2}] = -2$$

رسم تابع جزء صحیح:

۱- ابتدا دامنه را بنا به ضابطه تغییر می دهیم منظور آنست که دامنه حدود X است و ممکن است ضابطه $[3X]$ باشد.

۲- دامنه جدید را قسمت قسمت می کنیم و در هر قسمت Y و X را محاسبه می کنیم.

۳- نقاط هر قسمت را به هم وصل کرده و توجه می کنیم که برای تابع بودن حتما باید طرف دوم آنها توخالی باشد البته ممکن است در اولین قسمت هر دو طرف توخالی باشند.

مثال: $y=[2x]$ را در بازه $[-1, 1]$ رسم کنید.

ابتدا دامنه را بنابه سوال تغییر می دهیم: $-1 < x \leq 1 \Rightarrow -2 < 2x \leq 2$

$$-2 < 2x < -1 \Rightarrow [2x] = -2 \Rightarrow -1 < x < -\frac{1}{2}$$

x	-1	$-\frac{1}{2}$
y	-2	-2

$$-1 \leq 2x < 0 \Rightarrow [2x] = -1 \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq x < 0$$

x	$-\frac{1}{2}$	0
y	-1	-1

$$0 \leq 2x < 1 \Rightarrow [2x] = 0 \Rightarrow 0 \leq x < \frac{1}{2}$$

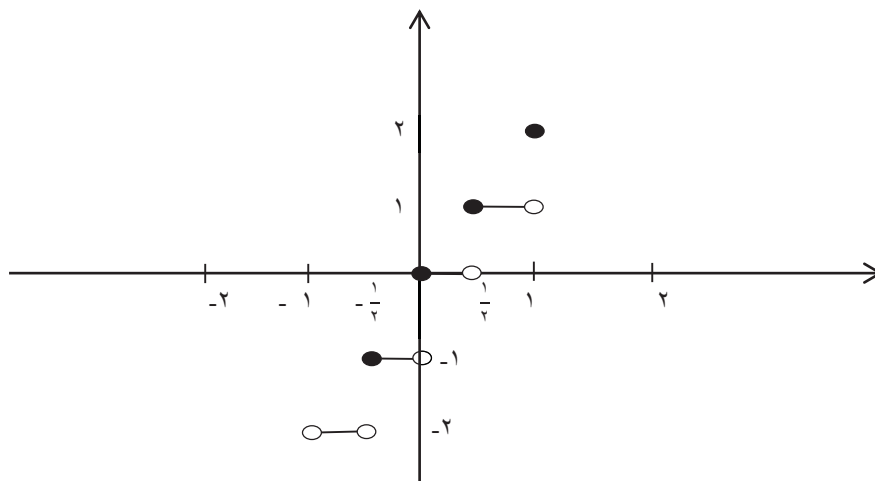
x	0	$\frac{1}{2}$
y	0	0

$$1 \leq 2x < 2 \Rightarrow [2x] = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq x < 1$$

x	$\frac{1}{2}$	1
y	1	1

$$2x = 2 \Rightarrow [2x] = 2 \Rightarrow x = 1$$

x	1
y	2



سوال: نمودار $y = \left[\frac{1}{3}x \right]$ را در بازه $[-3, 3)$ رسم کنید.

سوال: نمودار $y = [x+1]$ را در بازه $[-1, 2)$ رسم کنید.

سوال: نمودار $y = 2[x] - 1$ را در بازه $(-2, 1)$ رسم کنید.

حل چند سوال از تساوی دو تابع

مثال: آیا دو تابع $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x}}$ و $g(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}$ مساویند چرا؟

$$D_f: \frac{x+1}{x} \geq 0$$

x	-1	0	
x+1	-	0	+
x	-	0	+
$\frac{x+1}{x}$	+	0	+

$$D_f: (-\infty, -1] \cup (0, +\infty)$$

$$D_g: \begin{cases} x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1 \\ x > 0 \Rightarrow \end{cases}$$



$$D_g: (0, +\infty)$$

چون $D_f \neq D_g$ پس دو تابع مساوی نیستند.

سوال: آیا دو تابع زیر باهم مساویند؟ چرا؟

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-25}{x-5} & x \neq 5 \\ 6 & x = 5 \end{cases} \quad g(x) = x+5$$

سوال: آیا دو تابع $f(x) = \sqrt{x^2-x}$ و $g(x) = \sqrt{x} \times \sqrt{x-1}$ مساویند؟ چرا؟ (نهایی حسابان خرداد ۹۴)

سوال: آیا دو تابع $f(x) = \left[\frac{1}{x^2+1}\right]$ و $g(x) = 0$ مساویند؟ چرا؟ توجه: $0 < \frac{1}{x^2+1} \leq 1$

نکات کلیدی:

۱- نمودار $y = [nx]$ یک نمودار پلکانی است که اگر $n > 0$ پلکان صعودی و اگر $n < 0$ پلکان نزولی است و طول پله ها $\frac{1}{|n|}$ می باشد و ارتفاع پله ها همیشه یک است.

۲- هرگاه $n > 0$ ، پله ها را از مبدأ به سمت راست رسم می کنیم در واقع نمودار صعودی است. یعنی اگر از سمت چپ به راست نمودار را بررسی کنیم در حال صعود می باشد.

۳- هرگاه $n < 0$ ، پله ها را از مبدأ به سمت چپ رسم می کنیم در واقع نمودار نزولی است یعنی اگر از سمت چپ به راست نمودار را بررسی کنیم در حال نزول می باشد.

$$۴- ۰ \leq x - [x] < ۱$$

$$۵- [-x] = \begin{cases} -[x] & x \in Z \\ -[x] - ۱ & x \notin Z \end{cases}$$

$$۶- n \in Z : \left[\frac{n}{2} \right] = \begin{cases} \frac{n}{2} & n \text{ زوج} \\ \frac{n-1}{2} & n \text{ فرد} \end{cases}$$

۷- $[x+n] = [x] + n$ توجه داشته باشید که این نکته برای $n \in Z$ صادق است.

۸- اگر $-۱ < x < ۰$ داریم: $-۱ < x^{2n+1} < ۰$ $\Leftrightarrow -۱ < [x^{2n+1}] < ۰$

۹- اگر $-۱ < x < ۰$ داریم: $۰ < x^{2n} < ۱$ $\Leftrightarrow ۰ < [x^{2n}] < ۱$

۱۰- برای هر عدد حقیقی x داریم:

$$x \leq [x] + ۱ \geq [x]$$

۱۱- از رابطه شماره ۴ میتوان نتیجه گرفت: $[x - [x]] = ۰$

$$۱۲- [x] + [-x] = \begin{cases} ۰ & x \in Z \\ -۱ & x \notin Z \end{cases}$$

تست:

(۱) رابطه $\{(3, m^2), (2, 1), (-2, m), (3, m+2), (m, 4)\}$ به ازای کدام مقدار m یک تابع است؟ (کنکور تجربی ۸۵)

- (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۲ (۴) هیچ مقدار

پاسخ: گزینه ۲

(۲) اگر $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$ دامنه تابع $f(3-x)$ کدام است؟ (کنکور تجربی ۹۲)

- (۱) $[0, 2]$ (۲) $[0, 3]$ (۳) $[1, 2]$ (۴) $[1, 3]$

$$f(x) = \sqrt{2x - x^2} \Rightarrow D_f: 2x - x^2 \geq 0 \Rightarrow 2x - x^2 = 0 \Rightarrow x = 0, 2$$

$$\begin{array}{c|cccc} x & & 0 & & 2 \\ \hline 2x-x^2 & - & | & + & | & - \end{array} \Rightarrow D_f: 0 \leq x \leq 2$$

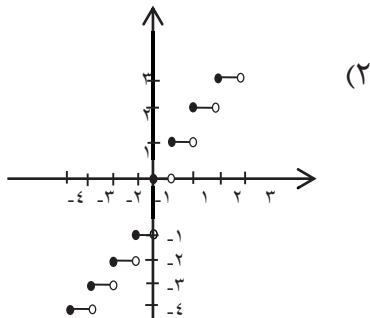
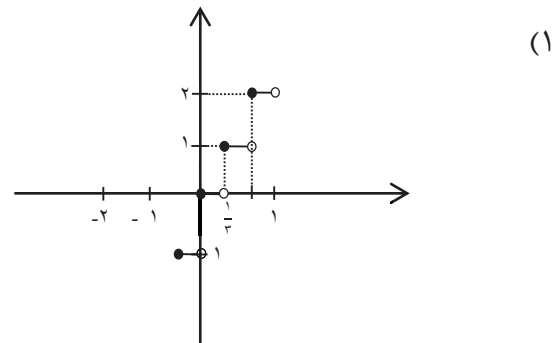
بنابراین اگر $3-x$ قرار است ورودی تابع f باشد باید

$$0 \leq 3-x \leq 2 \Rightarrow -3 \leq -x \leq -1 \Rightarrow 1 \leq x \leq 3$$

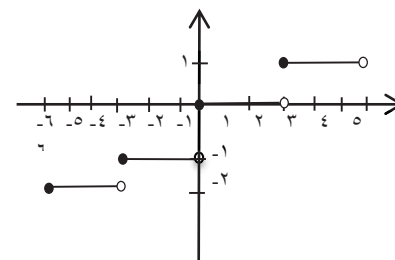
توجه: می توان ابتدا تابع $f(3-x)$ را با جایگذاری $3-x$ به جای x بدست آورد و سپس دامنه آن را حساب کرد.

(۳) نمودار $y = \left[\frac{1}{3}x\right]$ در بازه $[-6, 6]$ کدام است؟

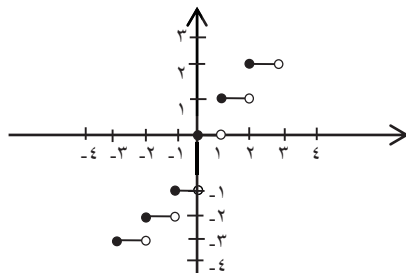
پاسخ: با توجه به نکته ۱، ۲، ۳ گزینه ۳



(۳)



(۴)



(۴) اگر $x^2 + x < 0$ حاصل $[x] + [x^2] + [x^3] + [x^4]$ کدام است؟ (کنکور تجربی خارج ۸۸)

(۱) -۲ (۲) -۱ (۳) صفر (۴) ۱

$$x^2 + x = 0 \rightarrow x = 0 \text{ یا } -1$$

$$\Rightarrow -1 < x < 0$$

با توجه به نکات ۹ و ۸: $[x] + [x^2] + [x^3] + [x^4] = -1 + 0 + (-1) + 0 = -2$

(۵) برای هر عدد طبیعی $n > 2$ حاصل

$[\sqrt{4n^2 - 3n + 1}] - 2[\sqrt{n^2 - 2n}]$ کدام است؟ ([] علامت جزء صحیح است) (کنکور تجربی ۹۱)

(۴) ۴

(۳) ۳

(۲) ۲

(۱) ۱

توجه: در تست به این نکته اشاره شده است که به ازای هر عدد طبیعی بزرگتر از ۲ حاصل عبارت یکسان است کافی است یک عدد طبیعی بزرگتر از ۲ انتخاب کنیم:

$$n=3 \Rightarrow A = [\sqrt{28}] - 2[\sqrt{3}] = 5 - 2 = 3$$

شما با جایگذاری یک عدد دیگر امتحان کنید ☺

۶) در تابع با ضابطه $f(x) = x^2 - 2[x]$ ([] نماد جزء صحیح) مقدار $f(-\frac{1}{4} f(\sqrt{3}))$ کدام است؟ (کنکور تجربی خارج ۹۰)

$$\frac{3}{2}(4) \quad \frac{-3}{2}(3) \quad \frac{9}{4}(2) \quad \frac{-9}{4}(1)$$

پاسخ: گزینه ۲

راهنمایی: ابتدا $f(\sqrt{3})$ را حساب کنید نتیجه را در

$-\frac{1}{4}$ ضرب و سپس در f جایگذاری کنید.

سنگ های مرمر زندگی

بیندیشیم:

می گویند در زمانهای دورپسری بود که به اعتقاد پدرش هرگز نمیتوانست با دستانش کاربارزشی انجام دهد. این پسر هرروز به کلیسای در نزدیکی محل زندگی خود میرفت و ساعت ها به تخته سنگ مرمر بزرگی که در حیاط کلیسا قرار داشت خیره میشد و هیچ نمیگفت. روزی شاهزاده ای از کنار کلیسا عبور میکرد و پسرک را دید که به این تخته سنگ خیره شده است و هیچ نمیگوید. از اطرافیان درمورد پسر پرسید به او گفتند که او چهار ماه است هرروز به حیاط کلیسا می آید و به این تخته سنگ مرمر خیره میشود و هیچ نمی گوید. شاهزاده دلش برای پسرک سوخت کنار او آمد و آهسته به پسرک گفت: جوان به جای بیکارنشستن و زل زدن به این تخته سنگ بهتر است برای خود کاری دست و پا کنی و آینده خود را بسازی. پسرک در مقابل چشمان حیرت زده شاهزاده مصمم و جدی به سوی او برگشت و در چشمانش خیره شد و محکم و متین پاسخ داد: من همین الان در حال کار کردن هستم و بعد دوباره به تخته سنگ خیره شد. شاهزاده از جا برخاست و رفت... چند سال بعد به شاهزاده خبر دادند که آن پسرک از آن تخته سنگ یک مجسمه باشکوه از حضرت داوود ساخته است. مجسمه ای که هنوز هم جزو شاهکارهای مجسمه سازی دنیا به شمار می آید.

نام آن پسر <<میکل آنژ>> نابغه مجسمه سازی دنیا بود.

تمریناتی برای تلاش بیشتر:

(۱) دامنه $f(x) = \frac{1}{|x-4|+3x}$ را محاسبه کنید. پاسخ:

$$R - \{-2\}$$

(۲) نمودار $y = x - [x]$ را در بازه $[-3, 3]$ رسم کنید.

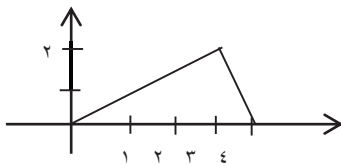
(۳) دامنه تابع $f(x) = \sqrt{\frac{2-\sqrt{x}}{x-2}}$ را بیابید و به صورت بازه بنویسید.

پاسخ: $D_f: (2, 4]$ (نیاز به تعیین علامت دارید).

(۴) تابع $y = x^2 [x]$ را در بازه $[-2, 4]$ رسم کنید.

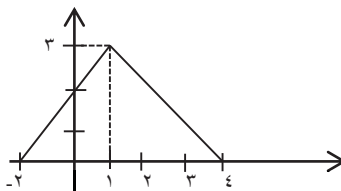
(۵) نمودار تابع f رسم شده است نمودار $g(x) = -2f(x) + 1$ و $h(x) = f(-2x+4)$ را رسم کنید. (مجمع آموزشی

و تربیتی امام صادق (ع) - دوشنبه - تاجیکستان دی ۹۲)



(۶) نمودار تابع f با دامنه $[-2, 4]$ و برد $[0, 3]$ در شکل زیر داده شده است.

مطلوب است: نمودار، دامنه و برد تابع $y = 2f(-2-x) - 3$



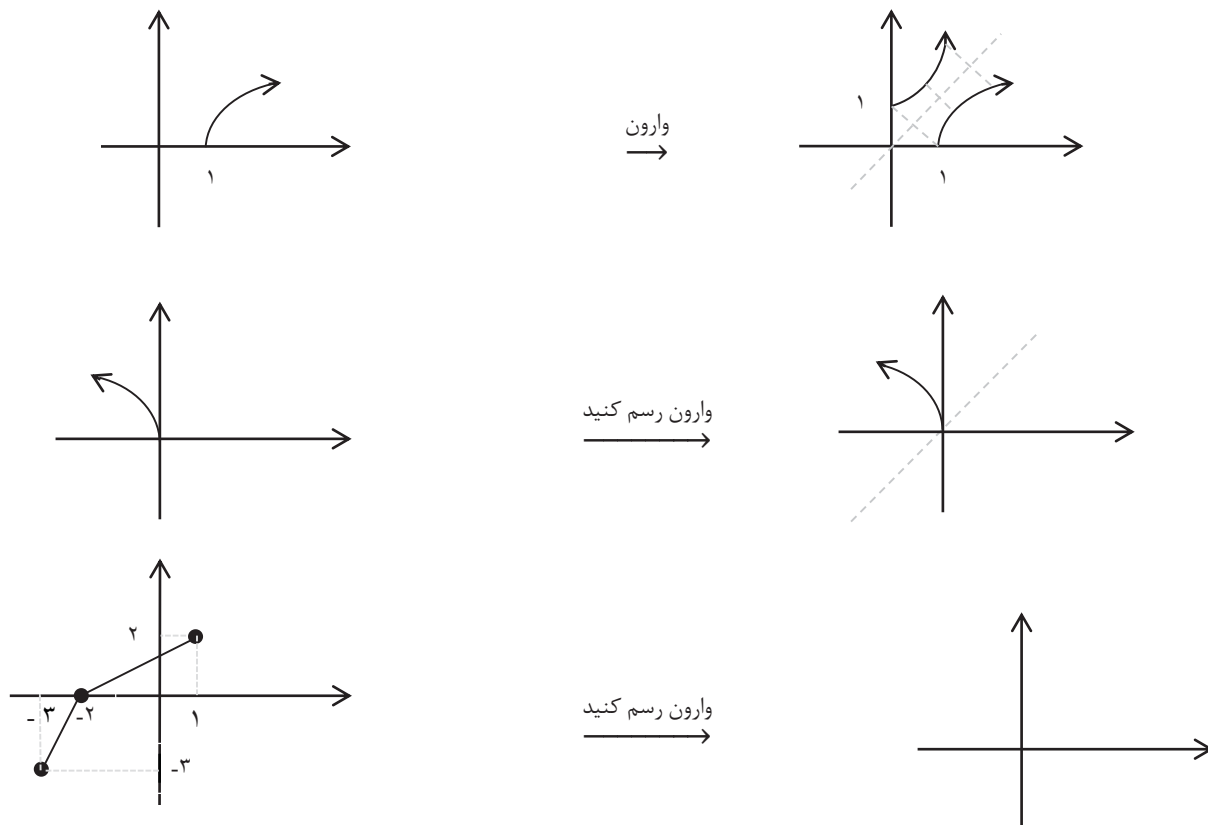
درس دوم : وارون یک تابع و تابع یک به یک:

وارون یک تابع: اگر مؤلفه های همه ی زوج های مرتب تابع f را جابه جا کنیم رابطه جدیدی به دست می آید که آن را وارون تابع f می گوئیم و با f^{-1} نشان می دهیم.

به عنوان مثال هر گاه $f = \{(1,2), (2,3), (3,4)\}$ آنگاه

$$f^{-1} = \{(2,1), (3,2), (4,3)\} \text{ می باشد.}$$

توجه: برای رسم نمودار وارون یک تابع کافی است قرینه نمودار آن تابع را نسبت به نیمساز ربع اول و سوم رسم کنیم.



تابع یک به یک:

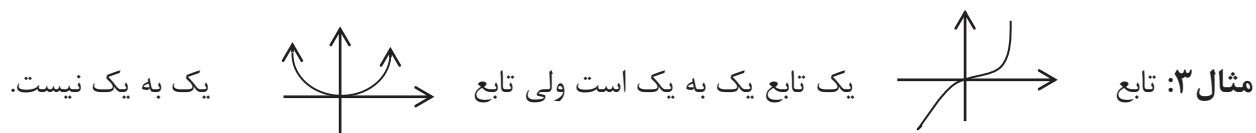
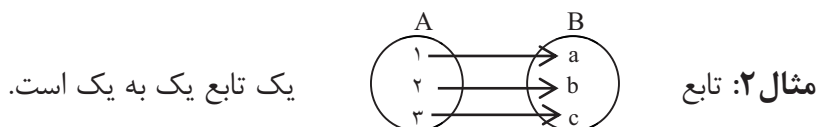
تعریف ۱: به تابعی که در زوج های مرتب متمایز خود ، مؤلفه های دوم تکراری نداشته باشد تابع یک به یک می گوئیم.

تعریف ۲: فرض کنید $f: A \rightarrow R$ یک تابع باشد، اگر هر عضو از برد f فقط با یک عضو از A متناظر باشد آنگاه f را یک به یک گویند.

تعریف ۳: یک تابع یک به یک است هرگاه هر خط موازی محور x ها نمودار آن را در صورت قطع فقط در یک نقطه قطع کند.

تعریف ۴: تابع f یک به یک است اگر برای هر دو نقطه x_1 و x_2 از دامنه f داشته باشیم: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

مثال ۱: تابع $f: \{(1,2), (2,4), (3,6)\}$ یک تابع یک به یک است.

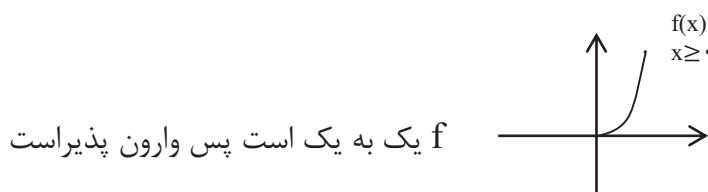
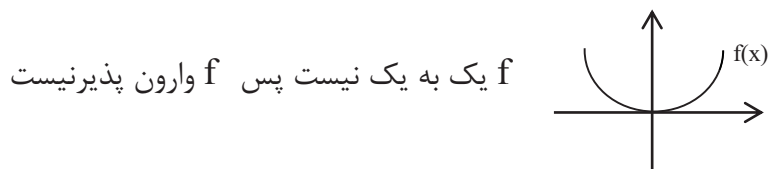


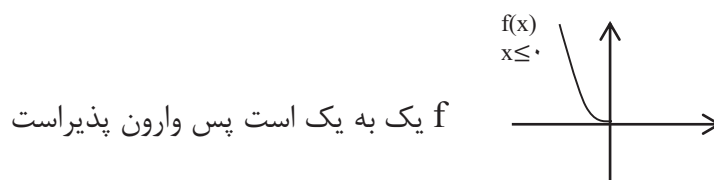
مثال ۴: تابع $f(x) = 3x + 2$ یک به یک است زیرا:

$$\begin{cases} f(x_1) = 3x_1 + 2 \\ f(x_2) = 3x_2 + 2 \end{cases} \Rightarrow 3x_1 + 2 = 3x_2 + 2 \Rightarrow 3x_1 = 3x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

نکته: اگر تابعی یک به یک باشد وارون پذیر خواهد بود

توجه: اگر تابعی یک به یک نباشد وارون پذیر هم نیست اما با کوچکتر کردن دامنه یک تابع ممکن است بتوانیم تابعی یک به یک بسازیم. به مثال زیر دقت کنید:





f یک به یک است پس وارون پذیر است

مثال: تابع $f(x) = |x| + 3$ دارای دامنه R می باشد و یک به یک نیست اما اگر دامنه آن را محدود کنیم یعنی

$D_f: [0, +\infty)$ یا $D_f: (-\infty, 0]$ در نظر بگیریم یک به یک است:

$$\begin{cases} f(x_1) = |x_1| + 3 \\ f(x_2) = |x_2| + 3 \end{cases} \Rightarrow |x_1| + 3 = |x_2| + 3 \Rightarrow |x_1| = |x_2| \Rightarrow x_1 = \pm x_2$$

به ازای یک x_2 دو مقدار برای x_1 بدست آمد پس یک به یک نیست اما اگر $D_f: [0, +\infty)$ در نظر بگیریم مقدار منفی قابل قبول نخواهد بود و تابع یک به یک می شود.

توجه: یک به یک بودن تابع از نظر ضابطه مثل مثال صفحه قبل در محدوده کتاب شما نیست.

عصبانی نشوید اطلاعاتتون بالا رفت ☺

توجه: اگر f تابعی وارون پذیر باشد و وارون آن تابع g باشد. g تابعی است که برعکس f عمل می کند

یعنی اگر $f(a) = b$ آنگاه $g(b) = a$.

نکته: اگر دو تابع f و g وارون یکدیگر باشند داریم: $D_f = R_g$ و $D_g = R_f$

تذکر: f^{-1} یک نماد است و نباید آن را با $\frac{1}{f(x)}$ اشتباه گرفت.

توجه: برای بدست آوردن ضابطه تابع وارون یک تابع وارون پذیر مانند f در معادله $y = f(x)$ ، x را بر حسب y

محاسبه می کنیم سپس با تبدیل y به x تابع $f^{-1}(x)$ را بدست می آوریم.

مثال: ضابطه وارون $f(x) = \frac{x+3}{5}$ را محاسبه کنید.

$$y = \frac{x+3}{5} \Rightarrow 5y = x+3 \Rightarrow x = 5y-3 \Rightarrow f^{-1}(x) = 5x-3$$

توجه: در کتاب درسی فقط تابع خطی مدنظر است و معمولاً وارون پذیر بودن تابع محرز است اما ما در اینجا وارون

پذیر بودن هم نشان میدهیم:

$$\begin{cases} f(x_1) = \frac{x_1+3}{5} \\ f(x_2) = \frac{x_2+3}{5} \end{cases} \Rightarrow \frac{x_1+3}{5} = \frac{x_2+3}{5} \Rightarrow x_1+3 = x_2+3 \Rightarrow x_1 = x_2$$

سوال: ضابطه وارون $f(x)=3x-2$ را محاسبه کنید

مثال: ضابطه وارون $f(x)=\frac{x+1}{x-3}$ را محاسبه کنید.

$$y = \frac{x+1}{x-3} \Rightarrow xy - 3y = x+1 \Rightarrow xy - x = 1+3y \Rightarrow x(y-1) = 1+3y$$

$$\Rightarrow x = \frac{1+3y}{y-1} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1+3x}{x-1}$$

*برای نشان دادن وارون پذیری اش:

$$\begin{cases} f(x_1) = \frac{x_1+1}{x_1-3} \\ f(x_2) = \frac{x_2+1}{x_2-3} \end{cases} \Rightarrow \frac{x_1+1}{x_1-3} = \frac{x_2+1}{x_2-3} \Rightarrow (x_1+1)(x_2-3) = (x_2+1)(x_1-3)$$

$$\Rightarrow x_1x_2 - 3x_1 + x_2 - 3 = x_1x_2 - 3x_2 + x_1 - 3 \Rightarrow -3x_1 - x_1 = -3x_2 - x_2 \Rightarrow -4x_1 = -4x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

البته اگر نمیگفت وارون تابع را محاسبه کنید مثلاً میگفت در صورت وجود، وارونش را بیابید ابتدا باید وارون پذیری اش ثابت میشد ولی مابرای تمرین بیشتر یک به یک بودن یا وارون پذیری آن را هم نشان دادیم

سوال: نشان دهید $f(x) = \frac{3x-2}{5x-3}$ وارون خودش است.

مثال: اگر $f(x)=2x+5$ و $g(x)=mx+h$ باشد، مقادیر m و h را چنان بیابید که این دو تابع وارون یکدیگر باشند.

$$f(x)=2x+5 \Rightarrow y=2x+5 \Rightarrow 2x=y-5 \Rightarrow x = \frac{y-5}{2}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = g(x) \Rightarrow \frac{x-5}{2} = mx+h \Rightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{2} \\ h = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

سوال: وارون $f(x)=\sqrt{2x-1}$ را بدست آورید.

سوال: تحقیق کنید آیا دو تابع $f(x) = \frac{1}{x} + 3$ و $g(x) = \frac{1}{x-3}$ وارون یکدیگرند؟

سوال: به کمک رسم نمودار، ثابت کنید تابع

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x - 1 & x < 0 \end{cases}$$

وارون پذیر نیست. (نهایی حسابان خرداد ۹۴)

سوال: نمودار تابعی مانند f را رسم کنید که در هر دو شرط زیر صدق کند:

الف) f وارون پذیر نباشد

ب) برای هر عدد حقیقی x ، $f(x) > x$

نکات کلیدی:

(۱) در توابع چند ضابطه ای برای معکوس پذیری باید هر ضابطه روی دامنه اش یک به یک باشد و بردها هم اشتراک نداشته باشند.

(۲) تابع خطی $f(x)=ax+b$ ($a \neq 0$) همیشه وارون پذیر است.

(۳) شیب یک تابع با شیب وارونش عکس همدیگرند یعنی اگر شیب تابع f برابر با a باشد آنگاه شیب تابع f^{-1} برابر است با $\frac{1}{a}$

(۴) دو حالت وجود دارد که یک تابع خطی با وارونش برابر باشد:

حالت اول: تابع خطی $y = x$ با وارونش برابر است.

حالت دوم: وقتی شیب خط تابع برابر -1 باشد مثل $f(x)=2-x$

(۵) تابع هموگرافیک یعنی $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ همواره با شرط: $c \neq 0$ و $\frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}$ یک به یک است پس وارون پذیر است و

می توان وارون آن را از $f^{-1}(x)=\frac{-dx+b}{cx-a}$ بدست آورد یعنی جای a و d را عوض کرده و هر دو را قرینه می کنیم

و اگر a و d برابروقرینه هم باشند آنگاه وارون تابع هموگرافیک با خودش برابر است.

تست:

(۱) وارون $f(x) = \frac{2x-3}{x-2}$ عبارت است:

الف) $f^{-1}(x) = \frac{2x+3}{x-2}$ ب) $f^{-1}(x) = \frac{-2x+3}{x+2}$

ج) $f^{-1}(x) = \frac{2x-3}{x+2}$ د) $f^{-1}(x) = \frac{2x-3}{x-2}$

پاسخ: گزینه د از نکته شماره ۵ استفاده کنید.

(۲) شیب وارون تابع $2x-3y=3$ برابر است با:

الف) $\frac{3}{2}$ ب) $\frac{2}{3}$

ج) $-\frac{3}{2}$ د) $-\frac{2}{3}$

پاسخ: گزینه الف از نکته شماره ۳ استفاده کنید.

(۳) کدام تابع همیشه وارون پذیر است و وارونش با خودش برابر است؟

الف) $y=2x+1$ ب) $y=\frac{x+1}{3}$ ج) $\frac{2x+6}{3x+9}$ د) $y=4-x$

پاسخ: گزینه د از نکته ۴ و ۵ کمک بگیرید.

