در تدوین و نگارش این جزوه از کتاب بسیار خوب آموزش شگفت انگیز هندسه ۱ نوشته‌ی مهندس علی منصف شکری (انتشارات خیلی سبز) نهایت استفاده شده است. همچنین از کتاب‌های زیر نیز کنار کتاب فوق بهره‌ی کافی را برده‌ایم:

۱ـ ریاضی ۲ پایه یازدهم خیلی سبز (علی شهرابی ـ سروش موئینی ـ رسول محسنی منش)

۲ـ ریاضی ۲ پایه یازدهم خیلی سبز (رسول محسنی منش ـ سروش موئینی ـ کورش اسلامی)

۳ـ آی کیو گاج ریاضی یازدهم تجربی (پیام کریمی نیا)

استدلال

استدلال استقرایی: روش نتیجه گیری کلی بر مبنای مجموعه محدودی از مشاهدات را **استدلال استقرایی** می نامند.

حال برای اینکه بهتر با این نوع استدلال آشنا شوید دو ماجرای مشهور از تاریخ ریاضیات را برایتان نقل می کنم که در هر دوی آن ها پای اویلر (بزرگترین ریاضی دان قرن هفدهم و یکی از ۵ ریاضی دان برجسته تاریخ) در میان است و یکی از ماجراها درست است و دیگری غلط:

ماجرای اول: *در قرن پانزدهم میلادی «پیر فرما مشاهده می کند که* $2^{2^0}+1=3$ ، $2^{2^1}+1=5$ ، $2^{2^2}+1=17$ ، $2^{2^3}+1=257$ و $2^{2^4}+1=65537$ *همگی اعدادل اول هستند. طی نامه ای به دوست خود مرسن اعلام می کند که من اعدادی به شکل* $F_n=2^{2^n}+1$ *یافتم که همواره اول اند. بعدها در قرن هفدهم اویلر متوجه می شود که عدد* $F_5=2^{2^5}+1=4294967297$ *بر ۶۴۱ بخش پذیر است و این حدس فرما غلط از آب درمی آید. (هرچند که گاوس بعدها قضیه ای را اثبات می کند و دوباره این اعداد را در صدر اخبار اعداد اول قرار میدهد و تا امروز نیز جنجال بر سر این اعداد هم چنان باقیست.)*

ماجرای دوم: *در قرن هفدهم لئونارد اویلر نامه ای از آلمان دریافت می کند که ریاضی دانی به نام کریستین گلدباخ نوشته بود که من مشاهده کرده ام که* $2+2=4$ ، $3+3=6$ ، $3+5=8$ ، $3+7=10$ ، $5+7=12$ ، $3+11=14$ *و... و حدس می زنم هر عدد زوج بزرگتر از ۲ را می توان برحسب مجموع دو عدد اول نوشت، اما راه اثبات آن را نمی دانم. اویلر نیز در جواب نوشت به نظر من حدس شما درست است اما من نیز اثباتی برای آن نیافتم. بعدها معلوم شد که این حدس واقعاً درست است اما تاکنون نیز هیچ ریاضی دانی اثباتی برای آن نیافته است. (این حدس امروزه به اسم حدس گلدباخ مشهور است و در سال ۲۰۰۰ میلادی جایزه ای معادل با جایزه نوبل برای آن تعیین شد ولی باز هم همچنان تا امروز حل نشده باقی مانده است.)*

نتیجه گیری مهم: استدلال استقرایی یک روش معتبر برای اثبات گزاره ها نیست. هرچند که ممکن است نتایجی که از این نوع استدلال به دست می آید درست باشد اما فقط تنها زمانی می تواند ادعا کرد گزاره درست است که اثبات دقیقی برای ان ارائه شود.

استدلال استنتاجی: استدلال‌استنتاجی روش نتیجه‌گیری‌منطقی بر پایه‌حقایقی‌است که درستی آن‌ها را پذیرفته‌ایم.

مثلاً چون پذیرفته ایم (درستی این قضیه قبلاً به طریقی ثابت شده) که مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180° است می توان ثابت کرد که مجموع زوایای داخلی هر چهارضلعی 360° است و به همین طریق با استفاده از استدلال استنتاجی می توان ثابت کرد مجموع زوایای داخلی هر n ضلعی محدب برابر است با:

$$\boxed{(n-2)\times 180^\circ}$$

قضیه: برخی نتایج مهم و پرکاربرد که با استدلال استنتاجی اثبات می شوند **قضیه** نامیده می شوند. مانند قضیه معروف فیثاغورس یا قضیه تالس و...

