جزوه آموزشی

ریاضی ۲

یازدهم تجربی

کاری از استاد بابالویان

پاییز ۹۶

فصل اول :هندسه تحلیلی

و جبر

درس اول : هندسه تحلیلی

درس دوم : معادله درجه دوم و تابع درجه ۲

درس سوم : معادلات گویا و گنگ

درس اول : هندسه تحلیلی

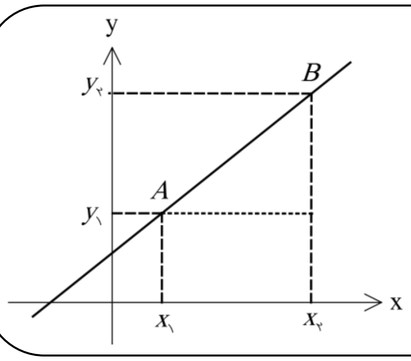
هندسه تحلیلی در واقع ترکیب هندسه و جبر مقدماتیه . در واقع تو هندسه تحلیلی به هر نقطه تو صفحه یه آدرس داده میشه که بهش مختصات می گن و با همین آدرس ها معادلات جبری شکل ها نوشته میشن . بنیانگذاران هندسه تحلیلی دکارت و فرما تو قرن ۱۷ ام بودن .

شیب خط:

نسبت جابجایی عمودی به جابجایی افقی رو شیب خط می گن .

یعنی اگر دو نقطه دلخواه $B(x_۲,y_۲),A(x_۱,y_۱)$ از یک خط باشن

شیب خط برابره با : $m=\dfrac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}$



– شرط موازی بودن دو خط اینه که ....

– شرط عمود بودن دو خط اینه که .... یا $mm' =$ .....

– به نقطه ی برخورد خط با محور y ها .... می گن .

– معادله خط با شیب m و عرض از مبدا h به صورت ....پس برای بدست آوردن شیب یک خط از روی فرمول اون اول خط رو به صورت استاندارد (y تنها و بدون ضریب شود) می نویسیم و بعد .... شیب خط میشه .

–خطی که موازی محور x ها باشه دارای شیب .... و معادله آن به صورت .... است .

تمرین : خطوط زیر نسبت به هم چه وضعیتی دارند ؟ (موازی ، عمود ، متقاطع غیر عمود)

$۲x-y=۱ \quad , \quad ۲y+x=۵$

$۲x-۴y=۱ \quad , \quad ۲y-x=۵$

$y-x+۲=۰ \quad , \quad ۲y+x=۴$

نوشتن معادله خط :

معادله خط در حالت کلی به صورت $y=m(x-x_{۰})+y_{۰}$ هستش و بعد از ساده شدن در نهایت به صورت $y=mx+h$ ظاهر میشه. پس میشه از هر دو راه برای نوشتن معادله خط استفاده کرد .

مثال : معادله خطی را بنویسید که از نقاط $B(۱,۲),A(-۱,۶)$ بگذرد .

روش اول :

$$m=\frac{۶-۲}{۱-(-۱)}=\frac{۴}{۲}=۲\Rightarrow y=۲(x-۱)+۲\Rightarrow y=۲x$$

روش دوم :

$$m=\frac{۶-۲}{۱-(-۱)}=\frac{۴}{۲}=۲\Rightarrow y=۲x+h\xrightarrow{(۱,۲)}۲=۲(۱)+h\Rightarrow h=۰\Rightarrow y=۲x$$

تمرین : معادله خطی را بنویسید که از $A(-۲,۳)$ گذشته و با خط $y=۲x+۱$ موازی باشد .

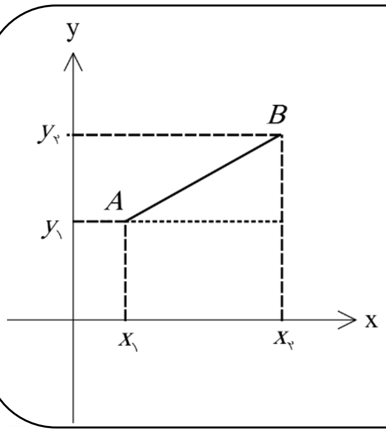
تمرین : معادله خطی را بنویسید که عرض از مبدا آن ۲ باشد و بر خط $۳x-۲y+۱=۰$ عمود باشد .

فاصله بین دو نقطه :

اگر $A(x_{۱},y_{۱})$ و $B(x_{۲},y_{۲})$ دو نقطه مثل شکل

تو صفحه مختصات باشن به کمک قضیه فیثاغورس یه فرمول

برای بدست آوردن فاصله دو نقطه بدست بیارین .



تمرین : اگر $A\left(۱,۳\right), B\left(-۱,۲\right), C\left(۵,-۵\right)$ سه راس یک مثلث باشند .

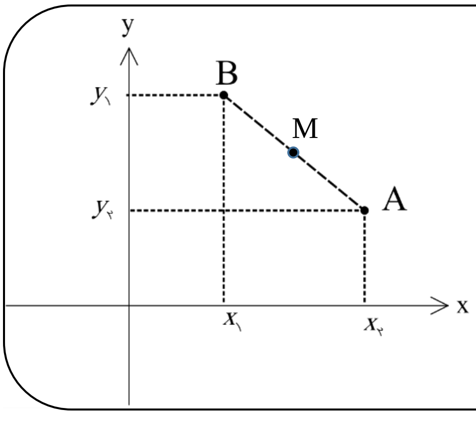
الف) طول اضلاع را بیابید .

ب) نشان دهید این مثلث قائم الزاویه است .

تمرین : آیا نقطه $(۴,۱)$ روی عمود منصف پاره خط واصل بین $A(۱,۱), B(۲,-۲)$ قرار دارد ؟

مختصات نقطه وسط یک پاره خط :

اگر $A\left(x_۲, y_۲\right)$ و $B\left(x_۱, y_۱\right)$ دو نقطه مثل شکل تو صفحه مختصات باشن و M مختصات وسط پاره خط باشه تصویر این نقاط رو روی محور های مختصات تصور کن و فرمولی برای بدست آوردن مختصات M بنویس :



تمرین : معادله عمود منصف پاره خط واصل دو نقطه $A(۱,۲), B(-۱,۳)$ را بنویسید .

تمرین : نقاط $C(۰,-۱), B(-۳,۱), A(۱,۴)$ رئوس مثلث هستند.طول میانه وارد بر ضلع BC را بیابید .

تمرین : قرینه نقطه $A(۱,-۲)$ را نسبت به نقطه $M(-۱,۳)$ بدست آورید .

تمرین : قرینه نقطه $A(۳,-۴)$ را نسبت به مبدا مختصات بدست آورید .

فاصله یک نقطه از یک خط :

اگر $A(x_۰, y_۰)$ یک نقطه و $ax + by + c = ۰$ معادله یک خط باشه، فاصله نقطه و خط از این فرمول بدست میاد :

$$|AH| = \frac{|ax_۰ + by_۰ + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}}$$

تمرین : خط به معادله $y=\frac{٤}{٣}x+٤$ بر دایره ای به مرکز $A(-٢,٤)$ مماس است. اندازه شعاع دایره را بیابید .

تمرین : فاصله نقطه $A(١,٢)$ از خط $٣x+٤y=k$ برابر ۲ است. k را بیابید .

تمرین : اگر نقطه $A(٢,٣)$ راس یک مربع و معادله یک ضلع مربع $٣x-٤y=٩$ باشد ، مساحت مربع چقدر است ؟

تکلیف : تمرین های صفحه ۹ را حل کنید .

درس دوم : معادله درجه دوم و تابع درجه ۲

معادلات دو مجذوری :

معادله هایی که به کمک تغییر متغیر قابل تبدیل به معادله درجه دوم باشن بهشون معادلات دو مجذوری می گن .

مثال : معادله $x^{4}-6x^{2}+8=0$ را حل کنید .

حل : اگر اسم x^{2} رو تغییر بدیم بذاریم u یعنی $u=x^{2}$ اونوقت معادله به صورت $u^{2}-6u+8=0$ میشه که اگر حلش کنیم (به هر روشی : تجزیه ، مربع کامل ، دلتا ...) جواباش میشه $u=2,u=4$ حالا وقتشه که دوباره اسم اولشون رو بهشون پس بدیم یعنی $x^{2}=2,x^{2}=4$ که هر کدوم از اینا دو تا جواب دارن پس : $x=2,-2,\sqrt{2},-\sqrt{2}$

تمرین : معادلات زیر را حل کنید .

$3x^{4}+2x^{2}+8=0$

$x^{4}-13x^{2}-36=0$

رابطه مجموع و حاصل ضرب ریشه های معادله درجه ۲ با ضرایب معادله :

میدونیم جواب های معادله درجه دوم در حالت کلی به صورت $\alpha=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a},\beta=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ هستش با جمع و ضرب این دو جواب جاهای خالی رو کامل کنید و رابطه مورد نظرو بدست بیارید :

$P=\alpha\beta=$

$S=\alpha+\beta=$

تمرین : بدون حل معادله ، مجموع و حاصل ضرب ریشه های معادله $-۲x^{۲}+x+۵=۰$ را بیابید .

نوشتن معادله درجه دوم با داشتن جواب های آن :

فرض کنید جواب های یک معادله یعنی α,β رو دارید حالا می تونید بنویسید $(x-\alpha)(x-\beta)=۰$ چون این همون معادله درجه دومه که ریشه هاش α,β هستش . حالا شما همین معادله رو ساده کنید تا به صورت $x^{۲}\square x+\square=۰$ ظاهر بشه بعد معادله رو به کمک S,P بازنویسی کنید:

تمرین : دو عددی را بیابید که مجموع آن ۲/۳ و حاصل ضرب آن ۱/۲ باشد .

تمرین : معادله درجه دومی بنویسید که ریشه های آن $۱+۲\sqrt{۳},۱-۲\sqrt{۳}$ باشد .

تمرین : طول و عرض مستطیلی را بیابید که محیط آن $\frac{۱۳}{۳}$ و مساحت آن ۱ باشد .

ماکزیمم و مینیمم سهمی :

از سال قبل می دونیم که طول راس سهمی $y=ax^{2}+bx+c$ برابر $x_{0}=\frac{-b}{2a}$ هستش :

الف) اگر $a>0$ باشه سهمی رو به بالائه و $f(x_{0})$ مقدار مینیمم (کمترین) سهمی رو میده .

ب) اگر $a<0$ باشه سهمی رو به پایینه و $f(x_{0})$ مقدار ماکسیمم (بیشترین) سهمی رو میده .

تمرین : در بین مستطیل هایی که طول آنها از عرض آنها ۳ واحد بیشتر است کدام یک بیشترین مساحت را دارد ؟

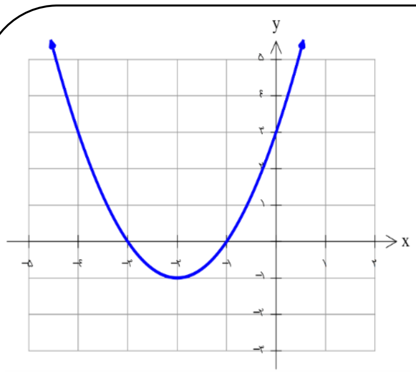
تمرین : سهمی $y=-(2x+1)^{2}-1$ دارای ماکسیمم است یا مینیمم ؟ مقدار آن را بیابید .

صفر های تابع :

نمودار تابع $f(x)=x^{2}+4x+3$ در شکل روبرو رسم شده است.

الف) معادله $f(x)=0$ را حل کنید .

ب)چه رابطه ای بین ریشه های معادله قبل و محل تلاقی تابع با محور طول ها وجود دارد ؟

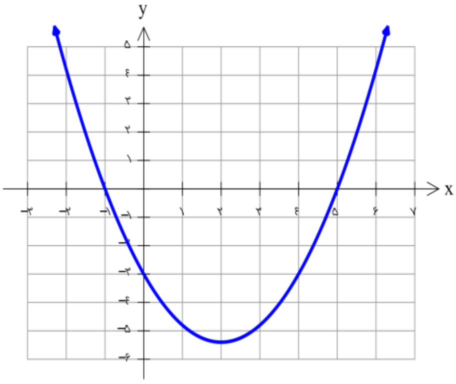


برای هر تابع f جواب های معادله $f(x)=0$ رو در صورت وجود، صفر های تابع f می گن و از نظر هندسی محل برخورد نمودار تابع با محور x ها ست .

نکته : اگر $x=a$ یکی از صفر های تابع f باشه حتما تابع f عاملی به صورت $(x-a)$ داره . در نتیجه اگر x',x'' صفر های سهمی $f(x)=ax^{2}+bx+c$ باشه، میشه تابع رو به صورت زیر نوشت :

$$f(x)=a(x-x')(x-x'')$$

تمرین : اگر نمودار سهمی f به صورت زیر باشد . ضابطه سهمی را بنویسید .



تمرین : بدون حل معادله و فقط به کمک S,P,Δ تعداد و علامت صفر های توابع زیر را مشخص کنید .

$y=x^{2}+x+1$ | $y=2x^{2}-x-6$ | $y=x^{2}-7x+12$

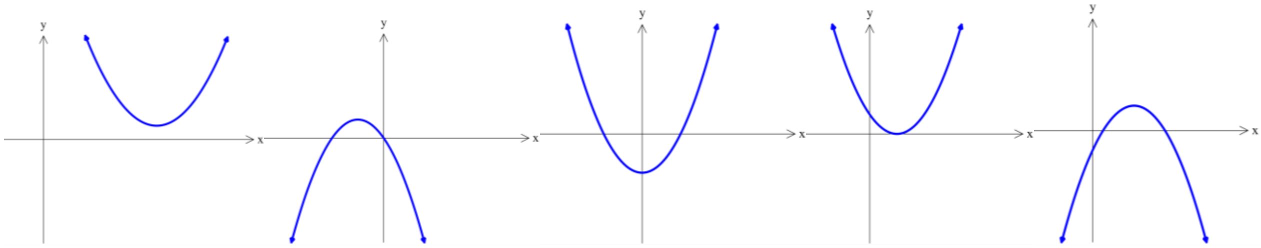
تشخیص علامت ضرایب ضابطه سهمی از روی نمودار آن :

سال قبل فهمیدیم که تو سهمی $f(x)=ax^{2}+bx+c$ علامت a بستگی به جهت بازوهای سهمی داره یعنی اگر بازو ها به سمت بالا باشن a مثبته و اگر به سمت پایین باشن a منفیه .

و از اونجایی که $f(0)=c$ هستش پس در واقع c محل برخورد تابع با محور عرض ها هستش پس می تونیم با نگاه کردن به محل برخورد تابع با محور عرض ها ، علامت c رو تشخیص بدیم .

ولی برای تشخیص علامت b میخوام که شما پیشنهاد خودتون رو بدید راهنمایی من به شما استفاده از طول راس سهمی هستش !!!

تمرین : نمودار های زیر مربوط به تابع $f(x)=ax^2+bx+c$ هستند ، علامت ضرایب a,b,c را مشخص کنید .



تکلیف : تمرین های صفحه ۱۸را حل کنید .

درس سوم : معادلات گویا و گنگ

معادلات شامل عبارت های گویا :

در بعضی از معادله ها عبارت های کسری بوجود میاد که صورت و مخرج چند جمله ای هستند . به این نوع معادله ها معادله های گویا می گن .

مستطیل طلایی ، مستطیلیه که نسبت مجموع طول و عرضش به طولش برابر نسبت طول و عرض باشه یعنی اگر طول و عرضو x و y بگیریم داشته باشیم : $\frac{x+y}{x}=\frac{x}{y}$. و نسبت طول به عرض این مستطیلو « نسبت طلایی » می گن .

حالا فرض کنید عرض مستطیل برابر یک باشه $y=۱$. می خواهیم نسب طلایی رو حساب کنیم : $\frac{x+۱}{x}=\frac{x}{۱}$

به نظر شما بهترین راه برای حل این معادله چیه ؟

نکته : در حل معادلات گویا جوابهایی که مخرج را صفر کنن مورد قبول نیستن .

تمرین : معادلات زیر را حل کنید .

الف) $\frac{۳}{x+۲}+\frac{۲}{x}=\frac{۴x-۴}{x^{۲}-۴}$

ب) $\frac{۱}{(x-۲)^۲}+\frac{۲}{x-۲}=۳$

ج) $\frac{۲۴}{۱۰+x}+۱=\frac{۲۴}{۱۰-x}$

تمرین : به ازای چه مقدار a ، معادله $\frac{a}{x}=\frac{a-x}{x}+\frac{a}{a-x}$ دارای جواب $x=۲$ است .

تمرین: دو کارگر کاری را ۱۸ روزه انجام می دهند ، اگر هر کدام به تنهایی کار کنند ، کارگر اول این کار را ۱۵ روز زودتر از کارگر دوم تمام می کند . هر کدام به تنهایی در چند روز این کار را تمام می کنند ؟

تمرین: قطاری یک مسیر ۶۰ کیلومتری را طی می کند ولی در راه برگشت از سرعت خود ۱۰ کیلومتر بر ساعت کاسته و به همین دلیل نیم ساعت دیر تر می رسد . زمان رفت این قطار چقدر بوده است ؟

معادلات شامل عبارت های گنگ :

در بعضی از معادله ها عبارت های رادیکالی بوجود میاد که به این نوع معادله ها معادله های گنگ می گن .

فرض کنید بخواهیم نقطه ای روی محور x ها پیدا کنیم که فاصله اش از نقطه $P(۲,۳)$ برابر ۵ باشه یعنی

$\sqrt{(x-۲)^۲+۹}=۵$ به نظرتون چه راهی برای حل این معادله مناسبه ؟

نکته : در حل معادلات گنگ جواب ها حتماً باید در معادله صدق کنن در غیر این صورت پذیرفته نیستن چون عمل توان رسانی میتونه جواب های اضافی وارد معادله کنه.

مثلاً : در حل معادله $\sqrt{x+۲}=x-۴$ پس از توان رسانی و حل دو جواب ۲ و ۷ بدست می آید که فقط یکی از آنها درست است و آن هم عدد ۷ است زیرا $\sqrt{۲+۲}\neq ۲-۴$

تمرین : معادلات زیر را حل کنید .

الف) $\sqrt{۲x+۳}+x=۶$

ب) $\frac{۳}{\sqrt{x}+۱}+\frac{۱}{\sqrt{x}-۱}=۲$

ج) $\sqrt{۲x+۱}-\sqrt{x}=۱$

تمرین : بدون حل معادله بگویید چرا معادلات زیر جواب ندارند ؟

$$\sqrt{x+۱}+\sqrt{۲x-۴}+۲=۰$$

$$\sqrt{x-۲}+۲\sqrt{۱-x}=۰$$

تکلیف : تمرین های صفحه ۲۳ و ۲۴ را حل کنید .

فصل دوم :هندسه

درس اول : ترسیم های هندسی

درس دوم : استدلال و قضیه تالس

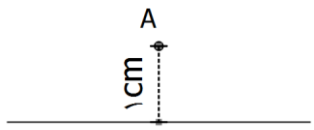
درس سوم : تشابه مثلث ها

درس اول : ترسیم های هندسی

گاهی اوقات در جهان ما مسائلی پیش می آید که نیاز به دانستن قواعد ترسیمات هندسی دارد تا بتوان این مسائل را حل کرد . به عنوان مثال فرض کنید می خواهید زمین کشاورزی را که به شکل مثلث است با کشیدن دیوار مستقیمی به دو زمین هم مساحت تبدیل کنید . برای حل این مساله باید مقدماتی را بدانیم .

فعالیت : نقطه ای مانند O را در صفحه در نظر بگیرید . همه نقاط به فاصله ۲ از این نقطه را تصور کنید . این نقاط چه شکلی را تشکیل می دهند ؟ .... آیا هر نقطه ای که به فاصله ۲ از O باشد روی این شکل قرار دارد ؟ ....

تمرین : نقاطی روی خط L بیابید که از نقطه A به فاصله ۲ باشد . (توضیح دهید)



تمرین : مثلثی با طول اضلاع ۲و ۳ و ۴ رسم کنید . (توضیح دهید)

تمرین : متوازی الاضلاعی به طول قطر ۲و ۴ رسم کنید . آیا این متوازی الاضلاع منحصر به فرد است ؟

فعالیت : تمام نقاطی را تصور کنید که از خط **L** به فاصله ۲ هستند . این نقاط چه شکلی را به وجود می آورند ؟ ....

آیا هر نقطه ای که به فاصله ۲ از خط **L** باشد روی این شکل قرار دارد ؟ ....

تمرین : خط **L** و نقطه **A** به فاصله ۲ از آن را در نظر بگیرید و نقاطی را بیابید که از نقطه **A** و خط **L** به فاصله ۲ باشند .

فعالیت :

الف) پاره خط **AB** را رسم و نقطه **P** را در مکان دلخواهی روی عمود منصف پاره خط در نظر بگیرید . ثابت کنید این نقطه از دو سر پاره خط به یک فاصله است .

ب) پاره خط **AB** را رسم و نقطه **P** را در مکان دلخواهی با فاصله مساوی از **A** و **B** قرار دهید . ثابت کنید این نقطه روی عمود منصف پاره خط است .