تمریناتی برای تلاش بیشتر:

(۱) اگر تابع f وارون پذیر باشد وارون تابع

$$h(x) = \frac{2f(x)+1}{f(x)-3} \text{ را بیابید.}$$

راهنمایی: اولاً $y=h(x) \Rightarrow x=h^{-1}(y)$ ثانیاً از رابطه $h(x)=y$ که رابطه $h(x)=y$ را محاسبه کنید از طرفین f^{-1} بگیرید و سپس جای x مقدار مساویش را قرار دهید و در نهایت جای x و y را تعویض کنید.

(۲) نشان دهید $f(x)=x^2-4x+3$ ($x \leq 2$) معکوس پذیر است.

(۳) f تابعی یک به یک است و f^{-1} معکوس f است. معکوس تابع $g(x)=1+2f(x-3)$ را حساب کنید (نهایی حسابان خرداد ۸۸)

(۴) تابع f با ضابطه $f(x)=\begin{cases} x^2 & x \geq 1 \\ 2x-1 & x < 1 \end{cases}$ مفروض است. ضابطه f^{-1} را بنویسید.

راهنمایی: برای هر ضابطه جداگانه وارون را بیابید یعنی f^{-1} نیز دو ضابطه ای است.

(۵) a و b و c را طوری تعیین کنید که معکوس تابع f خودش باشد. $f(x)=\frac{x-a}{bx-c}$

(۶) ضابطه تابع وارون تابع f با ضابطه $f(x)=\frac{x^3|x|}{x^4+1}$ را بدست آورید. (استعداد های درخشان علامه حلی دی ۹۶)

راهنمایی: ابتدا تابع را به صورت دو ضابطه ای بنویسید که قدر مطلق از بین برود و سپس هر ضابطه را جداگانه وارونش را محاسبه کنید. دقت کنید برد تابع برابر دامنه وارون می شود.

درس سوم: اعمال جبری روی توابع:

تعریف: دو تابع حقیقی f و g را در نظر می گیریم و دامنه آن ها را یکسان می کنیم یعنی دامنه آن ها را مجموعه $D=D_f \cap D_g$ قرار می دهیم. فرض کنید x متعلق به D باشد، در این صورت:

الف- مجموع دو تابع f و g را با نماد $f+g$ نشان می دهیم و آن را چنین تعریف می کنیم:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$$

ب- تفاضل دو تابع f و g را با نماد $f-g$ نشان می دهیم و آن را چنین تعریف می کنیم:

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$$

ج- حاصل ضرب دو تابع را با نماد $f.g$ نشان می دهیم و به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$(f.g)(x)=f(x) \times g(x)$$

د- تقسیم دو تابع f و g را با نماد $\frac{f}{g}$ نشان می دهیم و آن را چنین تعریف می کنیم:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)} \quad g(x) \neq 0$$

توجه: دامنه همه توابع تعریف شده در بالا $D_f \cap D_g$ است به جزء $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x)=0\}$$

مثال: توابع $f(x)=\sqrt{x+2}$ و $g(x)=\frac{2}{x-3}$ داده شده اند (نهایی ریاضی (۳) تجربی شهریور ۹۵)

الف) دامنه تابع $\frac{g}{f}$ را با استفاده از تعریف به دست آورید.

ب) ضابطه تابع $\frac{g}{f}$ را تشکیل دهید.

ج) حاصل عبارت $(-1)(3f-2g)$ را به دست آورید.

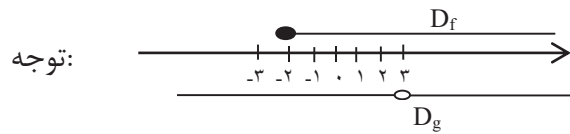
الف)

$$D_f: x+2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2 \Rightarrow D_f: [-2, +\infty)$$

$$D_g: x-3 \neq 0 \Rightarrow x \neq 3 \Rightarrow D_g: \mathbb{R} - \{3\}$$

$$D_{\frac{g}{f}} = D_f \cap D_g - \{x \mid f(x)=0\} \Rightarrow D_{\frac{g}{f}} = [-2, 3) \cup (3, +\infty) - \{x \mid \sqrt{x+2}=0\}$$

$$\Rightarrow D_{\frac{g}{f}} = [-2, 3) \cup (3, +\infty) - \{x+2=0 \Rightarrow x=-2\} = (-2, 3) \cup (3, +\infty)$$



بهترین کار برای اشتراک گرفتن محور است.

$$\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{\frac{2}{x-3}}{\sqrt{x+2}} = \frac{2}{(x-3)\sqrt{x+2}} \quad (\text{ب})$$

$$(3f-2g)(-1) = 3f(-1) - 2g(-1) = 3 \times 1 - 2 \times \frac{-1}{2} = 3 + 1 = 4 \quad (\text{ج})$$

سوال: توابع $f(x) = \frac{3x}{x-1}$ و $g(x) = \sqrt{x}$ داده شده اند. مقدار $\left(\frac{f-g}{2g}\right)(4)$ را محاسبه کنید. (نهایی ریاضی (۳) تجربی خرداد ۹۳)

سوال: توابع $f(x) = x^2$ و $g(x) = \frac{1}{x}$ مفروضند مقدار $\sqrt{(2f-4g)(2)}$ را بدست آورید.

سوال: اگر $f(x) = x$ و $g(x) = \sqrt{x^2+3}$ باشد. (نهایی ریاضی (۳) تجربی خرداد ۹۶)

الف) دامنه تابع $\frac{g}{f}$ را با استفاده از تعریف بدست آورید.

ب) تابع $\frac{g}{f}$ را تشکیل دهید.

سوال: دو تابع $f(x) = \sqrt{x}+2$ و $g(x) = \frac{1}{x-4}$ را در نظر بگیرید. (نهایی حسابان شهریور ۹۴)

دامنه تابع $\frac{f}{g}$ را بدست آورید.

مثال: اگر $f = \{(1, -1), (2, 0), (3, 2)\}$ و $g = \{(1, 3), (2, -2), (3, 4)\}$ حاصل عبارات زیر را بیابید.

الف) $f+g$ ب) $\frac{g}{f}$

الف) ابتدا دامنه $f+g$ را پیدا می کنیم: $D_{f+g} = \{1, 2\}$

$$\begin{cases} (f+g)(1) = f(1) + g(1) = -1 + 3 = 2 \\ (f+g)(2) = f(2) + g(2) = 0 + 4 = 4 \end{cases} \Rightarrow f+g = \{(1, 2), (2, 4)\}$$

ب) $D_{\frac{g}{f}} = D_f \cap D_g - \{x \mid f(x) = 0\} = \{1, 2\} - \{2\} = \{1\}$

$$\frac{g}{f}(1) = \frac{g(1)}{f(1)} = \frac{3}{-1} = -3 \rightarrow \frac{g}{f} : \{(1, -3)\}$$

سوال: اگر $f = \{(1, 2), (-2, 5), (0, 7), (3, -4)\}$ و $g = \{(1, 4), (2, 9), (-2, 3)\}$ عبارات های زیر را محاسبه کنید.

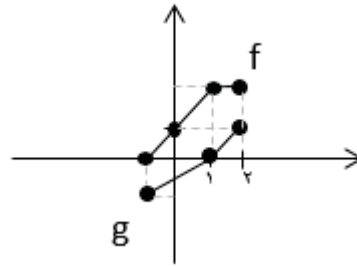
الف) $f-g$ ب) $\frac{f}{g}$ را محاسبه کنید.

سوال: فرض کنید $f = \{(-4, 13), (-1, 7), (0, 5), (\frac{5}{3}, 0), (3, -5)\}$

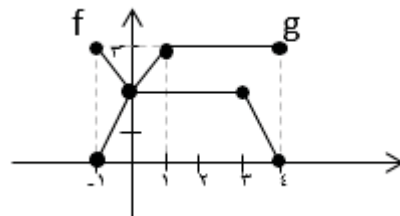
$g = \{(-4, -7), (-2, -5), (0, -3), (3, 0), (5, 2)\}$ توابع $\frac{f}{g}$ و $f.g$ را محاسبه کنید.

سوال: اگر $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-3}}$ و $g(x) = \sqrt{3-x}$ باشد آیا تابع $f \times g$ وجود دارد؟ چرا؟ (راهنمایی: $D_{f \times g}$ را محاسبه کنید)

سؤال : نمودار توابع f و g در شکل زیر رسم شده است. نمودار $f+g$ را رسم کنید.

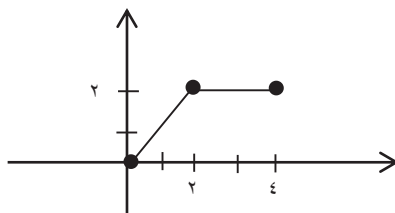


سؤال : نمودار دو تابع f و g در شکل زیر رسم شده است. نمودار $2f-g$ را رسم کنید.



توجه: اگر k عددی مثبت (منفی) باشد برای رسم نمودار تابع با ضابطه $y=kf(x)$ کافی است عرض هر نقطه از نمودار تابع با ضابطه $y=f(x)$ را k برابر کنیم.

سؤال : در شکل زیر نمودار تابع f داده شده است نمودار $y=-2f(x)$ را رسم کنید.



(کار در کلاس صفحه ۶۹ کتاب درسی)

تذکر: تمام نکته هایی که درمورد رسم توابع رادیکالی به کمک انتقال گفته شد در مورد سایر توابع نیز صادق است تنها تفاوت, نوع شکل هست.

تست:

۱) اگر $f^{-1} = \{(2,1), (3,-2), (4,-1)\}$ و $f \circ g = \{(-2,-1), (-1,8)\}$ و تابع g یک به یک باشد کدام نقطه زیر حتماروی g^{-1} قرار دارد؟

- (۱) $(-1, -2)$ (۲) $(-2, -1)$ (۳) $(-1, -2)$ (۴) $(-2, -1)$

پاسخ: گزینه ۲ راهنمایی: f را بدست آورید سپس $D_f \cap D_{f \circ g}$ نشان میدهد چه نقاطی حتماً در g حضور دارند و ...

۲) اگر توابع f و g به صورت $\begin{cases} f: N \rightarrow N \\ f(x) = 2x \end{cases}$ و $g = \{(1, \frac{2}{3}), (4, -1), (5, 1), (6, 4)\}$ تعریف شوند تابع $f+g^{-1}$ کدام است؟

- (۱) $\{(1, 4) \text{ و } (4, 1)\}$ (۲) $\{(5, 3) \text{ و } (6, 2)\}$

- (۳) $\{(4, 7) \text{ و } (1, \frac{2}{3})\}$ (۴) $\{(5, 1) \text{ و } (6, 2)\}$

پاسخ: گزینه ۱ راهنمایی: $D_{g^{-1}} \cap D_f$ را حساب کنید و روی آن نقاط کار کنید.

۳) اگر $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ و $g(x) = \sqrt{3x-x^2}$ باشد دامنه $\frac{f}{g}$ کدام است؟

- (۱) $[-2, 2]$ (۲) $[-2, \frac{1}{2}]$ (۳) $[\frac{1}{2}, 2]$ (۴) $[0, 2]$

پاسخ: گزینه ۴

۴) اگر $f = \{(2, 7), (3, 1), (1, 4), (0, 2)\}$ و $g = \{(3, 4), (0, 3), (4, 2), (1, 2)\}$ باشد برد تابع $f+g$ کدام است؟

- (۱) $\{5, 6\}$ (۲) $\{5, 6, 2\}$ (۳) $\{5, 6, 3\}$ (۴) $\{5, 6, 4\}$

پاسخ: گزینه ۱

تمریناتی برای تلاش بیشتر:

۱- اگر $f(x) = \frac{x+1}{x^2-x}$ و $g(x) = \{(-1,2), (3,1), (1,2), (4,0), (0,1)\}$ باشند $f.g$ را بیابید.

۲- توابع $f(x) = ax^2 + 3$ و $g(x) = \begin{cases} bx & x \geq 0 \\ x-1 & x < 0 \end{cases}$ را در نظر گرفته و a و b را طوری بیابید که نمودار تابع $f.g$ محور طولها را در نقطه ای به طول ۱ قطع کرده و $\frac{f}{g}(-1) = -\frac{5}{4}$ باشد.

۳- اگر $f(x) = x + \sqrt{x-1}$ و $g(x) = \{(-4,2), (2,-3), (5,7), (0,10)\}$ باشد الف) مقدار $(\frac{5-3g}{g+g^{-1}})(2)$ را محاسبه کنید.

ب) حاصل $\frac{f \times g}{f+g}$ را محاسبه کنید (استعداد های درخشان شهید بهشتی اهواز خرداد ۹۷)

۴- اگر $f = \{(1,4), (4,-1), (3,4), (2,1)\}$ و $g = \{(1,3), (2,0), (3,2), (-1,2)\}$ باشند بدون جایگذاری تابع های f و g در رابطه دامننه تابع $\frac{f+g}{f-2g}$ را پیدا کنید.

۵- تابع $f = \{(m^4+2, 5), (n^3+1, 4)\}$ مفروض است ، n و m را طوری تعیین کنید که برد وارون f ، برابر $\{-7, 18\}$ باشد. (غیرانتفاعی سرای دانش تهران دی ۹۶)

صحبت های بزرگان**بیندیشیم:**

موفقیت هایی که نصیب افراد صبور می شود همانهایی هستند که توسط افراد عجول رها شده اند (آلبرت اینشتین)
هر چه به آن فکر کنید در آینده شما پدیدار خواهد شد پس برای تغییر آینده تان از تغییر ذهنتان شروع کنید (وین دایر)

من شکست نخورده ام فقط ده هزار روش پیدا کردم که درست عمل نمیکنند (توماس ادیسون)
وقتی چیزی را از دست میدهید درسی را که از آن گرفته اید از دست ندید (آنتونی رابینز)

فصل چهارم : مثلثات

واحدهای اندازه گیری زاویه

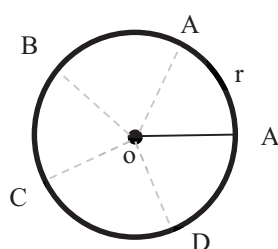
روابط تکمیلی بین نسبت های مثلثاتی

توابع مثلثاتی

درس اول: واحدهای اندازه گیری زاویه:

یادآوری: دایره مثلثاتی دایره ایست به شعاع یک واحد که خلاف حرکت عقربه های ساعت را جهت مثبت آن در نظر می گیریم.

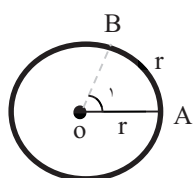
اگر شعاع یک دایره را r در نظر بگیریم و اندازه آن یک نخ برش بدهیم و با شروع از نقطه A و به کمک نخ برش داده شده روی محیط دایره به اندازه شعاع جدا و نقاط بدست آمده را به مبدا وصل کنیم زاویه های مرکزی که حاصل می شود طول کمان روبروی هر یک از آنها با شعاع دایره برابر است. هریک از این زاویه ها یک رادیان گفته می شود.



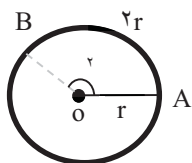
به عبارت دیگر:

تعریف ۱: رادیان برابر است با اندازه زاویه مرکزی دایره ای که طول کمان روبروی آن با شعاع دایره برابر است:

توجه:



۱ رادیان = اندازه زاویه $\hat{A}$ $\Rightarrow r = \text{طول کمان}$



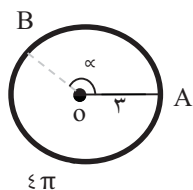
۲ رادیان = اندازه زاویه $\hat{A}$ $\Rightarrow 2r = \text{طول کمان}$

و به همین ترتیب اگر ادامه دهیم ملاحظه می کنیم که:

$$\text{اندازه یک زاویه بر حسب رادیان} = \frac{\text{طول کمان روبروی زاویه}}{\text{شعاع دایره}} \Rightarrow \alpha = \frac{L}{r}$$

که در این رابطه L و r هم واحدند.

مثال: در یک دایره به مرکز O و به شعاع ۳ طول کمان بزرگتر مقابل زاویه $\widehat{AOB}$ برابر 4π است. اندازه کوچکتر زاویه $\widehat{O}$ را بدست آورید.



$$\alpha = \frac{L}{r} \Rightarrow \alpha = \frac{4\pi}{3} \Rightarrow \alpha = \frac{2\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \text{طول کمان کوچک} = 6\pi - 4\pi = 2\pi \Rightarrow \text{محیط دایره} = 2\pi r$$

سوال: دایره ای با شعاع ۱۰ سانتی متر مفروض است. اندازه زاویه مرکزی مقابل به کمان به طول ۸ سانتی متر از این دایره چند رادیان است؟

سوال: در دایره ای به شعاع ۶ سانتی متر کمانی به طول ۱۰ cm توسط زاویه θ بریده شده است اندازه این زاویه را بر حسب رادیان بدست آورید.

توجه: قطاع عبارت است از: بخشی از یک قرص یا دایره که به دو شعاع و یک کمان محدود شده است و مساحت آن برابر $\frac{1}{2} r^2 \alpha$ می باشد.

سوال: در دایره به شعاع ۴ واحد طول کمان روبه روی زاویه مرکزی α برابر $\frac{2\pi}{3}$ است. مساحت قطاع نظیر این زاویه چقدر است؟

تبدیل واحدها:

اندازه زاویه مرکزی رو به روبه کمان نیم دایره ($\frac{\pi}{2} = \pi$) برابر π رادیان یا 180° درجه ($\frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$) است بنابراین: $\frac{\pi}{180}$ رادیان = یک درجه



که با یک تناسب :

می توان نتیجه گرفت $R = \frac{D \times \pi}{180}$ و یا آنکه $\frac{R}{\pi} = \frac{D}{180}$ از این تناسب برای تبدیل واحدها استفاده میکنیم.

سوال: یک موتور سیکلت مسابقه در پیستی به شعاع ۲۰ متر کمانی به اندازه ۳۰ درجه طی کرده است طول کمان طی شده را بدست آورید.

مثال: مجموع سه زاویه ۱۳۵ درجه است. اگر اندازه آنها بر حسب رادیان به نسبت ۲، ۳، ۴ باشد بزرگترین این زاویه ها چند رادیان است؟

$$\frac{R}{\pi} = \frac{D}{180} \Rightarrow \frac{R}{\pi} = \frac{135}{180} \Rightarrow \frac{R}{\pi} = \frac{3}{4} \Rightarrow 4R = 3\pi \Rightarrow R = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow 2x + 3x + 4x = \frac{3\pi}{4}$$

$$\Rightarrow 9x = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{\pi}{12} \Rightarrow \text{بزرگترین زاویه} = 4x = 4 \times \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3}$$

سوال: مجموع ۳ زاویه ۱۲۰ درجه است. اگر اندازه آنها بر حسب رادیان به نسبت ۱، ۲، ۳ باشد کوچکترین زاویه چند رادیان است؟

سوال: آیا مثلثی وجود دارد که زوایای آن $\frac{\pi}{3}$ ، $\frac{\pi}{3}$ و $\frac{\pi}{6}$ باشد؟ چرا؟

سوال: یک متحرک روی دایره چه زاویه ای بر حسب رادیان بچرخد تا به جای اول خود بازگردد؟

سوال: در یک دایره به مرکز O و شعاع 3 طول کمان بزرگتر مقابل زاویه AOB برابر 4π است طول وتر AB چقدر است؟

سوال: طول قوسی از دایره برابر 16 متر و اندازه زاویه مرکزی آن 45° است شعاع دایره را حساب کنید. ($\pi \approx 3$)

مثال: سطح دایره ای 154 m^2 است. طول قوسی از این دایره را که زاویه مرکزی مقابل به آن 50° درجه باشد را محاسبه کنید.

$$\alpha = 50^\circ \Rightarrow \frac{R}{\pi} = \frac{50}{180} \Rightarrow R = \frac{5\pi}{18}$$

$$S = \pi r^2 \Rightarrow 154 = \pi r^2 \Rightarrow r^2 = \frac{154}{\pi} = 49.38 \Rightarrow r \approx 7$$

$$L = r\alpha \Rightarrow L = 7 \times \frac{5\pi}{18} = \frac{35\pi}{18} = \frac{35 \times 3.14}{18} \approx 6.11$$

سوال: در دایره ای به شعاع 2 ، کمان 70° سانتی متر روبه روی زاویه مرکزی 170° می باشد شعاع دایره چند سانتی متر است؟ ($\pi \approx 3$)

توجه: زاویه بین عقربه های ساعت شمار ودقیقه شمار برحسب درجه از روابط زیر محاسبه میگردد:

$$1) \alpha = 180 \cdot \frac{m}{60} \times 30 \quad 2) \alpha = \left| \frac{11}{2} m - 30 h \right|$$

توجه: m نشان دهنده دقیقه و h نشان دهنده ساعت میباشد

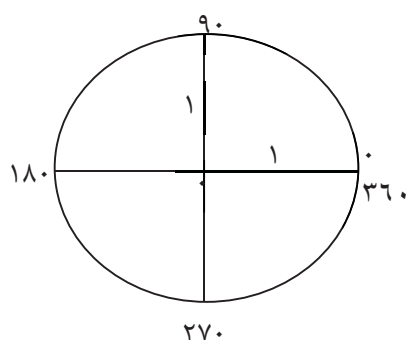
سوال: زاویه بین عقربه های ساعت شمار ودقیقه شمار را در ساعت $2:40'$ برحسب درجه محاسبه کنید.

درس دوم : روابط تکمیلی بین نسبتهای مثلثاتی :

یادآوری ۱: یک دایره مثلثاتی مثل دستگاه مختصات از چهار ناحیه تشکیل شده است که علامت نسبت های مثلثاتی را می توان از روی علامت محورهای توجه به آنکه محور y ها محور سینوس و محور x ها محور کسینوس است در چهار ناحیه متوجه شدو از حاصل ضرب علامت سینوس و کسینوس علامت تانژانت و کتانژانت را محاسبه نمود به عنوان مثال در ناحیه چهارم x مثبت و y منفی است یعنی کسینوس مثبت و سینوس منفی است در نتیجه تانژانت و کتانژانت هر دو منفی هستند.

یادآوری ۲: از روی دایره مثلثاتی می توان اندازه نسبتهای مثلثاتی $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ و 360° را محاسبه کرد.

به عنوان مثال:



90° درجه چون روی محور سینوس هاست

پس: کسینوس آن صفر است و:

$$\cot 90^\circ = 0 \Rightarrow \text{تعریف نشده} \Rightarrow \tan 90^\circ = 0, \cos 90^\circ = 0, \sin 90^\circ = 1$$

یا: 270° چون روی محور سینوس ها و در قسمت منفی هاست پس:

$$\cot 270^\circ = 0 \Rightarrow \text{تعریف نشده} \Rightarrow \tan 270^\circ = 0, \cos 270^\circ = 0, \sin 270^\circ = -1$$

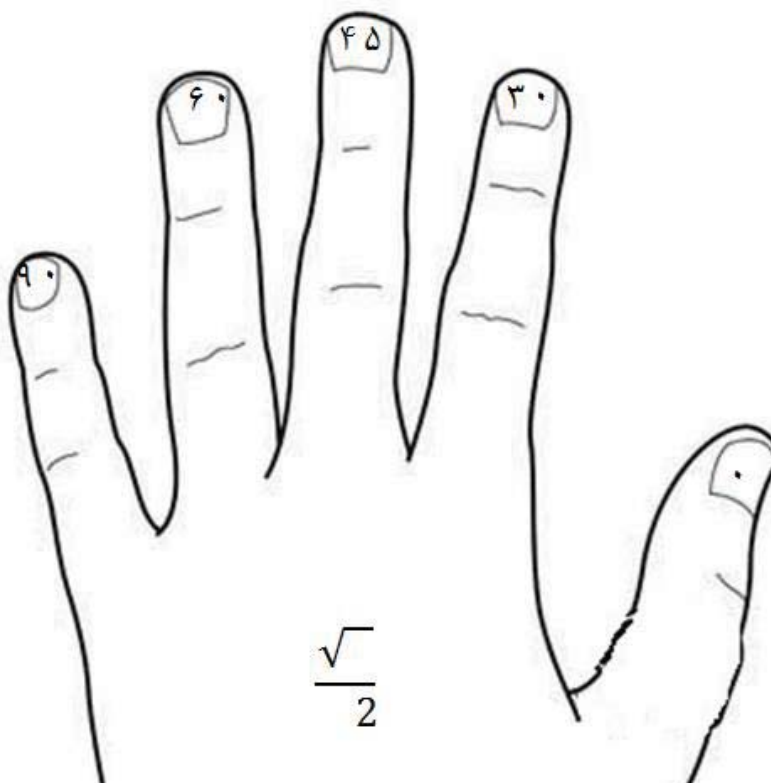
یا 360° : چون روی محور کسینوس هاست پس:

$$\cot 360^\circ = 0, \tan 360^\circ = 0 \Rightarrow \text{تعریف نشده}, \cos 360^\circ = 1, \sin 360^\circ = 0$$

توجه: $\cot$ عکس $\tan$ می باشد.

یادآوری ۳: اندازه نسبت های مثلثاتی $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ را می توان از روی انگشتان دست نیز محاسبه کرد:

به شکل صفحه بعد توجه کنید:



توجه: برای بدست آوردن اندازه نسبتها باید در رادیکال عدد مناسب قرار دهیم. برای سینوس تعداد انگشتان قبل زاویه و برای کسینوس تعداد انگشتان بعد از زاویه را درون رادیکال قرار می‌دهیم.

$$\sin 30^\circ = \frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2} \quad (\text{قبل از } 30^\circ \text{ درجه یک انگشت})$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (\text{بعد از } 30^\circ \text{ درجه ۳ انگشت})$$

$$\Rightarrow \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \cot 30^\circ = \sqrt{3}$$

$$\sin 90^\circ = \frac{\sqrt{4}}{2} = \frac{2}{2} = 1, \cos 90^\circ = \frac{\sqrt{0}}{2} = 0 \Rightarrow \tan 90^\circ \text{ تعریف نشده}, \cot 90^\circ = 0$$

سوال: اگر $\cos x = \frac{-4}{5}$ و انتهای کمان روبه رو به زاویه x در ربع دوم باشد سایر نسبتهای مثلثاتی را بدست آورید.

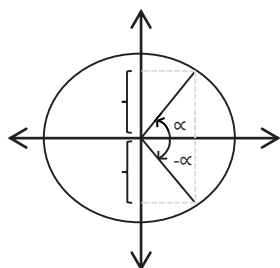
(کار در کلاس صفحه ۷۸ کتاب درسی)

سوال: اگر $\tan \alpha = \frac{3}{4}$ و انتهای کمان روبه رو به زاویه α در ربع سوم باشد سایر نسبتهای مثلثاتی را بدست آورید.

(توجه: $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$)

نسبت های مثلثاتی زاویه های قرینه

باتوجه به شکل می بینیم که در زاویه های قرینه فقط کسینوس قرینه نمی شود یعنی:



$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$$

$$\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$$

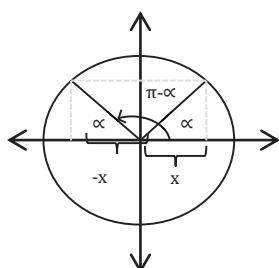
در واقع می توان گفت: کسینوس، منفی زاویه را هضم می کند و سایر نسبت ها، منفی را به پشت نسبت انتقال میدهند.

نسبتهای مثلثاتی زاویه های مکمل:

تعریف: دو زاویه α و β را مکمل گوئیم هرگاه مجموع آنها 180° یا π رادیان شود.

مثال: دوزاویه 60° ($\frac{\pi}{3}$) و 120° ($\frac{2\pi}{3}$) مکمل یکدیگرند

با توجه به شکل مشخص است که فقط سینوس قرینه نمی شود یعنی:



$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$$

$$\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$$

در واقع می توان به روش عامیانه گفت: برای بدست آوردن نسبتهای $\pi - \alpha$:

$\pi - \alpha$ در ربع دوم واقع می شود و در این ربع طبق محورها، فقط سینوس مثبت است یعنی عبارت $\pi -$ فقط برای آن است که ما متوجه شویم انتهای کمان روبرو به زاویه مورد نظر در ربع دوم واقع میشود.

نسبتهای مثلثاتی دو زاویه با اختلاف π رادیان :

$$\sin(\underbrace{\pi+\alpha}) = -\sin\alpha$$

ربع سوم

$$\cos(\underbrace{\pi+\alpha}) = -\cos\alpha$$

ربع سوم

$$\tan(\pi+\alpha) = \tan\alpha$$

$$\cot(\pi+\alpha) = \cot\alpha$$

در واقع $\boxed{\pi +}$ نشان میدهد که انتهای کمان در ربع سوم واقع می شود و در این ناحیه باتوجه به علامت محورها تانژانت و کتانژانت مثبت و دو نسبت دیگر منفی هستند

به عنوان مثال: $\sin(\pi + \frac{\pi}{3})$ می دانیم که اندازه اش از نظر قدر مطلق با اندازه $\sin\frac{\pi}{3}$ برابر است فقط باید علامت آن را تعیین کنیم که $\boxed{\pi +}$ نشان میدهد در ربع سوم است پس علامت آن منفی است: $\sin(\pi + \frac{\pi}{3}) = -\sin\frac{\pi}{3}$

سوال: مقدار عددی عبارت A را محاسبه کنید.

$$A: \frac{\sin 120^\circ \cos(-30^\circ) - \cos 120^\circ \sin 135^\circ}{\sin 135^\circ \cos(-45^\circ)}$$

جواب : ۲/۵

سوال: مقدار عددی عبارت p را محاسبه کنید:

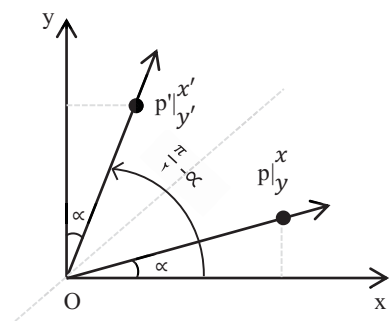
$$P: \frac{\sin \frac{4\pi}{3} \cos \frac{2\pi}{3} + \cos \frac{4\pi}{3} \sin \frac{2\pi}{3}}{\cos \frac{\Delta\pi}{4} \cos(-\frac{3\pi}{4}) + \sin \frac{\Delta\pi}{4} \sin(-\frac{3\pi}{4})}$$

جواب: ۰

نسبتهای مثلثاتی زاویه های متمم:

تعریف: دو زاویه α و β را متمم گوئیم هرگاه مجموع آنها 90° درجه ($\frac{\pi}{2}$ رادیان) شود.