عکس قضیه: اگر در یک قضیه جای فرض و حکم را عوض کنیم به آن چه حاصل می شود عکس قضیه گفته می شود. عکس یک قضیه می تواند درست یا نادرست باشد.

مثلاً قضیه فیثاغورس می گوید اگر در یک مثلث $\hat{A}=90^\circ$ باشد آن گاه $a^2=b^2+c^2$ است. حال عکس قضیه فیثاغورس این طور می شود: «اگر در مثلثی $a^2=b^2+c^2$ باشد آنگاه در آن مثلث $\hat{A}=90^\circ$ است.»

قضیه های دو شرطی: اگر یک قضیه و عکس آن هر دو درست باشند، آن قضیه را قضیه دوشرطی می نامند، مانند قضیه فیثاغورس و تالس که عکس هر دوی آن ها نیز درست است.

برهان خلف: برهان خلف یک اثبات غیرمستقیم برای اثبات درستی احکام کلی است. برای استفاده از برهان خلف فرض می کنیم حکم داده شده نادرست است، سپس نشان می دهیم که این فرض باطل، حقایق دانسته شده را نقض می کند. حال که به یک تناقض رسیده ایم معلوم می شود فرضی که ابتدا در نظر گرفته بودیم، نادرست است و به این ترتیب حکم ثابت می شود.

مثلاً فرض کنید می خواهیم با استفاده از برهان خلف نشان دهیم اگر n^2 زوج باشد n نیز زوج است.
برهان خلف: فرض می کنیم حکم نادرست باشد یعنی n زوج نباشد، پس n فرد است یعنی $n=2k+1$ حال داریم:

$$n=2k+1 \Rightarrow n^2=4k^2+4k+1=2(\underbrace{2k^2+2k}_{k'})+1=2k'+1$$

همان طور که می بینید به یک تناقض رسیدیم، چون در فرض مسئله گفته شده بود n^2 زوج است ولی ما اکنون به این نتیجه رسیدیم که n^2 فرد است بنابراین این فرض که $n=2k+1$ می باشد باطل است؛ یعنی n فرد نیست پس حتماً زوج است.

احکام کلی: اگر حکمی در مورد تمام اعضای یک مجموعه بیان شود به آن حجم کلی گفته می شود. احکام کلی ممکن است درست یا نادرست باشد.
مثلاً حکم «هر چهارضلعی که اضلاع برابر دارد یک مربع است» یک حکم نادرست است.
مثلاً حکم «هر چهارضلعی که اضلاع برابر دارد، یک لوزی است» یک حکم درست است.

مثال نقض: به مثالی که نشان دهد یک نتیجه گیری کلی غلط است، مثال نقض می گویند.
مثلاً می خواهیم نشان دهیم حکم «مربع هر عدد طبیعی از خود عدد بزرگتر است» نادرست است. کافی است عدد ۱ را به عنوان مثال نقض ارائه کنیم که مربع آن با خودش برابر است یا برای رد کردن حکم «همه اعداد اول فرد هستند» کافی است عدد ۲ را ارائه کنیم که اول است ولی فرد نیست و...

سؤال۱: فردی با مشاهده مربع، مستطیل و متوازی الاضلاع به این نتیجه می رسد که مجموع زوایای هر چهارضلعی 360° است. این فرد از چه نوع استدلالی استفاده کرده است؟

۱) استدلال استنتاجی ۲) استدلال استقرایی ۳) برهان خلف ۴) مثال نقض

پاسخ گزینه۲ـ این روش استدلال که بر پایه مجموعه محدودی از مشاهدات انجام شده استدلال استقرایی است.

سؤال۲: با رسم قطر هر چهارضلعی می توان آن را به دو مثلث تبدیل کرد و چون مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180° است مجموع زوایای هر چهارضلعی 360° است. نوع این استدلال کدام است؟

۱) استدلال استقرایی　　۲) برهان خلف　　۳) استدلال استنتاجی　　۴) مثال نقض

پاسخ گزینه۳ــ چون قبلاً ثابت شده که مجموع زوایای داخلی مثلث 180°است، پس اثبات به وسیله حقایقی انجام شده که درستی آن ها را قبلاً پذیرفته ایم یعنی استدلال استنتاجی.