رسم عمود منصف پاره خط داده شده :

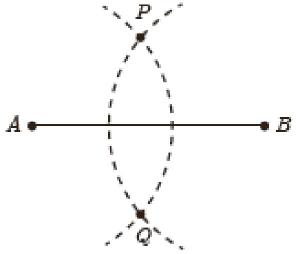
-دهانه پرگار را بیش از نصف طول پاره خط باز کرده و

از دو سر پاره خط کمان هایی می زنیم .

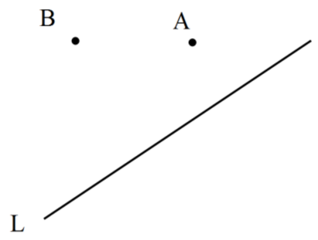
-محل برخورد دو کمان را به هم وصل کرده و امتداد می دهیم .

-خط حاصل عمود منصف است زیرا نقاط برخورد **P** و **Q** از دو

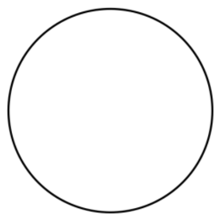
سر پاره خط به یک فاصله هستند .



تمرین : نقطه ای از خط L را بیابید که از دو نقطه A,B به فاصله برابر باشد .



تمرین : مرکز دایره زیر را بیابید .



تمرین : مربعی به طول قطر ۲ رسم کنید .

تمرین : از نقطه A خارج خط L بر این خط عمودی رسم کنید و طریقه رسم را شرح دهید .

تمرین : از نقطه A خارج از خط L خطی موازی این خط رسم کنید و طریقه رسم را توضیح دهید .

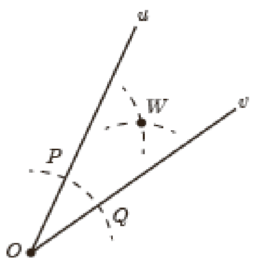
تمرین : مثلثی رسم کنید که طول دو ضلع آن ۲و۳ و طول ارتفاع وارد بر ضلع سوم ۱باشد .

فعالیت :

الف) زاویه **AOB** را رسم و نقطه **P** را در مکان دلخواهی روی نیمساز زاویه در نظر بگیرید . ثابت کنید این نقطه از دو ضلع زاویه به یک فاصله است .

ب) زاویه **AOB** را رسم و نقطه **P** را در مکان دلخواهی با فاصله مساوی از اضلاع زاویه قرار دهید . ثابت کنید این نقطه روی نیمساز زاویه است .

رسم نیمساز زاویه داده شده :



-دهانه پرگار را به اندازه دلخواه باز کرده و از راس زاویه کمانی می زنیم تا اضلاع زاویه را قطع کند .

-از نقاط برخورد ، بدون تغییر دهانه پرگار دو کمان دیگر می زنیم و محل برخورد آنها را به راس زاویه وصل کرده و امتداد می دهیم .

-این نیم خط نیمساز است زیرا شکل OPWQ لوزی است و قطر لوزی نیمساز زاویه آن است .

تکلیف : تمرین های صفحه ۲۹ و ۳۰ را حل کنید .

درس دوم : استدلال و قضیه تالس

استدلال : عمل دلیل آوردن برای اثبات یک گزاره است که سه نوع مهم آن عبارت است از :

استدلال استقرایی : نتیجه گیری کلی بر پایه تعداد محدودی مشاهده . (از جزء به کل رسیدن)

مثال : مجموع زاویه های داخلی هر چهار ضلعی ۳۶۰ درجه است .

استدلال استقرایی : در چهار ضلعی های مربع ، مستطیل ، متوازی الاضلاع و لوزی زاویه های مجاور مکمل هم هستند پس به راحتی می توان نشان داد مجموع زاویه های داخلی آنها ۳۶۰ درجه است . پس مجموع زاویه های داخلی هر چهار ضلعی محدب ۳۶۰ درجه است .

استدلال استنتاجی : نتیجه گیری منطقی بر پایه واقعیت هایی که درستی آنها را پذیرفته ایم .نتایج حاصل از استدلال استنتاجی را قضیه می نامند .

مثال : مجموع زاویه های داخلی هر چهار ضلعی ۳۶۰ درجه است .

استدلال استنتاجی : می دانیم مجموع زاویه های داخلی هر مثلث ۱۸۰ درجه است با رسم یک قطر دو مثلث بوجود می آید که مجموع زاویه های این دو مثلث ۳۶۰ درجه می شود .

تناسب : یک تساوی از نسبت ها را تناسب می گویند . $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

ویژگی های تناسب :

(طرفین وسطین کردن)	b و $d \neq 0$	$\frac{3}{5}=\frac{6}{10} \Leftrightarrow 3\times10=5\times6$	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow ad=bc$	۱
(معکوس کردن طرفین تناسب)	a و b و c و $d \neq 0$	$\frac{2}{5}=\frac{4}{10} \Rightarrow \frac{5}{2}=\frac{10}{4}$	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a}=\frac{d}{c}$	۲
(تعویض جای طرفین یا وسطین)	a و b و c و $d \neq 0$	$\frac{2}{3}=\frac{6}{9} \Rightarrow \frac{9}{3}=\frac{6}{2}$	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{d}{b}=\frac{c}{a}$ یا $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$	۳
(ترکیب نسبت در صورت یا مخرج)	b و $d \neq 0$	$\frac{2}{3}=\frac{4}{6} \Rightarrow \frac{2}{5}=\frac{4}{10}$	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ یا $\frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}$	۴
(تفضیل نسبت در صورت یا مخرج)	b و $d \neq 0$	$\frac{30}{21}=\frac{20}{14} \Rightarrow \frac{9}{21}=\frac{6}{14}$	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$ یا $\frac{a}{a-b}=\frac{c}{c-d}$	۵
	b و $d \neq 0$	$\frac{4}{6}=\frac{8}{12} \Rightarrow \frac{12}{18}=\frac{8}{12}=\frac{4}{6}$	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+c}{b+d}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$	۶

تمرین : اگر $\frac{x}{۳}=\frac{x-۱}{۲}=\frac{۱}{y}$ ، مقدار x,y را بیابید .

تمرین : اگر $\frac{۳}{۵}=\frac{z}{۶}=\frac{y}{۳}=\frac{x}{۲}$ ، حاصل $x+y+z$ چقدر است ؟

تمرین : اگر $\frac{۳}{۵}=\frac{a}{a+b}$ ، حاصل $\frac{a+۳}{b+۲}$ چقدر است ؟

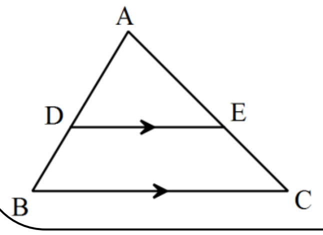
تمرین : اگر $\frac{۲}{۵}=\frac{c}{d}=\frac{a}{b}$ ، حاصل $\frac{a+۳c+۴}{b+۳d+۱۰}$ را بیابید .

تالس

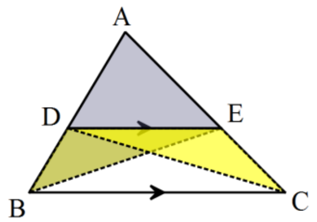
تالس فیلسوف و دانشمند یونانی هم عصر با کوروش که او را آغازگر فلسفه و علم می دانند ، حدود ۲۶۰۰ سال پیش در شهر میلیتوس یونان به دنیا آمد . وی توانست خورشید گرفتگی سال ۵۸۵ قبل از میلاد را پیش بینی و همچنین ارتفاع اهرام مصر را اندازه گیری کرد.

قضیه تالس : هرگاه خطی موازی با یکی از اضلاع مثلث، دو ضلع دیگر را قطع کند روی آن دو ضلع پاره خط های متناسب ایجاد می کند .

$$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$$ (رابطه جزء به جزء)



اثبات : پاره خط های DC, BE را رسم می کنیم :



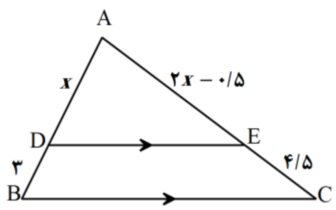
درمثلث ADC به دلیل .... داریم : $\frac{S_{\overset{\Delta}{ADE}}}{S_{\overset{\Delta}{DEC}}}=\frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}$

درمثلث ABE به دلیل .... داریم : $\frac{S_{\overset{\Delta}{ADE}}}{S_{\overset{\Delta}{DEB}}}=\frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}$

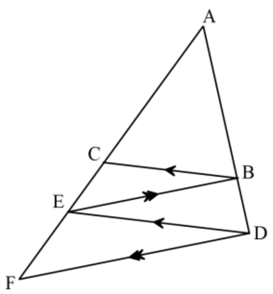
از طرفی به دلیل .... داریم : $S_{\overset{\Delta}{DEC}}=\cdots\cdots$

از سه رابطه قبل نتیجه می شود : $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$

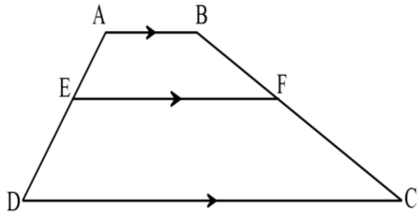
تمرین : مقدار x را در شکل های زیر بیابید .



تمرین : در شکل زیر ثابت کنید $AE^{۲}=AC.AF$

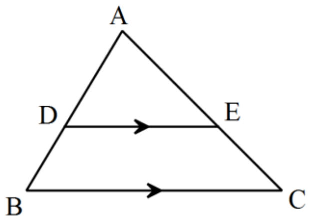


تمرین : ثابت کنید اگر خطی موازی قاعده های ذوزنقه دو ضلع دیگر را قطع کند روی آنها پاره خط های متناسب ایجاد می کند (قضیه تالس در ذوزنقه)



تعمیم قضیه تالس : اگر خطی موازی یکی از اضلاع مثلث دو ضلع دیگر را قطع کند ، اضلاع مثلث بوجود آمده با اضلاع مثلث اصلی متناسب است .

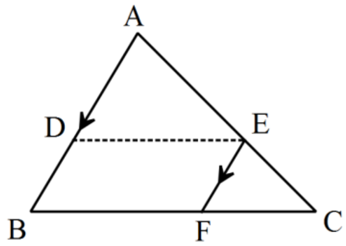
$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$$ (رابطه جزء به کل)



اثبات :

اگر در **رابطه جز به جز** ، ترکیب در مخرج انجام دهیم داریم : $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$

حال اگر پاره خط EF را موازی AB رسم کنیم :



از $DE \parallel BC$ طبق رابطه جز به جز داریم : $\frac{\cdots}{\cdots}=\frac{\cdots}{\cdots}$

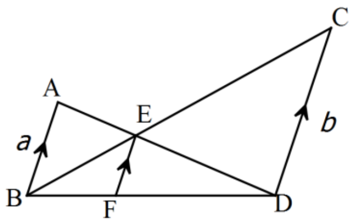
از $EF \parallel AB$ طبق رابطه جز به جز داریم : $\frac{\cdots}{\cdots}=\frac{\cdots}{\cdots}$

از دو تناسب قبل نتیجه می شود : $\frac{\cdots}{\cdots}=\frac{\cdots}{\cdots}$ **که** با ترکیب در مخرج داریم : $\frac{AD}{AB}=\frac{BF}{BC}$

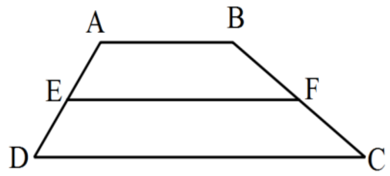
از آنجایی که $BDEF$ متوازی الاضلاع است پس $BF=\cdots$ در نتیجه تناسب قبل تبدیل می شود به : $\frac{AD}{BD}=\frac{DE}{BC}$

در نتیجه داریم : $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$

تمرین : اگر سه خط مشخص شده موازی باشند . فرمولی بیابید که طول پاره خط EF را بر حسب طول دو پاره خط موازی آن بدهد . (راهنمایی : دوبار رابطه تالس و مجموع این دو تناسب)



تمرین : ثابت کنید در هر ذوزنقه اندازه پاره خطی که وسط ساقها را به هم وصل می کند ، نصف مجموع اندازه دو قاعده است



قضیه شرطی : هر قضیه را می توان به صورت شرطی نوشت : اگر « فرض » آنگاه « حکم »

مثال : مجموع زوایای داخلی مثلث ۱۸۰ درجه است .

به صورت شرطی : اگر مثلث داشته باشیم آنگاه مجموع زاویه داخلی آن ۱۸۰ درجه است .

عکس قضیه : اگر در یک قضیه جای فرض و حکم را عوض کنیم عکس قضیه بدست می آید .

مثال : مجموع زوایای داخلی مثلث ۱۸۰ درجه است .

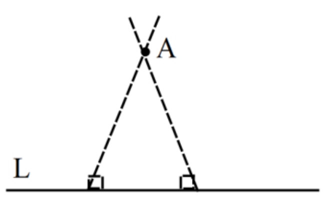
عکس قضیه : اگر مجموع زوایای داخلی یک چند ضلعی ۱۸۰ درجه باشد آنگاه آن چند ضلعی مثلث است .

برهان خلف : نوعی استدلال در هندسه و ریاضیات که به جای شروع از فرض و رسیدن به حکم . ابتدا فرض می کنیم حکم درست نباشد و به یک تناقض با فرض و یا به یک امر غیر ممکن می رسیم . بنابر این می پذیریم که حکم درست بوده است

مثال : از هر نقطه خارج یک خط ، نمی توان بیش از یک عمود بر آن رسم کرد .

اثبات : فرض می کنیم حکم غلط باشد یعنی بتوان دو عمود از A بر خط L رسم کرد

در این صورت مثلثی پدید می آید که مجموع زاویه های داخلی آن بیش از ۱۸۰ درجه است و چنین چیزی ممکن نیست . پس فرض ما باطل و حکم درست است .



تمرین : قضیه های زیر را به صورت شرطی نوشته سپس عکس آنها را بیان کنید .

الف) مساحت دو مثلث همنهشت با هم برابر هستند .

شرطی :

عکس قضیه :

ب) دو زاویه متقابل به راس با هم برابرند .

شرطی :

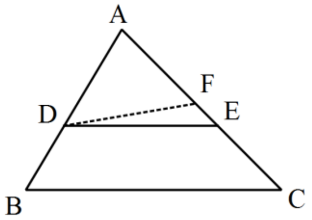
عکس قضیه :

تمرین : با برهان خلف ثابت کنید ، خطی که یکی از دو خط موازی را قطع کند ، دیگری را نیز قطع خواهد کرد .

تمرین : با برهان خلف ثابت کنید اگر در مثلث ABC ، $AB \neq AC$ آنگاه $B \neq C$.

تمرین : با برهان خلف ثابت کنید اگر $n^۲$ فرد باشد ، n فرد است .

عکس قضیه تالس : اگر خطی دو ضلع مثلث را طوری قطع کند که روی آنها پاره خط های متناسب ایجاد کند ، این خط با ضلع سوم مثلث موازی است .



$$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}\Rightarrow DE\,||\,BC$$

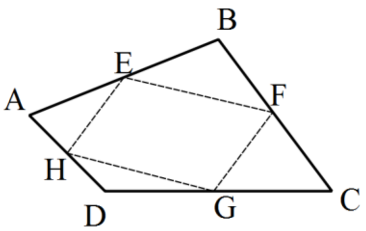
اثبات : فرض کنید $DE \nparallel BC$ پس می توان از نقطه D پاره خط DF را موازی BC رسم کرد

بنابر این طبق رابطه جزبه کل داریم : $\frac{\cdots}{\cdots}=\frac{\cdots}{\cdots}$

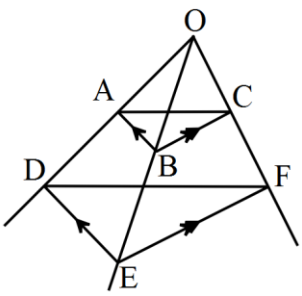
از رابطه جزبه کل فرض قضیه نیز داریم : $\frac{\cdots}{\cdots}=\frac{\cdots}{\cdots}$

از رابطه های قبل نتیجه می شود که $\cdots=\cdots$ و این یعنی نقاط F,E یکی هستند پس $DE\,||\,BC$

تمرین : ثابت کنید در هر چهار ضلعی دلخواه،شکل حاصل از وصل کردن اوساط اضلاع ، متوازی الاضلاع است .



تمرین : در شکل مقابل ثابت کنید $AC\,||\,DF$.



قضیه دو شرطی : اگر عکس یک قضیه نیز درست باشد ، آن قضیه را دو شرطی می نامند و معمولاً به صورت زیر بیان می کنند « فرض » اگر و تنها اگر « حکم »

مثال : فرض کنید خطی دو ضلع مثلث را قطع کند . این خط موازی ضلع سوم مثلث است اگر و تنها اگر نسبت پاره خط های ایجاد شده روی آن دو ضلاع برابر باشد .

تمرین : قضیه های زیر را به صورت دو شرطی بیان کنید .

الف) در مثلث متساوی الاساقین زاویه مقابل به ساقها با هم برابرند .

ب) در هر متوازی الاضلاع قطر ها همدیگر را نصف می کنند .

ج) قضیه فیثاغورس .

مثال نقض : مثالی که درستی یک حکم کلی را رد می کند .

مثال : برای حکم « تمام اعداد اول فرد هستند » می توان ۲ را یک مثال نقض دانست زیرا اول است ولی فرد نیست .

تمرین : برای گزاره های زیر مثال نقض بیاورید .

الف) حاصل ضرب دو عدد گنگ عددی گنگ است .

ب) به ازای هر عدد طبیعی n ، عبارت $n^۲+n+۴۱$ عدد اول است .

ج) ارتفاع هر مثلث درون آن است .

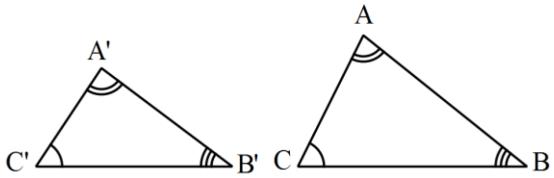
د) هر چهار ضلعی که همه اضلاع آن برابر باشند مربع است .

تکلیف : تمرین های صفحه ۴۱ را حل کنید .

درس سوم : تشابه مثلث ها

سال نهم فهمیدیم که دو مثلث متشابه هستند اگر و تنها اگر زاویه های آنها برابر و اضلاع آنها متناسب باشند .

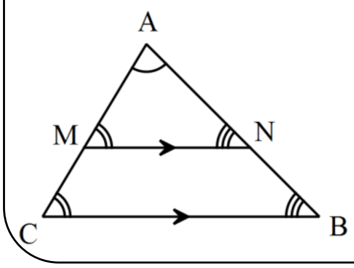
$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'} \quad , \quad A=A', B=B', C=C'$$



قضیه اساسی تشابه : اگر خطی موازی یکی از اضلاع مثلث دو ضلع دیگر را قطع کند ، مثلث بوجود آمده با مثلث اصلی متشابه است .

اثبات : زاویه A مشترک و زاویه های دیگر نیز طبق قضیه خطوط موازی برابرند .

از طرفی طبق رابطه تعمیم قضیه تالس نسبت اضلاع نیز برابرند .



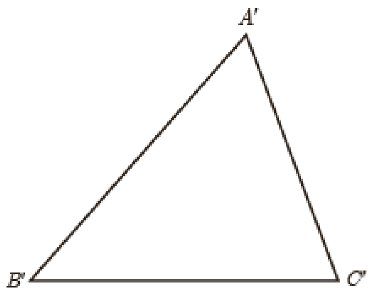
حالت های تشابه دو مثلث :

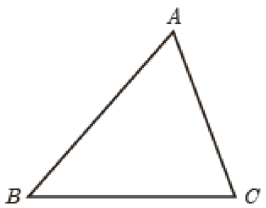
قضیه ۱ : هرگاه دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشند، دو مثلث متشابه‌اند.

$$(\hat{A}=\hat{A}' \text{ و } \hat{B}=\hat{B}' \Rightarrow A\overset{\Delta}{B}C \sim A'\overset{\Delta}{B'}C')$$

قضیه ۲ : هرگاه اندازه‌های دو ضلع از مثلثی با اندازه‌های دو ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند و زاویهٔ بین آنها برابر باشند، دو مثلث متشابه‌اند.

$$\left(\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}, \hat{A}=\hat{A}' \Rightarrow A\overset{\Delta}{B}C \sim A'\overset{\Delta}{B'}C'\right)$$

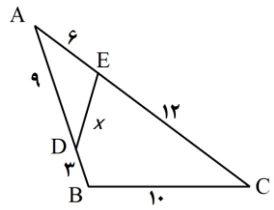


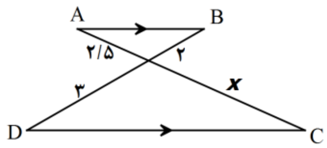


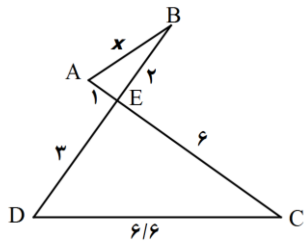
قضیه ۳ : هرگاه اندازه‌های سه ضلع از مثلثی با اندازه‌های سه ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند، دو مثلث متشابه‌اند.