مثل دو زاویه $20,70^\circ$ یا $30,60^\circ$



فرض کنیم نیم خط op با ox و نیم خط op' با oy زاویه α بسازند

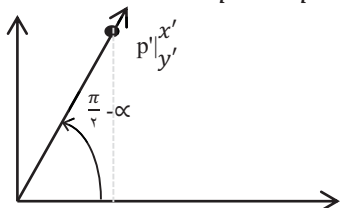
بنابراین نیم خط op' با محور ox زاویه $\frac{\pi}{2} - \alpha$ میسازد

که با توجه به تقارن نسبت به نیمساز ربع اول داریم:

$$x' = y, \quad y' = x, \quad (op = op')$$

از طرفی از سال قبل میدانیم که $\sin \alpha = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}}$ پس:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{y'}{op'} = \frac{x}{op} = \cos \alpha$$



$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{x'}{op'} = \frac{y}{op} = \sin \alpha$$

و به همین ترتیب بقیه نسبتها بدست می آیند. می توان به طور خلاصه گفت: نسبتهای مثلثاتی $\frac{\pi}{2} - \alpha$ همگی مثبت اند و همچنین نسبت عوض می شود یعنی $\sin$ به $\cos$ و برعکس. همچنین $\tan$ به $\cot$ و برعکس تبدیل میشوند:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha$$

سوال: هرگاه $\sin 20^\circ = \frac{1}{3}$ و $\cos 20^\circ = \frac{1}{9}$ باشد مقادیر $\sin 70^\circ$ ، $\cos 70^\circ$ را بدست آورید.

سوال: فرض کنید که $\sin ۱۵^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ و $\cos ۱۵^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ نسبتهای مثلثاتی ۱۵° را حساب کنید.

نسبتهای مثلثاتی $\frac{\pi}{2} + \theta$ بر حسب نسبتهای مثلثاتی θ

با توجه به اینکه: $\frac{\pi}{2} + \theta = \pi - (\frac{\pi}{2} - \theta)$ بنابراین:

$$\sin(\frac{\pi}{2} + \theta) = \sin[\pi - (\frac{\pi}{2} - \theta)] = \sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cos \theta$$

سایر نسبتها به طریق مشابه بدست می آیند و داریم:

$$\sin(\frac{\pi}{2} + \theta) = \cos \theta \quad \cos(\frac{\pi}{2} + \theta) = -\sin \theta$$

$$\tan(\frac{\pi}{2} + \theta) = -\cot \theta \quad \cot(\frac{\pi}{2} + \theta) = -\tan \theta$$

و برای به ذهن سپردن می توان گفت نسبتهای $\frac{\pi}{2} + \theta$ نسبت را عوض می کنند و چون در ربع دوم واقع می شوند فقط سینوس به مقداری مثبت تبدیل میشود.

سوال: با توجه به آنکه $\sin ۱۵^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ و $\cos ۱۵^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ نسبتهای مثلثاتی ۱۰۵° درجه را محاسبه کنید.

نسبتهای مثلثاتی زوایا با مجموع یا تفاضل $۲k\pi$ رادیان (مضارب زوج π رادیان):

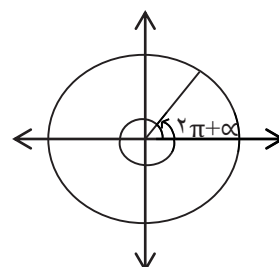
مضارب زوج π رادیان در دورهای دایره مثلثاتی انتهای کمان را به سر جای اول بر میگردانند بنابراین تاثیری ندارند و قابل چشم پوشی هستند به بیان دیگر: نسبتهای ۳۰° درجه و ۳۹۰° درجه در یک ربع واقع می شوند (زیرا $۳۹۰ - ۳۰ = ۳۶۰$) پس دارای نسبتهای مثلثاتی برابر هستند بنابراین در حالت کلی:

$$\sin(۲k\pi + \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(۲k\pi + \alpha) = \cos \alpha$$

$$\tan(۲k\pi + \alpha) = \tan \alpha$$

$$\cot(۲k\pi + \alpha) = \cot \alpha$$



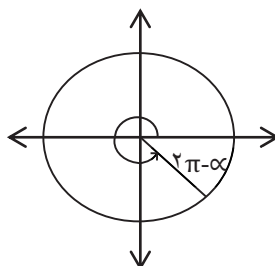
$2k\pi$ مارا به ابتدای نقطه شروع میبرد و چون جهت مثبت دایره مثلثاتی خلاف حرکت عقربه های ساعت است $+\alpha$ در ربع اول می افتد و همه نسبتها مثبت می باشند. برای نسبتهای $2k\pi - \alpha$ باز هم همین استدلال را داریم یعنی $2k\pi$ مارا به ابتدای نقطه شروع می برد و چون جهت مثبت دایره مثلثاتی خلاف عقربه های ساعت است $-\alpha$ در جهت عقربه های ساعت حرکت می کند و در ناحیه چهارم می افتد پس داریم:

$$\sin(2k\pi - \alpha) = -\sin\alpha$$

$$\cos(2k\pi - \alpha) = \cos\alpha$$

$$\tan(2k\pi - \alpha) = -\tan\alpha$$

$$\cot(2k\pi - \alpha) = -\cot\alpha$$



مثال: مقدار عبارت $2\sin \frac{11\pi}{3} - \sqrt{3} \tan 420^\circ - 1$ را محاسبه کنید.

$$2\sin(4\pi - \frac{\pi}{3}) - \sqrt{3} \tan(360^\circ + 60^\circ) - 1 =$$

$$2\sin(-\frac{\pi}{3}) - \sqrt{3} \tan 60^\circ - 1 = -2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} \times \sqrt{3} - 1 = -\sqrt{3} - 3 - 1 = -\sqrt{3} - 4$$

سوال: نسبت های مثلثاتی 840° درجه را محاسبه کنید.

توجه: $540^\circ = 3\pi$ و $720^\circ = 4\pi$ و $900^\circ = 5\pi$

سوال: مقدار $y = -1 + \frac{2}{4}\cos(2x - \frac{\pi}{2})$ را به ازای $x = \frac{\pi}{6}$ بدست آورید.

مثال: هرگاه $\cot 15^\circ = 2 + \sqrt{3}$ حاصل کسر $\frac{3\sin 75^\circ + 2\sin 105^\circ}{\cos 165^\circ - \cos 255^\circ}$ را حساب کنید.

$$\frac{3\sin(\frac{\pi}{4} - 15^\circ) + 2\sin(\frac{\pi}{4} + 15^\circ)}{\cos(\pi - 15^\circ) - \cos(\frac{3\pi}{4} - 15^\circ)} = \frac{3\cos 15^\circ + 2\cos 15^\circ}{-\cos 15^\circ + \sin 15^\circ}$$

چون $\cot$ مخرج $\sin 15^\circ$ تقسیم می کنیم:

$$= \frac{\frac{3\cos 15}{\sin 15} + \frac{2\cos 15}{\sin 15}}{\frac{-\cos 15}{\sin 15} + \frac{\sin 15}{\sin 15}} = \frac{3\cot 15 + 2\cot 15}{-\cot 15 + 1} = \frac{5\cot 15}{-2 - \sqrt{3} + 1} = \frac{5(2 + \sqrt{3})}{-1 - \sqrt{3}}$$

سوال: مقدار عددی عبارت A را محاسبه کنید.

$$A = \frac{\cos 240^\circ + \sin(-150^\circ) - \tan(-45^\circ)}{\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \tan\left(\frac{11\pi}{6}\right)}$$

پاسخ: صفر

سوال: اضلاع مجاور یک متوازی الاضلاع دارای اندازه های ۱۲ و ۱۵ سانتی متر است. اندازه یک زاویه آن 150° است. مساحت متوازی الاضلاع را پیدا کنید.

توجه: مساحت متوازی الاضلاع برابر است با: قاعده $\times$ ارتفاع. البته میتوانی از فرمول مساحت مثلث که سال قبل خواندید هم حل کنید.

پاسخ: ۹۰

سوال: اگر $\tan 23^\circ = a$ باشد حاصل $\frac{3\sin 157^\circ + 2\cos 113^\circ}{\cos 383^\circ - \cos 67^\circ}$ را بر حسب a بیابید.

پاسخ: $\frac{a}{1-a}$

$$\tan(a - 5\pi)\cot(a + 7\pi) - \cos(6\pi - a)\cos(a - 6\pi) = \sin^2 a$$

مثال: ثابت کنید:

$$\tan[-(\pi-a)]\cot(\pi+a)-\cos(\pi-a)\cos[-(\pi-a)]$$

$$=-\tan(\pi-a)\cot(\pi+a)-\cos(-a)\cos(-a)$$

$$=\tan a \cot a - \cos^2 a = \frac{\sin a}{\cos a} \times \frac{\cos a}{\sin a} - \cos^2 a = 1 - \cos^2 a = \sin^2 a$$

توجه: میتوانستیم مستقیم به جای $\tan a \cot a$ عدد ۱ قرار دهیم چون $\tan$ و $\cot$ عکس یکدیگرند.

توجه: $\tan(\pi-a)=\tan[\pi+\pi-a]=\tan(\pi-a)$ چون دوره‌های زوج π بی تاثیر است.

تذکر: روابط زیر را برای نسبت های مثلثاتی با مجموع یا تفاضل $\frac{\pi}{2}$ رادیان داریم:

$$\sin(\frac{\pi}{2}-a) = -\cos a, \quad \sin(\frac{\pi}{2}+a) = -\cos a$$

$$\cos(\frac{\pi}{2}-a) = -\sin a, \quad \cos(\frac{\pi}{2}+a) = \sin a$$

$$\tan(\frac{\pi}{2}-a) = \cot a, \quad \tan(\frac{\pi}{2}+a) = -\tan a$$

$$\cot(\frac{\pi}{2}-a) = \tan a, \quad \cot(\frac{\pi}{2}+a) = -\cot a$$

پیرمرد مهربان

بیندیشیم:

پیرمردی (گاندی رهبر فقید هندوستان) با قطار در حال مسافرت بود... به علت بی توجهی، یک لنگه از کفشهای نو او، که به تازگی خریده بود از پنجره قطار بیرون افتاد.

مسافران دیگر برای پیرمرد تاسف خوردند، ولی پیرمرد بلافاصله لنگه دیگر کفشش را هم به بیرون انداخت

همه با تعجب به او نگاه کردند... اما او بالبخندی رضایت بخش گفت: "یک لنگه کفش نو برایم بی مصرف است، ولی اگر کسی یک جفت کفش نو پیدا کند مطمئناً خیلی خوشحال خواهد شد."

درس سوم توابع مثلثاتی

توابع $y = \sin x$ و $y = \cos x$ از ساده ترین توابع مثلثاتی هستند که به ازای هر مقدار x مقدارهای آنها تعریف شده اند و دامنه این توابع تمام R است و با تغییر x مقداری که برای $\sin x$ و $\cos x$ بدست می آید اعدادی بین -1 و 1 هستند به عبارت دیگر برد این توابع $[-1, 1]$ است.

رسم تابع سینوس: چون $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ و همچنین $\sin(x - 2\pi) = \sin x$

(زیرا $\sin(x - 2\pi) = \sin[-(2\pi - x)] = \sin x$)

در ناحیه چهارم سینوس منفی است بنابراین : $-x- = +$

بنابراین مقدار تابع سینوس با اضافه کردن (کم کردن) 2π رادیان به کمان (از کمان) تغییری نمی کند در نتیجه نمودار تابع را در بازه $[0, 2\pi]$ رسم می کنیم و در سایر بازه ها مثل $[2\pi, 4\pi]$ یا $[-2\pi, 0]$ یا $[-4\pi, -2\pi]$... همین نمودار تکرار می شود.

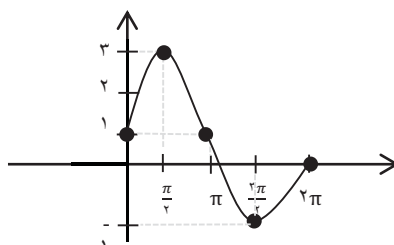
مثال: نمودار $y = 2\sin x + 1$ را رسم کنید.

جدول اولیه نمودار سینوس که در همه نمودار ها ثابت است را ابتدا مینویسیم و سپس تغییرات مربوط را اعمال می کنیم.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	1	0	-1	0

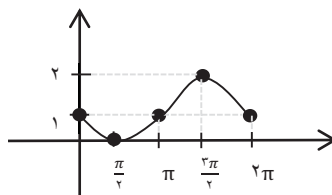
در این جدول مقادیر x در واقع همان مقادیر اصلی روی دایره مثلثاتی هستند پس اگر مقادیر در خاطرمان نباشد می توانیم از دایره مثلثاتی کمک بگیریم

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	1	0	-1	0
$\times 2$	0	2	0	-2	0
$y + 1$	1	3	1	-1	1



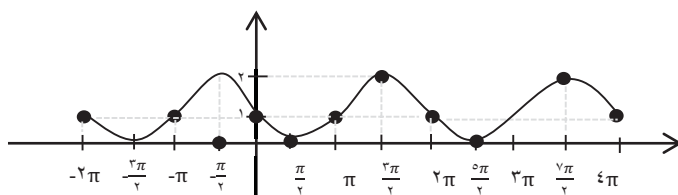
مثال: نمودار $y = -\sin x + 1$ را رسم کنید.

x	۰	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	۰	۱	۰	-۱	۰
$\times -$	۰	-۱	۰	۱	۰
y^{+1}	۱	۰	+۱	۲	۱



توجه: در واقع نمودار سینوس، قرینه و به اندازه یک واحد عمودی به سمت بالا منتقل شده است.

تذکر: اگر بخواهیم این نمودار را در بازه بزرگتری رسم کنیم نیازی به مقدار دادن نیست همین نمودار در بازه های قبل و بعد از بازه $[0, 2\pi]$ تکرار می شود:



سوال: نمودار $y = \sin \frac{x}{4} + 1$ را در بازه $[0, 2\pi]$ رسم کنید.

سوال: نمودار $y = 1 - \frac{1}{4} \sin x$ را در بازه $[0, 2\pi]$ رسم کنید.

سوال: نمودار $y = 2 \sin \left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ را رسم کنید.

توجه: مقدار تابع $y = \sin x$ برای $x = k\pi$ (مضارب صحیح π) برابر صفر است.

سوال: به ازای چه مقادیر از θ مقدار تابع $y = \sin 3\theta$ صفر می شود؟

توجه: در تابع $y = a \sin kx$ ماکسیمم (بیشترین) مقدار تابع $|a|$ و مینیمم مقدار تابع $-|a|$ می باشد.

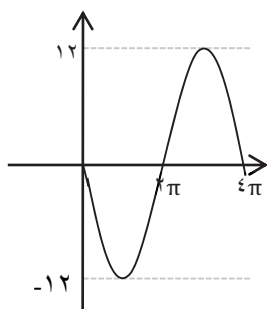
توجه: بازه ای که نمودار اصلی در آن رسم می شود و در سایر بازه ها این نمودار تکرار می گردد در واقع دوره تناوب تابع سینوس است که اگر تابع را به صورت $y = a \sin kx$ بنویسیم دوره تناوب آن از رابطه $\left| \frac{2\pi}{k} \right|$ بدست می آید.

سوال: دوره تناوب $y = 2 \sin 3x$ را بدست آورید.

توجه: می توان با کمک بدست آوردن ماکسیمم و مینیمم و دوره تناوب و نقاطی که در آن نقاط (در فاصله مینیمم و ماکسیمم) تابع صفر می شود نمودار را رسم نمود اما معمولا برای حدس زدن معادله یک نمودار از آنها استفاده می شود به مثال زیر دقت کنید:

مثال: معادله منحنی زیر را بنویسید.

طبق شکل دوره تناوب 4π است



$$\frac{2\pi}{k} = 4\pi \Rightarrow 2\pi = 4\pi k \Rightarrow k = \frac{1}{2}$$

بنابراین:

چون نمودار اصلی سینوس به صورت  می باشد

بنابراین مقدار a را برابر -12 میگیریم پس معادله به صورت زیر می باشد.

$$y = a \sin kx \Rightarrow y = -12 \sin \frac{1}{2} x$$

سوال: نمودار $y = \sin(-x)$ را رسم کنید و از روی نمودار آن $y = 2 \sin x$ را رسم نمایید.

توجه: در نمودار $y = a \sin x$ مقدار $a > 1$ سبب کشیدگی عمودی و مقدار $0 < a < 1$ سبب جمع شدن عمودی می شود همچنین برای مقادیر $a < 0$ نمودار نسبت به محور طول ها قرینه می شود و با توجه به اندازه اش از نظر قدر مطلق یکی از دو حالت قبل اتفاق می افتد.

رسم تابع کسینوس: باز هم داریم:

$$\cos(x - 2\pi) = \cos[-(2\pi - x)] = \cos(2\pi - x) = \cos x$$

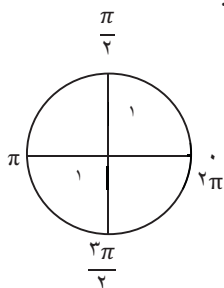
$$\cos(x + 2\pi) = \cos(2\pi + x) = \cos x$$

یعنی مقدار تابع کسینوس با اضافه کردن (کم کردن) 2π رادیان به کمان (از کمان) تغییری نمی کند در نتیجه نمودار تابع را در بازه $[0, 2\pi]$ رسم می کنیم و در سایر بازه ها مثل $[2\pi, 4\pi]$ یا $[-2\pi, 0]$ یا ... همین نمودار تکرار می شود.

جدول اولیه نمودار کسینوس که در همه نمودار ها هست و تغییرات مربوط روی آن اعمال می شود به صورت زیر است:

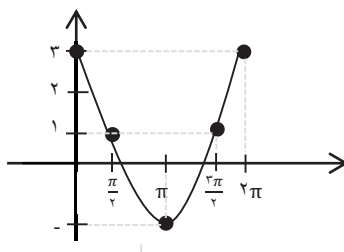
x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
cos x	1	0	-1	0	1

تذکر: در صورت فراموش کردن مقادیر، می توان از دایره مثلثاتی کمک گرفت.

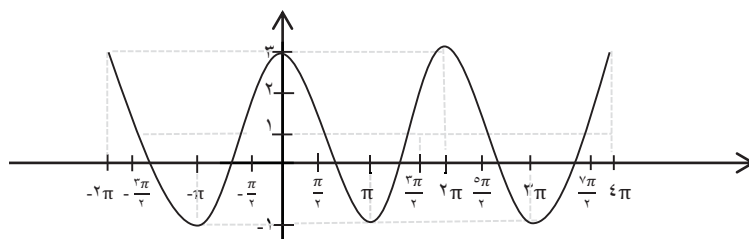


مثال: $y = 2 \cos x + 1$ را رسم کنید. (تمرین ۲ شماره ۲ صفحه ۹۳ کتاب درسی)

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
cos x	1	0	-1	0	1
$\times 2$	2	0	-2	0	2
$y + 1$	3	1	-1	1	3



توجه: اگر بخواهیم این نمودار را در بازه بزرگتری رسم کنیم همین نمودار را در بازه قبل و بعد بازه $[0, 2\pi]$ تکرار می کنیم:



سوال: نمودار $y = \cos \frac{x}{2} - 1$ را رسم کنید.

سوال: نمودار $y = -\cos x + 1$ را رسم کنید.

توجه: مقدار تابع $y = \cos x$ به ازای $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ برابر صفر است.

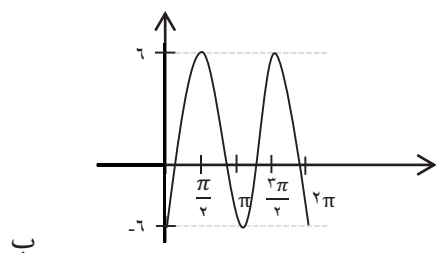
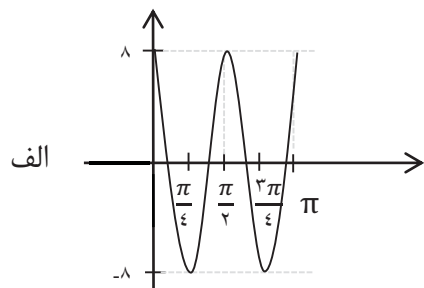
سوال: به ازای چه مقادیری از θ مقدار تابع $1 = 3\cos^2\theta + 1$ صفر می شود؟

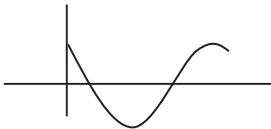
توجه: تابع $y = a\cos kx$ یک نمودار کسینوسی است که بیشترین مقدار آن $|a|$ و کمترین مقدار آن $-|a|$ و مثل

تابع سینوس دوره تناوب آن از $\left|\frac{2\pi}{k}\right|$ بدست می آید.

سوال: اگر دوره تناوب $y = 2\cos kx$ برابر $\frac{2\pi}{3}$ باشد مقدار k را محاسبه کنید.

سوال: معادله منحنی های زیر را بنویسید.



توجه: نمودار اصلی کسینوس به صورت  می باشد. $(y = \cos x)$

سوال: نمودار $y = -\cos x$ را رسم کنید و از روی آن $y = 1 - \cos x$ را رسم کنید.

نکات کلیدی:

(۱) در نسبت های مثلثاتی سینوس و کسینوس می توان مضرب های زوج π را حذف کرد ولی اگر مضربهای فرد π را حذف کنیم باید پس از حذف یک علامت منفی جلوی نسبت مثلثاتی قرار دهیم.

$$\sin(\pi + \alpha) = \sin \alpha,$$

$$\sin(2\pi + \alpha) = \sin \alpha \quad \sin(3\pi - \alpha) = -\sin(-\alpha) = \sin \alpha$$

$$\sin(4\pi - \alpha) = \sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

(۲) در نسبت های مثلثاتی تانژانت و کتانژانت تمام مضرب های صحیح π را می توان حذف کرد.

$$\tan(2\pi + \alpha) = \tan \alpha, \quad \tan(3\pi + \alpha) = \tan \alpha$$

$$\tan(2\pi - \alpha) = \tan(-\alpha) = -\tan \alpha, \quad \tan(3\pi - \alpha) = \tan(-\alpha) = -\tan \alpha$$

(۳) اگر زاویه مثلثاتی شامل مضرب های صحیح π باشد نسبت مثلثاتی تغییر نمی کند.

(۴) اگر زاویه مثلثاتی شامل مضرب های $\frac{\pi}{2}$ و $\frac{3\pi}{2}$ باشد نسبت های مثلثاتی تغییر می کند بدین صورت که سینوس به کسینوس و تانژانت به کتانژانت و برعکس تغییر می یابند و برای علامت با فرض حاده بودن زاویه α ، ربعی که زاویه مثلثاتی در آن واقع است را روی دایره مثلثاتی پیدا کرده و علامت نسبت مثلثاتی آنرا مشخص نموده و جلوی نسبت مثلثاتی جدید قرار می دهیم.

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin \alpha \quad \text{ربع سوم}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = +\cos \alpha \quad \text{ربع دوم}$$

(۵) تابع $f(x) = \sin x$ از مبدأ مختصات می گذرد ولی تابع $f(x) = \cos x$ از نقطه ی $(0, 1)$ میگذرد.

(۶) $\cos x$ در نقاط $x=0$ و $x=2\pi$ دارای بیشترین مقدار و در نقطه $x=\pi$ دارای کمترین مقدار است همچنین به ازای $x=\frac{\pi}{2}$ و $x=\frac{3\pi}{2}$ دارای مقداری برابر صفر است (در دوره تناوب 2π)

(۷) $\sin x$ در نقطه $x=\frac{\pi}{2}$ دارای بیشترین مقدار و در نقطه $x=\frac{3\pi}{2}$ دارای کمترین مقدار است همچنین به ازای مقادیر $x=0$ و $x=\pi$ و $x=2\pi$ دارای مقداری برابر صفر است (در دوره تناوب 2π)

(۸) دوره تناوب $\sin x$ و $\cos x$ برابر با 2π است در حقیقت 2π کوچکترین زاویه ای است که اگر به α اضافه شود

$$\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin \alpha \quad \text{و} \quad \cos(\alpha + 2k\pi) = \cos \alpha \quad \text{نمی تغییر کند.}$$

۹) دوره تناوب $\tan x$ و $\cot x$ برابر با π است در حقیقت π کوچکترین زاویه ای است که اگر به α اضافه شود $\tan$ و $\cot$ آن تغییر نمی کند.

$$\tan(\alpha+k\pi)=\tan\alpha \quad \cot(\alpha+k\pi)=\cot\alpha \quad (k \in \mathbb{Z})$$

۱۰) دوره تناوب $y=a \sin kx+c$ و $y=a \cos kx+c$ برابر است با: $\frac{2\pi}{|k|}$

۱۱) دوره تناوب $y=a \tan kx+c$ و $y=a \cot kx+c$ برابر است با: $\frac{\pi}{k}$

۱۲) اگر عددی پشت $\cos$ و $\sin$ ضرب شود دوره تناوب تغییری نمی کند زیرا اعدادی که بیرون تابع ضرب یا تقسیم یا جمع و تفریق می شوند فقط روی برد تابع تاثیر می گذارند و روی دامنه بی تاثیر هستند بنابراین روی دوره تناوب هم اثری ندارند.

۱۳) توابعی به صورت $y = \sin^{2n+1}x$ و $y = \cos^{2n+1}x$ که دارای توان فرد هستند دوره تناوب همان $T=2\pi$ است ولی برای $y = \sin^{2n}x$ و $y = \cos^{2n}x$ و $y = |\sin x|$ و $y = |\cos x|$ دوره تناوب نصف می گردد و برابر $T=\pi$ است.

۱۴) توابع $\tan$ و $\cot$ با هر توان طبیعی (چه زوج و چه فرد) دوره تناوب همان $T=\pi$ است.

۱۵) برای تبدیل درجه به رادیان به روش سریع عدد داده شده را در $\frac{\pi}{180}$ ضرب می کنیم.

۱۶) برای تبدیل رادیان به درجه به روش سریع زاویه داده شده را در $\frac{180}{\pi}$ ضرب می کنیم.

۱۷) تابع $\sin$ تابعی فرد است یعنی اگر x را به $-x$ تبدیل کنیم قرینه تابع $\sin$ بدست می آید.

۱۸) تابع $\cos$ تابعی زوج است یعنی اگر x را به $-x$ تبدیل کنیم تابع تغییر نمی کند.

۱۹) تانژانت در دامنه تعریفش همواره صعودی است همچنین در بازه $(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$ و $(\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4})$ تابعی فرد می باشد

۲۰) کتانژانت در دامنه تعریفش همواره نزولی است همچنین در بازه $(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$ و $(\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4})$ تابعی فرد می باشد.

۲۱) دامنه تانژانت $\{k\pi + \frac{\pi}{2}\}$ است زیرا: $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ و $\cos x = 0 \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}$

۲۲) دامنه کتانژانت $\{k\pi\}$ است زیرا: $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ و $\sin x = 0 \rightarrow x = k\pi$

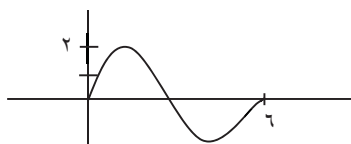
تست:

(۱) حاصل عبارت $\frac{\cos 285^\circ - \sin 255^\circ}{\sin 525^\circ - \sin 105^\circ}$ با فرض $\tan 15^\circ = 0.28$ کدام است؟ (کنکور تجربی ۹۴)

- (۱) $-\frac{16}{9}$ (۲) $-\frac{9}{16}$ (۳) $\frac{9}{16}$ (۴) $\frac{16}{9}$

پاسخ: گزینه ۱

(۲) شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $y = a \sin(b\pi x)$ است. $a+b$ کدام است؟ (کنکور تجربی خراج ۹۳)



- (۱) $\frac{4}{3}$ (۲) $\frac{5}{3}$ (۳) $\frac{7}{3}$ (۴) $\frac{8}{3}$

باتوجه به نمودار دوره تناوب برابر ۶ می باشد

و طبق فرمول برابر $\frac{2\pi}{|b\pi|}$ که مساوی است با $\frac{2}{|b|}$

$$\frac{2}{|b|} = 6 \Rightarrow |b| = \frac{1}{3}$$

طبق شکل $a=2$ بنابراین $a+b=2+\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$ و b هر دو می توانند منفی هم باشند که جواب $-\frac{7}{3}$ می شود که در گزینه ها نیست

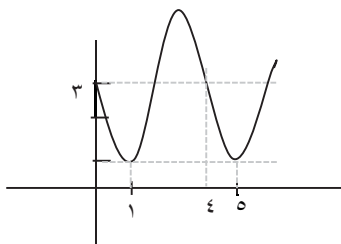
توجه: b و جواب دارد اما چون نمودار فرم نمودار مثبت است a و b نمیتوانند علامتهای متفاوت داشته باشند.