سؤال۳: کدام یک از قضیه های زیر دوشرطی نیست؟

۱) اگر ABC قائم الزاویه باشد آنگاه: $a^2=b^2+c^2$

۲) اگر یک چهارضلعی متوازی الاضلاع باشد قطرها منصف هم اند.

۳) اگر یک چهارضلعی لوزی باشد قطرها عمودند.

۴) اگر یک چهارضلعی مستطیل باشد اضلاع بر هم عمودند.

پاسخ گزینه۳ــ این قضیه دو شرطی نیست، چون عکس قضیه «اگر یک چهارضلعی لوزی باشد قطر ها عمودند» به این صورت است که «اگر در یک چهارضلعی قطرها عمود باشند چهار ضلعی لوزی است» که این حکم نادرست است به عنوان مثال نقض می توان کایت (بادبادک) را ارائه کرد. (توجه کنید که مربع مثال نقضی برای گزینه۴ نیست!! چون مربع، خود نوعی مستطیل است.)

سؤال۴: کدام عدد حکم کلی «مربع هر عدد اول باقی مانده اش بر ۲۴ برابر ۱ است» را نقض می کند؟

۱) ۵　　۲) ۷　　۳) ۳　　۴) ۱۰۱

پاسخ گزینه۳ــ عدد۳ مثال نقض است

$$3^2=9 \Rightarrow \begin{array}{r|l} 9 & 24 \\ \underline{-0} & 0 \\ 9 & \end{array}$$

این قانون فقط برای اعداد اول بزرگتر از ۳ درست است که بقیه گزینه ها اعداد اول بزرگتر از ۳ هستند.

سؤال۵: کدام n حکم کلی «به ازای هر عدد طبیعی n عبارت n^2+n+41 عددی اول است» را نقض می کند؟

۱) ۳　　۲) ۳۹　　۳) ۴۰　　۴) ۱۷

پاسخ گزینه۳ــ کافی است به جای n عدد ۴۰ قرار دهید دراین صورت:

$$n^2+n+41=40^2+40+41=40(40+1)+41=40\times41+41=41(40+1)=41\times41$$

سؤال۶: کدام گزینه یک مثال نقض برای حکم کلی «هر چهارضلعی که اضلاع برابر دارد مربع است» محسوب می شود؟

۱) مستطیل　　۲) لوزی　　۳) ذوزنقه متساوی الساقین　　۴) متوازی الاضلاع

پاسخ گزینه۲ ــ لوزی ۴ ضلع برابر دارد ولی مربع نیست، پس یک مثال نقض برای گزاره فوق است.

سؤال۷: کدام یک از احکام کلی زیر درست است؟

۱) در هر مثلث اندازه بزرگترین زاویه از چهار برابر کوچکترین زاویه بزرگتر است.

۲) در هر مثلث بزرگترین زاویه کمتر از 60° نیست.

۳) هر دو مثلث هم مساحت همنهشت هستند.

۴) در هر مثلث هر ارتفاع از هر کدام از سه ضلع کوچکتر است.

پاسخ گزینه۲ ـ در گزینه ۱ کافی است مثلاً زاویه ها را 50°و 60° و 70° فرض کنید که 70° بزرگتر از $4\times50^\circ$ نیست.
گزینه۲ درست است چون اگر بزرگترین زاویه کمتر از 60° باشد دو زاویه دیگر هم کمتر از 60° خواهند شد و مجموع زاویه ها 180° نمی شود.
در گزینه۳ می توان یک مثلث قائم الزاویه به اضلاع ۶ و ۸ و یک مثلث متساوی الساقین به قاعده ۸ و ارتفاع ۶ که هم مساحت هستند را در نظر گرفت ولی همنهشت نیستند.
در گزینه۴ هم کافی است به عنوان مثال نقض یک مثلث قائم الزاویه ارائه کنیم که ارتفاع آن با ضلع برابر است.

سؤال۸: کدامیک از احکام کلی زیر درست است؟

۱) هر متوازی الاضلاع که اضلاع برابر داشته باشد لوزی است.

۲) هر متوازی الاضلاع که اضلاع عمود بر هم داشته باشد مربع است.