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'} \Rightarrow A\overset{\Delta}{B}C \sim A'\overset{\Delta}{B'}C'$$

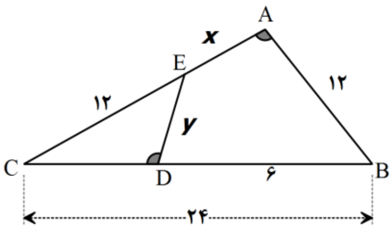
تمرین : در شکل های زیر مقدار x را بیابید .



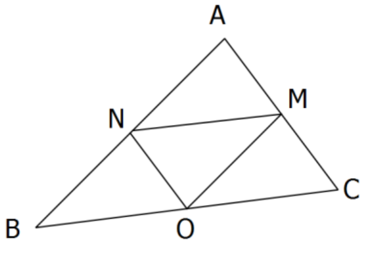




تمرین : در شکل زیر زاویه های مشخص شده برابرند . مقدار x, y را بیابید .

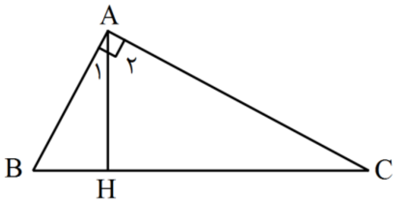


تمرین : نشان دهید شکل حاصل از برخورد اوساط اضلاع مثلث مثلثی متشابه با مثلث اصلی است .



قضیه : اگر در مثلث قائم الزاویه ارتفاع وارد بر وتر را رسم کنیم روابط زیر حاکم است .

الف) $AH^{۲} = BH \times CH$

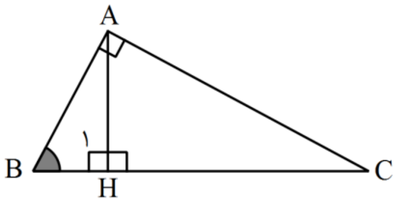


اثبات :

$$\left.\begin{array}{l} B + A_{۱} = ۹۰ \\ A_{۱} + A_{۲} = ۹۰ \end{array}\right\} \Rightarrow B + A_{۱} = A_{۱} + A_{۲} \Rightarrow B = A_{۲}$$

به همین ترتیب $C = A_{۱}$ در نتیجه : $\overset{\Delta}{ABH} \sim \overset{\Delta}{ACH} \; \frac{\cdots}{\cdots} = \frac{\cdots}{\cdots} \Rightarrow AH^{۲} = BH \times CH$

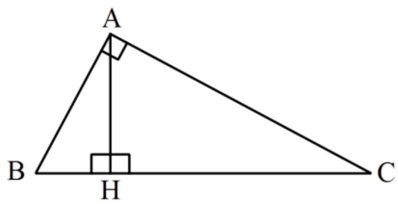
ب) $AB^{۲} = BH \times BC$ (همینطور $AC^{۲} = CH \times BC$)



اثبات :

$$\left.\begin{array}{l} B = B \\ H_{۱} = A \end{array}\right\} \Rightarrow \cdots\cdots \sim \cdots\cdots \Rightarrow \frac{\cdots}{\cdots} = \frac{\cdots}{\cdots} \Rightarrow AB^{۲} = BH \times BC$$

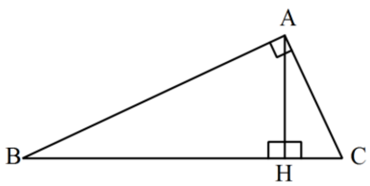
ج) $AH \times BC = AB \times AC$



اثبات :

$$\left.\begin{array}{l} S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{۱}{۲} \times AH \times BC \\ S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{۱}{۲} \times \cdots\cdots \times \cdots\cdots \end{array}\right\} \Rightarrow AH \times BC = AB \times AC$$

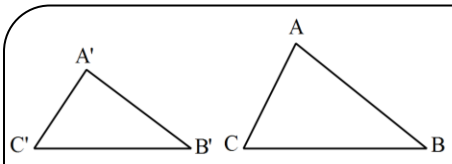
تمرین : در شکل مقابل با فرض های داده شده ، طول ضلع خواسته شده را بیابید .



الف) $BH = ۹, CH = ۴, AH = ?$

ب) $AB = ۸, AC = ۶, BH = ?$

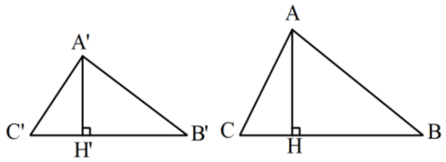
قضیه : در دو مثلث متشابه نسبت محیط ها برابر با نسبت تشابه است .



اثبات : فرض کنید $\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{A'B'C'}$ و نسبت تشابه k باشد .

با توجه به ویژگی های تناسب : $\frac{P_{ABC}}{P_{A'B'C'}} = k \Rightarrow \frac{AB+AC+BC}{A'B'+A'C'+B'C'} = k$

قضیه : در دو مثلث متشابه نسبت مساحت ها برابر با مجذور نسبت تشابه است .



اثبات : فرض کنید $\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{A'B'C'}$ و نسبت تشابه k باشد .

ابتدا نشان می دهیم نسبت ارتفاع ها برابر با نسبت تشابه است :

به دلیل تشابه دو مثلث $B = B'$ از طرفی $H_1 = H'_1$ پس : $\overset{\Delta}{ABH} \sim \overset{\Delta}{A'B'H'}$ در نتیجه $\frac{AH}{A'H'} = \frac{AB}{A'B'} = k$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = \frac{\frac{۱}{۲} \times AH \times BC}{\frac{۱}{۲} \times A'H' \times B'C'} = \frac{AH}{A'H'} \times \frac{BC}{B'C'} = k \times k = k^{۲}$$

تکلیف : کار در کلاس و تمرین های صفحه ۴۵ و ۴۶ (به جز تمرین آخر) را حل کنید .

فصل سوم: تابع

درس اول : آشنایی با برخی از تابع

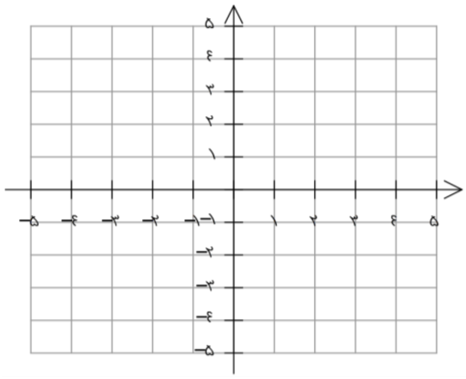
درس دوم : وارون یک تابع و تابع یک به یک

درس سوم : اعمال جبری روی توابع

درس اول : آشنایی با برخی از توابع

سال گذشته با مفهوم تابع و ضابطه آشنا شدیم و دیدیم که برای مشخص کردن یک تابع باید دامنه و ضابطه را داشته باشیم . بنا به قرارداد گفته شد که اگر ضابطه تابعی داده شده و دامنه آن صریحاً بیان نشده باشد ، دامنه را بزرگ ترین مجموعه ای که تابع در آن قابل تعریف است در نظر می گیریم .

تابع گویا



توابع کسری که صورت و مخرج چند جمله ای هستند را تابع گویا می نامند .

مثال: فرض کنید x نفر در یک کار سهیم باشند .

الف) مقدار سهم هر کس چقدر خواهد بود ؟

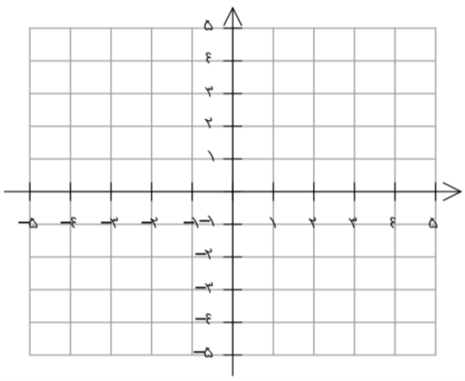
ب) اگر برای x مقادیر منفی نیز تعریف شود نمودار این تابع را رسم کنید .

ج) برای چه مقدار x این تابع تعریف نمی شود ؟

دامنه تابع گویا : توابع گویا تمام اعداد به جز اعدادی که .... کنند را می پذیرد پس :

$$y=\frac{f(x)}{g(x)} \quad ; \quad D=R-\{x\,|g(x)=\text{۰}\}$$

تابع رادیکالی



توابعی که شامل عبارت های رادیکالی هستند را تابع رادیکالی می گویند .

مثال : مربعی به مساحت x را در نظر بگیرید .

الف) طول ضلع مربع چقدر خواهد بود ؟

ب) نمودار تابع حاصل را رسم کنید .

ج) برای چه مقادیر x این تابع تعریف نمی شود ؟

دامنه تابع رادیکالی : توابع رادیکالی فقط اعداد .... را می پذیرد پس :

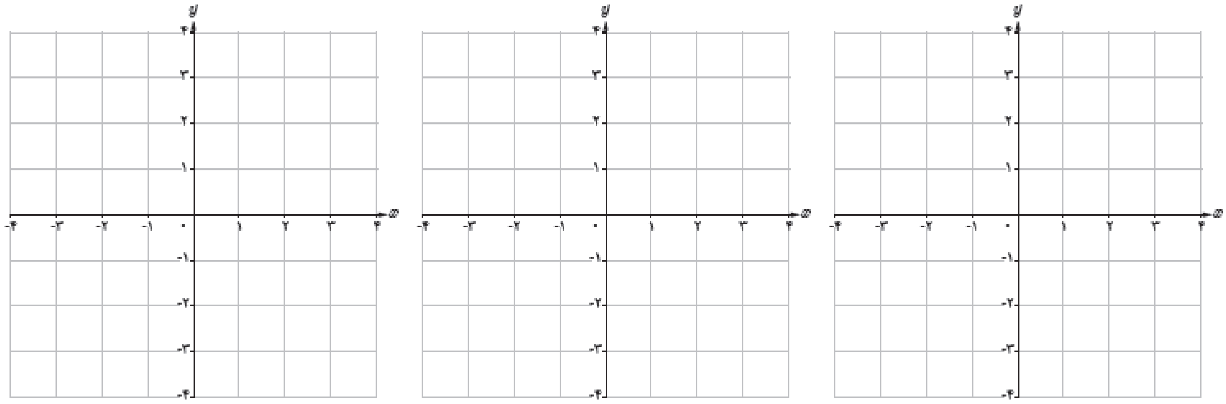
$$y=\sqrt{f(x)} \quad ; \quad D=\{x\,|f(x)\geq \text{۰}\}$$

تمرین : دامنه توابع زیر را مشخص کنید .

الف) $f(x)=\dfrac{۲x}{۳x-۱}$

ب) $f(x)=\sqrt{۳x-۱}$

تمرین : نمودار توابع $y=\dfrac{-۱}{x}$, $y=-\sqrt{x}+۱$, $y=۱+\sqrt{x+۲}$ را رسم کنید .



تساوی دو تابع

دو تابع f و g با هم مساوی هستند هرگاه الف) دامنه هر دو برابر باشد ب) به ازای هر x از دامنه ضابطه ها برابر باشند

تمرین : کدامیک از زوج توابع زیر با هم برابرند و کدام یک نیستند . چرا ؟

الف) $f(x)=\dfrac{x}{x}$ و $g(x)=۱$

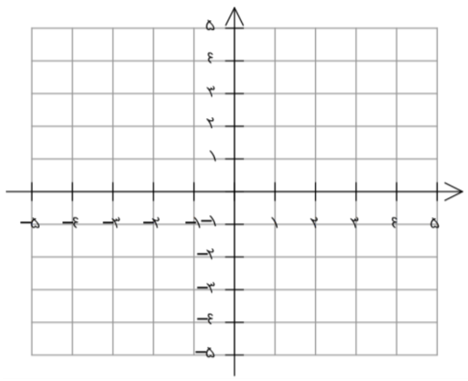
ب) $f(x)=\dfrac{۲x^{۲}+۲}{x^{۲}+۱}$ و $g(x)=۲$

تابع پله‌ای و جز صحیح

توابعی با چند ضابطه که هر ضابطه یک تابع ثابت است .

مثال : فرض کنید قیمت پارکینگ به این صورت است که برای ۲ ساعت و کمتر ، ۳۰۰۰ تومان و بیشتر از ۲ ساعت هر ساعت ۱۰۰۰ تومان به قیمت قبل اضافه می شود .

الف) x را مقدار ساعت در نظر گرفته و تابع آن را بنویسید.



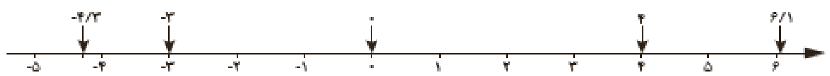
ب) نمودار تابع را رسم کنید .

مهمترین نوع تابع پله ای تابع جز صحیح است .

تابع جز صحیح به هر عدد صحیح ، خود آن عدد را نسبت می دهد و به هر عدد غیر صحیح ، بزرگترین عدد صحیح کوچک تر از آن عدد را نسبت می دهد . ضابطه این تابع به صورت $y=[x]$ نشان داده می شود .

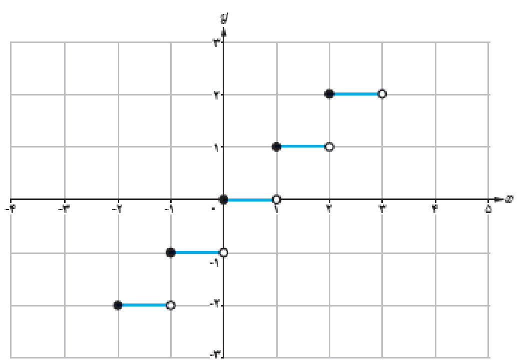
برای مثال :

$[-۳]=-۳$ $\quad$ $[-۴/۳]=-۵$ $\quad$ $[۰]=۰$ $\quad$ $[۶/۱]=۶$ $\quad$ $[۴]=۴$



مثال : تابع $y=[x]$ در بازه $[-۲,۳)$ رسم شده است جدول را کامل کنید . (این تابع دارای دامنه R و برد Z است)

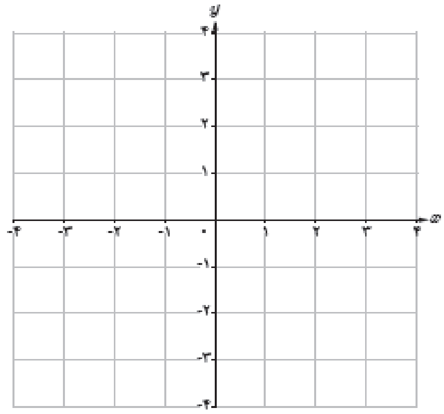
x	$y=[x]$
$-۲\le x<-۱$	$y=-۲$
$-۱\le x<۰$	
$۰\le x<۱$	
$۱\le x<۲$	
$۲\le x<۳$	

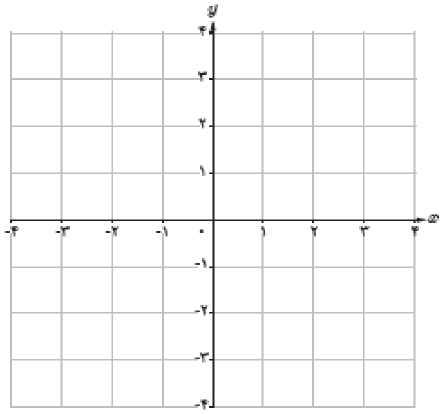


تمرین : حاصل جز صحیح های زیر را بیابید .

$[0/99999]=$ $\qquad$ $\left[\frac{-13}{15}\right]=$ $\qquad$ $\left[\frac{15}{4}\right]=$ $\qquad$ $[\pi]=$

تمرین : الف) نمودار تابع $y=[x+1]$ را رسم کنید . ب) نمودار تابع $y=[x]+1$ را با انتقال رسم کنید .



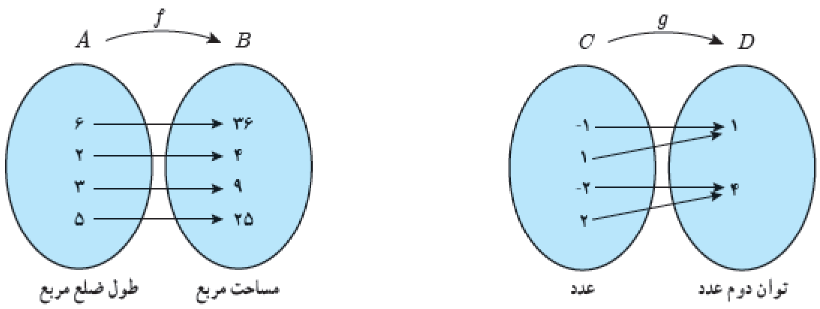


ج) از قسمت الف و ب نتیجه کلی مقابل را کامل کنید : $\quad [x+n]=[\ \ ]+....$ $\quad$ (n عدد صحیح است)

تکلیف : تمرین های صفحه ۵۶ را حل کنید .

درس دوم : وارون یک تابع و تابع یک به یک

دو تابع f و g را در نظر بگیرید .



هر دو تابع را به صورت زوج مرتب نوشته سپس جای مولفه ها را عوض کنید .

کدام یک از روابط جدید بدست آمده تابع هستند ؟

تابع وارون

اگر f یک تابع باشد وارون آن را با f^{-1} نمایش می دهند و به صورت $f^{-1}=\{(y,x)\,|\,(x,y)\in f\}$ تعریف می کنند . اگر f^{-1} تابع باشد آنگاه f را وارون پذیر و f^{-1} را وارون تابع f می نامند .

توجه : عدد منفی یک در بالای f صرفا یک علامت است و به توان منفی نیست پس f^{-1} را با $\frac{1}{f}$ اشتباه نگیریم .

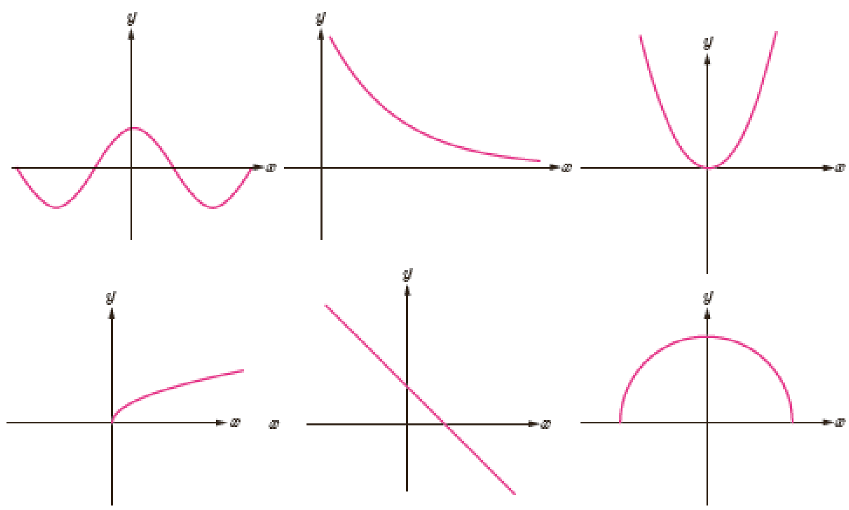
سوال : با توجه به دو تابع ذکر شده در اول درس فکر می کنید یک تابع برای آن که وارون پذیر باشد چه شرایطی باید داشته باشد ؟

تابع یک به یک

توابعی وارون پذیر هستند که به هر عضو از برد دقیقاً یک عضو از دامنه نظیر شود . در این صورت تابع را یک به یک می گویند . پس شرط وارون پذیری تابع آن است که تابع یک به یک باشد .

پس از نظر نموداری تابعی یکی به یک است که هر خط افقی آن را حداکثر در یک نقطه قطع کند. چرا ؟؟؟

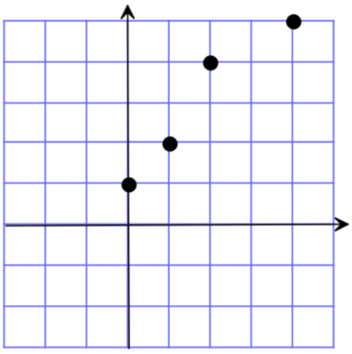
تمرین : کدام یک از نمودار های زیر یک به یک است ؟



تمرین : تابع $f=\{(a+b,۱),(۲,۳),(۴,۱),(a-b,۳),(۵,۶)\}$ یک به یک است . مقدار a و b را بیابید .

تمرین : اگر $f(x)=x^{۳}+۲x+۶$ باشد مقدار $f^{-۱}(۶)$ را بیابید .