(۳) حاصل عبارت $\frac{\sin 250^\circ + \sin 70^\circ}{\cos 560^\circ - \cos 110^\circ}$ با فرض $\tan 20^\circ = 0.4$ کدام است؟ (کنکور تجربی خراج ۹۴)

- (۱) $-\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{7}{3}$ (۴) $\frac{5}{8}$

پاسخ: گزینه ۳

۴) شکل زیر قسمتی از نمودار $y = a + \sin(b\pi x)$ می باشد. مقدار y در نقطه $x = \frac{25}{3}$ کدام است؟ (کنکور تجربی ۹۳)



۲/۵(۱)

۲/۵(۲)

۳/۵(۳)

-۳/۵(۴)

باتوجه به شکل در $x=0$ داریم $y=3$

اگر $(0, 3)$ را در معادله بگذاریم

نتیجه می گیریم $a=3$

$$\frac{2\pi}{|b\pi|} = 4 \Rightarrow |b| = \frac{1}{2} \Rightarrow y = 3 + \sin\left(-\frac{\pi}{2}x\right) \xrightarrow{x=\frac{25}{3}} y = \frac{2}{5}$$

(نمودار قرینه فرم اصلی $\sin$ است پس $b = -\frac{1}{2}$)

$$(5) \text{ حاصل عبارت } \sin\left(\frac{17\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{-17\pi}{6}\right) + \tan\left(\frac{19\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{-11\pi}{6}\right)$$

کدام است؟

$\frac{1}{2}$ (۴) (کنکور تجربی ۹۸)

$\frac{1}{4}$ (۳)

$\frac{-1}{2}$ (۲)

$\frac{-1}{4}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

تمریناتی برای تلاش بیشتر:

(۱) عبارت زیر را ساده کنید.

$$\cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7}$$

پاسخ نهایی: صفر

(۲) در مثلث $\triangle ABC$ با فرض $A=120^\circ$ نشان دهید $\tan 3B + \tan 3C = 0$

توجه کنید که جمع زاویه های داخلی هر مثلث 180° درجه است $B+C$ را محاسبه کنید و سپس در ۳ ضرب کنید و سپس B را یکطرف و ...

(۳) حاصل عبارت $\cos 80^\circ \times \frac{\sin 80^\circ + \cos 10^\circ}{\cos 80^\circ + \sin 10^\circ}$ را محاسبه کنید.

پاسخ نهایی: $\cos 10^\circ$ همه را بر اساس 10° درجه بنویسید

(۴) حاصل عبارت زیر را ساده کنید.

$$A = \frac{2 \sin\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{8}\right) + \cos \frac{9\pi}{8}}{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{8}\right) + 2 \sin\left(\frac{13\pi}{4} + \frac{\pi}{8}\right)}$$

استعدادهای درخشان شهید بهشتی اهواز خرداد ۹۷

(۵) اگر $\tan \alpha = \frac{2}{3}$ باشد مقدار $\frac{\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) + \sin(3\pi + \alpha)}{\cos\left(\frac{3\pi}{4} + \alpha\right) + \cos(\alpha - \pi)}$ را محاسبه کنید. پاسخ نهایی: ۵ راهنمایی: پس

از ساده کردن، تک تک جملات را بر $\cos \alpha$ تقسیم کنید

(۶) درستی تساوی زیر را بررسی کنید.

$$\frac{-2\cos 110^\circ + \cos 350^\circ - \sin 460^\circ}{\cos 80^\circ - 4\sin 280^\circ + \sin 190^\circ} = \frac{1}{2} \tan 10^\circ$$

رابطه درست است. همه را بر اساس 10° درجه بنویسید.

فصل پنجم : توابع نمایی و لگاریتمی

تابع نمایی و ویژگی های آن

تابع لگاریتمی و ویژگی های آن

نمودارها و کاربردهای توابع نمایی و لگاریتمی

درس اول: تابع نمایی و ویژگی های آن:

فرض کنید تعداد یک نوع باکتری در هر روز دو برابر می شود یعنی:

روز	۱	۲	۳	۴	۵	...
تعداد باکتری	۲	۴	۸	۱۶	۳۲	...

اگر دقت کنید ملاحظه می کنید بعد از x روز تعداد باکتری ها از رابطه $y = 2^x$ بدست می آید که یک تابع نمایی است.

تعریف: هر تابع به صورت $y = a^x$ که a عدد حقیقی و $a \neq 1$ ، $a > 0$ و x یک متغیر است یک تابع نمایی نامیده می شود.

توجه: اگر x حقیقی باشد a^x تمام خواص نظیر توانهای گویای a را داراست.

سوال: آیا داده های زیر در هر جدول، بیانگر یک تابع نمایی است یا خیر؟ دلیل خود را توضیح دهید.

1)

x	۱	۲	۳	۴	۵
y	۳	۹	۲۷	۸۱	۲۴۳

2)

x	2	3	4	5	6
y	4	8	12	16	20

3)

x	0	1	2	3
y	1	.5	.25	.125

توجه: اگر در تابع $y = a^x$ داشته باشیم $a = 1$ در اینصورت $y = 1^x = 1$ و تابعی ثابت است و نمایی نیست.

مثال: به ازای کدام مقادیر k تابع $y = \left(\frac{2-k}{k+3}\right)^x$ نمایی است؟

طبق تعریف تابع نمایی باید داشته باشیم: $\frac{2-k}{k+3} > 0$

k	-3	2
2-k	+	+
k+3	-	+
$\frac{2-k}{k+3}$	-	-

$$\Rightarrow k \in (-3, 2) \quad ①$$

همچنین باید داشته باشیم $\frac{2-k}{k+3} \neq 1$ بنابراین:

$$2-k \neq k+3 \Rightarrow -2k \neq 1 \Rightarrow k \neq -\frac{1}{2} \quad ②$$

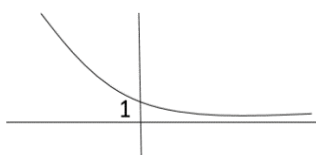
$$\Rightarrow ①, ② \Rightarrow k \in \left\{(-3, -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{2}, 2)\right\} \text{ یا } k \in \{(-3, 2) - \{-\frac{1}{2}\}\}$$

سوال: به ازای کدام مقادیر a عبارت $\left(\frac{a-2}{3-a}\right)^x$ نمایی است؟

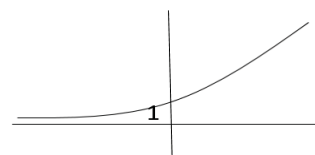
توجه: نمودار تابع های $y = a^x$ و $y = a^{-x}$ ($a > 0, a \neq 1$) نسبت به محور y ها قرینه اند.

توجه: فقط توابعی رفتار نمایی دارند که ضابطه آنها بصورت توانی باشد و متغیر در توان قرار داشته باشد البته ممکن است این عبارت تواندار با عددی جمع و تفریق یا در عددی ضرب شده باشد.

توجه: نمودار تابع نمایی به یکی از دو صورت زیر است:



$$0 < a < 1$$



$$a > 1$$

تذکره ۱: با توجه به شکل، دامنه تابع نمایی ($y = a^x$) برابر R و برد آن برابر $(0, +\infty)$ است.

تذکره ۲: هر خطی که موازی محور x هارسم شود نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می کند پس تابعی یک به یک است

تذکره ۳: نمودار تابع محور y ها را در نقطه ای به عرض ۱ قطع می کند ولی محور x ها را قطع نمی کند.

تذکره ۴: اگر تابع به صورت $y = ka^x$ باشد در اینصورت محور y ها را در نقطه ای به عرض k قطع می کند مثلاً

$y = 2^x$ محور y ها را در نقطه ای به عرض ۱ قطع می کند اما $y = 3 \times 2^x$ محور y ها را در نقطه ای به عرض ۳ و

$y = \frac{1}{3} \times 2^x$ محور y ها را در نقطه ای به عرض $\frac{1}{3}$ قطع می کند.

سوال: اگر نمودار تابع نمایی $y = ka^x$ از دو نقطه $(0, \frac{1}{3})$ و $(-3, \frac{1}{81})$ بگذرد در این صورت مقدار تابع در نقطه ای به

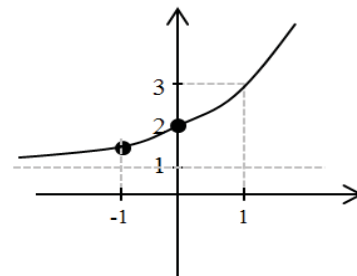
طول ۲ واقع بر آن چقدر است؟

توجه: رسم تابع نمایی معمولاً به روش نقطه یابی و انتقال صورت می گیرد.

مثال: تابع های زیر را رسم کنید.

الف) $y = 2^x + 1$

x	-1	0	1
y	$\frac{3}{2}$	2	3



توجه ۱: حتماً خط $y = 1$ را به صورت نقطه چین رسم می کنیم چون مقدار تابع از آن کمتر نمی شود. در حالت

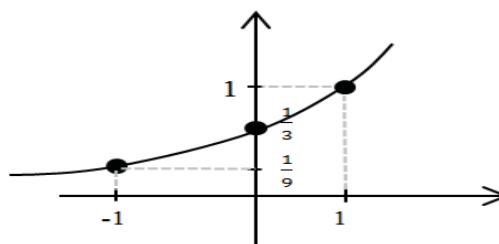
کلی در معادله $y = a^x + k$ خط $y = k$ به عنوان مرز باید رسم شود.

توجه ۲: نمودار فوق را می توان از راه انتقال رسم نمود بدین صورت که نمودار $y = 2^x$ که میدانیم از عرض ۱ عبور

می کند را یک واحد به بالا انتقال دهیم.

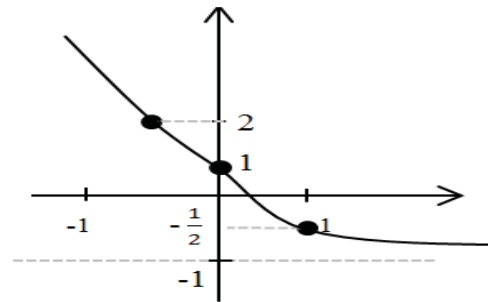
ب) $y = 3^{x-1}$

x	-1	0	1
y	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1



ج) $y = (\frac{1}{2})^x - 1$

x	-1	0	1
y	2	1	$-\frac{1}{2}$



سوال: نمودارهای زیر را رسم کنید و دامنه و برد آنها را بنویسید.

الف) $y = 2^x - 2$

ب) $y = (\frac{1}{3})^x$

ج) $y = 2^{x-1}$

د) $y = (\frac{1}{3})^x - 1$

معادلات نمایی: معادله ای را که در آن متغیر در توان قرار گرفته باشد معادله نمایی مینامند.

مثال: تابع نمایی زیر را حل کنید.

$$9^{x-1} = 27 \times (\frac{1}{3})^{1-3x}$$

$$(3^2)^{x-1} = 3^3 \times 3^{3x-1} \Rightarrow 3^{2x-2} = 3^{3x+2} \Rightarrow 2x-2 = 3x+2 \Rightarrow -x = 4 \Rightarrow x = -4$$

سوال: تابع های نمایی زیر را حل کنید.

$$۱) 4^{2x-1} = 8^{x+1}$$

$$۲) 9^x = 3^{x^2-4x} \quad (\text{کتاب درسی . تمرین ۶ صفحه ۱۰۴})$$

$$۳) \left(\frac{1}{2}\right)^{3x-2} \times 4^x = (\sqrt{2})^x$$

$$۴) \left(\frac{1}{3}\right)^{2x-5} = 81^{x+1}$$

مثال: تابع نمایی زیر را حل کنید.

$$3^{2x} - 4(3^x) + 3 = 0.$$

$$(3^x)^2 - 4(3^x) + 3 = 0. \xrightarrow{3^x=t} t^2 - 4t + 3 = 0 \Rightarrow (t-3)(t-1) = 0 \Rightarrow t-3 = 0.$$

$$\Rightarrow t=3 \Rightarrow 3^x=3 \Rightarrow x=1$$

$$t-1=0 \Rightarrow t=1 \Rightarrow 3^x=1 \Rightarrow x=0.$$

سوال: تابع های نمایی زیر را حل کنید.

$$۱) 9^x + 3^x = 2 \Rightarrow$$

$$۲) 9^{x+1} = 27 \times 3^{x+1} \Rightarrow$$

$$۳) 2^x + 2^{x-1} = 12 \Rightarrow$$

$$۴) 2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} = 224$$

نتیجه: در حالت کلی معادلات نمایی به یکی از سه روش زیر حل می شوند:

۱- مساوی کردن پایه ها ۲- فاکتورگیری ۳- تغییر متغیر

حل نامعادلات نمایی:

برای حل نامعادلات به دو مطلب زیر توجه می کنیم:

$$۱) ۰ < a < ۱, a^x \geq a^y \Rightarrow x \leq y \quad ۲) a > ۱, a^x \geq a^y \Rightarrow x \geq y$$

توجه: در واقع میتوان گفت: برای مقایسه نامعادلات هرگاه پایه بزرگتر از ۱ باشد علامت بین آنها تغییر نمیکنند اما برای پایه های بین ۰ و ۱ علامت تغییر جهت داده میشود.

توجه: در حل نامعادلات نمایی با توجه به اینکه $a^{-۱} = \frac{1}{a}$ همواره میتوان از پایه بزرگتر از ۱ استفاده کرد.

مثال: نامعادله زیر را حل کنید.

$$۲^{۳x+۲} > ۱۶^{۲x-۱}$$

$$۲^{۳x+۲} > ۲^{۴(۲x-۱)} \Rightarrow ۲^{۳x+۲} > ۲^{۸x-۴} \Rightarrow ۳x+۲ > ۸x-۴ \Rightarrow -۵x > -۶$$

$$x < \frac{۶}{۵} \Rightarrow x \text{ (ضریب } x \text{ منفی است جهت عوض میشود)}$$

سوال: نامعادلات زیر را حل کنید.

$$۱) ۵^{-۲x+۴} \geq \left(\frac{1}{5}\right)^x \Rightarrow$$

$$۲) ۳^{۲x-۴} > ۸۱ \Rightarrow$$

$$۳) \left(\frac{1}{۲}\right)^{۲x-۳} > ۸ \Rightarrow$$

$$۴) \left(\frac{1}{۲}\right)^{x+۴} \leq \left(\frac{1}{۳۲}\right)^{-x+۱}$$

تست:

(۱) اگر $f(x) = 2^x$ مقدار $f(x+3) - 2f(x+2)$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) 2^{x+2} (۳) $f(x+1)$ (۴) $2f(x)$

پاسخ: گزینه ۱

(۲) مقدار x از معادله $2 \times 8^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x+3}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{4}{5}$ (۲) $\frac{5}{4}$ (۳) $-\frac{4}{5}$ (۴) $-\frac{5}{4}$

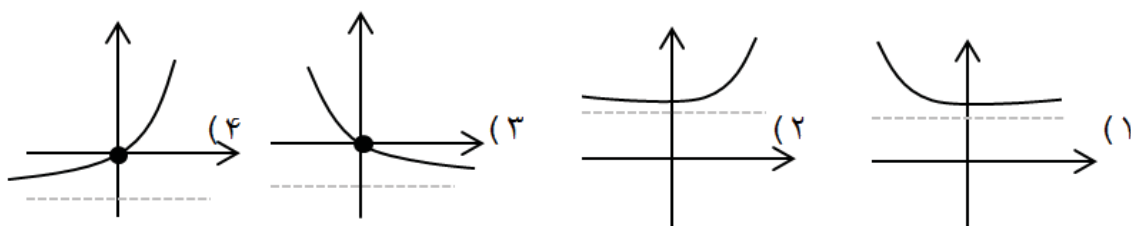
پاسخ: گزینه ۳

(۳) مقدار عبارت $\frac{3^{x+1} - 3^{x+2} + 3^x}{9^x + 9^x + 9^x + 9^x + 9^x}$ برابر است با:

- (۱) 3^x (۲) 3^{-x} (۳) -3^x (۴) -3^{-x}

پاسخ: گزینه ۴

(۴) نمودار $\frac{4^x - 2^x - 2}{2^x - 2}$ کدام است؟



پاسخ: گزینه ۲

تمریناتی برای تلاش بیشتر

(۱) معادله $9^x + 6^x - 2 \times 4^x = 0$ را حل کنید.

پاسخ: $x=0$
 راهنمایی: معادله را به صورت $\frac{9^x + 6^x}{4^x} = 2$ بنویسید و حل کنید

(۲) معادله $3^{6x-9} = 3^{2x} - 3$ را حل کنید.

پاسخ: $x=0$

(۳) هرگاه $2^{3k+1} = 8$ حاصل $(64)^{\frac{k}{6}}$ را محاسبه کنید.

پاسخ: $\sqrt[6]{4}$

(۴) معادله $25^x - 7 \times 5^x - 45 = 0$ را حل کنید.

پاسخ: $x=2$

(۵) مقدار x را از تساوی $9^{x+4} = (36)^3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$ بدست آورید.

پاسخ: $x=0$

درس دوم: تابع لگاریتمی و ویژگی های آن:

می دانیم تابع $f(x)=a^x$ از R به $(0,+\infty)$ یک به یک است در نتیجه وارون پذیر است و بنا به تعریف تابع، معکوس آن را تابع لگاریتمی در مبنای a می گویند و نوشته می شود $f^{-1}(x)=\log_a x$ و می خوانیم لگاریتم x در پایه a بنابراین:

$$y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y \quad (a > 0, a \neq 1)$$

خواندنی: محاسبه لگاریتم یک ابزار مناسب برای توصیف بسیاری از پدیده های طبیعی است، محاسبه شدت زلزله، مشخص کردن ضعیف ترین صدای قابل شنیدن توسط گوش انسان که به آن آستانه شنوایی می گویند و همین طور محاسبه آستانه درد که قوی ترین صدای قابل تحمل برای گوش انسان است، به کمک لگاریتم قابل تعریف و محاسبه اند. در پیش بینی تعداد جمعیت یک جامعه پس از زمان معینی که در برنامه ریزی اقتصادی نقش تعیین کننده ای دارد و یا هنگام محاسبه نیمه عمر عناصر رادیواکتیو که ماده اصلی در انرژی هسته ای است از لگاریتم استفاده می کنیم.

توجه: چون تابع لگاریتمی معکوس تابع نمایی است پس دامنه توابع لگاریتمی مقادیر مثبت است و برد توابع لگاریتمی مجموعه R است.

سوال: توابع نمایی زیر را در صورت امکان به صورت لگاریتمی بنویسید.

$$۱) 4^3 = 64 \Rightarrow$$

$$۲) (-2)^3 = 8 \Rightarrow$$

$$۳) 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow$$

$$۴) \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81} \Rightarrow$$

سوال: توابع لگاریتمی زیر را به صورت نمایی بنویسید

$$۱) \log_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = 3 \Rightarrow$$

$$۲) \log_{\delta}^{\sqrt{\delta}} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$۳) \log_{27}^3 = \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$۴) \log_2^{64} = 6 \Rightarrow$$

سوال: بنا به تعریف لگاریتم جاهای خالی را کامل کنید.

$$۱) \log_2^{\square} = 7$$

$$۲) \log_{\square}^8 = 2$$

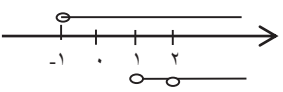
$$۳) \log_{\square}^1 = \cdot$$

$$۴) \log_{\frac{1}{2}}^4 = \square$$

نکته: اگر تابع $f(x) = \log_{h(x)}^{g(x)}$ را در نظر بگیریم دامنه آن به صورت زیر محاسبه میشود:

$$D_f: \{ x | g(x) > 0, h(x) > 0, h(x) \neq 1 \}$$

مثال: دامنه $y = \log_{x-1}^{x+1}$ را محاسبه کنید.

$$\begin{cases} x+1 > 0 \Rightarrow x > -1 \\ x-1 > 0 \Rightarrow x > 1 \\ x-1 \neq 1 \Rightarrow x \neq 2 \end{cases} \rightarrow D_y = (1, 2) \cup (2, +\infty)$$


سوال: دامنه $y = \log_x^{\frac{x+2}{x-2}}$ را محاسبه کنید.

سوال: دامنه $y = \log_{\frac{x}{2}}^{\frac{x}{x+1}}$ را محاسبه کنید.

ویژگیهای لگاریتم: $y = \log_a^x$

(۱) لگاریتم برای اعداد منفی و صفر تعریف نمی شود.

(۲) اگر $a > 1$ تابع صعودی و اگر $0 < a < 1$ تابع همواره نزولی است.

(۳) این تابع همواره پیوسته و یک به یک بوده و در نتیجه دارای معکوس است.

(۴) نمودار تابع همواره از نقطه (۱ و ۰) می گذرد.

(۵) اگر مبنای لگاریتم بزرگتر از یک باشد لگاریتم اعداد بزرگتر از یک مقداری مثبت و لگاریتم اعداد کوچکتر از یک مقداری منفی است.

(۶) اگر مبنای لگاریتم بین صفر و یک باشد لگاریتم اعداد بزرگتر از یک مقداری منفی و لگاریتم اعداد کوچکتر از یک مقداری مثبت است.

ویژگی های کاربردی لگاریتم:

$$۱) \log_a 1 = 0 \quad ۲) \log_a a = 1 \quad ۳) \log_a \frac{1}{a} = -1 \quad ۴) \log_a^{xy} = \log_a^x + \log_a^y$$

$$۵) \log_a^{\frac{x}{y}} = \log_a^x - \log_a^y \quad ۶) \log_a^{x^n} = n \log_a^x$$

$$۷) \log_a^{x^n} = \frac{1}{n} \log_a^x \quad ۸) \log_a^{\frac{1}{x}} = -\log_a x$$

$$۹) \log_c^b \times \log_a^c = \log_a^b \quad ۱۰) a^{\log_a^x} = x \quad ۱۱) \log_a^b = \frac{1}{\log_b^a}$$

$$۱۲) \log_c^a = \frac{\log_e^a}{\log_e^c} \quad ۱۳) a^{\log_c^b} = b^{\log_c^a}$$

اثبات رابطه ۴:

$$\begin{cases} \log_a^x = t \Rightarrow a^t = x \\ \log_a^y = u \Rightarrow a^u = y \end{cases} \Rightarrow a^t \times a^u = xy \Rightarrow a^{t+u} = xy$$

$$\Rightarrow \log_a^{xy} = t+u \Rightarrow \log_a^{xy} = \log_a^x + \log_a^y$$

اثبات رابطه ۶:

$$\log_a^{x^n} = \log_a^{x \times x \times x \times \dots \times x} = \underbrace{\log_a^x + \log_a^x + \dots + \log_a^x}_{n \text{ terms}} = n \log_a^x$$

اثبات رابطه ۹:

$$\begin{cases} \log_c^b = x \Rightarrow b = c^x \\ \log_a^c = y \Rightarrow c = a^y \end{cases} \Rightarrow b = (a^y)^x \Rightarrow b = a^{xy} \Rightarrow \log_a^b = xy \Rightarrow \log_a^b = \log_c^b \times \log_a^c$$

اثبات رابطه ۱۰:

$$\log_a^x = t \Rightarrow a^t = x \Rightarrow a^{\log_a^x} = a^{\log_a^{a^t}} = a^{t \log_a^a} = a^t = x$$

اثبات رابطه ۱۱:

$$\log_a^b \times \log_b^a = 1 \Rightarrow \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

اثبات رابطه ۱۲:

$$\begin{cases} \log_e^a = x \Rightarrow a = e^x \\ \log_e^c = y \Rightarrow c = e^y \end{cases} \Rightarrow \log_c^a = \log_{e^y}^{e^x} \Rightarrow \log_c^a = \frac{x}{y} \log_e^e \Rightarrow \log_c^a = \frac{\log_e^a}{\log_e^c}$$

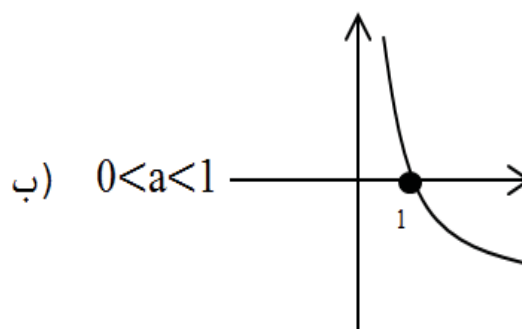
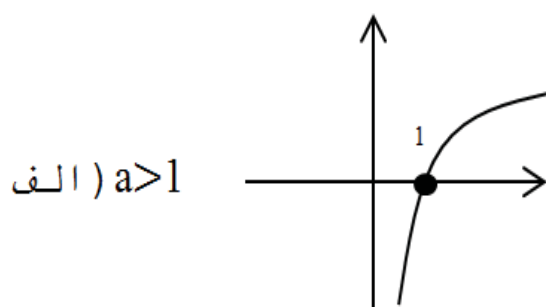
اثبات رابطه ۱۳: $\log_c^b = x \Rightarrow c^x = b$, $\log_c^a = y \Rightarrow c^y = a$

$$a^{\log_c^b} = a^x = (c^y)^x = (c^x)^y = b^y = b^{\log_c^a}$$

توجه ۱: اگر مبنای لگاریتم عدد ۱۰ باشد به آن لگاریتم اعشاری گویند و معمولاً برای راحتی مبنای ۱۰ نوشته نمی شود.

توجه ۲: اگر مبنای لگاریتم عدد شناخته شده $e \approx 2.718$ باشد به آن لگاریتم طبیعی (نپری) گویند و آن را با $\ln$ نشان می دهند. $\log_e^x = \ln x$

نکته: با توجه به ارتباط بین نمودار یک تابع و نمودار معکوس آن نمودار تابع لگاریتمی $y = \log_a^x$ همواره به یکی از دو صورت زیر است:

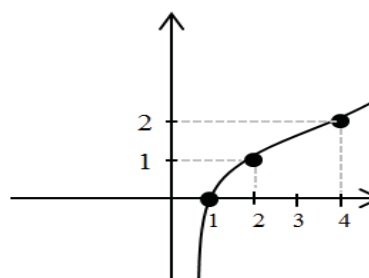


مثال: نمودار $y = \log_2^x$ را رسم کنید و به کمک آن

مثال: نمودار $y = \log_2^x$ را رسم کنید و به کمک آن

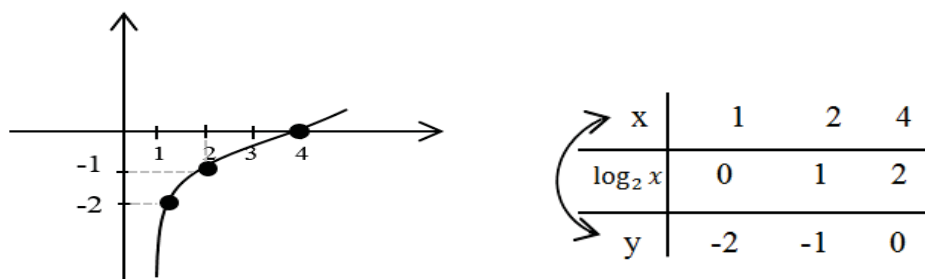
x	1	2	4
y	0	1	2

$2^0 \quad 2^1 \quad 2^2$

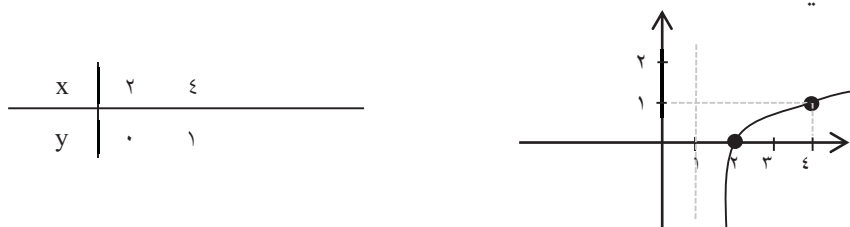


توجه: پایه را در نظر گرفتیم و توانهای از صفر تا ۲ آن را مدنظر قرار دادیم در این صورت پاسخ ها $(2^0=1, 2^1=2, 2^2=4)$ مقادیر x و توانها y را تشکیل می دهند.

البته این فقط یک ترفند برای به ذهن سپاری است و گرنه می توان با توجه به ویژگیهای ۱ و ۲ و ۶ جدول راتشکیل داد. اکنون برای رسم $y = \log_2 x - 2$ میتوان جدول زیر راتشکیل داد و آنرا رسم نمودیا می توان نمودار فوق را به اندازه ۲ واحد به پایین تر انتقال داد.



مثال: نمودار $y = \log_3^{x-1}$ را رسم کنید.



$$x-1 = 0 \rightarrow x=1$$

توجه: در حالت $y = \log^{x-k}$ خط $x=k$ به عنوان مرز باید رسم شود یعنی نمودار تاکنار این خط امتداد دارد.

سوال: نمودارهای زیر را رسم کنید.

۱) $y = \log_2^x + 1$

۲) $y = \log_3^{x+1}$

۳) $y = \log_3^x + 1$

۴) $y = \log_3^{x-1} - 2$

مثال: با توجه به ویژگی های لگاریتم حاصل عبارت های زیر را محاسبه کنید.

$$۱) \log_{\frac{1}{2}} + \log_{\frac{2}{3}} + \log_{\frac{3}{4}} + \dots + \log_{\frac{99}{100}} \Rightarrow$$

$$\log \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \dots \times \frac{99}{100} = \log \frac{1}{100} = \log 10^{-2} = -2 \log 10 = -2$$

$$۲) \log_8 \log_4 \log_2 16 \Rightarrow$$

$$\log_8 \log_4 \log_2 2^4 = \log_8 \log_4 4 \log_2 2 = \log_8 \log_4 4 = \log_8 2 = \log_8 8^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$۳) \log_{\delta}^{\sqrt[5]{125}} - \log_{\sqrt{2}}^{\lambda} + \log_{\frac{1}{4}}^{\sqrt[5]{4}} =$$

$$\log_{\delta}^{\frac{3}{5}} - \log_{\sqrt{2}}^{\frac{3}{2}} + \log_{\frac{1}{4}}^{\frac{2}{5}} = \frac{3}{5} \log_{\delta}^{\delta} - \frac{3}{2} \log_{\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} + \frac{2}{5} \log_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{4}} =$$

$$\frac{3}{5} - \frac{3}{2} + \frac{2}{5} = \frac{3-3.5+1}{5} = \frac{-2}{5}$$

$$۴) \log_{\frac{1}{2}}^{\frac{2}{3}} - \frac{1}{2} \log_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} + \log_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} =$$

$$\log_{\frac{1}{2}}^{\frac{2}{3}} - \log_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} + \log_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \log_{\frac{1}{2}}^{\frac{2}{3}} - \log_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} + \log_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} =$$

$$\log_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} + \log_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \log_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} = \log_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{4}} = \log_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \log_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\log_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \log_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{\frac{1}{4}}} = \log_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \quad \text{توجه:}$$

سوال: با توجه به ویژگی های لگاریتم حاصل عبارت های زیر را محاسبه کنید.

$$۱) \log_{12} \log_4 \log_3^{\lambda} =$$

$$۲) \log_3^{\lambda} - \log_3^{\frac{1}{2}} + 2 \log_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} =$$

$$۳) \log_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} - 2 \log_{\delta}^{\frac{1}{2}} + \log_{\sqrt{2}}^{\sqrt{\lambda}} =$$

سوال: هرگاه $3^a = A$ آنگاه $\log_3 A^2$ را محاسبه کنید.

سوال: حاصل عبارت $\log_3^5 \log_2^{27}$ را بیابید

سوال: اگر $\log 2 = 0.3$ و $\log 3 = 0.48$ حاصل $\log_{18}^{24}$ را بیابید.

توجه: در چنین سوالاتی از خاصیت تعویض مبنا (ویژگی شماره ۱۲) استفاده می کنیم.

$$\log_{18}^{24} = \frac{\log_{18}^{24}}{\log_{18}^{18}} \rightarrow \text{ادامه بدید}$$

سوال: اگر $\log_2^3 = a$ در این صورت $\log_{27}^{48}$ را بر حسب a بدست آورید.

توجه: از ویژگی شماره ۱۲ استفاده کنید و همینطور مبنا را ۳ بگیرید. پاسخ: $\frac{4a+1}{3a+2}$

سوال: اگر $\log_{\frac{1}{5}}^{\left(\frac{x}{2}+4\right)} = 2 + \log_5(x)$ مقدار $f(42)$ را حساب کنید.

سوال: هرگاه داشته باشیم $\log 2 \approx 0.3010$ و $\log 3 \approx 0.4771$ و $\log 7 \approx 0.8451$ مطلوبست محاسبه :

$$\log \frac{12 \times 7^3}{25} \text{ الف}$$

$$\log \frac{49}{3^2 \sqrt{12}} \text{ ب}$$

ویژگی شماره ۱۲: ☺

برای حل معادلات لگاریتمی طرفین تساوی را به دو لگاریتم بدون ضریب تبدیل می‌کنیم و سپس از لگاریتمها صرف نظر می‌کنیم و در نهایت جواب های بدست آمده را در معادله جای X قرار میدهم.

تذکر: دقت کنید که طرفین تساوی باید دو لگاریتم با مبناهای مساوی و بدون ضریب بوجود بیاید، اگر اینطور نشد باید از ویژگی های لگاریتم استفاده کنیم و این شرط را فراهم کنیم.

$$1) \text{Log}^{\text{r}x+1} = \text{r} \text{Log}^{\text{r}} + l \cdot g^{\text{r}} \Rightarrow \text{Log}^{\text{r}x+1} = \log^{\text{r}} + l \cdot g^{\text{r}} \Rightarrow$$

$$\text{Log}^{r_{x+1}\cdot} = \log 16 \times 3 = r_{x+1}\cdot = 48 \Rightarrow r_x = 38 \Rightarrow x = 19 \quad \text{ق ق}$$

$$r) \log^{(f \log(r \times \log_r x))} = .$$

تعريف لگاریتم

$$\Rightarrow \log(r \log_r x) = 1 \cdot \dots \Rightarrow \log(r \log_r x) = 1 \Rightarrow$$

$$\log({}^r\log_r x) = \frac{1}{r} \Rightarrow {}^r\log_r x = 1 \cdot \frac{1}{r} \Rightarrow \log_r x = \frac{1 \cdot \frac{1}{r}}{r} \Rightarrow x = r^{\frac{r}{\sqrt{r}}}$$

$$\textcircled{\text{r}} \frac{\log_{\textcircled{\lambda}}(\frac{\textcircled{\lambda}}{x^{\textcircled{\text{r}}}})}{\log_{\textcircled{\lambda}} x^{\textcircled{\text{r}}}} = \textcircled{\text{r}} \Rightarrow \log_{\textcircled{\lambda}}(\frac{\textcircled{\lambda}}{x^{\textcircled{\text{r}}}}) = \textcircled{\text{r}} \log_{\textcircled{\lambda}} x^{\textcircled{\text{r}}} \Rightarrow \log_{\textcircled{\lambda}}(\frac{\textcircled{\lambda}}{x^{\textcircled{\text{r}}}}) = \log_{\textcircled{\lambda}}(x^{\textcircled{\text{r}}})^{\textcircled{\text{r}}}$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda}{x^2} = x^6 \Rightarrow x^{\lambda} = \lambda \Rightarrow x = \pm \sqrt[\lambda]{\lambda} \quad \text{ق ق}$$

$$1) \log^{x+3} + \log^x = 1 \Rightarrow$$

$$۲) \log^{x+۱} - \log^{x-۳} = \log^۳ \Rightarrow$$

$$۳) \log^{x^۲-۳۰} = \log^x \Rightarrow$$

$$۴) \log_V^{۲۴} - \log_V^{x+۵} = \log_V^{\Delta} \Rightarrow$$

$$۵) \log_9^{x-۶} - \log_9^{x+۲} = ۱$$

$$۶) \log^{x+۱} + \log^{x-۲} = ۱$$

نامعادله های لگاریتمی: دو حالت در نظر می گیریم:

الف) اگر مبنا از یک بزرگتر باشد ($b > ۱$) جهت نامساوی را عوض نمی کنیم:

$$\log_b^{f(x)} > c \Rightarrow f(x) > b^c \quad \text{یا} \quad \log_b^{f(x)} < \log_b^{g(x)} \Rightarrow f(x) < g(x)$$

ب) اگر مبنا ($۰ < b < ۱$) بین صفر و یک باشد جهت نامساوی را عوض می کنیم.

$$\log_b^{f(x)} > c \Rightarrow f(x) < b^c \quad \text{یا} \quad \log_b^{f(x)} < \log_b^{g(x)} \Rightarrow f(x) > g(x)$$

توجه: بعد از حل نامعادله دامنه را تعیین می کنیم و با مجموعه جواب بدست آمده اشتراک می گیریم تا جواب نهایی بدست آید.

سوال: نامعادلات زیر را حل کنید.

$$۱) \log_۳^{۲x-۱} > \log_۳^{x+۱} \Rightarrow ۲x-۱ > x+۱ \Rightarrow ۲x-x > ۲ \Rightarrow x > ۲ \quad \textcircled{1}$$

می توان $x=3$ که از ۲ بزرگتر را امتحان کرد: قابل قبول است پس: $x \in (2, +\infty)$ یا اینکه دامنه تعیین کرد.

$$\begin{cases} 2x - 1 > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{2} \\ x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1 \end{cases} \xRightarrow{\text{اشتراک}} x > \frac{1}{2} \quad (2)$$

$$\text{اشتراک} \quad (1), (2) \Rightarrow x > 2 \Rightarrow x \in (2, +\infty)$$

$$2) 1 + \log_2^{x-3} > 0 \Rightarrow \log_2^{x-3} > -1 \Rightarrow$$

$$x-3 > 2^{-1} \Rightarrow x > \frac{1}{2} + 3 \Rightarrow x > \frac{7}{2} \Rightarrow x > 3.5 \quad (1)$$

$$x-3 > 0 \Rightarrow x > 3 \quad (2) \xrightarrow{(1), (2)} x > 3.5 \rightarrow x \in (3.5, +\infty)$$

سوال: نامعادلات زیر را حل کنید.

$$1) \log_{\frac{1}{2}}^{2x+1} < \log_{\frac{1}{2}}^{x-1} \quad \text{به مبنا دقت کنید}$$

$$2) \log_3^{x+2} > \log_3^{2x}$$

درس سوم: کاربرد توابع نمایی و لگاریتمی:

اگر بزرگی زلزله ای در مقیاس ریشتر برابر m باشد انرژی آزاد شده آن زلزله برابر E در واحد (Erg) است که از رابطه $\log E = 11.8 + 1.5m$ بدست می آید.

سوال: زلزله ای به شدت ۶/۶ ریشتر شهری را لرزاند است مقدار انرژی آزاد شده در این زلزله چقدر بوده است؟

سوال: انرژی آزاد شده توسط زلزله ای حدود $10^{22/6}$ (Erg) است. قدرت زلزله در مقیاس ریشتر چقدر بوده است؟

تست:

۱) اگر $4^a = 2\sqrt{2}$ لگاریتم $4a+1$ در پایه ۴ کدام است؟ (کنکور تجربی ۸۸)

- ۱) $\sqrt{2}$ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) $\frac{3}{2}$

$$4^a = 2\sqrt{2} \Rightarrow 2^{2a} = 2 \times 2^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 2^{2a} = 2^{\frac{3}{2}} \Rightarrow 2a = \frac{3}{2} \Rightarrow a = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \log_4^{4a+1} = \log_4^{4 \times \frac{3}{4} + 1} = \log_4^4 = 1$$

۲) از معادله لگاریتمی $\log_3^{x^2+1} - \log_3^{x+2} = 1$ مقدار لگاریتم $(2x-1)$ در پایه ۸ کدام است؟ (کنکور تجربی ۹۵)

- ۱) $-\frac{2}{3}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{2}{3}$

پاسخ: گزینه ۴

۳) از تساوی $\log_x^{x^2+8} = 2 - \log_x^{x-6}$ مقدار لگاریتم x در پایه ۴ کدام است؟ (کنکور تجربی خارج ۹۳)

- ۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) ۲

پاسخ: گزینه ۳

۴) از دو معادله دو مجهولی $\log y = 2 \log 3 + \log x$ و $2^{x-y} \times 4^{x+y} = 1$ مقدار y کدام است؟ (کنکور تجربی ۹۶)

- ۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

$$\log y = \log 3^2 + \log x \Rightarrow \log y = \log 9x \Rightarrow y = 9x \quad ①$$

$$2^{x-y} \times 2^{2x+2y} = 1 \Rightarrow 2^{3x+2y-y} = 1 \Rightarrow 3x+2y-y = 0 \rightarrow 3x+18x-y = 0$$

$$\Rightarrow 21x = y \Rightarrow x = \frac{1}{3} \Rightarrow y = 9x = 9 \times \frac{1}{3} = 3$$

۵) نمودارهای دو تابع $f(x) = \log_3^x$ و $g(x) = \log_{\frac{1}{3}}^x$ نسبت به هم چگونه اند؟ (کنکور تجربی خارج ۹۱)

(۱) $f(x)$ بالاتر (۲) $g(x)$ بالاتر (۳) منطبق اند (۴) فقط در یک نقطه متقاطع

$$\begin{aligned} \text{منطبقند} & \xrightarrow{\text{ضابطه های برابر}} \text{دامنه های یکسان} \\ \log_{\frac{1}{4}} x = \log_4 x^{-1} & \Rightarrow f(x) = -\log_4 x \rightarrow D_f: (0, +\infty) \\ \log_{\frac{1}{4}} x = \log_4 x^{-1} & \Rightarrow g(x) = -\log_4 x \rightarrow D_g: (0, +\infty) \end{aligned}$$

(۶) از تساوی $\log_x^{x^2+4} = 1 + \log_x^5$ مقدار لگاریتم x در پایه ۲ کدام است؟ (کنکور تجربی ۹۳)

- (۱) -۱ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) ۲

پاسخ: گزینه ۴

(۷) اگر $4\sqrt{2} = 4^x$ و $1 + \log^{\sqrt{x+1}} = \log^y$ مقدار y کدام است؟ (کنکور تجربی ۸۵)

- (۱) $7/5$ (۲) $12/5$ (۳) ۱۵ (۴) ۲۵

پاسخ: گزینه ۳ ابتدا از تابع نمایی x را محاسبه کنید و سپس در تابع لگاریتمی قرار دهید.

(۸) تابع با ضابطه $f(x) = a + \log_4^{bx-4}$ از دو نقطه (۲۰) و (۱۲) میگذرد. a کدام است؟ (کنکور ۹۶ ریاضی)

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

پاسخ: گزینه ۳ راهنمایی: نیاز هست بعد از جایگذاری یکی از روابط را در 2^4 ضرب کنید تا دورابطه را از هم کم کنید

۹ اگر $x^2 = \left(\frac{125}{8}\right)^{x-1}$ حاصل $\log_8^{9x+1}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{4}{3}$ (۴) $\frac{2}{3}$

پاسخ: گزینه ۱ (کنکور تجربی ۹۸)

تمریناتی برای تلاش بیشتر:

$$(۱) \text{ اگر } ۱۳ab = ۴a^۲ + ۹b^۲ \text{ ثابت کنید: (منطقه ۱۳ تهران)} \quad \log \frac{۲a+۳b}{۵} = \frac{\log a + \log b}{۲}$$

راهنمایی: سمت اول تساوی فرض را به اتحاد تبدیل کنید.

$$(۲) \text{ معادله } \log_۳^x - ۸ \log_{x^۲}^۳ = ۳ \text{ را حل کنید.}$$

$$\text{پاسخ: } ۱۶ \text{ و } x = \frac{1}{۲}$$

$$(۳) \text{ معادله } \log_x^۳ \log_{\frac{x}{۳}}^۳ + \log_{\frac{x}{۸۱}}^۳ = ۰ \text{ را حل کنید.}$$

$$\text{پاسخ: } \frac{1}{۹} \text{ و } x = ۹ \text{ راهنمایی: از خاصیت } \log_b^a = \frac{1}{\log_a^b} \text{ استفاده کنید.}$$

$$(۴) \text{ فرض کنید } x, y > ۰ \text{ و } \log_a^x = \log_a^y \text{ ثابت کنید } x = y \text{ (منطقه ۸ تهران)}$$

راهنمایی: تعریف لگاریتم را بکار ببرید راحت به جواب میرسید.

$$(۵) \text{ اگر } x > ۰ \text{ و } y = \log_e^x - \log_e^{1+x} \text{ نشان دهید } x = \frac{e^y}{1-e^y}$$

$$(۶) \text{ اگر } \log_a^x = ۸ \text{ و } \log_b^x = ۳ \text{ و } \log_c^x = ۶ \text{ مقدار } \log_{abc}^x \text{ را محاسبه کنید. پاسخ: } \frac{۸}{۵}$$

$$(۷) \text{ حاصل عبارت } (\log_۶^۳)^۲ + \log_۶^۳ \times \log_۶^{۱۸} \text{ را محاسبه کنید}$$

$$(۸) \text{ مقدار } ۵ \log^{(۴+۲\sqrt{۳})} - ۱۰ \log^{(۱+\sqrt{۳})} \text{ را حساب کنید}$$

فصل ششم: حد و پیوستگی

درس اول: فرآیندهای حدی

درس دوم: محاسبه حد توابع

درس سوم: پیوستگی

درس اول: فرآیندهای حدی:

مفهوم حد: دنباله $\dots, \frac{1}{27}, \frac{1}{9}, \frac{1}{3}, 1$ را در نظر بگیرید، اگر به همین روند با قدر نسبت $\frac{1}{3}$ ادامه دهیم، ملاحظه می‌کنیم که دنباله هر بار به صفر نزدیک‌تر می‌شود ولی هیچ‌گاه به صفر نمی‌رسد. یعنی تا نزدیکی‌های صفر می‌رود ولی صفر نمی‌شود. پس صفر مرز دنباله است که هرگز دنباله به این مرز نمی‌رسد هر قدر هم به آن نزدیک شود. بنابراین در اصطلاح می‌گوییم که صفر حد این دنباله از اعداد است. در واقع حد بررسی رفتار یک تابع در اطراف و نزدیک به یک نقطه معین می‌باشد.

مثال: تابع $f(x) = x - [x]$ را در نظر بگیرید و جدول زیر را کامل کنید.

x	0/9	0/99	0/999 → 1	← 1/001	1/01	1/1
$x - [x]$	0/9	0/99	0/999 → ?	← 0/001	0/01	0/1

دقت کنید اگر x با مقدارهای بزرگ‌تر از ۱ به ۱ نزدیک شود، مقدار $x - [x]$ به صفر نزدیک می‌شود.

و اگر x با مقدارهای کوچک‌تر از ۱ به ۱ نزدیک شود، مقدار $x - [x]$ به یک نزدیک می‌شود.

به عبارت دیگر، اگر از سمت چپ و سمت راست به عدد یک نزدیک شویم، به یک مقدار یکسان نمی‌رسیم، یعنی رفتار تابع در اطراف عدد ۱ (یک)، متغیر است. بنابراین می‌توان گفت: حد ندارد.

با توجه به مطلب فوق می‌توان دو رفتار متفاوت در اطراف ۱ برای تابع $f(x)$ تعریف کرد:

تعریف: در یک تابع f اگر متغیر x (در دامنه f) با مقدارهای بزرگ‌تر از عددی مانند a به a نزدیک شود و مقدارهای $f(x)$ به عددی مانند L نزدیک شوند، می‌گوییم تابع f در نقطه a حد راست دارد و مقدار این حد برابر L است:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

تعریف: در یک تابع f اگر متغیر x (در دامنه f) با مقدارهای کوچک‌تر از عددی مانند a به a نزدیک شود و مقدارهای $f(x)$ به عددی مانند K نزدیک شوند، می‌گوییم تابع f در نقطه a حد چپ دارد و مقدار این حد برابر K است:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = K$$

تذکر: در علامت گذاری حد راست و حد چپ، نمادهای $+$ و $-$ معنای از سمت راست و از سمت چپ دارند.

قضیه: اگر تابعی در نقطه‌ای حدهای چپ و راست متفاوت داشته باشد در آن نقطه حد ندارد. اما اگر حدهای چپ و راست تابع در نقطه‌ای موجود و مساوی باشند تابع در آن نقطه حد دارد و حد آن همان مقدار مشترک حدهای چپ و راست است.

نکته: حد تابعی مانند f در نقطه ای مانند x به معین بودن یا نبودن تابع در x بستگی ندارد. یعنی ممکن است:

(الف) تابع f در x تعریف نشده باشد اما وقتی x به x نزدیک می شود، حد داشته باشد.

(ب) تابع f در x تعریف شده باشد اما وقتی x به x نزدیک می شود، تابع حد نداشته باشد

توجه: هنگامی که تابع در نقطه x دارای حد است، حد تابع می تواند با مقدار تابع برابر باشد یا نباشد.

تعریف: حد تابع $f(x)$ وقتی که x به سمت عدد حقیقی a میل می کند را به صورت $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ نشان می دهیم.

میل کردن یعنی خیلی خیلی به یک نقطه نزدیک شدن.

همسایگی های یک نقطه:

بازه هایی به صورت $(a - t, a + t)$ که t عددی مثبت است را یک همسایگی a می نامند. اگر a را از این همسایگی حذف کنیم، آن را یک همسایگی محذوف a می نامند.

توجه: همسایگی یک عدد، به صورت بازه ی باز مثل (a, b) می باشد که a و b هیچکدام $+\infty$ یا $-\infty$ نباشند. پس بازه های $[-2, 2]$ و $(-2, 3]$ و $[2, 4]$ و $(-\infty, 1)$ و $(1, +\infty)$ همسایگی محسوب نمی شوند.

مثال: آیا مجموعه جواب $|x - 1| \leq 2$ نمایشگر یک همسایگی است؟

$$|x - 1| \leq 2 \Rightarrow -2 \leq x - 1 \leq 2 \Rightarrow -1 \leq x \leq 3 \Rightarrow [-1, 3]$$

همسایگی نیست.

مثال: آیا مجموعه جواب $x^2 - 5x + 6 < 0$ نمایشگر یک همسایگی است؟

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow (x - 2)(x - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 2 = 0 \rightarrow x = 2 \\ \text{یا} \\ x - 3 = 0 \rightarrow x = 3 \end{cases}$$

x	2	3
$x^2 - 5x + 6$	+	-
	+	+

همسایگی هست $(2, 3) \Rightarrow$ مجموعه جواب

مثال: به ازای چه مقادیری از x ، بازه ی $(2x + 1, x + 3)$ یک همسایگی برای ۱ میباشد؟

$$I \in (x+1, x+3) \Rightarrow \begin{cases} 2x+1 < 1 \Rightarrow 2x < 0 \Rightarrow x < 0 \\ x+3 > 1 \Rightarrow x > -2 \end{cases} \xRightarrow{\text{اشتراک}} -2 < x < 0$$

سوال: به ازای چه مقادیری از x ، بازه‌ی $(x-2, 3x+2)$ یک همسایگی برای ۳ می‌باشد؟

توجه: اجتماع یا اشتراک دو همسایگی یک عدد باز هم یک همسایگی برای آن عدد می‌باشد.

توجه: اگر از همسایگی (a, b) یک نقطه مثل x_1 را حذف کنیم تا یک همسایگی محذوف به دست آوریم، این همسایگی محذوف را به صورت $(a, x_1) \cup (x_1, b)$ نشان می‌دهیم. به عبارت دیگر، اجتماع دوبازه‌ای می‌تواند یک همسایگی محذوف باشد که نقطه انتهای بازه اول و نقطه ابتدای بازه دوم، یک عدد باشد.

مثال: بازه‌ی $\{0\} - (-1, 1)$ یک همسایگی محذوف صفر است، ولی بازه‌ی $\{1\} - (-2, +\infty)$ یک همسایگی محذوف نیست.

مثال: به ازای چه مقدار از K ، بازه $(K-1, 5) \cup (-1, 3K-2)$ یک همسایگی محذوف است؟ طبق تعریف همسایگی محذوف:

$$3K-2 = K-1 \Rightarrow 2K = 1 \Rightarrow K = \frac{1}{2}$$

سوال: به ازای چه مقدار از a ، بازه $(2a+1, 7) \cup (3, a+2)$ یک همسایگی محذوف است؟

سوال: به ازای چه مقدار از m ، بازه $(-1, m^2+5) \cup (5m-1, 3)$ یک همسایگی محذوف است؟

راهنمایی: اجتماع دو بازه را مرتب کنید تا بتوانید از شرط همسایگی محذوف استفاده کنید. جواب‌ها را امتحان کنید.

سوال: a را طوری بیابید که $(3a-1, 4a+2)$ یک همسایگی راست -2 باشد.

مثال: a را طوری بیابید که $(2a-1, 4a+2)$ یک همسایگی چپ -2 باشد.

$$4a + 2 = -2 \Rightarrow 4a = -4 \Rightarrow a = -1$$

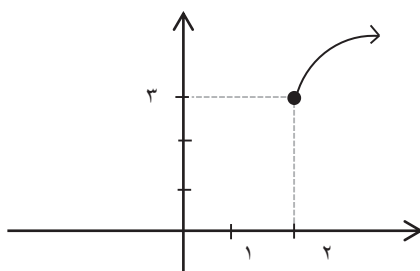
سوال: به ازای چه مقداری از K ، مجموعه جواب نامعادله $0 < kx^2 + 2x - 1$ یک همسایگی ۲ است؟

باید به ازای $x = 2$ نامساوی برقرار باشد. حالا شما ادامه بدید. ☺

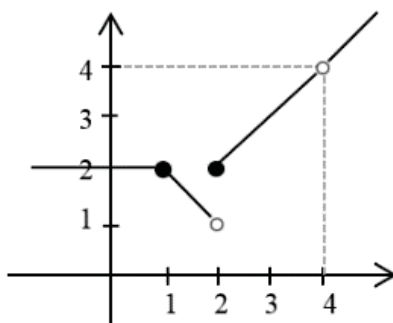
نکته: شرط آن که بتوان از حد چپ یک تابع در نقطه ای مانند a صحبت کرد، آن است که آن تابع در یک همسایگی چپ a تعریف شده باشد.

نکته: شرط آن که بتوان از حد راست یک تابع در نقطه ای مانند a صحبت کرد، آن است که آن تابع در یک همسایگی راست a تعریف شده باشد.

مثال: تابع $f(x) = \sqrt{x-2} + 3$ در اطراف ۲ تعریف نشده است ولی در یک همسایگی راست ۲ تعریف شده است یعنی $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 3$ اما $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ وجود ندارد.



سوال: با توجه به نمودار تابع f مطلوبست محاسبه حدود زیر (در صورت وجود)



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) =$$

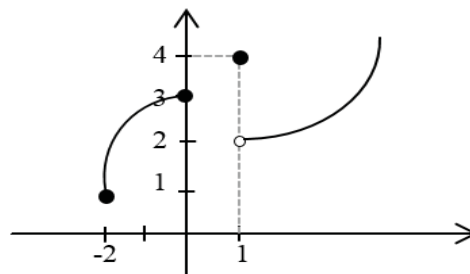
$$f(2) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) =$$

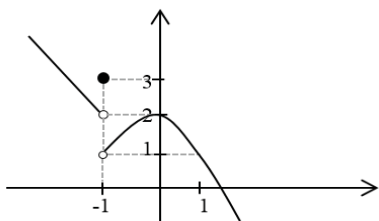
سوال: با استفاده از نمودار زیر، عبارت خواسته شده را محاسبه کنید

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) - 3 \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) + f(1) =$$

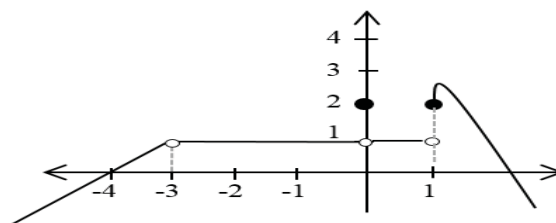


سوال: با استفاده از نمودار زیر، عبارت خواسته شده را (در صورت وجود) محاسبه کنید (شهریور ۹۵-ریاضی ۳ نهایی)

$$2f(-1) + \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) =$$



سوال: با توجه به نمودار f در شکل زیر، حاصل هریک از عبارات زیر را بنویسید.



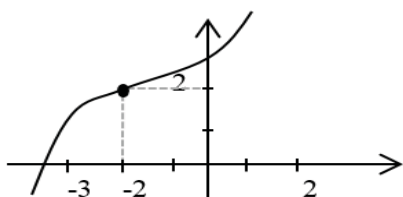
الف) $\lim_{x \rightarrow (-3)^+} f(x) =$

ب) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) =$

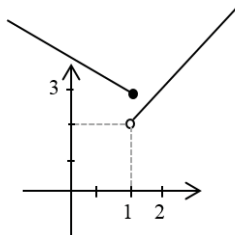
پ) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) =$

مثال: نمودار تابعی را رسم کنید که در یک همسایگی ۲- تعریف شده باشد و در این نقطه حد داشته باشد و حد

تابع برابر مقدار تابع در ۲- باشد



مثال: تابعی را رسم کنید که در یک همسایگی ۱ تعریف شده باشد ولی در این نقطه حد نداشته باشد.



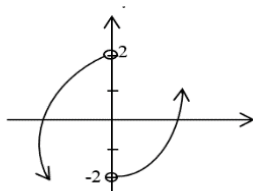
سوال: تابعی را رسم کنید که در یک همسایگی صفر تعریف شده باشد و در این نقطه حد داشته باشد ولی حد آن غیر از مقدار تابع در صفر باشد.

سوال: تابعی را رسم کنید که در ۱ تعریف نشده باشد ولی در یک همسایگی محذوف ۱ تعریف شده باشد و در این نقطه حد داشته باشد.

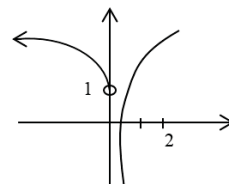
سوال: تابعی را رسم کنید که در یک همسایگی ۱- تعریف شده باشد و در این نقطه حد داشته باشد و حد تابع برابر مقدار تابع در ۱- باشد.

سوال: تابعی را رسم کنید که در یک همسایگی راست ۲ تعریف شده باشد ولی در همسایگی چپ ۲ تعریف نشده باشد و در این نقطه حد راست داشته باشد.

مثال: تابعی را رسم کنید که در یک همسایگی محذوف صفر تعریف شده باشد و در صفر حد چپ و راست متفاوت داشته باشد.



مثال: تابعی را رسم کنید که در یک همسایگی محذوف صفر تعریف شده باشد و در صفر حد چپ داشته باشد ولی حد راست نداشته باشد.



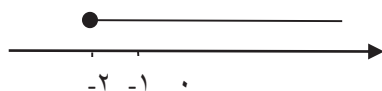
سوال: نمودار تابعی را رسم کنید که تابع در یک همسایگی ۳ تعریف شده باشد و در این نقطه حد داشته باشد ولی حد آن غیر از مقدار تابع در ۳ باشد.

سوال: نمودار تابعی را رسم کنید که تابع در ۲ تعریف نشده باشد ولی در یک همسایگی محذوف ۲ تعریف شده باشد و در این نقطه حد داشته باشد.

سوال: اگر $f(x) = \frac{|x|}{x}$ نمودار f را رسم کنید. آیا $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ موجود است؟ (کتاب درسی صفحه ۱۲۷)

تذکر: شرط لازم برای این که تابع f در $x=a$ دارای حد باشد آنست که تابع در همسایگی a تعریف شده باشد و اگر حداقل در یکی از همسایگی های راست یا چپ a تعریف نشده باشد گوئیم تابع f در $x=a$ حد ندارد

مثال: آیا تابع $f(x) = \sqrt{x+2}$ در $x=-2$ حد دارد؟ چرا؟



$$D_f: [-2, +\infty) \Rightarrow x+2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$$

باتوجه به دامنه: همسایگی چپ -۲ تعریف نشده است

پس در $x=-2$ حد ندارد.

سوال: آیا تابع $f(x) = \sqrt{1-x}$ در $x=1$ حد دارد؟ چرا؟

مثال: آیا تابع $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{1-x}$ در $x=1$ حد دارد؟ چرا؟

$$\left\{ \begin{array}{l} x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \\ 1-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 1 \end{array} \right. \Rightarrow D_f: \{1\}$$

دامنه

همسایگی برای $x=1$ با توجه به دامنه قابل تعریف نیست پس در $x=1$ حد ندارد.