رسم نمودار وارون تابع



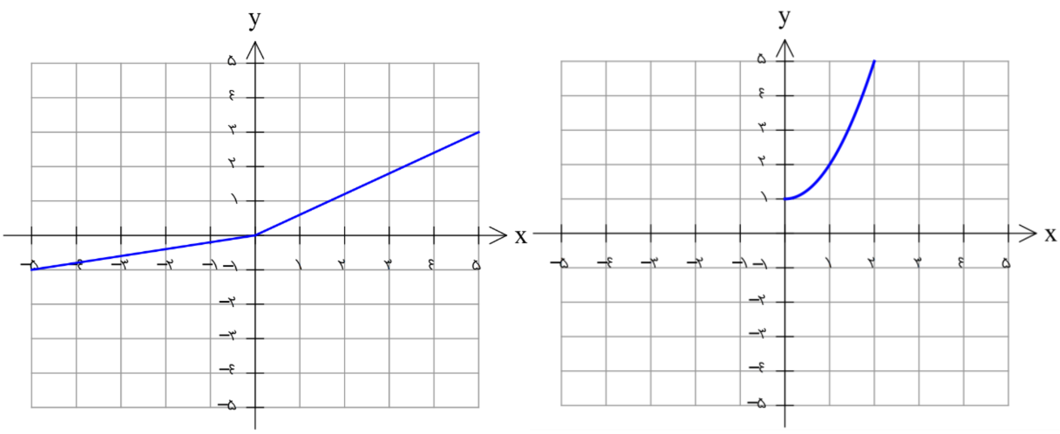
الف) تابع و وارون آن را به صورت زوج مرتب بنویسید .

ب) وارون تابع را در نیز در همین دستگاه مختصات رسم کنید.

ج) با توجه به نمودار تابع f و f^{-1} جاهای خالی را پر کنید :

تابع f و f^{-1} نسبت به خط .... قرینه هستند بنابراین برای رسم نمودار f^{-1} کافیست قرینه .... را نسبت به خط .... رسم کنیم .

تمرین : وارون توابع زیر را در همان دستگاه رسم کنید.



محاسبه وارون یک تابع

برای نوشتن معادله تابع وارون کافیست در خود تابع x را به صورت تابعی از y بنویسیم و در نهایت می توانیم به جای x علامت $f^{-1}(y)$ را قرار دهیم (همان طور که به جای y علامت $f(x)$ قرار می دهیم) در این صورت y ها همان اعضای دامنه تابع جدید هستند پس می توان برای پرهیز از اشتباهات سهوی ، جای x و y را عوض کنیم .

مثال : وارون تابع $f(x) = ۲x + ۳$ را بدست آورید .

$$y = ۲x + ۳$$

$$y - ۳ = ۲x \Rightarrow x = \frac{y - ۳}{۲}$$

$$f^{-1}(y) = \frac{y - ۳}{۲} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x - ۳}{۲}$$

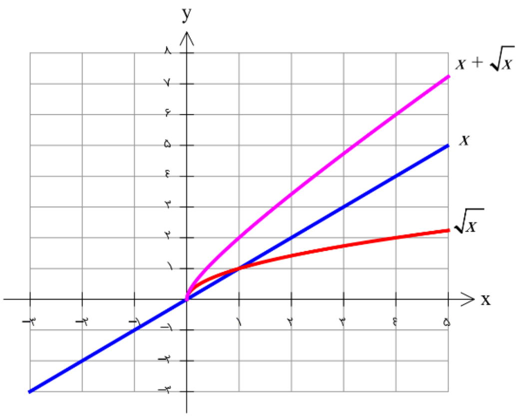
تمرین : وارون توابع زیر را بیابید .

الف) $y = -۳x + ۲$

ب) $y = \frac{۱ - ۲x}{۳}$

تکلیف : تمرین های صفحه ۶۳ و ۶۴ را حل کنید .

درس سوم : اعمال جبری بر روی توابع



همان گونه که اعمال جمع و ضرب در مورد اعداد و چند جمله ای ها انجام می شود در مورد توابع نیز می تواند استفاده شود با این تفاوت که توابع فقط در دامنه های مشترک (دامنه ای که هر دو تابع در آن حضور داشته باشند) می توانند با هم جمع یا ضرب شوند .

اعمال روی توابع :

الف) $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ $\qquad D_{f+g}=D_f\cap D_g$

ب) $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$ $\qquad D_{f-g}=D_f\cap D_g$

ج) $(f.g)(x)=f(x)g(x)$ $\qquad D_{f.g}=D_f\cap D_g$

د) $(f/g)(x)=f(x)/g(x)$ $\qquad D_{f/g}=D_f\cap D_g-\{x\mid g(x)=۰\}$

تمرین : اگر $f=\{(۱,۲),(-۱,۳),(۲,٤),(۰,۲)\}$ و $g=\{(-۱,٤),(۰,۰),(۲,۸),(٤,۳)\}$ و $h=\{(۱,۲),(۳,۷),(-۱,-۱)\}$ حاصل موارد خواسته شده را بیابید .

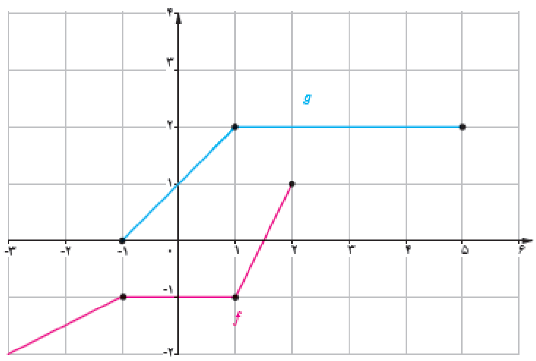
الف) حاصل $(f+g)(-۱)-(f.h)(۱)$ را بیابید .

ب) توابع $f-h, g.h, f/g$ را با اعضایشان مشخص کنید .

تمرین : اگر $f(x)=۲-x$ و $g(x)=\sqrt{x+۴}+x$. ضابطه و دامنه توابع $(f+g)(x)$ را بدست آورید .

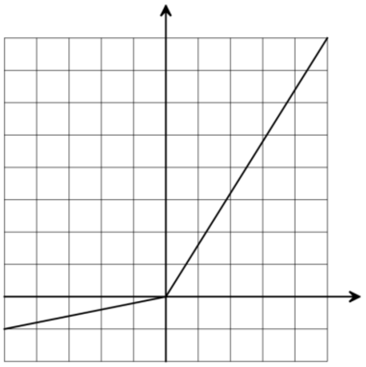
تمرین : اگر $f(x)=۲-x$ و $g(x)=۲x-۱$. ضابطه و دامنه توابع $(f/g)(x)$ را بدست آورید .

تمرین : نمودار دو تابع f و g رسم شده است. نمودار توابع $f+g, f-g$ را در همین دستگاه مختصات رسم کنید .



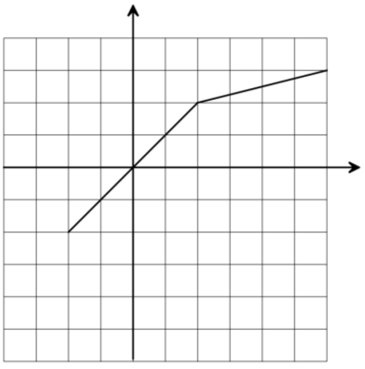
تمرین : اگرنمودار تابع $y=f(x)$ به صورت مقابل باشد .

نمودار تابع $y=۲f(x)$ رارسم کنید .



تمرین : اگرنمودار تابع $y=f(x)$ به صورت مقابل باشد .

نمودار تابع $y=-۲f(x)$ رارسم کنید .



نتیجه: برای رسم نمودار تابع $y=kf(x)$ کافیست عرض نقاط نمودار تابع $y=f(x)$ را k برابر کنیم . اگر $k=-1$ باشد در واقع نموار تابع نسبت به محور x قرینه می شود .

تکلیف : تمرین های صفحه ۶۹ و ۷۰ را حل کنید .

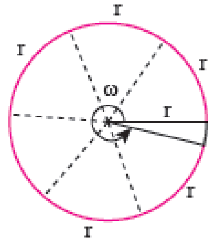
فصل چهارم :مثلثات

درس اول : واحد اندازه گیری زاویه

درس دوم : روابط تکمیلی بین نسبت های مثلثاتی

درس سوم : توابع مثلثاتی

درس اول : واحد اندازه گیری زاویه



رادیان : اگر محیط یک دایره را به کمان هایی به اندازه شعاع قسمت کنیم ، زاویه مرکزی مقابل به این کمان ها برابر با یک رادیان خواهد بود . یک دایره کامل $۲\pi \simeq ۶/۲۸ rad$ است .

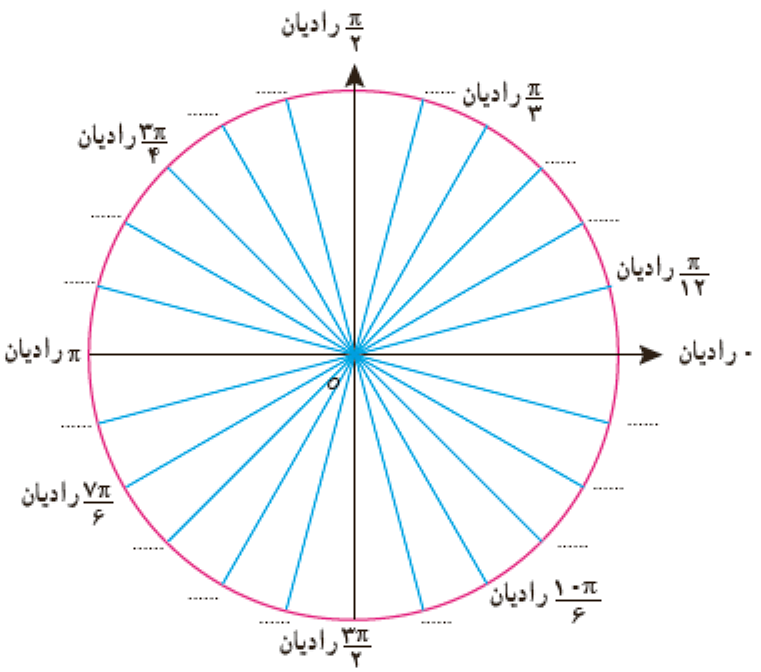
نتیجه : اندازه زاویه مرکزی مقابل به کمان l در دایره ای به شعاع r برابر است با : $\theta = \frac{l}{r} \quad rad$

می دانیم ۱۸۰ درجه که نیم دایره است معادل π رادیان است . بنابر این :

رادیان $\pi = ۱۸۰°$
- $÷۲$ → $۹۰° = ...$ رادیان
- $÷۳$ → $...... = \frac{\pi}{۳}$ ......
- $÷۴$ → $...... = ...$ رادیان
- $÷۶$ → $۳۰° = ...$ رادیان

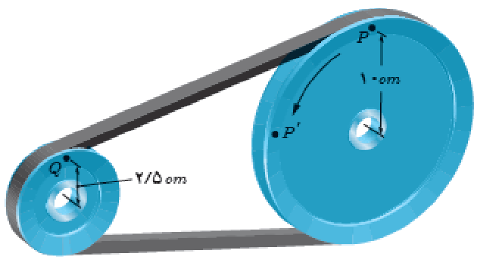
$\times \frac{\pi}{۱۸۰}$ رادیان
- $۳۰°$ → $\frac{\pi}{۶}$ رادیان
- $۴۵°$ → ....
- $۹۰°$ → ....
- $۳۶°$ → ....

نتیجه : برای تبدیل درجه به رادیان و برعکس می توان از نسبت $\frac{D}{۱۸۰} = \frac{R}{\pi}$ استفاده کرد .



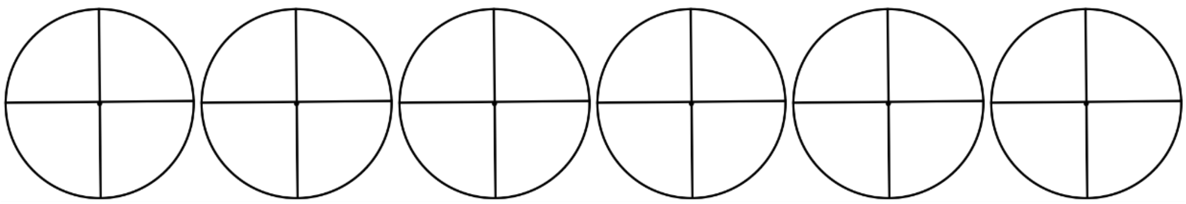
تمرین : شعاع یک زمین دو ۵۰۰ متر است، اگر دونده ای زاویه مرکزی ۷۰ درجه را بدود چند متر را طی خواهد کرد ؟

تمرین : در شکل زیر اگر قرقره بزرگ ۵۰ درجه بپرخد قرقره کوچک چند رادیان می چرخد ؟



تمرین : زاویه های زیر را در دایره های مثلثاتی داده شده به طور تقریبی نشان دهید .

۵π $\frac{۷\pi}{٤}$ $\frac{۳\pi}{٤}$ $\frac{۵\pi}{۲}$ $\frac{٤\pi}{۳}$ $\frac{۲\pi}{۳}$



تکلیف : تمرین های صفحه ۷۶ را حل کنید .

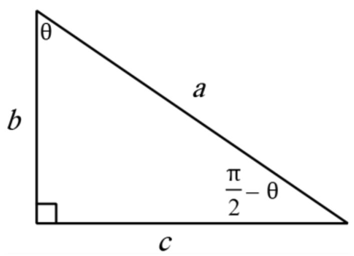
درس دوم : روابط تکمیلی بین نسبت های مثلثاتی

نسبت های مثلثاتی زاویه های اصلی :

θ(رادیان) / نسبت	۰	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۲}$	$\frac{۳\pi}{۲}$	۲π
sinθ	۰				۱		
cosθ			$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$				
tanθ		$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$					
cotθ	تعریف نشده				۰		

نسبت های مثلثاتی زاویه های متمم :

هرگاه مجموع دو زاویه ۹۰ باشد سینوس یکی برابر با کسینوس دیگری و تانژانت یکی برابر با کتانژانت دیگری است .



$$\left.\begin{array}{l}\sin(\frac{\pi}{۲}-\theta)=\frac{b}{a}\\ \cos\theta=\frac{b}{a}\end{array}\right\}\Rightarrow \sin(\frac{\pi}{۲}-\theta)=\cos\theta$$

به همین ترتیب خواهیم داشت :

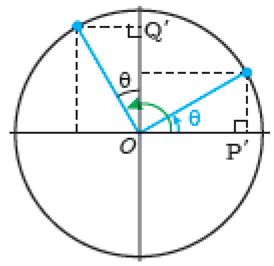
$$\sin(\frac{\pi}{۲}-\theta)=\cos\theta$$

$$\cos(\frac{\pi}{۲}-\theta)=\sin\theta$$

$$\tan(\frac{\pi}{۲}-\theta)=\cot\theta$$

$$\cot(\frac{\pi}{۲}-\theta)=\tan\theta$$

تمرین : با توجه به شکل زیر نسبت های مثلثاتی زاویه $(\frac{\pi}{۲}+\alpha)$ را به کمک دایره مثلثاتی بدست آورید .



$\sin(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=$

$\cos(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=$

$\tan(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=$

$\cot(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=$

نتیجه : در یک دور از دایره مثلثاتی در جهت مثبت داریم :

$$\sin x=\cos\alpha \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{\pi}{۲}+\alpha \\ x=\frac{\pi}{۲}-\alpha \end{cases} \quad , \quad \tan x=\cot\alpha \Rightarrow x=\frac{\pi}{۲}-\alpha$$

تمرین : در هر مورد به جای x در صورت امکان دو مقدار مناسب قرار دهید .

$\sin(۳x+۱۰^\circ)=\cos(۲۰^\circ-x)$

$\tan(x+\frac{\pi}{۴})=\cot ۲x$

نسبت های مثلثاتی زاویه های مکمل :

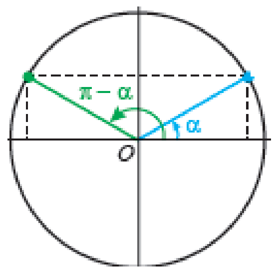
هرگاه مجموع دو زاویه ۱۸۰ باشد سینوس یکی برابر با سینوس دیگری و نسبت های دیگر یکی برابر با قرینه همان نسبت زاویه دیگری است .

$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$

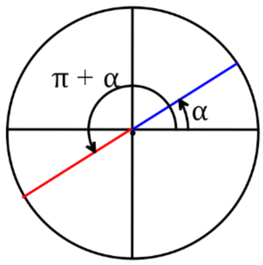
$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$

$\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha$

$\cot(\pi-\alpha)=-\cot\alpha$



تمرین : مانند بالا نسبت های مثلثاتی زاویه $(\pi+\alpha)$ را بدست آورید .



$\sin(\pi+\alpha)=$

$\cos(\pi+\alpha)=$

$\tan(\pi+\alpha)=$

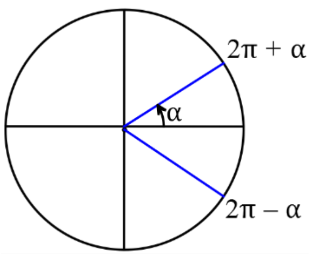
$\cot(\pi+\alpha)=$

نسبت های مثلثاتی زاویه‌های با مجموع یا تفاضل ۲π رادیان :

اگر ۲π که یک دور کامل است به زاویه بیافزاییم مکان زاویه تغییر نمی کند پس :

نسبت های مثلثاتی زاویه $(۲\pi+\theta)$ با نسبت های مثلثاتی متناظر θ برابر است .

نسبت های مثلثاتی زاویه $(۲\pi-\theta)$ با نسبت های مثلثاتی متناظر $-\theta$ برابر است .



نتیجه : در یک دور از دایره مثلثاتی در جهت مثبت داریم :

$$\sin x=\sin\alpha \Rightarrow \begin{cases} x=\alpha \\ x=\pi-\alpha \end{cases} \quad , \quad \cos x=\cos\alpha \Rightarrow \begin{cases} x=\alpha \\ x=۲\pi-\alpha \end{cases}$$

$$\tan x=\tan\alpha \Rightarrow \begin{cases} x=\alpha \\ x=\pi+\alpha \end{cases} \quad , \quad \cot x=\cot\alpha \Rightarrow \begin{cases} x=\alpha \\ x=\pi+\alpha \end{cases}$$

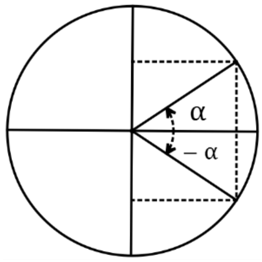
تمرین : در هر مورد به جای x دو مقدار مناسب قرار دهید .

$\sin(۳x+۱۰^\circ)=\sin(۵۰^\circ-x)$

$\tan(۲x+\frac{\pi}{۴})=\tan x$

$\cos(۲x-۲۰^\circ)=\cos(x-۱۰^\circ)$

نسبت های مثلثاتی زاویه های قرینه :



$$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$$
$$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$$
$$\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$$
$$\cot(-\alpha)=-\cot\alpha$$

نتیجه کلی : محاسبه نسبت های مثلثاتی کمان های $(k\pi\pm\alpha)$ و $\left(\frac{k\pi}{۲}\pm\alpha\right)$:

– ابتدا علامت نسبت مثلثاتی را در ربعی که کمان در آن قرار دارد را می نویسیم سپس :

– اگر کمان شامل ضرایب فرد $\frac{\pi}{۲}$ بود آن را حذف و نسبت را تغییر می دهیم ($\sin\longleftrightarrow\cos$, $\tan\longleftrightarrow\cot$)

– اگر کمان شامل ضرایب π بود آن را حذف کرده و نسبت را تغییر نمی دهیم .

تمرین : مقدار نسبت های مثلثاتی زیر را بیابید .

$\sin-\frac{۵\pi}{۴}=$ $\qquad$ $\cos\frac{۲\pi}{۳}=$

$\tan\frac{۷\pi}{۳}=$ $\qquad$ $\cot-\frac{۷\pi}{۴}=$

$\sin ۴۰۵^\circ=$ $\qquad$ $\cos-۳۳۰^\circ=$

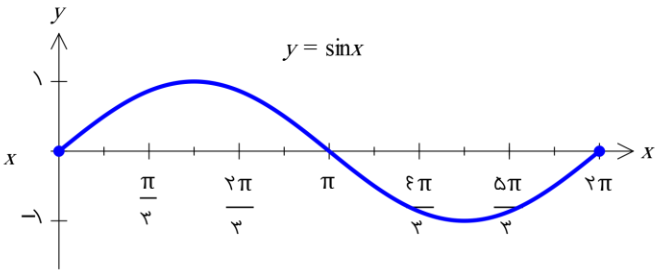
$\tan-۱۵۰^\circ=$ $\qquad$ $\cot ۲۴۰^\circ=$

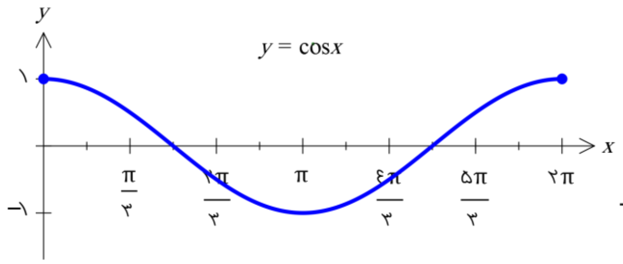
تمرین : ساده ترین صورت عبارت $A=\frac{۲\sin(\pi+\alpha)-۴\sin(\pi-\alpha)}{۳\cos(\pi+\alpha)-\cos(\pi-\alpha)}$ را بنویسید .

تکلیف : تمرین صفحه ۸۷ را حل کنید .