سوال: بررسی کنید تابع $f(x)$ در $x=2$ حد دارد یا ندارد.

$$f(x) = \begin{cases} -x+2 & x > 2 \\ -2 & x = 2 \\ x-3 & x < 2 \end{cases}$$

صحبت‌هایی از بزرگان:

بیندیشیم:

امروز یک نفر زیر سایه درختی نشسته است. صرفاً "چون یک نفر مدت‌ها قبل درختی کاشته است. (وارفی بوفت)

کسی که دارای عزمی راسخ است جهان را مطابق میل خویش عوض می‌کند (گوته)

به محض اینکه کاری در جهت منافع کسی انجام می‌دهید نه تنها اوبه شما فکر میکنند بلکه خداوند هم به شما فکر میکند (پاراما هانسا یوگاناندا)

تمریناتی برای تلاش بیشتر:

(۱) در صورتی که مجموعه جواب نامعادله $kx^2+ax+b < 0$ یک همسایگی راست ۲- و یک همسایگی چپ ۳ باشد k و a و b را بیابید.

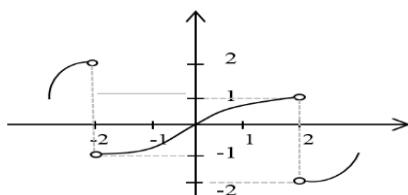
توجه: بازه (۳ و ۲-) مجموعه نامعادله است با توجه به این موضوع چند جمله ای را بنویسید و با kx^2+ax+b مقایسه کنید. پاسخ: $k=1, a=-1, b=-6$

(۲) در صورتیکه $(-1, a+b) \cup (ab+2, 4)$ یک همسایگی محذوف ۳ باشد حاصل a^2+b^2 را حساب کنید. (از تعریف همسایگی محذوف و اتحاد ناقص کمک بگیرید.)

پاسخ: ۷

(۳) نمودار تابع $g(x) = \begin{cases} -2 & x \in \mathbb{Z} \\ 1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$ را رسم کنید و به کمک آن حد تابع در $x=\sqrt{3}$ را محاسبه کنید و حد تابع در $a \in \mathbb{R}$ را نیز تعیین کنید.

(۴) نمودار تابع f به صورت زیر است حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(-x)$ را محاسبه کنید.



(۵) دو تابع f و g مثال بنزید که در اطراف صفر تعریف شده اند و هیچ کدام در صفر حد ندارند ولی $f+g$ در صفر حد دارد.

درس دوم: محاسبه حد توابع

(۱) حد یک تابع ثابت در هر نقطه برابر همان مقدار ثابت است یعنی $\lim_{x \rightarrow a} c = c$

(۲) حد یک تابع همانی در هر نقطه برابر طول آن نقطه است یعنی :

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) = x) = a$$

(۳) حد یک تابع چند جمله ای در هر نقطه ، برابر مقدار تابع در همان نقطه است:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x)) = ax^n + bx^{n-1} + \dots + c = f(a)$$

(۴) هر گاه $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ و k عددی ثابت باشد داریم: $\lim_{x \rightarrow a} kf(x) = kL$

(۵) اگر f و g دو تابع باشند که در $x=a$ دارای حد باشند داریم:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) \quad \text{الف)}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \times g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \times \lim_{x \rightarrow a} g(x) \quad \text{ب)}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f}{g} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} \quad \text{ج) } (\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}; \text{ داریم } n \in \mathbb{N} \text{ و } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \quad \text{ع)}$$

(اگر n زوج باشد : $L > 0$)

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^n = L^n \quad \text{اگر } n \in \mathbb{N} \text{ و } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \quad \text{و)}$$

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \sin x = \sin \alpha, \quad \lim_{x \rightarrow \alpha} \cos x = \cos \alpha \quad \text{به طور کلی داریم:}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \cot x = \cot a \quad \text{آنگاه } (k \in \mathbb{Z}) \quad a \neq k\pi \quad \text{اگر } \lim_{x \rightarrow a} \tan x = \tan a : \quad \text{اگر } (k \in \mathbb{Z}) \quad a \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \quad \text{و)}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |L| \quad \text{آنگاه } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \quad \text{اگر } \text{و)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 4 \quad \text{مثال: اگر } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-2}{x-1} = 5 \quad \text{مطلوبست محاسبه}$$

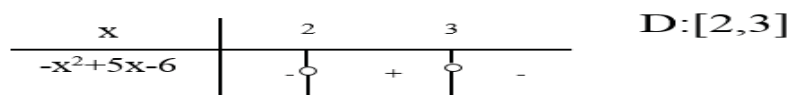
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-2}{x-1} = 5 \Rightarrow \frac{\lim_{x \rightarrow 1} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1} 2}{\lim_{x \rightarrow 1} (x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} 5 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 4 \quad \text{طبق قضایا داریم:}$$

$$\frac{3 \lim_{x \rightarrow 1} f(x) - 2}{5} = 4 \Rightarrow 3 \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 20 + 2 \Rightarrow 3 \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 22 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{22}{3}$$

مثال: مطلوبست محاسبه $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{-x^2 + 5x - 6}$

چون $\lim_{x \rightarrow 2} (-x^2 + 5x - 6) = 0$ حتما باید دامنه را محاسبه کنیم.

$$-x^2 + 5x - 6 \geq 0 \Rightarrow -x^2 + 5x - 6 = 0 \Rightarrow -(x-2)(x-3) = 0 \Rightarrow x=2, 3$$



اگر به دامنه دقت کنید همسایگی چپ برای ۲ تعریف نشده است پس حد وجود ندارد.

در واقع می توان گفت: در توابع شامل رادیکال با فرجه زوج اگر عبارت زیر رادیکال برابر صفر شود باید حد راست و حد چپ را جداگانه حساب کرد. اگر یکی شدند همان حد تابع است اما اگر یکسان نشدند حد وجود ندارد. مثال بالا را از روش تعیین دامنه حل نمودیم تا متوجه شوید دلیل اینکه زمانی که عبارت زیر رادیکال با فرجه زوج صفر شد باید حد چپ و حد راست تعیین کنیم چیست. ☺

همچنین در توابع چند ضابطه ای در نقطه ای که ضابطه عوض می شود و توابع شامل قدر مطلق، همچنین توابع جزء صحیح باید مقدار حد راست و حد چپ را جداگانه بدست آوریم.

سوال: آیا تابع $f(x) = \frac{x}{|x|}$ در $a=0$ حد دارد؟ چرا؟ (نهایی حسابان خرداد ۹۵)

سوال: حد راست و چپ تابع $f(x) = x - [x]$ را در $x=2$ محاسبه کنید. (نهایی حسابان شهریور ۹۴)

سوال: حد تابع $y = \frac{1}{[x]-3}$ را در $x=3$ در صورت وجود بیابید.

به وجود همسایگی چپ و راست دقت کنید.

سوال: تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x} & x < 1 \\ x^2 + 1 & x > 1 \end{cases}$ در $x=1$ حد دارد؟ چرا؟

سوال: مقدار a را چنان بیابید که تابع $f(x) = \begin{cases} |x+2| - a & x \geq 2 \\ x^2 + 3 & x < 2 \end{cases}$ در نقطه ۲ دارای حد باشد.

سوال: عدد a را طوری بیابید تا تابع $f(x) = \begin{cases} ax^2 + 1 & x < -2 \\ x^3 + 1 & x > -2 \end{cases}$ در $x = -2$ حد داشته باشد.

سوال: مقادیر a و b را در $f(x) = \begin{cases} ax + b & x \geq -1 \\ ax^2 - 1 & x < -1 \end{cases}$ طوری تعیین کنید که: $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 1$.

سوال: آیا تابع $f(x) = (x-2)[x] + 2x - 4$ در نقطه $x=1$ حد دارد؟ چرا؟

سوال: مطلوبست محاسبه: $\lim_{x \rightarrow 0} [x][x+1]$

مثال: مطلوبست محاسبه: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{[x]-1}$

چون $[x]-1$ به ازای $x \rightarrow 1^+$ صفر می شود پس برای $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{[x]-1}$ باید به دامنه توجه کنیم بنابراین:

$$[x]-1=0 \Rightarrow [x]=1 \Rightarrow 1 \leq x < 2 \Rightarrow D = \mathbb{R} - [1, 2)$$

با توجه به دامنه: همسایگی راست ۱ تعریف نشده است پس تابع در $x=1$ حد ندارد.

سوال: به ازای چه مقدار k تابع $f(x) = 2[x] - k[x-3] + x$ در $x=7$ دارای حد است؟

رفع ابهام توابع کسری مبهم: $\frac{0}{0}$

هرگاه در محاسبه حد تابع $\frac{f(x)}{g(x)}$ پس از جایگذاری به $\frac{0}{0}$ رسیدیم باید عامل ابهام را از بین ببریم تا بتوانیم مقدار حد را محاسبه کنیم برای اینکار اگر صورت و مخرج چند جمله ای باشند و $x \rightarrow a$ ، صورت و مخرج را بر $x-a$ تقسیم می کنیم و در نهایت $x-a$ در صورت و مخرج ساده می شود. بعد حد تابع را از طریق جایگذاری پیدا می کنیم.

سوال: مطلوبست محاسبه حدهای زیر.

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^2 + x - 6}{9x^2 + 3x - 12}$$

$$\frac{5(1)^2 + 1 - 6}{9(1)^2 + 3(1) - 12} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(5x+6)(x-1)}{(9x+12)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x+6}{9x+12} = \frac{5(1)+6}{9(1)+12} = \frac{11}{21}$$

توجه :

$$\begin{array}{r|l} 5x^2+x-6 & x-1 \\ 5x^2-5x & 5x+6 \\ \hline - & + \\ 6x-6 & \\ 6x-6 & \\ \hline - & + \\ & \odot \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 9x^2+3x-12 & x-1 \\ 9x^2-9x & 9x+12 \\ \hline - & + \\ 12x-12 & \\ 12x-12 & \\ \hline - & + \\ & \odot \end{array}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + x - 15}{3x^2 + 13x + 12}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x+3)(2x-5)}{(x+3)(3x+4)} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x-5}{3x+4} = \frac{-11}{-5} = \frac{11}{5}$$

سوال: مطلوبست محاسبه حدهای زیر.

$$1) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 9}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - x^2 - 2x}{x - 2}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^3 - 4x - 2}{x^2 - 1}$$

$$۴) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x - x^2}{x^2 - 4}$$

$$۵) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 3x - 2}{x^2 + x - 6}$$

سوال: a را طوری بیابید که $\lim_{x \rightarrow 2a} \frac{x - 2a}{x^2 - 4a^2} = \frac{1}{8}$ باشد.

سوال: مقادیر b و a را در $f(x) = \begin{cases} 2ax + b & x \geq -2 \\ ax^2 - 1 & x < -2 \end{cases}$ طوری تعیین نمایید که $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 3$ گردد.

سوال: اگر $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 7$ و $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = -2$ حاصل $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2f(x) - 3g(x)}{x^2 + f^2(x)}$ را محاسبه کنید.

سوال: نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x & x \geq 1 \\ 4 - x^2 & x < 1 \end{cases}$ را رسم کنید و به کمک آن وجود حد تابع را در $x=1$ بررسی کنید.

سوال: تابع $f(x) = \begin{cases} ax + 2b & x > 3 \\ ax^2 + bx + 2 & x < 3 \end{cases}$ مفروض است عددهای a و b را بیابید به طوری که $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 2$ و $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 6$

سوال: مطلوبست حدهای زیر:

$$۱) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow +} (x \sin(x + \frac{\pi}{e}))$$

$$۳) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin(x - \frac{\pi}{6}) + \cos 2x + \sin \frac{x}{2}}{2 \tan \frac{x}{2} + \cos^2(x - \frac{\pi}{6})}$$

$$۴) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin^2 x}{1 - \sin x} \quad (\text{کتاب درسی صفحه ۱۳۶})$$

تمریناتی برای تلاش بیشتر:

(۱) تابع f را طوری بدست آورید که داشته باشیم $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{-2x+3} = 4$ چند تابع با این شرایط وجود دارد؟

(۲) در صورتی که $f(x-3) = \frac{x+5}{x-1}$ ، $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ را حساب کنید. (نهایی ریاضی (۳) خرداد ۹۵)

(۳) اگر $f(2x+3) = x-5$ باشد حاصل $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ را محاسبه کنید.

(۴) مقدار a را چنان بیابید که $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 - 5x^2 + 6x - 3}{ax^3 - a} = 4$

(۵) در تابعی با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax & x \geq 2 \\ -x + 3 & x < 2 \end{cases}$ به ازای چه مقداری از a رابطه زیر برقرار است؟

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2)$$

(۶) اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^n - 2^n}{x - 2} = 80$ مقدار n را بدست آورید.

پاسخ: $n=5$

راهنمایی: از $x^n - 2^n = (x-2)(x^{n-1} + 2x^{n-2} + 4x^{n-3} + \dots + 2^{n-1})$ استفاده کنید.

شکست وجود ندارد**بیندیشیم:**

روزی خبرنگار جوانی از توماس ادیسون مخترع بزرگ پرسید: آقای ادیسون شنیده ایم که برای اختراع لامپ تاکنون تلاشهای زیادی کرده اید و می کنید اما گویا موفق نشده اید چرا هنوز با وجود بیش از ۹۰۰ بار شکست همچنان به فعالیت خود ادامه می دهید؟

ادیسون با لحنی خونسرد و مطمئن جواب داد: ببخشید آقا من ۹۰۰ بار شکست نخوردم بلکه ۹۰۰ روش یاد گرفتم که لامپ چگونه ساخته نمیشود...

درس سوم: پیوستگی:

اگر حد تابع در یک نقطه با مقدار تابع در آن نقطه برابر باشد تابع را در آن نقطه پیوسته می نامند.

تعریف: تابع f را در $x=c$ از طرف راست پیوسته می نامیم هر گاه $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = f(c)$

تعریف: تابع f را در $x=c$ از طرف چپ پیوسته می نامیم هر گاه $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = f(c)$

تعریف: تابع f روی بازه (a,b) پیوسته است هر گاه در هر نقطه این بازه پیوسته باشد.

توجه: تابع f روی بازه $[a,b)$ پیوسته است هر گاه اولاً در بازه (a,b) پیوسته باشد ثانیاً در نقطه a پیوستگی راست داشته باشد.

توجه: تابع f روی بازه $(a,b]$ پیوسته است هر گاه اولاً در بازه (a,b) پیوسته باشد ثانیاً در نقطه b پیوستگی چپ داشته باشد.

توجه: تابع f روی بازه $[a,b]$ پیوسته است هر گاه اولاً در بازه (a,b) پیوسته باشد ثانیاً در نقطه a پیوستگی راست و در نقطه b پیوستگی چپ داشته باشد

توجه: هر تابع در دامنه خود پیوسته است.

مثال: تابع $f(x) = \begin{cases} ax^2 + 2 & x > -1 \\ 3 & x = -1 \\ -3x + b & x < -1 \end{cases}$ داده شده است. a, b را چنان بیابید که تابع در $x = -1$ پیوسته باشد.

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = a + 2 \Rightarrow a + 2 = 3 \Rightarrow a = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 3 + b \Rightarrow 3 + b = 3 \Rightarrow b = 0$$

$$f(-1) = 3$$

سوال: عددهای a و b را چنان بیابید که تابع $f(x) = \begin{cases} ax + 1 & x > -2 \\ 13 & x = -2 \\ 2ax^2 + bx - 1 & x < -2 \end{cases}$ در نقطه $x = -2$ پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} -2x + a & x \geq 1 \\ x^2 + 3x & x < 1 \end{cases}$$

در نقطه $x=1$ پیوسته

سوال: حدود a را طوری تعیین کنید که تابع نباشد.

$$f(x) = \begin{cases} -4x + a & x > -1 \\ -6x & x = -1 \\ x^2 - 5x & x < -1 \end{cases}$$

در نقطه $x=-1$ پیوسته

سوال: مقدار a را طوری تعیین کنید که تابع باشد.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|+ax}{x} & x < 0 \\ 2 & x = 0 \\ x^3 + 4b & x > 0 \end{cases}$$

در نقطه $x=0$ پیوسته

سوال: عددهای a و b را چنان بیابید که تابع باشد. (نهایی ریاضی (۳) خرداد ۹۵)

سوال: پیوستگی تابع $f(x)$ را در نقطه $x=0$ بررسی کنید. (نهایی ریاضی (۳) خرداد ۹۶)

$$f(x) = \begin{cases} 2|x-1| & x < 0 \\ 3\cos x - 1 & x = 0 \\ \sqrt{x^2 + 4} & x > 0 \end{cases}$$

سوال: پیوستگی تابع زیر را در $x=1$ بررسی کنید.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} & x > 1 \\ x - \frac{1}{2} & x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

سوال: ضرایب a و b را چنان بیابید که تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} bx - 1 & x < 1 \\ 3x & x = 1 \\ a[x] + 2 & x > 1 \end{cases}$ در $x=1$ پیوسته باشد. ([] نماد جزء صحیح است)

سوال: به ازای چه مقادیری از a تابع f به معادله $f(x) = \frac{x^2+3}{x^2+ax+1}$ همواره پیوسته است.

صحبت بزرگان:

بیندیشیم:

خوشبخت کسی است که ره قدردانی از خدمت دیگران را بلد است و شادی دیگران را به قدر شادی خود حس میکند

(گوته)

نکات کلیدی:

(۱) اگر دو تابع در یک همسایگی محذوف a باهم برابر باشند مقدار حد آنها در نقطه a دارای وضعیت یکسان است یعنی اگر یکی دارای حد باشد دیگری نیز دارای حد است و اگر یکی از آنها دارای حد نباشد دیگری نیز حد ندارد.

(۲) در صورتی که $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ باشد باید برای محاسبه $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{f(x)}$ به دامنه تابع $(\sqrt{f(x)})$ توجه کرد. زیرا ممکن است یکی از همسایگی ها برای a وجود نداشته باشد و در نتیجه حد موجود نباشد.

(۳) هنگامی که تابع شامل جزء صحیح در مخرج کسر باشد و حد آن از یک طرف صفر شود باید به دامنه تابع توجه کرد.

(۴) اگر توابع f و g در یک همسایگی محذوف نقطه a تعریف شده باشند اگر حد مجموع آنها یعنی

$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))$ موجود باشد نمی توان به طور قطع نتیجه گرفت که $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ وجود دارند.

(۵) اگر $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))$ و $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ موجود باشند به طور قطع می توان نتیجه گرفت $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ وجود دارد.

(۶) اگر توابع f و g هیچکدام در نقطه a دارای حد نباشند ممکن است $f+g$ در a حد داشته باشد ممکن است $f+g$ در a حد نداشته باشد.

(۷) تعیین خارج قسمت و باقیمانده به روش هورنر: فرض کنیم $f(x)$ یک چند جمله ای باشد اگر $f(x)$ را بر $x-a$ تقسیم کنیم باقیمانده تقسیم برابر است با $f(a)$ یعنی a را در f جایگذاری می کنیم عدد بدست آمده باقیمانده است برای بدست آوردن خارج قسمت با یک مثال موضوع را روشن می کنیم. می خواهیم خارج قسمت و باقیمانده $f(x) = 3x^2 + x + 2$ را بر $x-4$ محاسبه کنیم:

ابتدا ضرایب عددی $f(x)$ را در ردیف بالای جدول می نویسیم. اولین ضریب را در اولین خانه پایین جدول نیز قرار می دهیم:

	3	1	2
3	$\frac{3(4) + 1}{13}$	$\frac{13(4) + 2}{54}$	

توجه: ۴ ریشه مقسوم علیه است. چون $f(x)$ درجه ۲ است پس خارج قسمت از درجه ۱ است و ضرایب آن عبارتند از دو عدد سمت چپ: $q(x) = 3x + 13$

باقیمانده هم برابر است با رقم آخر جدول یعنی $R=54$

(۸) تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ در دامنه اش پیوسته است برای این تابع از پیوستگی در $x=0$ نمی توان صحبت کرد چون در $x=0$ تعریف نشده است.

(۹) اگر تابعی روی بازه ای پیوسته باشد روی هر زیر بازه دلخواه از آن نیز پیوسته است.

(۱۰) شرط لازم برای آن که بتوان در مورد حد تابع f در $x=a$ صحبت کرد آن است که تابع f دست کم در یک همسایگی a تعریف شده باشد.

(۱۱) تابع ثابت $f(x)=c$ در همه نقاط حد دارد و حد آن در همه نقاط c است.

(۱۲) تابع همانی $f(x)=x$ در همه نقاط حد دارد و حد آن در هر نقطه به طول a برابر a است.

(۱۳) اگر تابع f شامل جزء صحیح باشد ابتدا جزء صحیح را محاسبه می کنیم و سپس حاصل حد را در صورت وجود می یابیم.

(۱۴) اگر تابع f شامل قدر مطلق باشد برای محاسبه $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ حدهای چپ و راست را محاسبه می کنیم.

(۱۵) برای رفع ابهام در حالت - میتوان از قاعده هوپیتال استفاده کرد، البته باید با قوانین مشتق آشنایی داشته باشید که دوشمشتق مورد نیاز شما عبارتند از:

$$f(x)=ax^n + k \Rightarrow (f(x))' = nax^{n-1} \quad (1)$$

$$f(x)=\sqrt{ax} \Rightarrow (f(x))' = \frac{a}{2\sqrt{ax}} \quad (2)$$

تست:

(۱) تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} ax + 2^{x-3} & x < 3 \\ a \log_7^{x+1} & x \geq 3 \end{cases}$ در نقطه $x=3$ پیوسته است. $f(2)$ کدام است؟ (کنکور تجربی ۹۷)

(۱) -۲ (۲) -۱/۵ (۳) ۱ (۴) صفر

پاسخ: گزینه ۲

(۲) تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{x-|x|}{x^2-x-6} & x \neq 2 \\ a & x = 2 \end{cases}$ به ازای کدام مقدار a در بازه $(2, 3]$ پیوسته است؟ (کنکور ریاضی ۹۷)

(۱) $\frac{1}{11}$ (۲) $\frac{1}{9}$ (۳) $\frac{1}{8}$ (۴) $\frac{1}{6}$

طبق تعریف پیوستگی در بازه باید: $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2)$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{(x-2)(x^2+2x+3)} = \frac{1}{4+4+3} = \frac{1}{11} \Rightarrow a = \frac{1}{11}$$

(۳) اگر $f(x) = \begin{cases} \frac{x-\sqrt{2}x}{2-x} & x \neq 2 \\ a & x = 2 \end{cases}$ به ازای کدام مقدار a در نقطه $x=2$ پیوسته است؟ (کنکور تجربی ۸۷)

(۱) -۲ (۲) -۱ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴) ۱

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-\sqrt{2}x}{2-x} \times \frac{x+\sqrt{2}x}{x+\sqrt{2}x} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-2x}{(2-x)(x+\sqrt{2}x)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x(2-x)}{(2-x)(x+\sqrt{2}x)} = \frac{-1}{2} \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

(۴) به ازای کدام مجموعه مقادیر a تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} (x+a)^2 & x \geq -1 \\ 2x+1 & x < -1 \end{cases}$ در نقطه $x=-1$ حد دارد؟ (کنکور تجربی ۸۰)

(۱) $\{0\}$ (۲) $\{2\}$ (۳) $\emptyset$ (۴) $\mathbb{R}$

پاسخ: گزینه ۳ راهنمایی: تعریف حد را به کار ببرید: حد چپ = حد راست

۵) تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} a \sin 2x & \frac{\pi}{4} \leq x < \frac{3\pi}{4} \\ \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) & \frac{3\pi}{4} \leq x < 2\pi \end{cases}$ در $x = \frac{3\pi}{4}$ پیوسته است مقدار a کدام است؟ (تجربی خارج ۹۰)

- (۱) -۱ (۲) صفر (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴) ۱

پاسخ: گزینه ۴

۶) به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax - 5 & x > 2 \\ ax - 1 & x \leq 2 \end{cases}$ بر روی مجموعه اعداد حقیقی پیوسته است؟ (کنکور تجربی ۹۱)

- (۱) هر مقدار حقیقی a (۲) هیچ مقدار a (۳) فقط $a = -2$ (۴) فقط $a = 2$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4 + 2a - 5 = 2a - 1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2a - 1 \end{cases} \rightarrow 2a - 1 = 2a - 1$$

پس به ازای هر مقدار حقیقی a پیوسته است.

۷) اگر تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} ax + b & x > 2 \\ x^2 + bx - 1 & x < 2 \end{cases}$ با شرط $f(2) = 5$ بر روی مجموعه اعداد حقیقی پیوسته باشد a کدام است؟ (کنکور تجربی خارج ۹۱)

- (۱) -۱ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

پاسخ: گزینه ۳

۸) تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{|x^2+x-2|}{x-1} & x \neq 1 \\ a & x = 1 \end{cases}$ به ازای کدام مقدار a ، در $x=1$ پیوسته است؟ (کنکور تجربی ۹۰)

- (۱) هر مقدار a (۲) -3 (۳) 3 (۴) هیچ مقدار a

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|(x-1)(x+2)|}{x-1} = f(1) \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+2)}{x-1} = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x-1)(x+2)}{x-1} = -3 \end{cases} \rightarrow$$

چون حد چپ $\neq$ حد راست است پس به ازای هیچ مقدار a در $x=1$ پیوسته نیست.

۹) حد عبارت $\frac{x+2}{x^2-2x} + \frac{2[x]}{2-x}$ وقتی $x \rightarrow 2^-$ کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح) (کنکور تجربی خارج ۹۲)

- (۱) $-\infty$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) 1 (۴) $+\infty$

پاسخ: گزینه ۲

۱۰) به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} 3x - [x] & x < 2 \\ a & x = 2 \\ x + 2 & x > 2 \end{cases}$ در نقطه $x=2$ پیوسته است؟ (کنکور تجربی ۹۲)

- (۱) 4 (۲) $4/5$ (۳) 5 (۴) هیچ مقدار a

پاسخ: گزینه ۴ راهنمایی: به تعریف جزء صحیح و پیوستگی توجه کنید.

(۱۱) حاصل $\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{3}{2x^2 + 5x + 2} - \frac{4}{x^2 - 4} \right)$ کدام است؟ (کنکور تجربی ۹۳)

(۱) $-\frac{7}{12}$ (۲) $-\frac{5}{12}$ (۳) $\frac{5}{12}$ (۴) $\frac{7}{12}$

پاسخ: گزینه ۲ راهنمایی: تجزیه و مخرج مشترک

(۱۲) حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{6}{x^2 - 2x} - \frac{x+1}{x-2} \right)$ کدام است؟ (کنکور تجربی ۹۶)

(۱) $-\frac{5}{2}$ (۲) $-\frac{2}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{3}{2}$

پاسخ: گزینه ۱ راهنمایی: تجزیه و مخرج مشترک

(۱۳) حاصل $\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{2}{x^2 - 1} - \frac{x}{x+1} \right)$ کدام است؟ (کنکور تجربی خارج ۹۶)

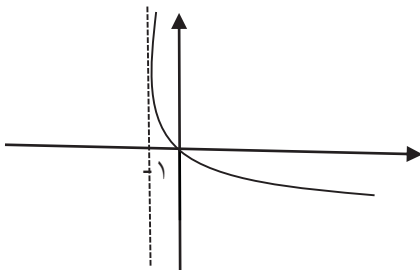
(۱) -2 (۲) $-\frac{2}{3}$ (۳) 1 (۴) $\frac{3}{2}$

پاسخ: گزینه ۲ راهنمایی: تجزیه و مخرج مشترک

(۱۴) شکل روبرو نمودار تابع $y = \log_p^{u(x)}$ است. $u(x)$ کدام است؟

(۱) $x+1$ (۲) $(x+1)^{-1}$ (۳) $x-1$ (۴) $1-x$

(کنکور تجربی ۹۸)



تمریناتی برای تلاش بیشتر:

(۱) مقدار a را طوری بیابید که تابع زیر در $x=1$ پیوسته باشد. (نهایی حسابان خرداد ۹۴)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} & 0 \leq x < 1 \\ [x] + a & x \geq 1 \end{cases}$$

پاسخ: $a = -\frac{1}{4}$ راهنمایی: ضابطه اول را باید گویا کنید تا رفع ابهام گردد.

$$f(x) = \begin{cases} [x+2] + a & x > 0 \\ 2 & x = 0 \\ \frac{\sqrt{2}\sin x}{\sqrt{1-\cos 2x}} + b & x < 0 \end{cases} \quad \text{تابع (۲)}$$

نقطه $x=0$ پیوسته باشد. ؟ ([] علامت جزء صحیح)

$$1 - \cos 2x = 2 \sin^2 x \quad \text{راهنمایی}$$

پاسخ: $a=0$ ، $b=3$

$$f(x) = \begin{cases} 2x + \frac{\sqrt{x^2-2x-1}}{x-1} & x \neq 1 \\ 3 & x = 1 \end{cases} \quad \text{پیوستگی تابع (۳) را در } x=1 \text{ بررسی کنید. (منطقه ۳ تهران ۸۱)}$$

$$f(x) = [\sqrt{1-x^2}] \times \frac{1}{x} \quad \text{به ازای چه مقادیری از } x \text{ تابع } f(x) \text{ همواره پیوسته است؟ (۴)}$$

راهنمایی: اشتراک دامنه ها را بدست آورید.

$$f(x) = \frac{x}{[x]} + 1 \quad \text{را در فاصله } [2,3] \text{ بررسی کنید. (۵)}$$

راهنمایی: نقاط ناپیوستگی را محاسبه کنید. چون با بازه $[2,3]$ نقطه مشترک ندارد....



$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x+8}-2}{x} \quad \text{مفروض است. } f(0) \text{ را چنان بیابید که تابع } f \text{ در } x=0 \text{ پیوسته باشد. (نهایی حسابان خرداد ۸۷)}$$

پاسخ: $\frac{1}{12}$

راهنمایی: تابع را برای رفع ابهام گویا کنید.