درس سوم : توابع مثلثاتی

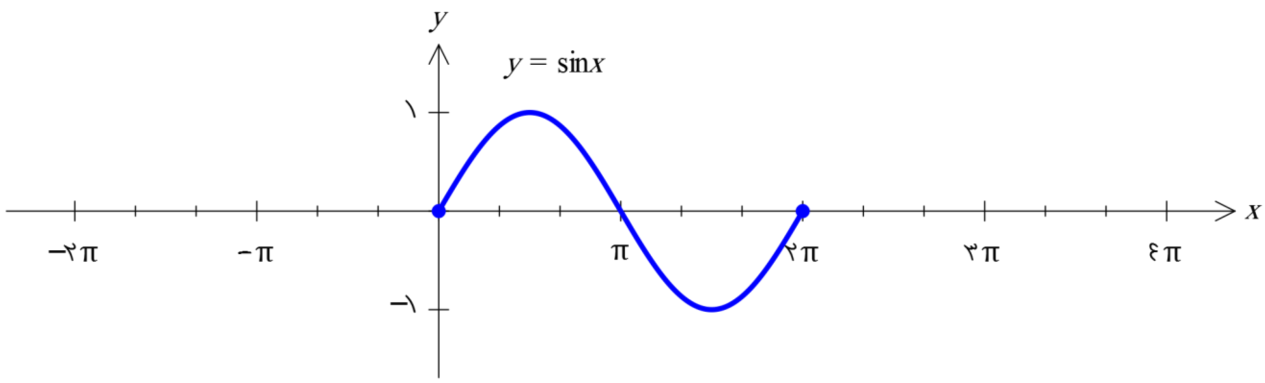
اگر x را مقادیر مختلف بر حسب رادیان در بازه $[0,2\pi]$ در نظر بگیریم ، به کمک نقطه یابی نمودار توابع $y=\sin x$ و $y=\cos x$ به صورت زیر بدست می آیند . (توجه : در توابع مثلثاتی کمان برحسب رادیان است مگر اینکه به وضوح اعلام شده باشد بر حسب درجه یا نوشته شود x°)

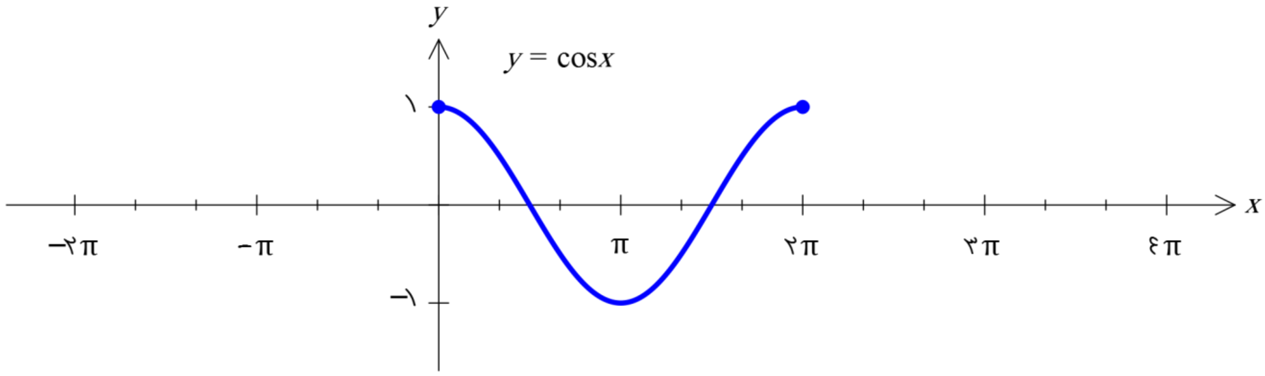




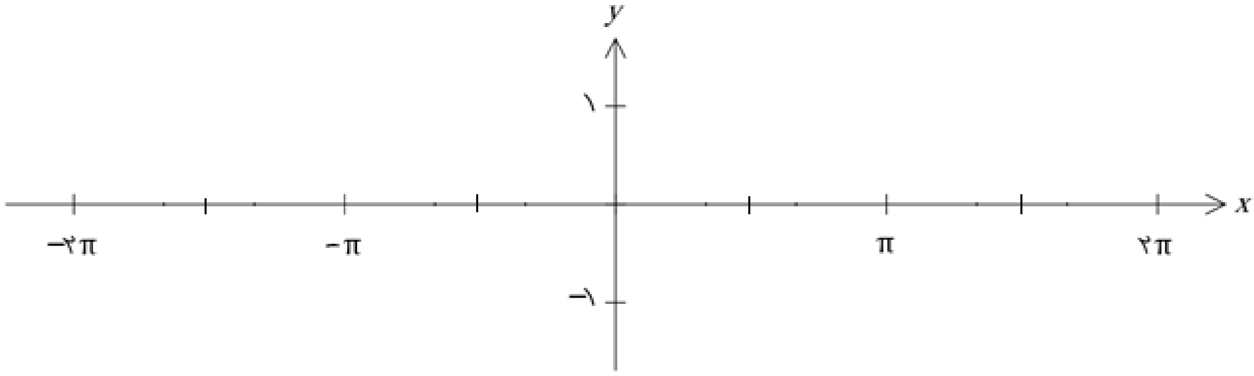
توجه : برد هر دو تابع $[-1,1]$ است و به ازای هر زاویه ای مقدار این توابع نمی تواند از این محدوده تجاوز کند .

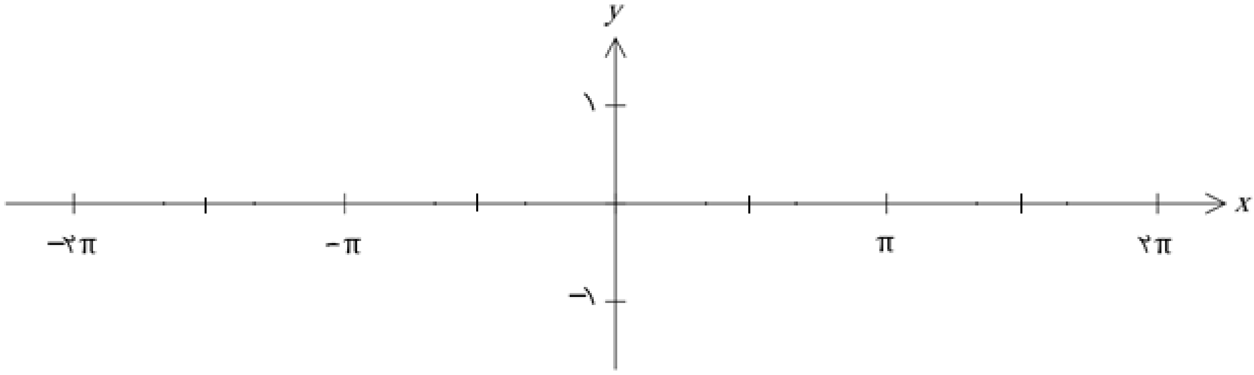
حال با توجه به مطالب درس قبل که فهمیدیم $\sin(x+2k\pi)=\sin x$ و $\sin(-x)=-\sin x$ و $\cos(x+2k\pi)=\cos x$ و $\cos(-x)=\cos x$ نمودار دو تابع سینوس و کسینوس را در دامنه R رسم کنید .

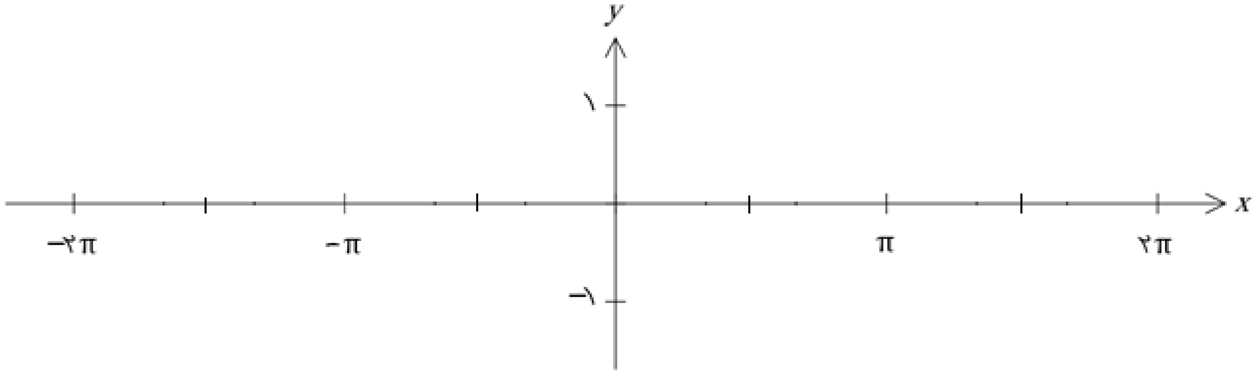




تمرین : به کمک انتقال نمودار توابع $y=2\cos x$, $y=\sin(x+\frac{\pi}{2})$, $y=1-\frac{1}{2}\cos x$ را رسم کنید .







تکلیف : تمرین های صفحه ۹۳ و ۹۴ را حل کنید .

فصل پنجم :توابع نمایی و لگاریتمی

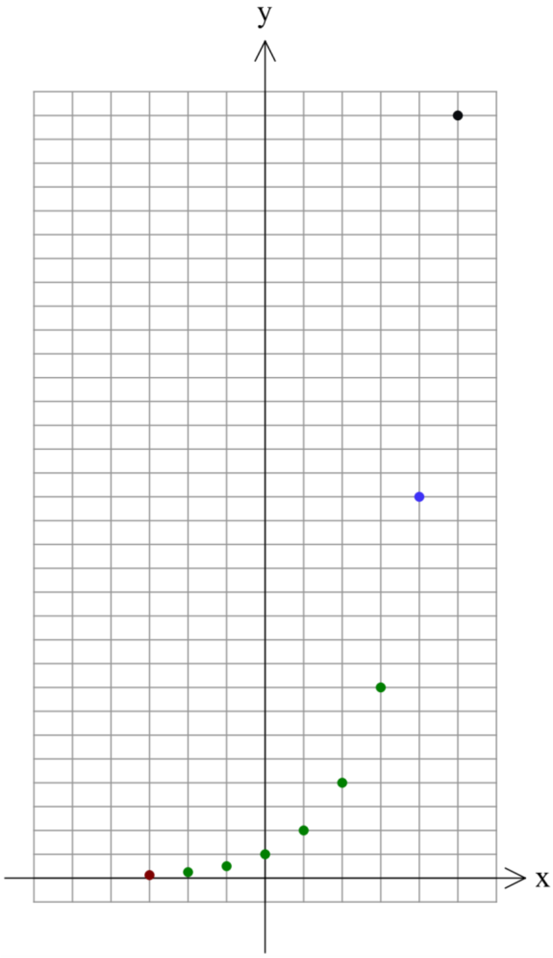
درس اول : تابع نمایی و ویژگی های آن

درس دوم : تابع لگاریتمی و ویژگی های آن

درس سوم : کاربرد های توابع نمایی و لگاریتمی

درس اول : تابع نمایی و ویژگی های آن

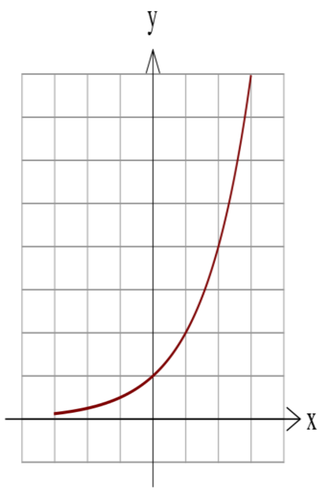
اگر توان های صحیح عدد ۲ را در نظر بگیریم نمودار مقابل را خواهیم داشت.



حال فرض کنید بخواهیم دامنه را به اعداد حقیقی تعمیم دهیم :

به عنوان مثال : $۲^{\sqrt{۲}} \simeq ۲/۶۶$ $\quad ۲^{\frac{۱}{۳}} = \sqrt[۳]{۲} \simeq ۱/۲۶$

پس نمودار به صورت زیر در می آید :



تابع نمایی : هر تابع به صورت $y = a^x$ $(a > ۰, a \neq ۱)$ را تابع نمایی می گویند .

نکته : در تابع نمایی $y = a^x$ با پایه $a > ۱$ تابع در حال رشد (صعودی) است بنابر این :

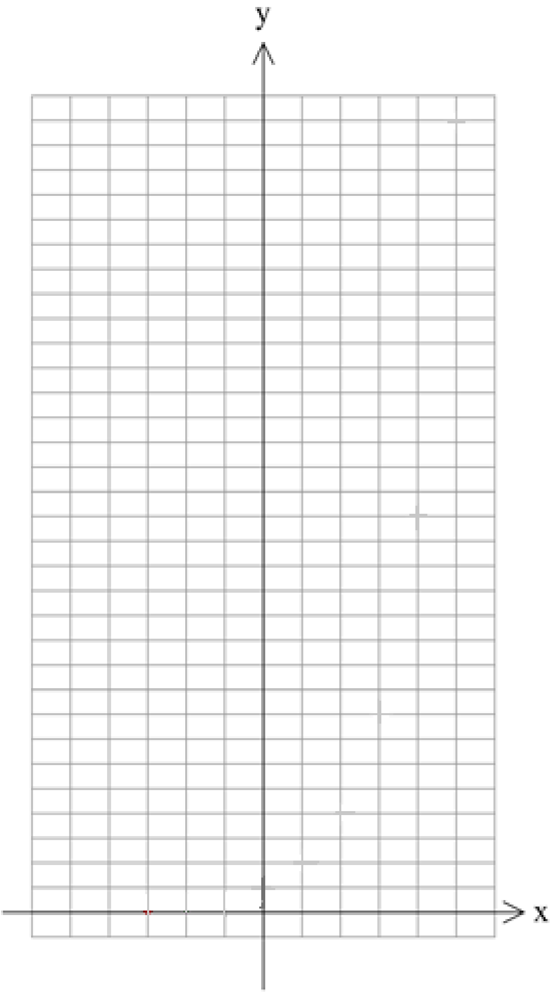
اگر $x < y$ آنگاه $a^x < a^y$

تمرین : اعداد زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید .

$۲^{\sqrt{۵}}$, $۲^{\frac{۳}{۲}}$, $۲^{\frac{۵}{۲}}$, $۲^{۰/۳}$, $۲^{۵}$, $۲^{-۰/۴}$, $۲^{-۱}$

تمرین : جواب نامعادله $۹^{۲x-۲} > \frac{۱}{۲۴۳}$ را بیابید .

تمرین :



الف) نمودار $y = (\frac{۱}{۲})^x$ را به کمک نقطه یابی رسم کنید .

ب) آیا نمودار $y = ۲^{-x}$ با نمودار $y = (\frac{۱}{۲})^x$ منطبق است ؟

ج) در مورد رابطه نمودار $y = a^x$ و $y = a^{-x}$ می توان گفت

: نمودار این دو تابع نسبت به محور .... ، .... هستند

نکته : در تابع نمایی $y = a^x$ با پایه $۰ < a < ۱$ تابع در حال کاهش (نزولی) است بنابر این :

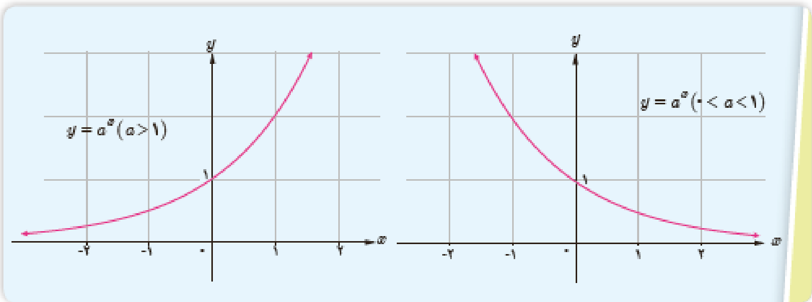
اگر $x < y$ آنگاه $a^y < a^x$

تمرین : اعداد زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید .

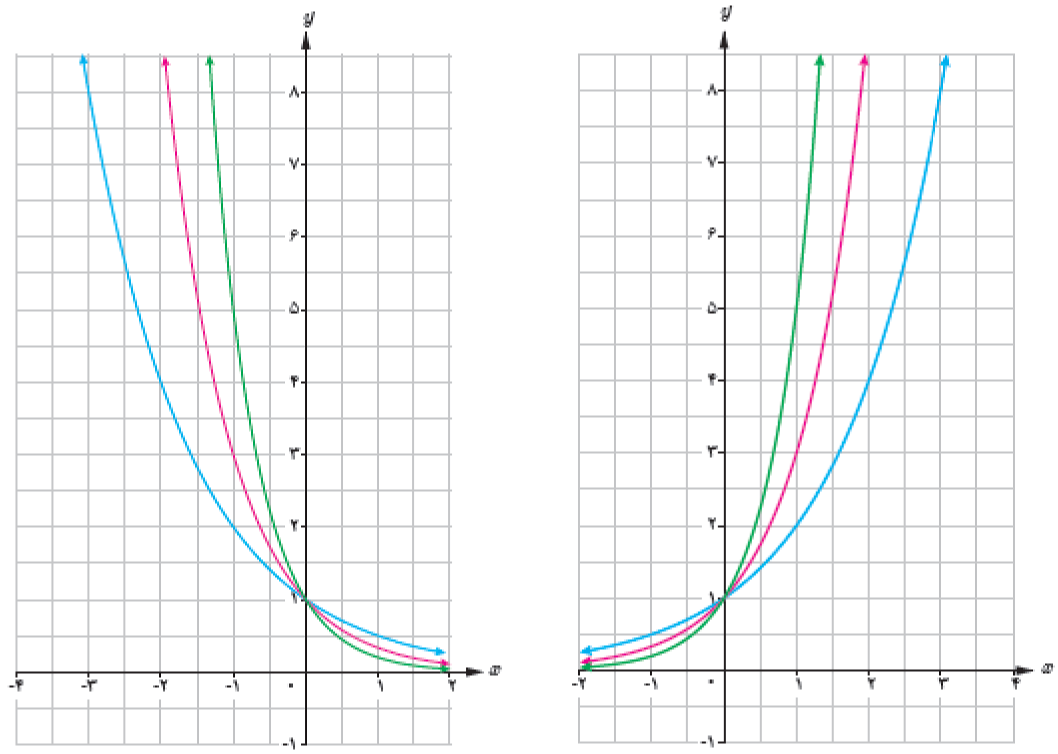
$(\frac{۱}{۲})^{-۱} \quad , \quad (\frac{۱}{۲})^{-۰/۵} \quad , \quad (\frac{۱}{۲})^{\frac{۲}{۵}} \quad , \quad (\frac{۱}{۲})^{\sqrt{۸}} \quad , \quad (\frac{۱}{۲})^{۳} \quad , \quad (\frac{۱}{۲})^{\frac{۵}{۳}}$

تمرین : جواب نامعادله $(\frac{1}{27})^x > (\frac{1}{3})^{x+4}$ را بیابید .

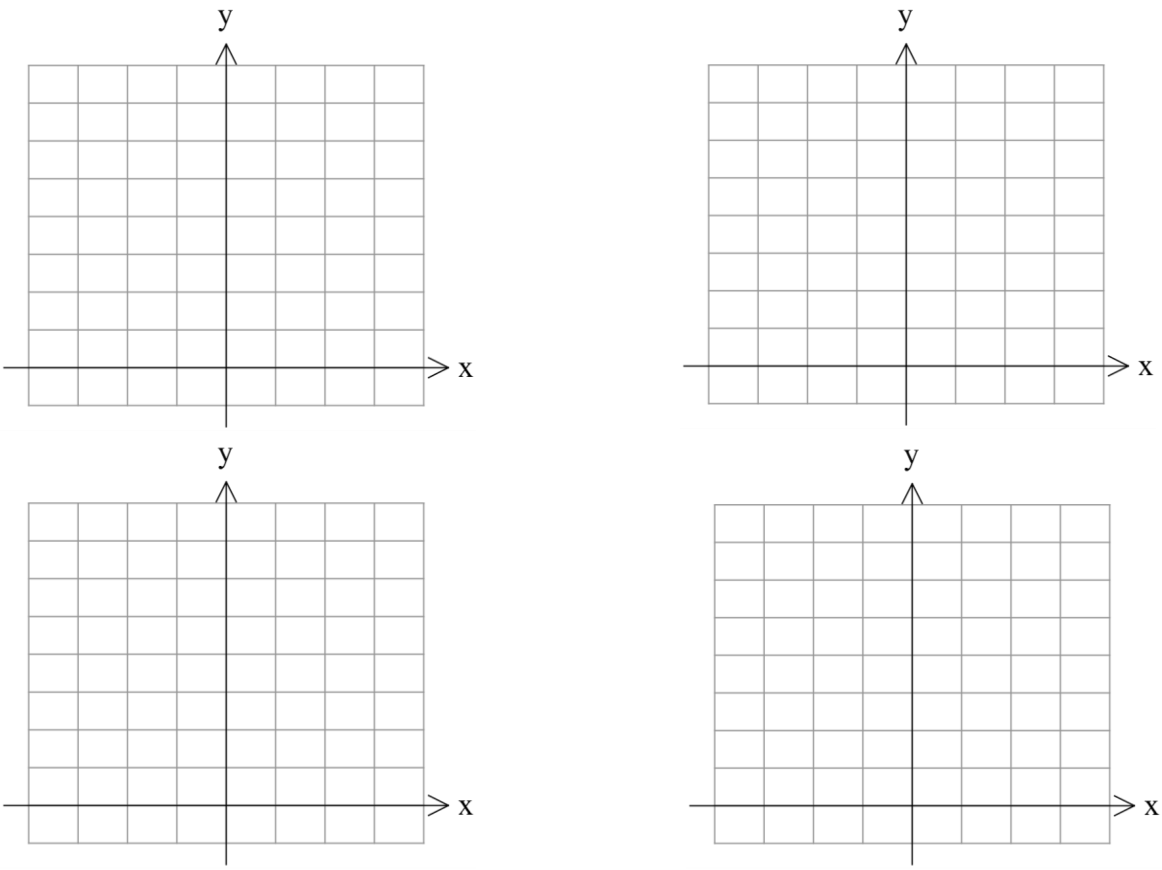
نمودار کلی توابع نمایی به صورت زیر است که همگی دارای دامنه R برد $(0,+\infty)$ هستند و از نقطه $(0,1)$ می گذرند .