فصل هفتم : آمار و احتمال

درس اول:

احتمال شرطی و پیشامدهای مستقل

درس دوم:

آمار توصیفی

درس اول: احتمال شرطی و پیشامدهای مستقل:

در سالهای گذشته خواندیم:

آزمایش: در علم احتمال، به هر عملی که برای جمع آوری داده ها صورت می پذیرد آزمایش می گوئیم.

آزمایش تصادفی: آزمایشی که نتایج آن از قبل قابل پیش بینی نباشد ولی مجموعه نتایج حاصل از آزمایش قابل پیش بینی باشد را آزمایش تصادفی می گوئیم. به عنوان مثال وقتی یک تاس را به هوا پرتاب می کنیم از قبل نمی توانیم نتیجه بگیریم که کدام عدد رو خواهد شد ولی مجموعه نتایج حاصل از پرتاب تاس: $\{۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶\}$ قابل پیش بینی است.

فضای نمونه: تمام نتایج ممکن یک تجربه تصادفی را فضای نمونه آن تجربه می نامند و معمولاً با S نمایش می دهند.

پیشامد تصادفی: هر زیر مجموعه از فضای نمونه را یک پیشامد تصادفی می نامند و معمولاً هر پیشامد را با حروف بزرگ انگلیسی نشان میدهند.

اجتماع دو پیشامد: پیشامد $A \cup B$ وقتی رخ میدهد که حداقل یکی از پیشامدهای A یا B رخ دهد.

اشتراک دو پیشامد: پیشامد $A \cap B$ وقتی رخ میدهد که هر دو پیشامد A و B رخ دهند.

تفاضل دو پیشامد: پیشامد $A - B$ وقتی رخ میدهد که پیشامد A رخ دهد ولی پیشامد B رخ ندهد.

متمم یک پیشامد: پیشامد A^c (یا A') زمانی رخ میدهد که پیشامد A رخ ندهد.

پیشامدهای ناسازگار: دو پیشامد A و B را ناسازگار می گوئیم هرگاه A و B باهم رخ ندهند یعنی $A \cap B = \emptyset$

جایگشت: اگر تعدادی شیء متمایز داشته باشیم به هر نحوه قرار گرفتن آن ها در کنارهم یک جایگشت می گوئیم.

توجه: تعداد جایگشت های n شیء متمایز برابر با $n!$ است.

توجه: تعداد جایگشت های k تایی از n شیء متمایز را معمولاً با نماد $p(n, k)$ نشان میدهند و داریم: $p(n, k) = \frac{n!}{(n-k)!}$ (با شرط $k \leq n$)

توجه: بطور کلی ترکیب های k تایی از n شیء متمایز به انتخاب های k تایی از آن n شیء اطلاق می شود که

در آنها ترتیب فاقد اهمیت است: $C(n, k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! (n-k)!}$

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(S)} \quad \text{فرمول کلی احتمال:}$$

فرمول محاسبه احتمال اجتماع یا اشتراک:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

تذکر: اگر در مساله ای بین دو یا چند حالت حرف « و » بیاید تعداد هر کدام از حالت ها را جداگانه بدست می آوریم و در هم ضرب می کنیم تا جواب نهایی بدست آید.

تذکر: اگر در مساله ای بین دو یا چند حالت کلمه « یا » بیاید تعداد هر کدام از حالت ها را جداگانه بدست می آوریم و باهم جمع می کنیم تا جواب نهایی بدست آید.

توجه: همواره در صورت سوال به صورت مستقیم حرف « و » یا کلمه « یا » ذکر نمی شود بلکه با دقت و تجزیه و تحلیل سوال باید متوجه شویم که کدام حالت مدنظر است.

پیشامد غیر ممکن: اگر در آزمایشی ، پیشامدی را تعریف کنیم که امکان وقوع آن نباشد آن پیشامد را غیر ممکن می گوئیم و آن را با نماد $\emptyset$ نشان می دهیم و چون تهی عضو ندارد پس $p(\emptyset) = 0$

پیشامد حتمی: اگر S پیشامدی از فضای نمونه S باشد (هر مجموعه زیر مجموعه خودش هست) چون همه اعضای فضای نمونه را دارد پیشامد حتمی است و $p(S) = 1$

چند اصل در احتمال:

اصل ۱: همیشه داریم $0 \leq p(A) \leq 1$

اصل ۲: اگر A و B ناسازگار باشند:

$$p(A \cap B) = 0 \Rightarrow p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

اصل ۳: همیشه احتمال فضای نمونه برابر ۱ است: $p(S) = 1$

چند قضیه در احتمال:

قضیه ۱: در مورد پیشامدهای دو به دو ناسازگار A و B داریم:

$$p(A \cup B \cup C) = p(A) + p(B) + p(C)$$

قضیه ۲: برای هر دو پیشامد A و B که $A \subseteq B$ داریم:

$$p(B-A)=p(B)-p(A), p(A) \leq p(B)$$

قضیه ۳: برای هر دو پیشامد دلخواه A و B داریم:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

نتیجه ۱: برای هر دو پیشامد دلخواه A و B داریم:

$$p(A-B) = p(A) - p(A \cap B)$$

نتیجه ۲: برای پیشامد مکمل A یعنی A' داریم:

$$p(A') = 1 - p(A)$$

احتمال شرطی:

تعریف: اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه ای باشند و $p(B) > 0$ در این صورت وقوع پیشامد A به شرط اینکه بدانیم پیشامد B قبلاً رخ داده است را به صورت $p(A|B)$ نوشته و چنین تعریف می کنیم:

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

توجه: در احتمال شرطی $p(A|B)$ چون از B آگاهی داریم، فضای نمونه محسوب شده و جانشین S می شود. در این صورت گفته می شود: فضای نمونه ای کاهش یافته است.

مثال: یک عدد طبیعی کوچکتر از ۱۱ را تصادفی انتخاب کرده ایم. مطلوبست تعیین:

الف) احتمال آمدن عدد زوج به شرط آمدن عدد مضرب ۳

ب) احتمال آمدن عدد مضرب ۳ به شرط آمدن عدد زوج

حل: $S = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ و $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ پیشامد آمدن عدد زوج و $B = \{3, 6, 9\}$ پیشامد آمدن عدد مضرب ۳ بنابراین:

$$A \cap B = \{6\} \Rightarrow \text{الف) } p(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \text{ب) } p(B|A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{1}{5}$$

توجه: در احتمال دو نوع فضای نمونه وجود دارد. اگر فضای نمونه متناهی یا شمارای متناهی باشد آن را فضای نمونه ای گسسته گوییم و اگر فضای نمونه ناشمارای نامتناهی باشد آن را فضای نمونه ای پیوسته گوییم اما در

کتاب پایه یازدهم تجربی فقط با فضای نمونه ای گسسته سروکار داریم و در این فضا داریم:

$$p(B|A) = \frac{\frac{n(A \cap B)}{n(S)}}{\frac{n(A)}{n(S)}} = \frac{n(A \cap B)}{n(A)}$$

مثال: یک جفت تاس را می ریزیم، اگر عدد آنها مختلف باشد احتمال آنکه مجموع دو عدد زوج باشد را بدست آورید.

A : مجموعه دو عدد زوج $(۳,۵), (۲,۴), (۲,۶), (۳,۱), (۱,۵), (۱,۱), (۱,۳), (۲,۲)$

$(۳,۳), (۴,۲), (۴,۴), (۴,۶), (۵,۱), (۵,۳), (۵,۵), (۶,۲), (۶,۴), (۶,۶)$

B : {مختلف بودن اعداد $(۱,۲), (۱,۳), (۱,۴), (۱,۵), \dots$ }

چون هر عدد با ۵ عدد دیگر متفاوت است پس $n(B) = ۶ \times ۵ = ۳۰$

$$p(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{۱۲}{۳۰} = \frac{۲}{۱۵}$$

توجه: برای $A \cap B$: دنبال اعدادی می گردیم که مجموعشان زوج و هر دو عدد متفاوت باشند پس:

$A \cap B$: $\{(۱,۳), (۱,۵), (۲,۴), (۲,۶), (۳,۱), (۳,۵), (۴,۲), (۴,۶), (۵,۱), (۵,۳), (۶,۲), (۶,۴)\}$

مثال: در جامعه ای درصد نوع خون به شرح زیر است:

نوع A : ۰/۱۷ نوع AB : ۰/۱۳ نوع B : ۰/۲۰ نوع O : ۰/۵۰

مجروحی را به بخش اورژانس بیمارستان آورده اند، احتمال اینکه گروه خونی بیمار از نوع AB یا O باشد چقدر است؟

اگر E پیشامد گروه خونی AB و f پیشامد گروه خونی O باشد چون این دو گروه خونی همزمان در یک شخص نمی تواند باشد بنابراین اشتراک آنها نیز تهی است یعنی دو پیشامد ناسازگارند پس:

$$p(E \cup f) = p(E) + p(f) \Rightarrow p(E \cup f) = \frac{۱۳}{۱۰۰} + \frac{۵۰}{۱۰۰} = \frac{۶۳}{۱۰۰} = ۰/۶۳$$

مثال: خانواده ای دارای ۴ فرزند است احتمال اینکه لااقل یکی از فرزندان دختر باشد چقدر است؟

(همگی پسر باشند) $1 - p$ = (حداقل یکی دختر باشد) P

$$= 1 - \frac{\binom{4}{4}}{\binom{4}{1}} = 1 - \frac{1}{۴} = \frac{۳}{۴}$$

سوال: اگر $p(A \cup B) = 0.6$ و $p(A) = 0.2$ و $p(B|A) = 0.1$ باشد $p(B)$ را محاسبه کنید.

سوال: اگر $p(A|B) = \frac{1}{3}$ و $p(B|A) = \frac{1}{4}$ و $p(A \cup B) = \frac{3}{4}$ باشد $p(A-B)$ را بدست آورید.

سوال: در امتحانات یک کلاس ۲۰٪ دانش آموزان در ریاضی، ۱۵٪ در فیزیک و ۱۰٪ در هر دو درس تجدید شده اند. احتمال اینکه دانش آموزی از این کلاس در درس فیزیک تجدید شده باشد مشروط به اینکه در درس ریاضی تجدید شده باشد را بدست آورید.

سوال: اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه ای S بوده و $p(A) = 0.4$ و $p(B) = 0.5$ و $p(A \cup B) = 0.7$ مطلوبست محاسبه $p(A|B')$

راهنمایی: $p(A \cap B') = p(A - B)$

سوال: در یک کلاس ۴۰ نفری ۷ نفر فوتبالیست هستند دو نفر به تصادف انتخاب می کنیم اگر نفر اول فوتبالیست باشد چقدر احتمال دارد که نفر دوم هم فوتبالیست باشد. (استعدادهای درخشان - شهید بهشتی اهواز خرداد ۹۷)

سوال: اعداد ۱ تا ۶ را روی ۶ کارت نوشته و سپس دو کارت از بین آنها به تصادف انتخاب می کنیم . مطلوب است احتمال آن که مجموع اعداد روی دو کارت زوج باشد به شرط آن که مجموع آنها مضرب ۳ باشد.

سوال: احتمال اینکه رویاد در درس ریاضی قبول شود دو برابر احتمال آن است که دوستش در این درس قبول شود اگر احتمال اینکه حداقل یکی از آنها در درس ریاضی قبول شوند برابر $0/625$ باشد، رویا با چه احتمالی در این درس قبول خواهد شد. (تمرین ۵ صفحه ۱۵۲ کتاب درسی)

سوال: از بین اعداد یک رقمی طبیعی دو عدد به تصادف انتخاب می کنیم اگر این دو عدد اول باشند چقدر احتمال دارد متوالی باشند.

پیشامدهای مستقل:

تعریف: دو پیشامد A و B را مستقل گوئیم هرگاه رخ دادن یکی از آنها تاثیری در احتمال وقوع دیگری نداشته

باشد در این صورت: $p(A|B)=p(A)$

اگر دو پیشامد مستقل نباشند آنها را وابسته گوئیم.

توجه: اگر رخ دادن A تاثیری در احتمال وقوع B نداشته باشد آنگاه رخ دادن B نیز تاثیری در احتمال وقوع A ندارد.

توجه: هرگاه A و B دو پیشامد مستقل باشند مهمترین رابطه ای که بین آنها برقرار است رابطه

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B) \text{ می باشد.}$$

توجه: ناسازگار بودن، هیچ رابطه ای با مستقل بودن ندارد به عبارت دیگر اگر A و B ناسازگار باشند:

$$p(A \cap B) = 0 \text{ در صورتیکه } p(A) \times p(B) \neq 0 \text{ بنابراین: } p(A \cap B) \neq p(A) \times p(B)$$

مثال: فرض کنید دو تاس سالم را پرتاب می کنیم. اگر A پیشامد آن باشد که تاس اول ۲ بیاید و B پیشامد آن باشد که تاس دوم ۴ بیاید. مستقل بودن A و B را بررسی کنید.

$$A = \{(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6)\} \rightarrow n(A) = 6 \Rightarrow p(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$B = \{(1,4), (2,4), (3,4), (4,4), (5,4), (6,4)\} \rightarrow n(B)=6 \Rightarrow p(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$A \cap B = \{(2,4)\} \Rightarrow n(A \cap B) = 1 \Rightarrow p(A \cap B) = \frac{1}{36} \Rightarrow$$

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B) \Rightarrow \text{مستقلند } B, A$$

مثال: فرض کنید A و B پیشامدهای مستقل با شرط $p(A) = \frac{1}{4}$ و $p(A \cup B) = 2p(B) - p(A)$ باشند. حاصل $p(B|A)$ را محاسبه کنید.

$$A, B \text{ مستقلند} \Rightarrow p(A \cap B) = p(A) \times p(B),$$

$$p(B|A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{p(A) - p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{p(A)(1 - p(B))}{p(A)} = 1 - p(B)$$

$$p(A \cup B) = 2p(B) - p(A) \Rightarrow p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 2p(B) - p(A)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} + p(B) - \underbrace{p(A)p(B)}_{\frac{1}{4}} = 2p(B) - \frac{1}{4} \Rightarrow p(B) = \frac{2}{5}$$

$$\Rightarrow p(B|A) = 1 - p(B) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

سوال: احتمال آنکه خانم یک خانواده تا ۵۰ سال دیگر زنده بماند $\frac{1}{6}$ و همین احتمال برای آقای خانواده $\frac{1}{8}$ است. تعیین کنید احتمال آنکه:

(الف) تا ۵۰ سال دیگر هر دو زنده بمانند.

(ب) هیچ یک زنده نماند

(ج) حداقل یکی زنده بماند

راهنمایی: $p(\text{هر دو مرده}) = 1 - p(\text{حداقل یکی زنده بماند})$

سوال: احتمال آنکه در خانواده A، فرزندی با رنگ چشم روشن متولد شود ۲۰٪ و احتمال آنکه در خانواده B فرزندی با رنگ چشم روشن متولد شود ۷۵٪ است چقدر احتمال دارد حداقل یکی از این دو نوزاد با چشم هایی به رنگ روشن متولد شود؟

سوال: اگر $p(A) = 0.4$ و $p(B) = 0.6$ و $p(A \cup B) = 0.8$ باشد در این صورت $p(A \cap B')$ را تعیین کنید.

سوال: نشان دهید اگر دو پیشامد A و B مستقل باشند آنگاه A و B' نیز مستقل هستند.

سوال: اگر $p(A) = \frac{1}{4}$ و $p(B) = \frac{1}{3}$ و A و B دو پیشامد ناسازگار باشند مقدار $p(A \cup B)$ را محاسبه کنید.

سوال: اگر $p(A') = \frac{1}{4}$ و $p(B) = \frac{1}{3}$ و A و B دو پیشامد مستقل باشند مقدار $p(A \cup B)$ را محاسبه کنید.

سوال: اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند به طوریکه $p(A) = \frac{2}{5}$ و $p(A \cup B) = \frac{1}{4}$ آنگاه $p(B')$ را بدست آورید.
(نهایی ریاضی (۳) تجربی خرداد ۹۵)

سوال: سکه سالمی را سه بار پرتاب می کنیم اگر A پیشامد برآمدهایی باشد که در آن دومین پرتاب رو است و B پیشامد برآمدهایی باشد که در آن فقط دو رو به صورت متوالی ظاهر شده است. آیا دو پیشامد A و B مستقل هستند؟ چرا؟ (نهایی ریاضی (۳) خرداد ۹۰)

سوال: احتمال آنکه شخص A تا ۲۰ سال دیگر ناراحتی قلبی پیدا کند $0/6$ و احتمال آن که شخص B تا ۲۰ سال دیگر ناراحتی قلبی پیدا کند $0/7$ است. چقدر احتمال دارد: حداقل یکی از آنها تا ۲۰ سال دیگر ناراحتی قلبی پیدا نکند. (نهایی ریاضی (۳) خرداد ۹۶)

سوال: اگر $p(A) = \frac{1}{3}$ و $p(B) = \frac{1}{4}$ و $p(A \cap B) = \frac{1}{4}$ باشند در این صورت $p(B|A) + p(A|B)$ را بدست آورید. (استعدادهای درخشان یادگار ولایت استان فارس خرداد ۹۷)

سوال: احتمال موفقیت عمل پیوند کلیه روی یک بیمار $0/8$ و روی بیمار دیگر $0/5$ است. اگر این عمل روی این دو نفر انجام شود احتمال اینکه روی هیچکدام موفقیت آمیز نباشد چقدر است؟

بیندیشیم:

مادر

اگر چهارتکه نان خوشمزه باشد و شما پنج نفر باشید کسی که اصلاً از مزه آن نان خوشش نمی آید <<مادر>> است برگرفته از داستانی از ویکتور هوگو

نکات کلیدی:

(۱) برای هر پیشامد ناتهی A همواره روابط زیر برقرار است:

$$p(A|A)=1 \quad \text{ج} \quad p(\emptyset|A)=0 \quad \text{ب} \quad p(A|A')=0 \quad \text{الف}$$

(۲) اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه ای S باشند با شرط $B \neq \emptyset$ همواره داریم:

$$P(A'|B) = 1 - p(A|B)$$

(۳) اگر A و B و C سه پیشامد از فضای نمونه ای S باشند بطوریکه: $p(C) > 0$ آنگاه:

$$۱) p((A \cup B)|C) = p(A|C) + p(B|C) - p((A \cap B)|C)$$

$$۲) p((A - B)|C) = p(A|C) - p((A \cap B)|C)$$

(۴) در یک خانواده n فرزندی احتمال آن که دقیقا K فرزند پسر (دختر) باشد از فرمول $\frac{\binom{n}{k}}{2^n}$ بدست می آید (از این فرمول زمانی می توان استفاده کرد که تولد دختر و پسر هم شانس باشند و ترتیب فرزندان بیان نشود)

(۵) اعضای فضای نمونه ای در پرتاب n تاس برابر 6^n است.

(۶) اگر دو تاس باهم در صورت سوال باشند یعنی در مورد مجموع، تفاضل و ... سوال شود بایستی با نوشتن اعضای پیشامد تعداد آن را به دست آوریم.

(۷) از پیشامد متمم معمولا وقتی استفاده می کنیم که تعداد اعضای پیشامد مورد نظر سوال زیاد باشد در اینصورت متمم پیشامد مورد نظر را نوشته، احتمال آن را حساب می کنیم و حاصل را از یک کم میکنیم.

(۸) اگر A و B پیشامدهای ناسازگار باشند آنگاه:

$$p(A|B) = 0$$

$$۹) p(A \cap B) = p(B|A) p(A) \text{ یا } p(A \cap B) = p(A|B) p(B)$$

توجه: نکته شماره ۹ به قانون دوم «بیز» معروف است و زمانی کاربرد دارد که هدف محاسبه $p(B|A)$ باشد ولی $p(A|B)$ جزو داده های مسئله بوده یا محاسبه آن آسان است و یا برعکس.

(۱۰) هرگاه A و B مستقل باشند آنگاه A و B' هم مستقل اند همینطور A' و B مستقلند.

(۱۱) هرگاه A و B مستقل باشند آنگاه A' و B' هم مستقل اند.

(۱۲) در حالت کلی انتخاب هایی که با جایگذاری انجام می شوند مستقل هستند.

(۱۳) سه پیشامد A, B, C را مستقل گوئیم هرگاه دو به دو مستقل بوده و احتمال رخداد هر سه برابر با ضرب احتمال رخداد تک تک آنها باشد به عبارت دیگر:

$$P(A \cap B \cap C) = p(A)p(B)p(C)$$

ببیندیشیم:

راز زندگی

پسر جوانی به پیرمردی نزدیک شد. چشم در چشمش دوخت و به او گفت: من میدانم که شما خیلی خیلی آدم عاقل و موفقی هستید. دلم میخواهد راز زندگی را از زبان خود شما بشنوم.

پیرمرد نگاهی به پسر انداخت و جواب داد: من سرد و گرم زندگی را بسیار چشیده ام و به این نتیجه رسیده ام که راز زندگی در چهار کلمه خلاصه میشود:

۱- اولین کلمه "اندیشیدن" است یعنی همیشه به ارزشهایی فکر کن که دلت میخواهد زندگی ات را بر پایه آنها بسازی.

۲- دومین کلمه "باور داشتن" است یعنی وقتی همه آن ارزش ها را مشخص کردی حالا خودت را باور کن.

۳- سومین کلمه "درس داشتن رؤیا" است یعنی رؤیای رسیدن به خواسته هایت را در سر داشته باش.

۴- چهارمین و آخرین کلمه "شهامت" است یعنی وقتی خودت را باور کردی و به ارزش وجودی خودت کاملاً پی بردی حالا نوبت به آن میرسد که باشهامت هر چه تمام تر رؤیاهایت را به واقعیت تبدیل کنی.

آن پیرمرد کسی جز "والث دیسنی" بنیانگذار شرکت بزرگ و موفق دیسی لندن نبود.

تست:

۱) احتمال موفقیت عمل جراحی برای شخص A برابر $0/9$ و برای شخص B برابر $0/8$ است. با کدام احتمال لااقل عمل جراحی برای یکی از این دو نفر موفقیت آمیز است؟ (کنکور تجربی ۹۵)

- (۱) $0/92$ (۲) $0/94$ (۳) $0/96$ (۴) $0/98$

پاسخ: گزینه ۴

راهنمایی: A و B مستقلند.

۲) اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه ای S باشند به طوریکه $A \subseteq B$ و $p(A) = \frac{1}{3}$ و $p(B) = \frac{2}{4}$ آنگاه $p(B|A')$ کدام است؟ (سراسری ریاضی ۹۰ خارج)

- (۱) $\frac{3}{8}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{7}{12}$ (۴) $\frac{5}{8}$

پاسخ: گزینه ۴ راهنمایی: $A \subseteq B \Rightarrow p(A \cap B) = p(A)$

۳) دوتاس همگن را پرتاب کرده ایم. اگر حاصل جمع شماره های رو شده کمتر از ۶ باشد احتمال آنکه شماره یکی از تاس های رو شده ۲ باشد کدام است؟ (کنکور ریاضی ۹۱)

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{2}{5}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{3}{5}$

شماره یکی از تاس ها ۲ باشد: A

حاصل جمع شماره های رو شده کمتر از ۶: B

$$B: \{ (1,1), (1,2), (2,1), (1,3), (2,2), (3,1), (1,4), (2,3), (3,2), (4,1) \}$$

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

۴) یک تاس همگن را انداخته ایم. برآمد حاصل مضرب ۳ نیست. احتمال آنکه شماره ظاهر شده ۲ باشد کدام است؟ (کنکور ریاضی ۸۶)

- (۱) $\frac{1}{6}$ (۲) $\frac{1}{5}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{3}$

پاسخ: گزینه ۳ مثل تست قبل حل کنید.

۵) تاس همگن را با چشم بسته انداخته ایم و فقط میدانیم که برآمد عدد زوج است. احتمال اینکه شماره ۴ یا ۶ ظاهر شده باشد کدام است؟ (کنکور خارج ریاضی ۹۱)

- (۱) $\frac{1}{6}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{3}{4}$

شبیه تست ۳

پاسخ: گزینه ۳

۶) اگر $p(A|B) = 0.6$ و $p(A) = 0.4$ و $p(B) = 0.5$ ، $p(B|A)$ کدام است؟

- (۱) 0.3 (۲) 0.45 (۳) 0.6 (۴) 0.75

پاسخ: گزینه ۴ از نکته شماره ۹ استفاده کنید.

۷) دو تاس را باهم می ریزیم. در حالی که حداقل عدد یک تاس مضرب ۳ نباشد با کدام احتمال جمع دو عدد روشده مضرب ۳ است؟

- (۱) $\frac{2}{9}$ (۲) $\frac{5}{18}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{5}{12}$

مضرب ۳ باشد: A

$$\Rightarrow n(A) = \underset{\text{تاس اول}}{\textcircled{2}} \times \underset{\text{تاس دوم}}{\textcircled{2}} = 4 \Rightarrow n(A') = 36 - 4 = 32$$

جمع دو عدد مضرب ۳ و خودشان مضرب ۳ نباشند $(2,4), (1,5), (5,1), (1,2), (2,1): A' \cap B$
 $\rightarrow n(A' \cap B) = 8$

$$p(B|A') = \frac{n(A' \cap B)}{n(A)} = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$$

توجه: B را جمع دو عدد مضرب ۳ باشد در نظر گرفتیم که نیازی به نوشتن مجموعه اش نیست.

۸) احتمال موفقیت فردی در آزمون اول ۰/۷ و در آزمون دوم ۰/۶ است. اگر این فرد در آزمون اول موفق شود احتمال موفقیت وی در آزمون دوم ۰/۸ است. با کدام احتمال لااقل در یکی از این دو آزمون موفق میشود؟ (کنکور تجربی ۹۸)

$$0.74(1) \quad 0.76(2) \quad 0.82(3) \quad 0.84(4)$$

پاسخ: گزینه ۱

تمریناتی برای تلاش بیشتر:

(۱) یک فضای نمونه S متشکل از چهار برآمد d و c و b و a است و $p(c)=p(d)=\frac{1}{6}$ و $p(a)=p(b)=\frac{1}{3}$ مطلوبست:

الف) محاسبه $p(\{a,b,c\})$ ب) محاسبه $p(\{a,b,c\} | \{b,c,d\})$

پاسخ: الف: $\frac{5}{6}$ و ب: $\frac{3}{4}$

(۲) اگر یک عدد چهار رقمی کمتر از ۵۰۰۰ به طور تصادفی با ارقام ۱، ۳، ۵، ۷، ۹ به وجود آید، احتمال بخش پذیر بودن آن را بر عدد ۵ بیابید. (تکرار ارقام مجاز نیست)

پاسخ: $\frac{1}{4}$ راهنمایی: در بدست آوردن $n(A)$ از طریق جایگشت به کمتر از ۵۰۰۰ همچنین به بخش پذیر بودن بر ۵ توجه کنید حال آنکه در بدست آوردن $n(S)$ فقط به کمتر از ۵۰۰۰ توجه کنید.

(۳) اگر A و B دو پیشامد ناسازگار فرض شوند به طوریکه $p(A)=\frac{1}{4}$ و $p(B)=\frac{1}{2}$ مطلوبست محاسبه $p(B|A')$

پاسخ: $\frac{2}{3}$ راهنمایی: $p(B|A') = 1 - p(B|A)$

(۴) نشان دهید اگر $p(A)=\frac{3}{4}$ و $p(B)=\frac{3}{8}$ آنگاه A و B نمی توانند دو پیشامد ناسازگار باشند.

(۵) دو پیشامد A و B مستقلند و $p(A-B)=\frac{1}{3}$ و $p(B-A)=\frac{1}{6}$ در اینصورت $p(A \cup B)$ را محاسبه کنید.

راهنمایی: با استفاده از داده های مساله درجه ۲ براساس $p(A \cap B) = x$ بسازید و ادامه دهید.

درس دوم : آمار توصیفی:

معیارهای گرایش به مرکز: (شاخص های مرکزی)

معیارهایی هستند که محل تمرکز داده ها را نشان میدهند. در واقع اعدادی هستند که به وسیله آنها می توان یک ایده کلی درباره ویژگی مورد مطالعه بدست آورد.

به عبارت دیگر این معیارها نشان میدهند که داده های حاصل از یک بررسی یا مطالعه در ارتباط باهم و یا به طور متوسط چه وضعی دارند.

این معیارها عبارتند از: ۱- میانگین (mD) ۲- میانه (me) ۳- مُد یا نما (mo)

میانگین:

متداولترین معیار گرایش به مرکز می باشد که همانگونه که از اسمش پیداست مرکز ثقل داده هاست و از

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N} \text{ فرمول محاسبه میشود.}$$

توجه: عموماً برای نشان دادن مجموع داده ها از حرف یونانی Σ (سیگما) استفاده می شود:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N}$$

توجه: در هر جامعه آماری فقط یک میانگین وجود دارد و کلیه مقادیر متغیر در مقدار میانگین تاثیر دارند.

توجه: اگر داده ها برابر باشند میانگین آنها همین مقدار است یعنی داده ای که تکرار می شود.

$$\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x}) = 0 \text{ : همواره داریم}$$

توجه: هرگاه داده ها را با عدد ثابت a جمع کنیم میانگین جدید برابر میانگین قبلی به اضافه a خواهد بود یعنی:

اگر داده ها: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ را در نظر گرفته و میانگین آنها برابر $\bar{x}$ باشد. میانگین داده های $y_1, y_2, \dots, y_n$ که $y_i = x_i + a$ برابر است با: $\bar{x} + a$

توجه: هر گاه داده ها را در عدد ثابت a ضرب کنیم میانگین داده های جدید نیز a برابر میانگین داده های قبلی می شود به عبارت دیگر:

$$x_1, x_2, \dots, x_n \Rightarrow \text{میانگین} = \bar{x} \xrightarrow{y_i = ax_i} y_1, y_2, \dots, y_n \Rightarrow \bar{y} = a \bar{x}$$

مثال: میانگین ۱۲ داده آماری برابر است با ۱۴، اگر دفتردار به اشتباه نمره ۱۸ آن داده ها را ۸ خوانده باشد مطلوبست محاسبه میانگین واقعی آن داده ها.