تمرین : نمودار توابع $2^x , 3^x , 5^x$ و همچنین توابع $(\frac{1}{2})^x , (\frac{1}{3})^x , (\frac{1}{5})^x$ رسم شده است . ضابطه هر نمودار را در کنار آن بنویسید .



تمرین : نمودار توابع $y = -2^{x} - 1 , y = 2^{x-1} , y = (\frac{1}{2})^{x} + 2 , y = -(\frac{1}{2})^{x+2}$ را به کمک انتقال رسم کنید .



معادله نمایی :

اگر a مثبت و مخالف یک باشد و $a^{x} = a^{y}$ آنگاه $x = y$.

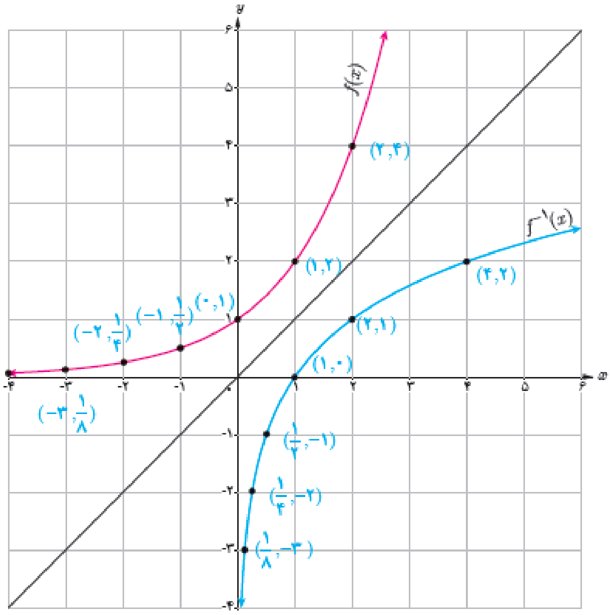
تمرین : جواب معادله $(\frac{81}{16})^{x-1} = (\frac{2}{3})^{x+2}$ رابیابید .

تکلیف : تمرین های صفحه ۱۰۴ را حل کنید .

درس دوم : تابع لگاریتمی و ویژگی های آن

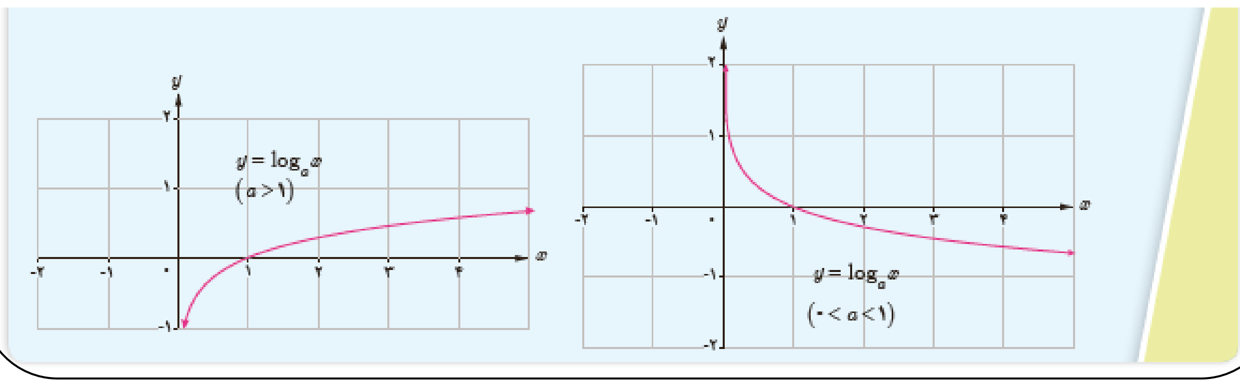
فرض کنید تابع رشد یک نوع باکتری به صورت $f(t)=۲^t$ است . به راحتی می توان گفت در زمان $t=۲/۵$ مقدار این باکتری حدود $f(۲/۵)=۲^{۲/۵}\simeq ۵/۶۶$ است . حال سوال اینجاست که اگر بخواهیم مثلاً بدانیم در چه زمانی مقدار این باکتری تقریبا ۶۰ می شود ، چه باید کرد ؟

همان طور که از نمودار تابع نمایی معلوم است، تابع نمایی یک تابع یکی به یک است پس وارون پذیر است و می توان وارون آن را با قرینه کردن نمودار نسبت به خط $y=x$ رسم کرد پس :

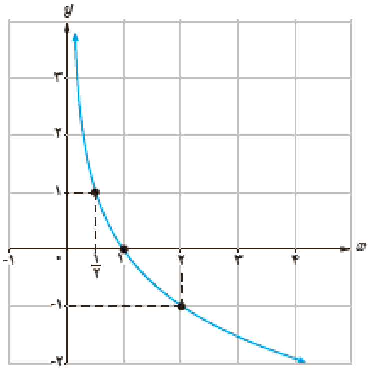


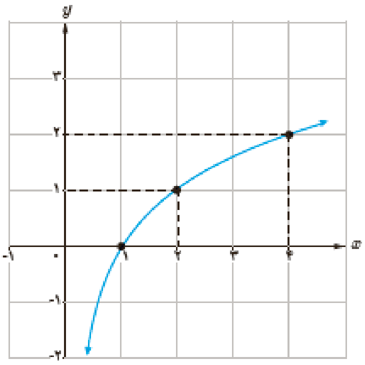
تابع لگاریتم : وارون تابع نمایی $f(x)=a^x$ را تابع لگاریتم بر مبنای a می نامند و با نماد $f^{-1}(x)=\log_a^x$ نمایش می دهند. که در آن $a>۰,a\neq ۱,x>۰$ است .

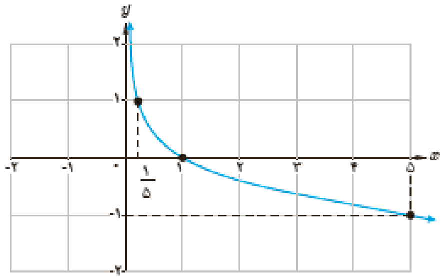
نمودار کلی توابع لگاریتمی به صورت زیر است و همگی از نقطه (۱,۰) می گذرند .

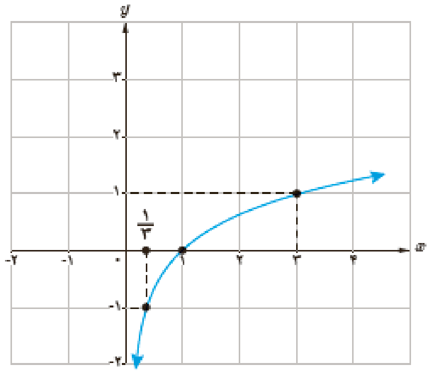


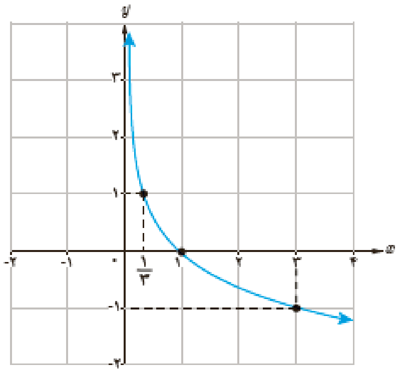
تمرین : نمودار چند تابع لگاریتمی داده شده است ، ضابطه هر کدام را مشخص کنید .

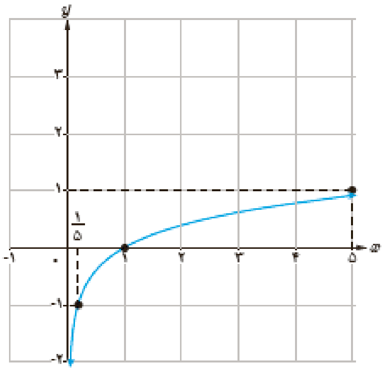

(۱)


(۲)

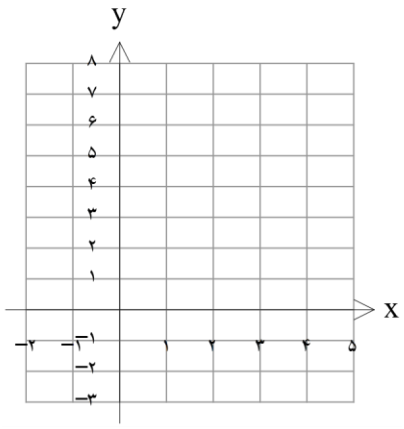

(۳)


(۴)


(۵)


(۶)

تمرین : نمودار تابع $y = 1 - \log_{\frac{1}{2}}^{x+1}$ را به کمک انتقال رسم کنید .



تعریف لگاریتم : به طور کلی تعریف لگاریتم به صورت زیر است :

$$\boxed{x = a^y \Leftrightarrow \log_a^x = y}$$

تمرین : مقادیر زیر را حساب کنید .

$\log_{۱۰}^{۰/۰۰۱} =$ $\qquad$ $\log_{۳}^{\frac{۱}{۲۷}} =$ $\qquad$ $\log_{۲}^{۸} =$

$\log_{\frac{۱}{۲}}^{۱۶} =$ $\qquad$ $\log_{\frac{۱}{۵}}^{۲۵} =$ $\qquad$ $\log_{۵}^{\sqrt{۱۲۵}} =$

تمرین : تساوی توانی را به صورت لگاریتمی و تساوی لگاریتمی را به صورت توانی بنویسید .

$\log_{۳}^{۱} = ۰ \Rightarrow$ $\qquad$ $\log_{۵}^{\frac{۱}{۶۲۵}} = -۴ \Rightarrow$

$۲^{-۱۰} = \frac{۱}{۱۰۲۴} \Rightarrow$ $\qquad$ $۳^{۴} = ۲۴۳ \Rightarrow$

توجه : لگاریتم بر مبنای ۱۰ را لگاریتم اعشاری می نامند و معمولاً مبنا نوشته نمی شود . مثال : $\log ۲$

ویژگی های لگاریتم

۱) $\log_{a}^{۱} = ۰$

اثبات : چون همواره $a^{۰} = ۱$

۲) $\log_{a}^{a} = ۱$

اثبات : چون همواره $a^{۱} = a$

۳) $\log_{a}^{xy} = \log_{a}^{x} + \log_{a}^{y}$

اثبات : فرض کنید $\log_{a}^{x} = p$ و $\log_{a}^{y} = q$ در این صورت $x = a^{p}, y = a^{q}$. پس داریم $xy = a^{p+q}$ و طبق تعریف لگاریتم $\log_{a}^{xy} = p + q$ در نتیجه $\log_{a}^{xy} = \log_{a}^{x} + \log_{a}^{y}$

مثال : اگر $\log_{۲}^{۳}=۱/۵۸$ و $\log_{۲}^{۵}=۲/۳۲$ باشد . مقدار $\log_{۲}^{۱۵}$ را بیابید .

حل : $\log_{۲}^{۱۵}=\log_{۲}^{۳}+\log_{۲}^{۵}=۱/۵۸+۲/۳۲=۳/۹$

۴) $\log_{a}^{x/y}=\log_{a}^{x}-\log_{a}^{y}$

اثبات :

مثال : اگر $\log_{۱۰}^{۲}=a$ مقدار $\log_{۱۰}^{۵}$ را بیابید .

حل : $\log ۵=\log\frac{۱۰}{۲}=\log ۱۰-\log ۲=۱-a$

۵) $\log_{a}^{x^{n}}=n\log_{a}^{x}$

اثبات :

مثال : مقدار عبارت $\frac{۱}{۲}\log ۱۶+۲\log ۵$ را بیابید .

حل : $\frac{۱}{۲}\log ۴^{۲}+\log ۵^{۲}=۲\times\frac{۱}{۲}\log ۴+\log ۲۵=\log ۴+\log ۲۵=\log ۱۰۰=\log ۱۰^{۲}=۲\log ۱۰=۲$

۶) $\log_{a^{n}}^{x}=\frac{۱}{n}\log_{a}^{x}$

مثال : مقدار عبارت $\log_{\sqrt{۲}}^{۱۲۸}$ چقدر است ؟

حل : $\log_{۲^{\frac{۱}{۲}}}^{۱۲۸}=\frac{۱}{\frac{۱}{۲}}\log_{۲}^{۱۲۸}=۲\log_{۲}^{۱۲۸}=۲\log_{۲}^{۲^{۷}}=۷\times۲\log_{۲}^{۲}=۱۴$

بیشتر بدانیم ....

۷) $\log_a^x = \dfrac{\log_b^x}{\log_b^a}$ (قاعده تغییر مبنا)

نتیجه ۱: $\log_a^x = \dfrac{۱}{\log_x^a}$

نتیجه ۲: $\log_b^a \times \log_c^b = \log_c^a$ (می توان به تعداد بیشتر نیز تعمیم داد)

مثال : اگر $\log ۲ = a$ و $\log ۳ = b$ مقدار $\log_۶^{۱۵}$ را بیابید .

حل : $\log_۶^{۱۵} = \dfrac{\log ۱۵}{\log ۶} = \dfrac{\log ۳\times۵}{\log ۲\times۳} = \dfrac{\log ۳+\log ۵}{\log ۲+\log ۳} = \dfrac{b+(۱-a)}{a+b} = \dfrac{b-a+۱}{b+a}$

مثال : حاصل عبارت $\log_۳^۲ \times \log_۴^۳ \times \log_۵^۴ \times .... \times \log_{۶۴}^{۶۳}$ را بیابید .

حل : $\log_{۶۴}^۲ = \log_{۲^۶}^۲ = \dfrac{۱}{۶}$

۸) $b^{\log_a^x} = x^{\log_a^b}$

مثال : حاصل $۲^{(۱+۲\log_۲^۵)}$ چقدر است ؟

حل : $۲^{(۱+۲\log_۲^۵)} = ۲^۱ \times ۲^{۲\log_۲^۵} = ۲\times ۲^{\log_۲^{۲۵}} = ۲\times ۲۵^{\log_۲^۲} = ۲\times ۲۵ = ۵۰$

....

تمرین : حاصل عبارت $\log\dfrac{۱}{۲} + \log\dfrac{۲}{۳} + \log\dfrac{۳}{۴} + ... + \log\dfrac{۹۹}{۱۰۰}$ چیست ؟

تمرین : اگر $\log ۲ = a$ باشد حاصل $\log ۱/۲۵$ چقدر است ؟

تمرین : مقدار عبارت $\log_{\sqrt{10}}^{5}+2\log_{1000}^{8}$ را بیابید .

معادله لگاریتمی :

الف) اگر $\log_a^x=\log_a^y$ آنگاه $x=y$.

ب) اگر $\log_a^x=b$ می توان از تعریف لگاریتم برای حل معادله بهره برد .

توجه توجه !!! : در حل معادلات لگاریتمی باید به دامنه تابع لگاریتمی نیز توجه داشت و جواب هایی قابل قبول خواهند بود که در دامنه لگاریتم باشند . (یعنی الف) ضابطه و مبنا را منفی نکند　ب) مبنا یک نشود)

تمرین : معادله $\log_x^{x-2}+\log_x^{2x-3}=2$ را حل کنید .

تمرین : معادله $\log(x-10)+2\log x=1+\log(x+1)$ را حل کنید .

تمرین : معادله $2\log_4^{x-1} = 3$ را حل کنید ؟

تمرین : معادله $\log_3^{(x-1)} + \log_3^{(\frac{x}{2}+1)} = 2$ را حل کنید .

تکلیف : تمرین های صفحه ۱۱۳و ۱۱۴را حل کنید .

درس سوم : کاربرد های تابع نمایی و لگاریتمی

۱) رشد یا کاهش درصدی : مسائلی هستند که در آن مقدار یک چیز در هر دوره به اندازه درصد خاصی افزایش یا کاهش می یابند از تابع نمایی $f(t)=a(1+r)^t$ تبعیت می کنند که در آن a مقدار اولیه آن چیز و r درصد افزایش یا کاهش (در صورت کاهش r عدد منفی می شود) در هر دوره است .

مثال : اگر جمعیت کشوری ۳۰ میلیون و نرخ رشد سالانه جمعیت آن کشور ۲ درصد باشد .

الف) بعد از ۳۵ سال جمعیت کشور چقدر است ؟

حل : حدود ۶۰ میلیون نفر خواهند شد $f(35)=30(1/02)^{35}\simeq 30\times 2=60$

ب) بعد از چند سال جمعیت به ۱۰۰ میلیون نفر می رسد ؟

حل : حدود ۶۰/۸ سال طول خواهد کشید $100=30(1/02)^t \Rightarrow \frac{10}{3}=(1/02)^t \Rightarrow t=\log_{1/02}^{\frac{10}{3}}\simeq 60/8$

تمرین : با نرخ سود ۱۶ رصد سالانه یک بانک ، اگر ۱۰ میلیون تومان پول در این بانک قرار دهیم .

الف) بعد از ۵ سال پول شما چقدر شده است ؟

ب) بعد از چند سال پول شما حدود ۴۴ میلیون تومان خواهد شد ؟

۲) شدت زلزله : اگر انرژی آزاد شده از زلزله بر حسب اِرگ (Erg) را E و شدت زلزله بر حسب ریشتر را M در نظر بگیریم داریم : (ارگ برابر 10^{-7} ژول است) $\log E=11/8+1/5M$

تمرین : انرژی آزاد شده از زلزله ای ۶ ریشتری چقدر است ؟

۳) قدمت و نیمه عمر : اگر یک ماده در مدت ثابتی نصف شود آن دوره را نیمه عمر آن ماده می گویند اگر نیمه عمر را با a نمایش دهیم، در این صورت در مدت زمان t ، به تعداد $\frac{t}{a}$ بار ، جرم ماده نصف شده است و کسر باقی مانده از ماده را می توان از رابطه زیر بدست آورد : $(\frac{1}{2})^{\frac{t}{a}} = b$ (کسر باقی مانده در واقع نسبت مقدار ثانویه به مقدار اولیه است)

توجه : نوعی ایزوتوپ کربن به نام کربن ۱۴ در موجودات وجود دارد که پس از مرگشان شروع به از بین رفتن می کند و نیمه عمر آن حدود ۵۷۳۰ سال است که از آن برای تخمین قدمت یک فسیل استفاده می شود .

تمرین : فسیلی یافت شده که مقدار کربن ۱۴ باقی مانده از آن فقط ۲۰ درصد مقدار اولیه است . قدمت این فسیل را تخمین بزنید .

تمرین : نیمه عمر نوعی ماده هسته ای ۱۵ سال است . اگر جرم اولیه این ماده ۱۵۰ گرم بوده باشد . پس از ۷۰ سال جرم باقی مانده آن چقدر است ؟

فصل ششم :حد و پیوستگی

درس اول : فرایند های حدی

درس دوم : محاسبه حد توابع

درس سوم : پیوستگی

درس اول : فرایند های حدی

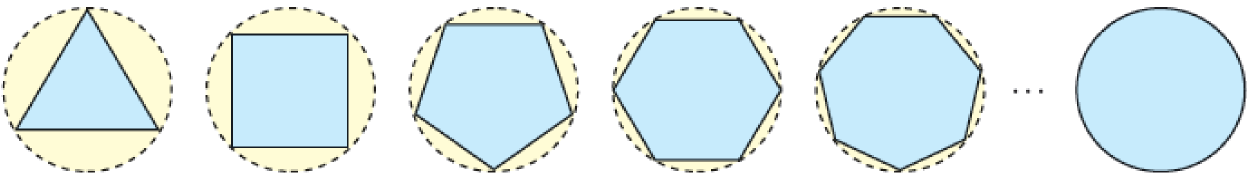
بیشتر پدیده های طبیعی پس از مدل سازی به صورت یک تابع در می آیند و گاهی لازم است رفتار این توابع را در نزدیکی یک نقطه مورد ارزیابی قرار دهیم . مفهوم « حد » ابزار مناسبی برای این کار است .

به عنوان مثال ریاضی دانان بعد از اینکه دانستند نسبت محیط به قطر دایره عدد ثابتی است در صدد بر آمدند تا این عدد ثابت را با دقت زیاد بدست آورند . آنها با رسم چند ضلعی های منتظم محاطی (و البته محیطی) و افزایش تعداد اضلاع آن به این هدف دست یابند .

عدد π تا ۱۰ رقم اعشار در بیت زیر آمده است . آن را کشف کنید !!!

خـــرد و دانـــش و آگـــاهی دانشـــمندان　　　　ره ســـر منـــزل مقصـــود بمـــا آمـــوزد

دایره زیر را که دارای شعاع یک است در نظر بگیرید :



اگر مساحت n ضلعی درون دایره را با A_n نمایش دهیم داریم :

n	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۲۰۰	۳۰۰	۴۰۰	۵۰۰	۱۰۰۰
A_n	۱/۲۹۹۰۳	۲	۲/۳۷۷۶۴	۲/۵۹۸۰۷	۲/۷۳۶۰۸	۲/۸۲۸۴۲	۲/۸۹۲۵۴	۲/۹۳۸۹۲	۳/۱۴۱۰۷	۳/۱۴۱۳۶	۳/۱۴۱۴۶	۳/۱۴۱۵۰	۳/۱۴۱۵۷

با زیاد شدن تعداد اضلاع چند ضلعی ، مساحت آن به عدد π که مساحت دایره است ، نزدیک می شود .

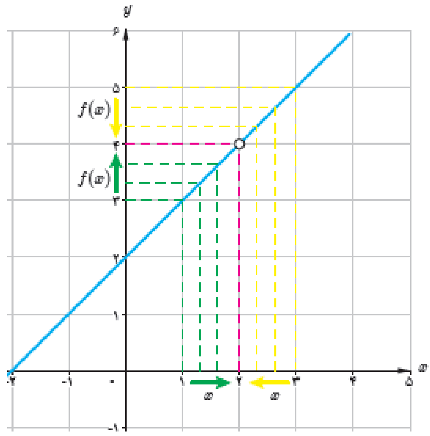
حال فرض کنید می خواهیم رفتار تابع $f(x)=\dfrac{x^{۲}-۴}{x-۲}$ را در اطراف عدد $x=۲$ بررسی کنیم .

از آنجایی که تابع در ۲ تعریف نشده است پس در این نقطه مقدار ندارد ولی به ازای مقادیر غیر از ۲ می توان تابع را ساده کرد و $f(x)=x+۲$ را بدست آورد . حال مقادیر تابع را در اطراف ۲ بررسی می کنیم :

x از چپ به عدد ۲ نزدیک می‌شود　　　x از راست به عدد ۲ نزدیک می‌شود

x	۱	۱/۵	۱/۹	۱/۹۹	۱/۹۹۹	$\rightarrow$	۲	$\leftarrow$	۲/۰۰۰۱	۲/۰۰۱	۲/۰۱	۲/۵	۳
$f(x)$	۳	۳/۵	۳/۹	۳/۹۹	۳/۹۹۹	$\rightarrow$	?	$\leftarrow$	۴/۰۰۰۱	۴/۰۰۱	۴/۰۱	۴/۵	۵

$f(x)$ به عدد ۴ نزدیک می‌شود　　　$f(x)$ به عدد ۴ نزدیک می‌شود



با نزدیک شدن x به ۲ از هر دو طرف، مقدار تابع به عدد ۴ نزدیک می شود .

بیایید درستی این مطلب را از روی نمودار تابع بررسی کنیم :

در این صورت می گوییم وقتی $x \to ۲$ (x به ۲ میل می کند)

حد تابع برابر ۴ است و می نویسیم :

$$\lim_{x \to ۲} f(x) = ۴$$

تمرین : تابع $f(x) = \begin{cases} x + ۱ & x \neq ۲ \\ ۱ & x = ۲ \end{cases}$ را در نظر بگیرید .

الف) جدول زیر را کامل کنید .

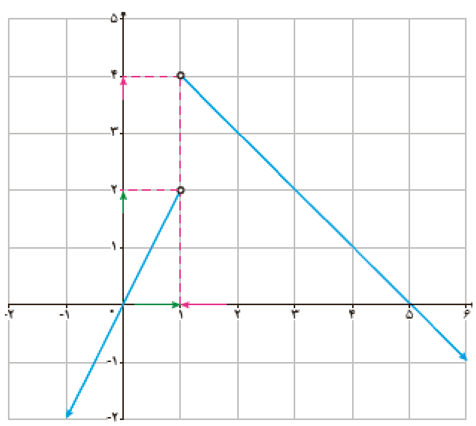
x	۱/۹	۱/۹۹	۱/۹۹۹	۱/۹۹۹۹	$\to$	۲	$\leftarrow$	۲/۰۰۰۱	۲/۰۰۱	۲/۰۱	۲/۱
$f(x)$					$\to$		$\leftarrow$				

ب) حد تابع در ۲ چقدر است ؟

ج) مقدار تابع در ۲ چقدر است ؟

تعریف حد یک تابع :

اگر تابع f در بازه (a,b) شامل نقطه x_0 (به جز احتمالاً خود x_0) تعریف شده باشد . می گوییم « حد تابع f وقتی x به x_0 میل می کند برابر عدد حقیقی L است » ، هر گاه مقادیر تابع f را به هر اندازه دلخواه بتوان به L نزدیک کرد ، به شرط آنکه متغیر x از دو طرف به قدر کافی به x_0 نزدیک شود . در این صورت می نویسیم : $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$



تمرین : نمودار مقابل را در نظر بگیرید .

الف)وقتی از سمت راست تا حد ممکن به ۱ نزدیک می شوید

مقدار تابع به چه عددی نزدیک می شود ؟

ب)قسمت ب را در مورد نزدیک شدن از چپ پاسخ دهید .

ج) حد این تابع در نقطه ۱ چقدر است ؟

حدود یک طرفه :

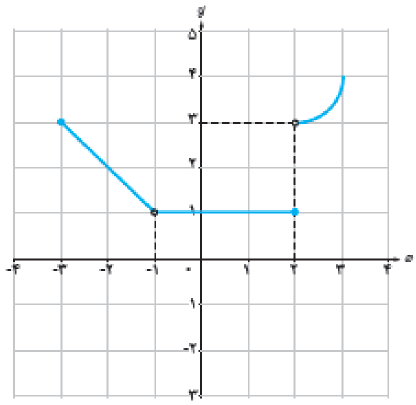
حد راست : اگر تابع f در بازه (x_0,b) تعریف شده باشد . حد راست f در x_0 برابر عدد L_1 است ، هرگاه مقادیر تابع به هر اندازه دلخواه بتواند به L_1 نزدیک شود ، به شرط آنکه x از سمت راست به قدر کافی به x_0 نزدیک شود . در اینصورت می نویسیم : $\lim_{x\to x_0^+} f(x)=L_1$

حد چپ : اگر تابع f در بازه (a,x_0) تعریف شده باشد . حد چپ f در x_0 برابر عدد L_2 است ، هرگاه مقادیر تابع به هر اندازه دلخواه بتواند به L_2 نزدیک شود ، به شرط آنکه x از سمت چپ به قدر کافی به x_0 نزدیک شود . در اینصورت می نویسیم : $\lim_{x\to x_0^-} f(x)=L_2$

توجه : شرط آنکه تابع f در x_0 حد داشته باشد آن است که تابع در این نقطه دارای حد چپ و راست بوده و این حدود با هم برابر باشند .

تمرین : آیا تابع $y=\sqrt{x-2}$ در $x=2$ حد دارد ؟ چرا ؟

تمرین : حدهای زیر را در صورت وجود بیابید .



$\lim_{x\to 2} f(x)$ ... $\quad \lim_{x\to 2^-} f(x)$ ... $\quad \lim_{x\to 2^+} f(x)$ ...

$\lim_{x\to -1} f(x)$ ... $\quad \lim_{x\to -1^+} f(x)$ ... $\quad \lim_{x\to -1^-} f(x)$ ...

$\lim_{x\to -3} f(x)$ ... $\quad \lim_{x\to -3^-} f(x)$ ... $\quad \lim_{x\to -3^+} f(x)$ ...

$\lim_{x\to 1} f(x)$ ... $\quad \lim_{x\to 1^+} f(x)$ ... $\quad \lim_{x\to 1^-} f(x)$ ...

تمرین : نمودار تابع $y=\dfrac{|x-1|}{x-1}$ را رسم کنید . آیا تابع در ۱ حد دارد ؟

درس دوم : محاسبه حد توابع

در بخشهای قبل به کمک جدول و نمودار حد توابع را بررسی کردیم و در این قسمت می خواهیم به کمک قضایایی که می آموزیم بدون استفاده از جدول یا نمودار به بررسی حد توابع بپردازیم .

قضیه:

حد تابع ثابت $f(x)=c$ در همه نقاط دارای حد c است : $\lim\limits_{x\to a} c=c$

مثال : $\lim\limits_{x\to ۲} ۴=۴$

حد تابع همانی $f(x)=x$ در هر نقطه مانند a برابر با a است : $\lim\limits_{x\to a} x=a$

مثال : $\lim\limits_{x\to ۲} x=۲$

قضیه: اگر دو تابع $f(x), g(x)$ دارای حد $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L_۱$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=L_۲$ باشند ، داریم :

الف) حد مجموع برابر با مجموع حد هاست : $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))=\lim\limits_{x\to a} f(x)+\lim\limits_{x\to a} g(x)=L_۱+L_۲$

ب) حد تفاضل برابر با تفاضل حد هاست : $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-g(x))=\lim\limits_{x\to a} f(x)-\lim\limits_{x\to a} g(x)=L_۱-L_۲$

ج) حد ضرب برابر با ضرب حد هاست : $\lim\limits_{x\to a}(f(x)g(x))=\lim\limits_{x\to a} f(x).\lim\limits_{x\to a} g(x)=L_۱.L_۲$

د) حد خارج قسمت برابر با خارج قسمت حد هاست : $;L_۲\neq ۰$ $\lim\limits_{x\to a}(\frac{f(x)}{g(x)})=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}=\frac{L_۱}{L_۲}$

نتایج: اگر تابع $f(x)$ در نقطه a حد داشته باشد :

۱) $\lim\limits_{x\to a} cf(x)=c\lim\limits_{x\to a} f(x)$

۲) $\lim\limits_{x\to a} f^n(x)=\left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)^n$

۳) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{1}{\lim\limits_{x\to a}f(x)}$

برای هر تابع چند جمله ای $p(x)$ داریم : ٤) $\lim\limits_{x\to a}p(x)=p(a)$

مثال : $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{2}$ و $\lim\limits_{x\to 2}3x^2+1=3(2)^2+1=13$

قضیه : اگر تابع $f(x)$ در نقطه a حد داشته باشد :

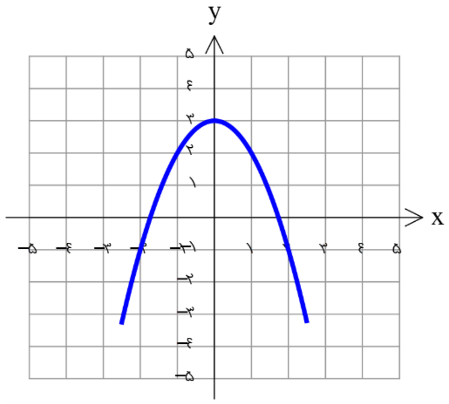
$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim_{x\to a}f(x)}$$

$$\lim_{x\to a}|f(x)|=\left|\lim_{x\to a}f(x)\right|$$

مثال : $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt[3]{2x^2+9}=3$ و $\lim\limits_{x\to 2}|x-3|=1$

توجه !!! : دقت شود در مورد تابع جز صحیح لزوماً $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]$ با $\left[\lim\limits_{x\to a}f(x)\right]$ برابر نیست .

مثال : با توجه به نمودار مقابل مقدار $\left[\lim\limits_{x\to 0}f(x)\right]-\lim\limits_{x\to 0}[f(x)]$ را بیابید .



حل :در عبارت اول ، اول جز صحیح گرفته می شود بعد حد ولی در عبارت دوم برعکس است .

با نزدیک شدن به صفر از هر دو طرف مقدار تابع با مقادیری کمتر از ۳ به ۳ نزدیک می شود بنابر این $\lim\limits_{x\to 0}[f(x)]=\lim\limits_{x\to 0}[3^-]=\lim\limits_{x\to 0}2=2$

ولی در مورد قسمت دوم داریم : $\left[\lim\limits_{x\to 0}f(x)\right]=[3]=3$

پس جواب سوال -1 است .

قضیه : برای هر عدد حقیقی a داریم :

$$\lim_{x\to a}\sin x=\sin a$$

$$\lim_{x\to a}\cos x=\cos a$$

مثال : $\lim\limits_{x\to\pi}\cos x=-۱$

تمرین : حد توابع زیر را بیابید .

۱) $\lim\limits_{x\to -۱}x^{۳}=$

۲) $\lim\limits_{x\to -۱}(۲x^{۴}-۳|x|+۱)=$

۳) $\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{x^{۲}+۱}{۳x^{۲}-۲x-۱}=$

۴) $\lim\limits_{x\to \frac{۱}{۲}}\dfrac{۱-x}{[x]-x}=$

۵) $\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{\sqrt{۴x+۱}}{x-۳}=$

۶) $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{۱-\sin x}{\cos x}=$

۷) $\lim\limits_{x\to ۲^{+}}\dfrac{\sqrt{x-۲}}{[x]+۲}=$

۸) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}^{+}}\dfrac{|\sin x|}{x+\pi}=$

تمرین : اگر تابع $f(x)=\begin{cases}۲x^{۲}+۱ & x>۱\\ x-۲a & x<۱\end{cases}$ در $x=۱$ حد داشته باشد ، مقدار a را بیابید .

تمرین : اگر تابع f در ۱ حد داشته باشد و $\lim_{x \to ۱} \frac{۲f(x)-۱}{f(x)+۱} = ۱$ ، آنگاه مقدار $\lim_{x \to ۱} f(x)$ را بیابید .

محاسبه حد توابع کسری در حالت مبهم :

فرض کنید می خواهیم حد تابع $f(x) = \frac{x^۲ - ۱}{x - ۱}$ را در نقطه $x = ۱$ بررسی کنیم . طبق قضایای حد چون حد صورت و مخرج برابر صفر است نمی توان نتیجه ای گرفت به این حالت ، حالت مبهم $\frac{۰}{۰}$ گفته می شود . بنابراین برای رفع ابهام ، به کمک تجزیه یا تقسیم سعی می کنیم عامل صفر شونده که در اینجا $x - ۱$ است را خارج و سپس حد آن را بیابیم .

تمرین : مقدار حد های زیر را بیابید .

۱) $\lim_{x \to ۱} \frac{۴x^۲ - ۴}{x^۲ + x - ۲} =$

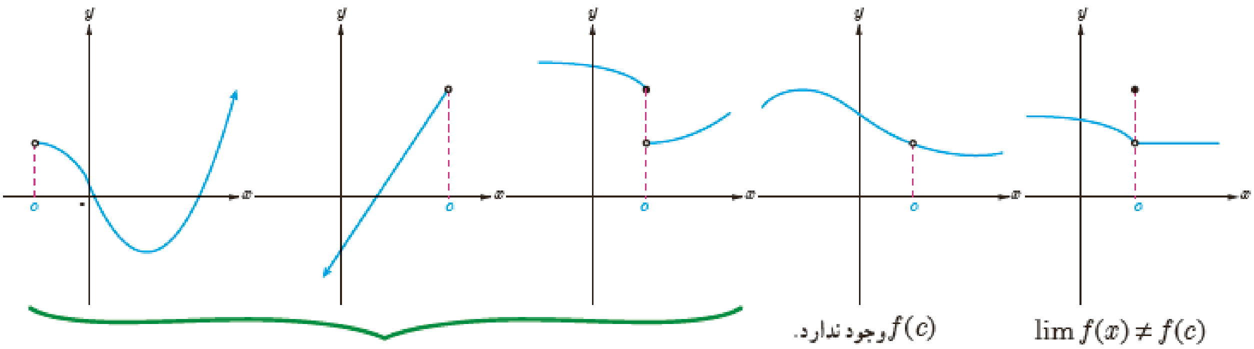
۲) $\lim_{x \to ۲} \frac{x[x] - ۴}{x^۲ - ۴} =$

۳) $\lim_{x \to ۲} \frac{۳x^۲ - ۵x - ۲}{۲x^۲ - ۳x - ۲} =$

تکلیف : تمرین های صفحه ۱۳۵ و ۱۳۶ را حل کنید .

درس سوم : پیوستگی

گاهی اوقات می بینیم که نمودار یک تابع در یک یا چند نقطه از هم گسسته شده است اگر دقت کنیم می بینیم که در این نقاط یا حد وجود ندارد و یا اگر وجود دارد مقدار تابع در آن نقطه با حد تابع متفاوت است . به نمودار های زیر توجه کنید :



$\lim\limits_{x\to c} f(x)$ وجود ندارد. — $f(c)$ وجود ندارد. — $\lim\limits_{x\to c} f(x) \neq f(c)$

در نتیجه

پیوستگی : برای آنکه تابع در یک نقطه پیوسته باشد باید در آن نقطه :

الف) مقدار داشته باشد .

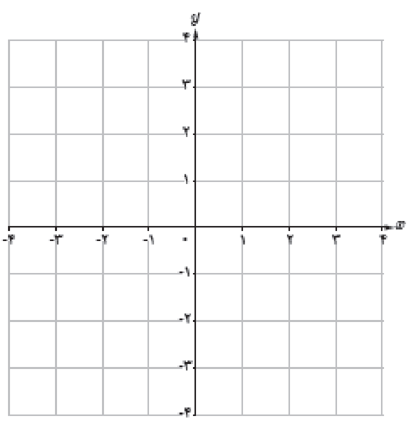
ب) حد داشته باشد .

ج) حد تابع با مقدار تابع برابر باشد . $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

در غیر این صورت تابع را در آن نقطه ناپیوسته می گویند .

تمرین : نمودار تابعی را رسم کنید که در دو نقطه نا پیوسته باشد که

در یکی حد داشته و در دیگری حد نداشته باشد .



تمرین : تابع $f(x)=\dfrac{x^{2}-4}{x-2}$ از نظر پیوستگی در $x=2$ چگونه است ؟

تمرین : تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{2}-4}{x-2} & x\neq 2\\ 4 & x=2\end{cases}$ از نظر پیوستگی در $x=2$ چگونه است ؟

تمرین : پیوستگی تابع $f(x)=\begin{cases}[x]+3 & x<0\\ 2 & x=0\\ \dfrac{x+|x|}{\sin x} & x>0\end{cases}$ را در $x=0$ بررسی کنید .

تمرین : مقدار a را طوری بیابید که تابع $f(x)=\begin{cases}3x^{2}+a & x\geq -1\\ \dfrac{|x+1|}{x+1} & x<-1\end{cases}$ در $x=-1$ پیوسته باشد .

پیوستگی یک طرفه :

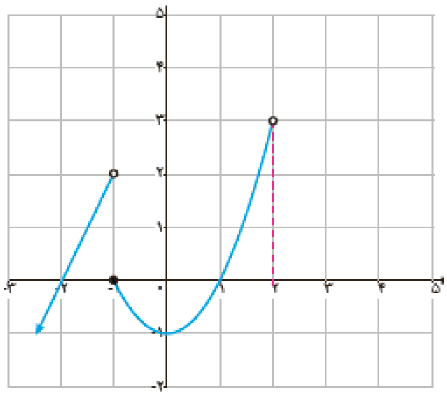
پیوستگی راست : اگر تابع در نقطه حد راست داشته و این حد با مقدار تابع در آن نقطه برابر باشد می گوییم در این نقطه تابع پیوستگی راست دارد .

پیوستگی چپ : اگر تابع در نقطه حد چپ داشته و این حد با مقدار تابع در آن نقطه برابر باشد می گوییم در این نقطه تابع پیوستگی چپ دارد .

پیوستگی در بازه : تابع f در بازه $[a,b]$ پیوسته است اگر و تنها اگر در هر نقطه (a,b) پیوسته باشد و در b پیوستگی چپ و در a پیوستگی راست داشته باشد .

توجه : توابع چند جمله ای ، نمایی ، لگاریتمی و سینوس و کسینوس در دامنه خود پیوسته هستند .

تمرین : نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} ۲x+۴ & x<-۱ \\ x^{۲}-۱ & -۱\le x<۲ \\ -x+۵ & ۲<x<۵ \end{cases}$ داده شده است .



الف) نمودار f را کامل کنید .

ب) پیوستگی تابع را روی بازه های $[-۱,۱],(۲,۵),[-۲,۰]$ بررسی کنید .

تمرین : سه تابع متفاوت مثال بزنید که :

الف) روز بازه $(-\infty,+\infty)$ پیوسته باشد .

ب) روز بازه $[-۲,+\infty)$ پیوسته باشد .

ج) روز بازه $(-\infty,۰]$ پیوسته باشد .

د) روز بازه (a,b) پیوسته باشد ولی روی بازه $[a,b]$ پیوسته نباشد .

تکلیف : تمرین های صفحه ۱۴۲ را حل کنید .

فصل هفتم :آمار و احتمال

درس اول : احتمال شرطی و پیشامد مستقل

درس دوم : آمار توصیفی

درس اول : احتمال شرطی و پیشامد مستقل

سال قبل با مفاهیم زیر از احتمال آشنا شدید :

یادآوری

۱ــ **پدیدهٔ تصادفی** : پدیده یا آزمایشی است که نتیجهٔ آن را نتوان قبل از انجام به‌طور قطعی پیش‌بینی کرد.