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{12} \Rightarrow \sum x_i = 14 \times 12 = 168$$

$$\Rightarrow \frac{168 + 10}{12} = \frac{178}{12} \cong 14/83 \text{ میانگین واقعی}$$

مثال: میانگین ۱۳ داده آماری برابر است با ۱۵، اگر ۱۲ و ۱۶ به داده ها اضافه شوند میانگین چه تغییری می کند؟

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{13} \Rightarrow \sum x_i = 13 \times 15 = 195$$

$$\Rightarrow \frac{\sum x_i + 12 + 16}{15} = \frac{195 + 28}{15} = \frac{223}{15} \cong 14/86 \text{ میانگین با } 12 \text{ و } 16$$

سوال: اگر میانگین داده های a و b و c مقدار K باشد میانگین داده های $2a+3$ ، $2b+3$ ، $2c+3$ را تعیین کنید.

توجه: داده های خیلی بزرگ و خیلی کوچک در میانگین تاثیر گذارند.

سوال: میانگین یک سری داده برابر ۵ است. اگر تمام داده ها را ۳ برابر کرده و سپس از هر کدام ۲ واحد کم کنیم میانگین داده های جدید را محاسبه کنید.

سوال: اگر میانگین داده های $3x_i + 5$ که ($i=1, 2, \dots, 10$) برابر ۱۴ باشد میانگین داده های $\frac{4}{5}x_i - 2$ ($i=1, 2, \dots, 10$) را محاسبه کنید.

پاسخ: $\frac{2}{5}$

سوال: میانگین نمرات یک کلاس ۲۵ نفری در درس آمار و احتمال برابر $16/5$ است جمع نمرات دانش آموزان این کلاس را بدست آورید.

سوال: میانگین داده های زیر برابر ۱۲ است. مقدار a را محاسبه کنید.

$$9 \text{ و } 15 \text{ و } 18 \text{ و } 14 \text{ و } a \text{ و } 15 \text{ و } 12 \text{ و } 10 \text{ و } 9 \text{ و } 4$$

میانہ: عبارت است از مقداری که تعداد داده های بعد از آن برابر تعداد داده های قبل از آن باشد. برای محاسبه میانہ ابتدا داده ها را به صورت صعودی مرتب می کنیم آنگاه اگر تعداد داده ها فرد باشد داده وسط میانہ است و اگر تعداد داده ها زوج باشد میانگین دو داده وسط میانہ است.

توجہ: در هر جامعه آماری فقط یک میانہ وجود دارد.

توجہ: میانہ ممکن است متعلق به جامعه نباشد یعنی با هیچکدام از اعضای جامعه برابر نباشد.

توجہ: اگر تمام داده های یک مجموعه آماری برابر باشند میانہ نیز برابر هر یک از داده هاست.

داده دور افتاده یا پرت: داده ای است که نسبت به سایر داده ها تفاوت بسیار دارد.

توجہ: میانہ تحت تاثیر بزرگی یا کوچکی داده ها نیست.

توجہ: اگر در داده های آماری داده دور افتاده وجود داشته باشد میانہ به دلیل اینکه تحت تاثیر داده های پرت نیست نسبت به میانگین معیار مناسبتری است پس در چنین مواردی از میانہ استفاده می کنیم.

توجہ: به میانہ چارک دوم (Q_2) هم گفته می شود.

سوال: در هر کدام از حالت های زیر میانہ را محاسبه کنید.

الف) ۵ و ۷ و ۱ و ۳ و ۴ و ۲ (الف)

ب) ۱ و ۶ و ۲ و ۵ و ۴ و ۲ و ۱ و ۳ (ب)

مُد (نما): در یک مجموعه داده های آماری هر داده که نسبت به بقیه داده ها تکرار بیشتری داشته باشد مُد نامیده می شود.

توجہ: مد یکتا نیست، ممکن است یک مجموعه داده های آماری بیش از یک مد داشته باشد.

توجہ: اگر تمام داده های یک مجموعه داده های آماری برابر باشند این داده ها مد ندارند.

توجہ: مد تحت تاثیر تکرار اعداد است.

سوال: در هر یک از حالت های زیر مد را بیابید.

$\Rightarrow ۷ و ۲ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱ و ۳ و ۲$ (الف)

$\Rightarrow ۴ و ۵ و ۳ و ۷ و ۴ و ۱ و ۱$ (ب)

دامنه میان چارکی: اگر برای داده های مرتب شده قبل از میانه، یک میانه حساب کنیم چارک اول یا Q_1 محاسبه می شود و اگر برای داده های مرتب شده بعد از میانه، یک میانه حساب کنیم چارک سوم یا Q_3 محاسبه می شود. تفاضل این دو چارک یعنی $Q_3 - Q_1$ دامنه میان چارکی است که داده های دور افتاده در آن تاثیری ندارند و به همین دلیل کارایی بیشتری نسبت به دامنه تغییرات دارد.

توجه: اگر داده ها را از کوچک به بزرگ مرتب کنیم آنگاه ۲۵ درصد آنها کوچکتر یا مساوی Q_1 و ۷۵ درصد آنها بزرگتر یا مساوی Q_1 هستند.

توجه: اگر داده ها را از کوچک به بزرگ مرتب کنیم ۵۰ درصد آنها کوچکتر یا مساوی Q_2 و ۵۰ درصد آنها بزرگتر یا مساوی Q_2 قرار دارند.

توجه: اگر داده ها را از کوچک به بزرگ مرتب کنیم ۷۵ درصد آنها کوچکتر یا مساوی Q_3 و ۲۵ درصد آنها بزرگتر یا مساوی Q_3 می باشند.

سوال: داده های ۱۲ و ۹ و ۵ و ۲ و ۳ و ۷ و ۴ و ۱ و ۲ را در نظر بگیرید و مجموع چارک های آنها را محاسبه کنید.

سوال: داده های ۲۰ و ۱۱ و ۹ و ۱۵ و ۳ و ۲ و ۱ و ۵ و ۱۲ و ۷ را در نظر بگیرید و میانگین داده های بزرگتر از چارک اول و کوچکتر از چارک سوم را محاسبه کنید.

واریانس یا پراش:

تغییر زمانی معنی می یابد که هریک از داده ها نسبت به یک مرکز مقایسه شوند و بهترین مرکز برای داده ها میانگین است و آن شاخص پراکندگی که با میانگین ارتباط دارد واریانس نام دارد که از رابطه $\sigma^2 =$

$$\text{بدست می آید که آن را به } \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

صورت $\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}$ هم نشان میدهند.

بنابراین برای محاسبه واریانس: باید ابتدا میانگین داده ها را محاسبه کنیم سپس اختلاف هر داده با میانگین را محاسبه کرده به توان ۲ رسانده و در نهایت میانگین اعداد حاصل را بدست آوریم.

توجه: هرگاه مجموع مجذور داده ها مشخص باشد از فرمول زیر برای محاسبه واریانس استفاده می کنیم: $\sigma^2 =$

$$\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \bar{x}^2$$

سوال: واریانس داده های ۱۲ و ۱۰ و ۸ و ۵ و ۲ را محاسبه کنید.

سوال: اگر مجموع مجذور ۵ داده برابر ۱۳۰ باشد و جمع ۵ داده برابر ۱۵ باشد واریانس داده ها را حساب کنید.

توجه: اگر همه داده های آماری را با عددی جمع یا تفریق کنیم واریانس تغییری نمی کند.

توجه: اگر تمام داده ها باهم برابر باشند واریانس صفر خواهد شد و برعکس.

توجه: واحد واریانس مجذور واحد متغیر داده هاست یعنی اگر داده ها بر حسب سانتی متر باشند واحد واریانس سانتی متر مربع است.

توجه: اگر همه داده های آماری در عددی ضرب یا بر عددی تقسیم شوند واریانس در مجذور آن عدد ضرب یا بر مجذور آن عدد تقسیم می شود.

توجه: اگر واریانس داده های $X_1, X_2, \dots, X_n$ برابر σ^2 باشد واریانس داده های $ax_1+b, ax_2+b, \dots, ax_n+b$ برابر $a^2\sigma^2$ خواهد بود.

مثال: اگر واریانس داده های $X_1, X_2, \dots, X_{12}, 16$ برابر صفر باشد مطلوبست محاسبه میانگین داده های

$$X_1, X_2, \dots, X_9, 15, 17$$

چون واریانس صفر شده است یعنی همه داده ها برابرند و چون همه داده ها برابرند میانگین برابر هر یک از داده هاست: $\bar{x} = 16$

$$\bar{y} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_9 + 15 + 17}{11} = \frac{16 \times 9 + 15 + 17}{11} = \frac{176}{11} = 16$$

سوال: اگر واریانس داده هایی برابر ۱۲ و میانگین آنها ۵ باشد و داده ها را ۲ برابر کنیم و هریک را با ۳ جمع کنیم واریانس چه تغییری می کند؟ میانگین چه تغییری می کند؟

انحراف معیار:

جذر واریانس را انحراف معیار می نامند.

توجه: اگر تمام داده ها باهم برابر باشند انحراف معیار صفر است و برعکس.

توجه: اگر همه داده ها را با عدد ثابتی جمع یا تفریق کنیم انحراف معیار تغییر نمی کند.

توجه: اگر تمام داده ها را در عدد ثابتی مانند a ضرب یا تقسیم کنیم انحراف معیار آن در $|a|$ ضرب یا تقسیم می شود.

توجه: داده های دور افتاده (پرت) در انحراف معیار تاثیر گذارند.

سوال: اگر انحراف معیار داده های آماری $X_1, X_2, \dots, X_{16}$ برابر صفر باشد میانگین

$X_1, X_2, \dots, X_{27}$ را بیابید.

سوال: انحراف معیار داده های ۴ و ۳ و ۵ و ۱ و ۲ را محاسبه کنید.

ضریب تغییرات:

خارج قسمت انحراف معیار بر میانگین را ضریب تغییرات می نامند و با $C.V$ نشان می دهند.

توجه: چون ضریب تغییرات واحد اندازه گیری ندارد برای مقایسه دو یا چند جامعه آماری که واحد اندازه گیری داده های آنها متفاوت است و همچنین برای مقایسه دو یا چند جامعه آماری که واریانس های برابر ولی میانگین های متفاوت داشته باشند استفاده می شود.

توجه: اگر همه داده های آماری باهم برابر باشند ضرایب تغییرات برابر صفر است و برعکس.

توجه: اگر همه داده های آماری را در یک عدد مثبت ضرب و یا بر یک عدد مثبت تقسیم کنیم ضریب تغییرات تغییری نمی کند.

توجه: اگر به همه داده ها یک مقدار مثبت اضافه کنیم ضریب تغییرات کوچک می شود.

توجه: هر چه ضریب تغییرات داده ها کمتر باشد پراکندگی داده ها کمتر است.

سوال: ضریب تغییرات داده های ۴ و ۳ و ۱ و ۲ و ۵ را محاسبه کنید.

سوال: در تعدادی داده آماری با میانگین ۱۲ و انحراف معیار ۳ تمام داده ها را در ۲ ضرب و ۵ واحد به آن ها اضافه می کنیم ضریب تغییرات جدید را محاسبه کنید.

نکات کلیدی:

۱- هرگاه داده های $X_1, X_2, \dots, X_n$ تشکیل تصاعد عددی دهند میانگین آنها از رابطه

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_n}{2} \text{ بدست می آید.}$$

۲- هرگاه داده های $X_1, X_2, \dots, X_n$ دارای فراوانی های $f_1, f_2, \dots, f_n$ باشند در اینصورت میانگین از فرمول زیر محاسبه می شود. این میانگین به میانگین وزن دار معروف است.

$$\bar{x} = \frac{f_1 x_1 + f_2 x_2 + \dots + f_n x_n}{f_1 + f_2 + \dots + f_n} = \frac{\sum_{i=1}^n f_i x_i}{\sum_{i=1}^n f_i} = \frac{\sum_{i=1}^n f_i x_i}{N} \quad (N \text{ کل داده هاست.})$$

توجه: هرگاه جدول توزیع به صورت حدود طبقات باشد (مثلا از ۵-۲ تعداد ۴ باشد) در این صورت در فرمول فوق X_i ها همان مرکز دسته ها می باشند که مرکز دسته همان میانگین ابتدا و انتهای طبقه است.

۳- میانگین یک معیار فاصله ای است.

۴- اگر دو یا چند گروه از یک مجموعه داده های آماری با اندازه های متفاوت دارای میانگین مشخصی باشند میانگین کل از فرمول $\frac{m\bar{x} + n\bar{y}}{m+n}$ بدست می آید که به میانگین مرکب معروف است به عنوان مثال میانگین ۵ داده آماری برابر ۸ و میانگین ۹ داده دیگر ۱۱ است. میانگین کل داده ها از این فرمول محاسبه می شود.

۵- میانه یک معیار ترتیبی است.

۶- میانه تحت تاثیر ارزش عددی تمام اده ها قرار ندارد.

۷- اگر داده ها را k برابر کنیم میانه نیز k برابر می شود.

۸- برای داده های کیفی فقط مد را می توان تعیین نمود.

۹- مد یک معیار اسمی است.

۱۰- در معیارهای گرایش به مرکز بطور کلی برای برنامه ریزی و تصمیم گیری میانگین بهتر از میانه و مد است ولی وقتی با داده پرت در داده ها سروکار داریم میانه گزینه بهتری است.

۱۱- اگر داده های $X_1, X_2, \dots, X_n$ تشکیل دنباله حسابی با قدر نسبت d بدهند آنگاه واریانس از فرمول

$$\sigma^2 = \frac{d^2(n^2-1)}{12} \text{ محاسبه می شود.}$$

۱۲- داده های دور افتاده در واریانس تاثیر گذار هستند.

۱۳- اگر داده های آماری دارای تکرار باشند یا آنکه به صورت دسته در یک جدول فراوانی باشند واریانس از فرمول

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_i(x_i - \bar{x})^2}{\sum f_i}$$

(x_i در جدول مرکز هر دسته می باشد.) محاسبه میشود

۱۴- واحد انحراف معیار از نوع واحد متغیر است.

۱۵- انحراف معیار عدد ثابت، صفر است مثلاً انحراف معیار ۷ صفر است.

۱۶- برای مقایسه عملکرد دو گروه عملکرد گروهی بهتر است که ضریب تغییرات پائینتری داشته باشد.

در آغوش خدا

بیندیشیم:

خواب دیده بود در ساحل دریا در حال قدم زدن با خداست. در پهنه ای از آسمان صحنه هایی از زندگی اش به نمایش درآمد. متوجه شد که در هر صحنه جای پای دونفر درماسه های ساحل فرو رفته است: یکی جای پای او و دیگری جای پای خدا.

وقتی به جای پاها دقت کرد متوجه شد دقیقاً در مواقع سخت و ناراحت کننده فقط یکجای پا وجود داشته! این موضوع او را رنجاند و از خدا سوال کرد: "خدایا! تو گفتی چنانچه تصمیم بگیرم که با تو باشم، همیشه همراه من خواهی بود؛ ولی متوجه شدم که در لحظه های سخت زندگی، تنهایم گذاشته ای!" و خدا چنین پاسخ داد:

"بنده عزیزم من تو رو دوست دارم. هرگز تنهایت نگذاشته ام. زمانی که تو در آزمایش بودی فقط یک جای پا میدیدی این درست زمانی بود که من تو را در آغوش خود گرفته بودم." او با شنیدن این پاسخ زانو زد و گریست....

تست:

۱- در ۳۰ داده آماری، مجموع تمام داده ها برابر ۲۴۰ و مجموع مربعات این داده ها ۲۱۹۰ است. ضریب تغییرات کدام است؟ (کنکور تجربی خارج ۹۵)

$$۰/۳۷۵ \quad (۴)$$

$$۰/۳۲۵ \quad (۳)$$

$$۰/۲۷۵ \quad (۲)$$

$$۰/۲۲۵ \quad (۱)$$

$$\bar{x} = \frac{240}{30} = 8, \sigma^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} - (\bar{x})^2 = \frac{2190}{30} - 8^2 = 73 - 64 = 9$$

$$\Rightarrow \sigma = 3 \Rightarrow C.V = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{3}{8} = 0.375$$

۲- میانگین اضلاع مربع هایی برابر ۸ و میانگین مساحت آن ها ۶۵/۴۴ است ضریب تغییرات در طول اضلاع این مربع ها کدام است؟ (کنکور تجربی خارج ۹۴)

$$۰/۲۵ \quad (۴)$$

$$۰/۲ \quad (۳)$$

$$۰/۱۵ \quad (۲)$$

$$۰/۱۲ \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۲ راهنمایی: میانگین مساحت ها همان $\frac{\sum x_i^2}{n}$ است و مشابه تست بالا ادامه دهید.

۳- میانگین محیط مربع هایی برابر ۸۴ و میانگین مساحت این مربع ها ۴۹۰ می باشد ضریب تغییرات در طول ضلع این مربع ها کدام است؟ (کنکور تجربی خارج ۹۲)

$$۰/۳۳ \quad (۴)$$

$$۰/۲۸ \quad (۳)$$

$$۰/۲۷ \quad (۲)$$

$$۰/۲۵ \quad (۱)$$

$$\bar{p} = 84 \Rightarrow 4\bar{x} = 84 \Rightarrow \bar{x} = 21 \Rightarrow \sigma^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2 = 490 - 441 = 49$$

$$\Rightarrow \sigma = 7 \Rightarrow C.V = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{7}{21} = \frac{1}{3} \cong 0.33$$

۴- در ۱۵۰ داده آماری با میانگین ۱۲، به دو برابر هر یک از داده ها ۳ واحد اضافه می کنیم تا داده های جدیدی حاصل شود. ضریب تغییرات داده های جدید چند برابر ضریب تغییرات داده های قبلی است؟ (کنکور تجربی ۹۲)

$$\frac{8}{9} \quad (۴)$$

$$\frac{7}{8} \quad (۳)$$

$$\frac{5}{6} \quad (۲)$$

$$\frac{7}{9} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۴ راهنمایی: نسبت $\frac{CV \text{ جدید}}{CV \text{ قدیم}}$ را محاسبه کنید.

۵- در جدول فراوانی زیر، واریانس داده ها کدام است؟ (کنکور تجربی خارج ۹۰)

مرکز دسته	12	15	18	21	24
فراوانی	4	3	9	7	2

$$12/36 \text{ (۴)}$$

$$12/24 \text{ (۳)}$$

$$11/96 \text{ (۲)}$$

$$11/72 \text{ (۱)}$$

پاسخ: گزینه ۳ راهنمایی: از نکته شماره ۲ و ۱۳ استفاده کنید. می توانید از هر کدام از مرکز دسته ها ۱۱ واحد کم کنید تا با اعداد کوچکتری کار کنید.

۶- در ۲۵ داده آماری، میانگین و انحراف معیار به ترتیب ۳۰ و ۸ است. اگر داده های ناچور ۱۰، ۱۵، ۴۵، ۵۰ از بین آنها حذف شوند، واریانس داده های باقی مانده، تقریباً کدام است؟ (کنکور تجربی ۹۳)

$$16/66 \text{ (۴)}$$

$$15/33 \text{ (۳)}$$

$$14/81 \text{ (۲)}$$

$$14/72 \text{ (۱)}$$

$$\bar{x} = \frac{25 \times 30 - (50 + 45 + 15 + 10)}{25 - 4} = \frac{750 - 120}{21} = \frac{630}{21} = 30$$

$$\sigma^2 = 8^2 = 64 \Rightarrow (\sigma')^2 = \frac{64 \times 25 - [(10 - 30)^2 + (15 - 30)^2 + (45 - 30)^2 + (50 - 30)^2]}{25 - 4}$$

$$= \frac{1600 - 1250}{21} = 16/66$$

۷- میانگین و انحراف معیار ۱۸ داده آماری به ترتیب ۲۵ و ۳ است. اگر داده های ۲۰، ۲۷، ۲۸ به آنان افزوده شود، واریانس ۲۱ داده جدید کدام است؟ (کنکور تجربی خارج ۹۳)

$$9/63 \text{ (۴)}$$

$$9/52 \text{ (۳)}$$

$$9/36 \text{ (۲)}$$

$$9/25 \text{ (۱)}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} \Rightarrow 9 = \frac{\sum (x_i - 25)^2}{18} \Rightarrow \sum (x_i - 25)^2 = 162$$

از آنجا که میانگین سه داده آماری اضافه شده برابر ۲۵ می باشد $(\frac{20 + 27 + 28}{3})$ بنابراین میانگین داده های جدید همان ۲۵ است.

$$(\sigma')^2 = \frac{\sum (x_i - 25)^2}{21} = \frac{162 + 25 + 4 + 9}{21} = \frac{200}{21} \approx 9.5$$

۸- ضریب تغییرات در داده های آماری زیر با فراوانی تجمعی داده شده کدام است؟ (کنکور تجربی ۹۶)

مرکز دسته	6	8	10	12	14
فراوانی تجمعی	7	16	33	44	50

۰/۲۸ (۴)

۰/۲۴ (۳)

۰/۱۸ (۲)

۰/۱۶ (۱)

پاسخ: گزینه ۳ راهنمایی: ابتدا جدول را بر اساس فراوانی مطلق بازنویسی کنید سپس از نکته ۲ و ۱۳ استفاده کنید.

۹- در ۲۵ داده آماری مجموع تمام داده ها ۲۷۵ و مجموع مربعات آن ها ۳۲۵۰ می باشد ضریب تغییرات در این داده ها کدام است؟ (کنکور ریاضی خارج ۹۶)

۰/۲۷۲۷ (۴)

۰/۲۶۷۲ (۳)

۰/۲۶۴۵ (۲)

۰/۲۵۷۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۴ راهنمایی: شبیه تست ۱

۱۰- داده های $x_i = 1, 2, 3, 4, 5$ مفروض است. ضریب تغییرات $u_i = 12x_i + 6$ کدام است؟ (کنکور ریاضی ۹۵)

۰/۶ (۴)

۰/۵۲ (۳)

۰/۴۸ (۲)

۰/۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۱ راهنمایی: میانگین و انحراف معیار ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱ را محاسبه کنید و سپس تغییرات را اعمال کنید.

۱۱- میانگین طول اضلاع مربع هایی ۱۲ و واریانس آنها ۵ است. میانگین مساحت این مربع ها کدام است؟ (کنکور ریاضی خارج ۹۲)

- (۱) ۱۲۴ (۲) ۱۳۴ (۳) ۱۴۹ (۴) ۱۶۹

پاسخ: گزینه ۳ راهنمایی: در فرمول $\sigma^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2$ باید $\frac{\sum x_i^2}{n}$ را محاسبه کنید.

۱۲- در ۱۲ داده آماری مجموع تمام داده ها ۷۲ و مجموع مجذورات آنها ۴۸۰ است. ضریب تغییرات این داده ها کدام است؟ (کنکور ریاضی ۹۲)

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{2}{9}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{2}{5}$

پاسخ: گزینه ۳ راهنمایی: مشابه تست شماره ۱

۱۳- در مجموعه اعداد $\{X, ۶۴, ۶۵, ۶۶, ۷۰, ۷۷, ۸۰, ۸۳\}$ به ازای کدام مقدار X شاخص های میانگین، مد، میانه برابر هم هستند؟ (کنکور ریاضی خارج ۹۳)

- (۱) ۶۴ (۲) ۶۵ (۳) ۶۶ (۴) نشدنی

مد داده ها، آن داده ای است که بیشترین تکرار را دارد پس X برابر کدام از داده های دیگر که باشد آن داده بیشترین تکرار را دارد. اگر داده ها را بدون X مرتب کنیم داریم: ۷۷ و ۷۰ و ۶۶ و ۶۵ و ۶۴ و ۶۳ و ۵۰ چون تعداد داده ها با احتساب X برابر ۸ تا است پس میانه برابر نصف مجموع دو داده وسط است. اگر X داده چهارم یا پنجم نباشد میانه برابر $\frac{۶۴+۶۵}{۲} = ۶۴/۵$ می شود که نمی تواند با مد داده ها یکسان شود زیرا $۶۴/۵$ در داده ها نداریم که بیشترین تکرار را داشته باشد پس قطعاً X یکی از دو داده وسط است. بنابراین $X=۶۵$ (میانگین داده ها برابر ۶۵ می شود)

۱۴- واریانس ۱۱ داده آماری صفر است. اگر داده های ۲۴، ۱۶، ۲۶ به آن اضافه شود میانگین داده ها تغییر نمی کند انحراف معیار ۱۴ داده حاصل کدام است؟ (کنکور ریاضی خارج ۹۱)

۲ (۴)

۱/۵ (۳)

۱/۲۵ (۲)

۰/۷۵ (۱)

چون واریانس برابر صفر است نتیجه می گیریم تمام داده ها باهم برابرند و چون با افزودن ۲۴، ۱۶، ۲۶ میانگین تغییری نمی کند. میانگین این ۳ عدد برابر با هر کدام از یازده داده قبلی است:

$$\bar{x} = \frac{24+16+26}{3} = 22$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = \frac{(16-22)^2 + (24-22)^2 + (26-22)^2}{11} = 4 \Rightarrow \sigma = 2$$

۱۱ عدد

۱۵- در یک کارگاه دو گروه مشغول کار هستند میانگین نمرات مسئولیت پذیری در گروه اول به ترتیب ۲۵ و ۸۰ و در گروه دوم ۷۲ و ۱۶ می باشد. کدام گروه بهتر است؟

(کنکور تجربی ۹۸)

۴) اظهار نظری نمیتوان کرد

۳) یکسان

۲) گروه دوم

۱) گروه اول

پاسخ: گزینه ۲

تمریناتی برای تلاش بیشتر:

(۱) به ازای چه مقدار از a ، داده های $a+6$ ، $a+2$ ، $a+1$ ، $a-1$ دارای میانگین و واریانس یکسان هستند؟

پاسخ: $\frac{18}{4}$ راهنمایی: برای محاسبه واریانس a واحد از همه داده ها کم کنید و سپس واریانس را محاسبه و برابر میانگین داده ها قرار دهید.

(۲) انحراف از میانگین داده هایی را محاسبه کردیم و داده های a و 4 و 3 و 2 و -2 بدست آمدند. واریانس داده ها را محاسبه کنید.

پاسخ: $\frac{82}{5}$ راهنمایی: میدانیم مجموع انحراف از میانگین داده ها برابر صفر است پس a بدست می آید. واریانس هم که مجموع مربعات انحراف از میانگین تقسیم بر تعداد است.

(۳) در صورتی که انحراف معیار داده های 4 ، $c-3$ ، $b+2$ ، $a+2$ برابر صفر باشد ضریب تغییرات داده های a, b, c را بیابید.

منابع:

- ۱- آمارواحتتمالات کاربردى (به همراه تست هاى کارشناسى ارشد) چاپ اول اسفند ۱۳۷۹
- مؤلف: دکتر سعیدرضاخواه-عضوهيئت علمى دانشگاه صنعتى امير کبير
- ۲- گسسته احتمال - مشت نمونه خروار چاپ اول ۱۳۸۹
- پديد آورندگان: عطا صادقى ،احسان موسوى
- ۳- حسابان - کتاب درسى انتشار ۱۳۸۰
- مؤلفان: دکتر محمد حسن بيژن زاده ، غلامعلى فرشادى ، يدالله ايلخانى پور
- ۴- رياضيات (۳) تجربى - کتاب درسى انتشار ۱۳۹۰
- مؤلفان: محمد هاشم رستمى ، عبدالحميد عطوفى و دکتر محمد گودرزى
- ۵- رياضيات (۲) تجربى - کتاب درسى انتشار ۱۳۸۲
- مؤلفان: دکتر اسماعيل بابليان ، ميرزا جليلى ، رضا شهريارى اردبيلى ، دکتر عليرضا مدقالچى ۱۳۸۲
- ۶- رياضيات (۲) تجربى - کتاب درسى انتشار ۱۳۸۹
- مؤلفان: دکتر على ايرانمنش ، محسن جمالى ، حميدرضا ربيعى ، دکتر ابراهيم ريحانى ، دکتر احمد شاهورانى ،
دکتر وحيد عالميان
- ۷- حسابان - کتاب درسى انتشار ۱۳۸۹
- مؤلفان: بهمن اصلاح پذير ، دکتر ناصر بروجرديان ، دکتر ابراهيم ريحانى ، محمد تقى تنجاني و دکتر وحيد عالميان
۱۳۸۹
- ۸- رياضيات سال چهارم علوم تجربى - کتاب درسى انتشار ۱۳۷۵
- مؤلفان: محسن حسام الدينى ، محمد هادى شهرستانى ، حسن شيخ ، مصطفى لطفى در آباديان
- ۹- هندسه (۱) - کتاب درسى انتشار ۱۳۷۹
- مؤلفان: زهرا گويا، سهيلا غلام آزاد ، جعفر نيوشا ، بيژن ظهورى زنگنه ، جواد حاجى بابائى ، روح الله جهانى پور

۱۰- جبر و احتمال - کتاب درسی انتشار ۱۳۸۱

مؤلفان: دکتر بیژن ظهوری زنگنه ، دکتر زهرا گویا، دکتر یحیی تابش ، یدالله ایلخانی پور

۱۱- پیک امتحان - ریاضیات (۳) تجربی انتشار ۱۳۹۰

مؤلف: مهدی عزیزی قهروردی (گاج)

۱۲- پیک گل واژه - ریاضی عمومی (۱) پیش دانشگاهی انتشار ۱۳۸۰

مؤلفان: محمدرضا اسماعیلی، اسماعیل اشرفی

۱۳- پیک گل واژه حسابان انتشار ۱۳۸۱

مؤلفان: شعله محمد امینی ، معصومه امیر زاده

۱۴- پیک گل واژه هندسه (۱) انتشار ۱۳۸۰

مؤلفان : مهدی صاحب الزمانی ، انسیه شاهدانی

۱۵- تو تویی (داستانهای کوتاه وشگفت انگیز)

گردآوری:امیررضا آرمیون