۲ــ **فضای نمونه‌ای** : مجموعهٔ تمام نتایج ممکن یک پدیدهٔ تصادفی را فضای نمونه‌ای آن پدیده می‌نامیم و معمولاً آن را با S نمایش می‌دهیم.

۳ــ **پیشامد تصادفی** : هر زیر مجموعه از S را یک پیشامد تصادفی در فضای نمونه‌ای S می‌نامیم.

۴ــ **پیشامدها و اعمال روی آنها**

فرض کنیم A و B پیشامدهایی از فضای نمونه‌ای S باشند.

الف) **اجتماع دو پیشامد** : پیشامد $A\cup B$ وقتی رخ می‌دهد که حداقل یکی از پیشامدهای A یا B رخ دهد.

ب) **اشتراک دو پیشامد** : پیشامد $A\cap B$ وقتی رخ می‌دهد که هر دو پیشامد A و B رخ دهند.

پ) **تفاضل دو پیشامد** : پیشامد $A-B$ وقتی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ دهد، ولی پیشامد B رخ ندهد.

ت) **متمم یک پیشامد** : پیشامد A' (یا A^c) وقتی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ ندهد.

۵ــ **پیشامدهای ناسازگار** : دو پیشامد A و B را ناسازگار می‌گوییم، هرگاه A و B با هم رخ ندهند؛ یعنی $A\cap B=\varnothing$

۶ــ **رابطهٔ محاسبهٔ احتمال وقوع یک پیشامد** :

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}}{\text{تعداد همهٔ حالت‌های ممکن}}$$

۷ــ **رابطهٔ محاسبهٔ احتمال اجتماع یا اشتراک دو پیشامد A و B** :

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

احتمال شرطی :

گاهی اوقات احتمال وقوع یک اتفاق بر احتمال وقوع اتفاق دیگر تاثیر می گذارد . در واقع دانستن یک اطلاعاتی از مساله باعث عوض شدن احتمال خواهد شد .

فرض کنید دو تاس را پرتاب کرده ایم .

الف) تعداد تمام حالات ممکن چند تا است ؟ ۳۶ تا

ب) احتمال آنکه مجموع دو تاس ۹ شود چقدر است ؟ $P(A)=\frac{۴}{۳۶}=\frac{۱}{۹}$ $A=\{(۳,۶),(۴,۵),(۵,۴),(۶,۳)\}$

ج) اگر بدانید تاس اول ۴ آمده است، تعداد کل حالت ها چقدر است ؟ $n(B)=۶$ $B=\{(۴,۱),(۴,۲),\dots,(۴,۶)\}$

د) احتمال آنکه مجموع دو تاس ۹ شود این بار چقدر است ؟ $P(A)=\frac{۱}{۶}$ $A=\{(۴,۵)\}$

در حالت دوم احتمال مجموع ۹ شدن به شرط آنکه تاس اول ۴ باشد خواسته شده است. احتمال A به شرط B را به صورت $P(A|B)$ می نویسیم .

پس در احتمال شرطی :

الف) تعداد حالات مطلوب برابر است با حالاتی که A رخ دهد البته به شرطی که B رخ داده باشد پس باید هر دو با هم رخ داده باشند و این یعنی $n(A\cap B)$.

ب) تعداد حالات کل : در تمام حالت های اتفاق افتاده باید B رخ داده باشد چون این شرط ماست در نتیجه تعداد تمام حالات با تعداد حالات B برابر است یعنی $n(B)$.

بنابر این احتمال A به شرط آنکه B رخ داده باشد برابر است با :

$$P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)} \xrightarrow{\div n(S)} P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

توجه !!! : احتمال شرطی همان احتمال معمولی با فضای نمونه کاهش یافته است. پس قوانین احتمال در مورد آن صدق می کند مثلاً قانون احتمال متمم : $P(A|B)=1-P(A'|B)$

نکته پرکاربرد : در پرتاب دو تاس تعداد حالاتی که مجموع اعداد ظاهر شده برابر عدد n باشد به صورت جدول زیر است :

مجموع دو تاس	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
تعداد حالات	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۵	۴	۳	۲	۱

مثال : برای اینکه در تشخیص احتمال شرطی دچار مشکل نشوید ، به مثال های زیر توجه کنید .

الف) ۴۰ درصد مردان، چاق هستند .

در واقع در جامعه کاهش یافته مردان (تمام مردان در یک جا جمع شوند) ۴۰ درصد آنها چاق هستند .

$P($ چاق | مرد $)=0/4$

ب) ۵۰ درصد افراد چاق، مبتلا به دیابت هستند .

در واقع در جامعه کاهش یافته چاق ها (تمام چاق ها در یک جا جمع شوند) ۵۰ درصد آنها دیابت دارند .

$P($ دیابت | چاق $)=0/5$

ج) ۲۰ درصد از افراد جامعه، مردان چاق هستند .

در واقع در جامعه کاهش نیافته (همه افراد) ۲۰ درصد مرد و سیگاری هستند .

$P($ مرد $\cap$ چاق $)=0/2$

مثال : فرض کنید احتمال اینکه یک تیم رقیب اصلی خود را ببرد $\frac{۱}{۶}$ باشد و احتمال اینکه قهرمان شود $\frac{۱}{۴}$ و در صورتی که رقیب اصلی خود را ببرد احتمال قهرمانی آن به $\frac{۱}{۳}$ افزایش بیابد . با چه احتمالی حداقل یکی از دو اتفاق « قهرمانی » یا « بردن رقیب اصلی » رخ خواهد داد ؟

پیشامد برد رقیب اصلی : A

پیشامد قهرمانی : B

پس : $P(B|A)=\frac{۱}{۳}$, $P(B)=\frac{۱}{۴}$, $P(A)=\frac{۱}{۶}$

هدف محاسبه $P(A\cup B)$ است و برای آن داریم : $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

و نیاز داریم تا $P(A\cap B)$ را بدانیم و از رابطه احتمال شرطی داریم : $P(A\cap B)=P(B|A)\times P(A)=\frac{۱}{۱۸}$

با جایگذاری در رابطه قبل داریم : $P(A\cup B)=\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۱۸}=\frac{۶+۹-۲}{۳۶}=\frac{۱۳}{۳۶}$

تمرین : اعداد ۱ تا ۹ را روی کارت نوشته و سه کارت به تصادف انتخاب می کنیم . مطلوبست احتمال آنکه هر سه کارت زوج باشند به شرط آنکه مجموع آنها زوج باشد . (مجموع زوج : باید هر سه زوج یا دو تا فرد یکی زوج باشد)

پیشامد مستقل : دو پیشامد را مستقل گویند هرگاه وقوع هر یک بر احتمال وقوع دیگری تاثیر نداشته باشد .

در این صورت مثلاً احتمال رخ دادن A با شرط یا بدون شرط رخ دادن B برابر است : $P(A|B)=P(A)$

و این یعنی $\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=P(A)$ در نتیجه : $\boxed{P(A\cap B)=P(A)\times P(B)}$

مثال : خانواده ای دارای دو فرزند است . مطلوب است احتمال آنکه هر دو فرزند پسر باشد .

پیشامد پسر بودن فرزند اول : A

پیشامد پسر بودن فرزند دوم : B

دو پیشامد مستقل هستند و رخ دادن یکی در دیگری تاثیر ندارد: $P(A\cap B)=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۴}$ احتمال پسر بودن هر دو

تمرین : احتمال قهرمانی تیم فوتبال ایران در آسیا ۰/۵ و احتمال قهرمانی تیم والیبال در آسیا ۰/۸ است . با چه احتمالی حداقل یکی از دو تیم قهرمان خواهد شد ؟

تمرین : دو تاس را به ترتیب پرتاب می کنیم . مطلوبست محاسبه احتمال اینکه :

الف) مجموع دو تاس ۵ شود .

ب) مجموع دو تاس ۷ شود .

ج) آیا پیشامد آنکه مجموع دو تاس ۵ شود با پیشامد آنکه اولین تاس ۲ ظاهر شود مستقل هستند ؟

د) آیا پیشامد آنکه مجموع دو تاس ۷ شود با پیشامد آنکه اولین تاس ۲ ظاهر شود مستقل هستند ؟

تمرین : اگر دو پیشامد ناتهی A وB مستقل باشند . نشان دهید :

الف) پیشامد های A, B' نیز مستقلند . (توجه : $P(A\cap B')=P(A)-P(A\cap B)$)

ب) پیشامد های A', B' نیز مستقلند . (طبق الف بدیهی است)

تکلیف : تمرین های صفحه ۱۵۱ و ۱۵۲ را حل کنید . (به جز تمرین ۳)

درس دوم : آمار توصیفی

در آمار توصیفی سعی می شود تا اطلاعات گرد آوری شده از یک موضوع خاص طبقه بندی شده و در قالب نمودار نمایش داده شود و با استفاده از یک شاخص عددی ویژگی های خاصی از آن بیان شود .

معیار های گرایش به مرکز :

شاخص های عددی هستند که میزان گرایش اعداد به یک عدد خاص را نمایش می دهند . در این جزوه ما با دو معیار مهم گرایش به مرکز به نام های میانگین و میانه آشنا می شویم که بسیار پرکاربرد هستند .

میانگین : میانگین داده ها را با $\overline{X}$ نمایش می دهیم که برابر است با : $\overline{X}=\dfrac{x_۱+x_۲+....+x_N}{N}$

که x_i ها داده ها و N برابر با تعداد کل داده ها است .

مسأله : مدیر مدرسه ای بر اساس اطلاعات سال های گذشته می گوید که معمولاً خیرین به طور متوسط ۱۰ درصد درآمد سالانه خود را به این امر اختصاص می دهند . فرض کنید در آمد ماهیانه حضار در انجمن خیریه این مدرسه به صورت زیر باشد ، کمک خیرین امسال چقدر خواهد بود ؟

در آمد (میلیون ریال)	نجمه	سبحان	رسول	حسنا	جوانه	احمد	آرمان
	۴۰	۱۲	۲۸	۳۲	۳۰	۲۲	۲۵

حل : میانگین در آمد های ماهانه خیرین برابر است با : $\overline{X}=\dfrac{۲۵+۲۲+۳۰+۳۲+۲۸+۱۲+۴۰}{۷}=\dfrac{۱۸۹}{۷}=۲۷$

یعنی به طور متوسط درآمد ماهانه این افراد ۲۷ میلیون تومان است که در سال برابر است با : $۲۷\times۱۲=۳۲۴$

و ۱۰ درصد آن برابر است با $۳۲/۴$.

تمرین : میانگین داده های ۵۰ و ۴۰ و ۳۰ و ۲۰ و ۱۰ چقدر است ؟

تمرین : اگر میانگین داده های ۴۰ و x و ۱۰ برابر ۳۰ شود . مقدار x چقدر است ؟

ویژگی های میانگین

اگر هر یک از داده های آماری با مقدار ثابتی ضرب و جمع شوند ، میانگین آنها نیز آنها نیز با همان مقدار ثابت ضرب و جمع خواهد شد .

تمرین : اگر میانگین تعدادی داده ۵ باشد و داده ها را ۳ برابر کرده و ۵ واحد از آنها کم کنیم میانگین داده های جدید چقدر است ؟

تمرین : میانگین داده های زیر را بیابید .

۱۰۳, ۹۸, ۱۰۵, ۱۱۱, ۹۰, ۹۲, ۱۰۰, ۹۹

دور افتاده : داده ای که با سایر داده ها تفاوت اساسی دارد . یعنی بسیار بزرگ تر یا بسیار کوچک تر از بقیه داده هاست .

به عنوان مثال اگر در مسأله خیرین، شخصی با درآمد ماهیانه ۱ میلیارد تومان به انجمن خیریه مدرسه بپیوندد میانگین درآمد ها تا حدود ۱۴۸ میلیون تومان در ماه بالا می رود که غیر واقعی به نظر می رسد زیرا این عدد به هیچ وجه بیان گر متوسط درآمد ها نیست .

میانه : شاخصی برای بدست آوردن متوسط داده ها که در واقع عدد وسط در بین داده های مرتب شده است و معمولاً در مواردی استفاده می شود که داده دور افتاده داشته باشیم . میانه را با Q_2 نمایش می دهیم .

نکته : اگر تعداد داده ها زوج باشد ، عدد وسط نداریم و میانه برابر با میانگین دو داده وسط است .

تمرین : میانه داده های ۱ و ۹۹ و ۶۸ و ۲ و ۸۶ و ۱۴ و ۱۰ و ۱۱ چقدر است ؟

تمرین : داده های زیر مربوط به تعداد ضربان قلب ۱۲ دانش آموز پایه یازدهم ، قبل از مسابقه دو است . میانه و میانگین داده های زیر را مشخص کنید .

۱۰۰ ۹۱ ۸۲ ۷۵ ۱۰۵ ۹۸ ۹۸ ۱۰۱ ۸۹ ۹۲ ۹۷ ۸۶

معیار های پراکندگی :

معیار هایی چون میانگین و میانه به تنهایی نمی توانند اطلاعات کاملی در مورد داده ها به ما بدهند مخصوصا در مورد مقایسه چند گروه که تقریباً دارای شاخص های مرکزی برابر هستند . بنابراین شاخصی را نیاز داریم که میزان پراکندگی داده ها را مشخص کند .

واریانس : میانگین مجذور اختلاف داده ها از میانگین را واریانس می نامند و با $\sigma^۲$ نمایش می دهند .

$$\text{واریانس } \sigma^۲ = \frac{(x_۱ - \overline{X})^۲ + (x_۲ - \overline{X})^۲ + ... + (x_N - \overline{X})^۲}{N}$$

انحراف معیار : بدلیل آنکه مقدار بدست از واریانس بزرگ تر از پراکندگی قابل قبول است و همچنین واحد آن با واحد داده ها برابر نیست از جذر آن که انحراف معیار نامیده می شود بیشتر استفاده می کنند .

$$\text{انحراف معیار } \sigma = \sqrt{\frac{(x_۱ - \overline{X})^۲ + (x_۲ - \overline{X})^۲ + ... + (x_N - \overline{X})^۲}{N}}$$

مسأله : از دو کلاس دهم آزمونی گرفته شد و از هر کلاس ۱۰ نفر به تصادف انتخاب گردید که نمرات آزمون آنها به ترتیب زیر است .

الف) {۶۵,۷۵,۷۳,۵۰,۶۰,۶۴,۶۹,۶۲,۶۷,۸۵}

ب) {۸۵,۷۹,۵۷,۳۹,۴۵,۷۱,۶۷,۸۷,۹۱,۴۹}

برای یک معلم تدریس در کدام کلاس بهتر است ؟

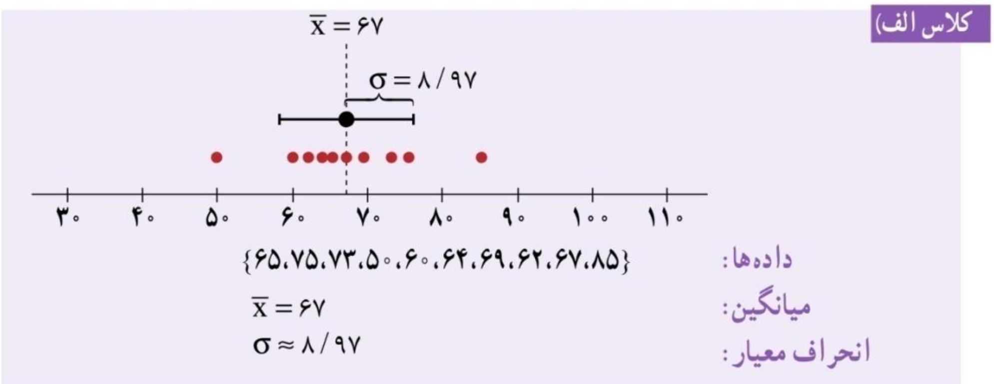
حل : میانگین هر دو کلاس برابر ۶۷ است .

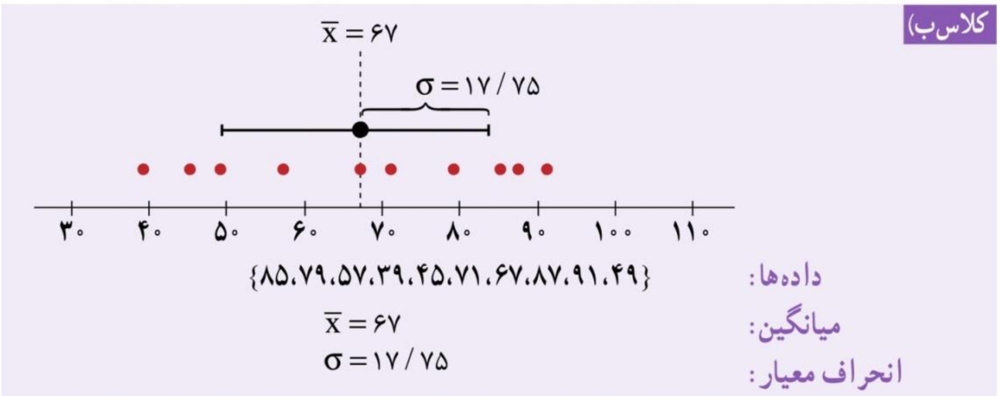
$$\overline{X} = \frac{۶۷۰}{۱۰} = ۶۷$$

پس معیار میانگین اطلاع دقیقی از تفاوت دو کلاس به ما نمی دهد ولی با محاسبه انحراف معیار دو کلاس داریم .

$$\sigma^{۲}=\frac{۲^{۲}+۸^{۲}+۶^{۲}+۱۷^{۲}+۷^{۲}+۳^{۲}+۲^{۲}+۵^{۲}+۰^{۲}+۱۸^{۲}}{۱۰}=\frac{۸۰۴}{۱۰}=۸۰/۴\Rightarrow\sigma=\sqrt{۸۰/۴}\simeq۸/۹۷$$

$$\sigma^{۲}=\frac{۱۸^{۲}+۱۲^{۲}+۱۰^{۲}+۲۸^{۲}+۲۲^{۲}+۳^{۲}+۰^{۲}+۲۰^{۲}+۲۴^{۲}+۱۸^{۲}}{۱۰}=\frac{۳۱۴۵}{۱۰}=۳۱۴/۵\Rightarrow\sigma=\sqrt{۳۱۴/۵}\simeq۱۷/۷۵$$





ویژگی های واریانس انحراف معیار :

اگر داده ها با عدد ثابتی جمع شوند واریانس و انحراف معیار آنها تغییر نمی کند .

اگر داده ها در عدد ثابتی مثل a ضرب شوند ، واریانس آنها در $a^{۲}$ و انحراف معیار در $|a|$ ضرب می شود .

تمرین : واریانس چند داده برابر ۵ است، اگر داده ها را ۲ برابر کرده و ۸ واحد به آنها بیافزاییم، واریانس و انحراف معیار داده های جدید چقدر است ؟

ضریب تغییرات : شاخصی بدون واحد است که از تقسیم انحراف معیار بر میانگین داده ها بدست می آید و به همین دلیل می تواند شاخصی خوبی برای مقایسه دو جامعه باشد . هرچه این شاخص کوچکتر باشد، جامعه بهتر است .

$$CV = \frac{\sigma}{\overline{X}}$$

تمرین : داده های مربوط به مقدار تولید دو شرکت در ماه گذشته به گونه ای است که میانگین اولی ۱۲۰۰ و میانگین دومی ۱۱۰۰ بوده و انحراف معیار آنها نیز به ترتیب ۱۰۰ و ۸۰ است . کدام شرکت عملکرد بهتری دارد ؟

دامنه میان چارکی : هرگاه داده های دور افتاده داشته باشیم از شاخص پراکندگی دیگری به جای انحراف معیار استفاده می کنیم که دامنه میان چارکی نامیده می شود که در واقع تفاضل چارک سوم و اول است : $IQR = Q_3 - Q_1$

چارک : مقادیری که داده های مرتب شده را به چهار قسمت مساوی تقسیم می کنند چارک نامیده می شوند . بدیهی است که چارک دوم همان میانه است و چارک اول و سوم میانه داده های سمت چپ و راست میانه هستند .

مثال : به داده های زیر توجه کنید . ۷۰ میانه است و میانه اعداد قبل و بعد از آن به ترتیب ۴۸ و ۸۷ هستند که چارک اول و سوم نامیده می شوند . دامنه میان چارکی این داده ها برابر ۳۹ خواهد بود .

۲۲ ۲۴ $\boxed{۴۸}$ ۵۱ ۶۰ $\boxed{۷۰}$ ۷۵ ۸۰ $\boxed{۸۷}$ ۹۳ ۹۵

چارک اول	میانه	چارک سوم

تمرین : جاهای خالی را پر کنید .

۵۰ درصد داده ها قبل از .... و ۵۰ درصد بعد از .... هستند .

۷۵ درصد داده ها قبل از .... و یا بعد از .... هستند .

۲۵ درصد داده ها قبل از .... ویا بعد از .... هستند .

۵۰ درصد داده ها بین.. و .... قرار دارند .

تمرین : برای داده های زیر دامنه میان چارکی را حساب کنید .

۲۰ ۱۸ ۳۷ ۴۲ ۲۴ ۳ ۱۱ ۲۵ ۱۷ ۳۰

تکلیف : تمرین های صفحه ۱۶۲ و ۱۶۳ را حل کنید .

« پایان »