۳) اگر خطی یکی از دو خط موازی را قطع کند ممکن است دیگری را قطع نکند.

۴) هر چهارضلعی که دو ضلع موازی و دو ضلع مساوی داشته باشد متوازی الاضلاع است.

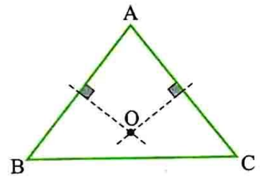
پاسخ گزینه۱ ـ تنها گزینه ۱ درست است چون هر متوازی الاضلاع که اضلاع عمود داشته باشد می تواند مستطیل هم باشد و خطی که یکی از دو خط موازی را قطع می کند دیگری را نیز قطع می کند و هر چهار ضلعی که دو ضلع موازی و دو ضلع مساوی دارد می تواند ذوزنقه متساوی الساقین هم باشد.

سؤال۹: در اثبات حکم «از یک نقطه خارج از یک خط، نمی توان بیش از یک عمود بر آن رسم کرد» به این صورت عمل شده که دو عمود مختلف از A بر خطی رسم کردیم تا آن را در B و C قطع کند. در این صورت مجموع زوایای مثلث ABC بزرگتر از 180°شد، این روش اثبات برای این حکم چه نام دارد؟

۱) استدلال استقرایی ۲) استدلال تمثیلی ۳) برهان خلف ۴) مثال نقض

پاسخ گزینه۳ ـ در اثبات این حکم از برهان خلف استفاده شده است، چون حکم را غلط فرض کردیم.

سؤال۱۰: برای اثبات همرس بودن عمود منصف های یک مثلث عمودمنصف دو ضلع مانند AB و AC را رسم می کنیم که در نقطه O متقاطع اند. حال می گوییم O روی عمودمنصف AB است، پس $OA=OB$ و هم چنین O روی عمود منصف AC است، پس $OA=OC$ و نتیجه می گیریم $OB=OC$ یعنی O روی عمودمنصف BC نیز هست. نوع این استدلال کدام است؟



۱) استدلال قیاسی

۲) استدلال استنتاجی

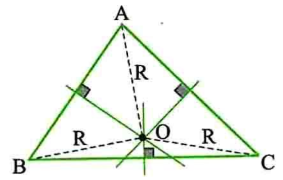
۳) برهان خلف

۴) استدلال استقرایی

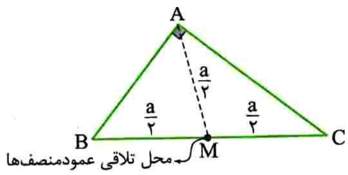
پاسخ گزینه۲ـ چون از قضیه هایی استفاده کرده ایم که درستی آن ها پذیرفته شده است نوع استدلال استنتاجی است.

حال به سراغ قضیه ها و احکامی می رویم که به وسیله استدلال استنتاجی و برهان خلف و... اثبات می شوند و بررسی کنیم و ببینیم هر کدام چه کاربردهایی دارد.

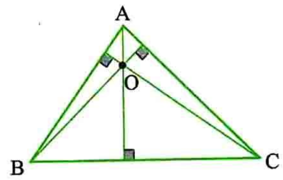
قضیه۱: عمودمنصف های هر مثلث همرس اند و نقطه همرسی عمودمنصف ها از سه رأس مثلث به یک فاصله است.



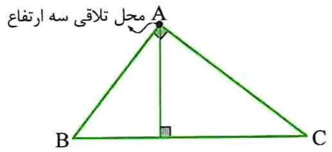
در مثلث های قائم الزاویه وسط وتر از هر سه رأس به یک فاصله است پس محل تلاقی عمودمنصف هاست. (در مثلث های حاد الزاویه محل تلاقی عمودمنصف ها همواره داخل مثلث و در مثلث های منفرجه الزاویه همواره خارج مثلث است.)



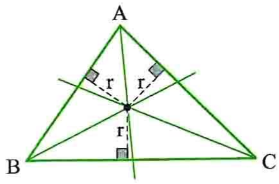
قضیه۲: ارتفاع های هر مثلث همرس اند و نقطه همرسی ارتفاع ها الزاماً از سه رأس یا سه ضلع به یک فاصله نیست مگر در مثلث متساوی الاضلاع.



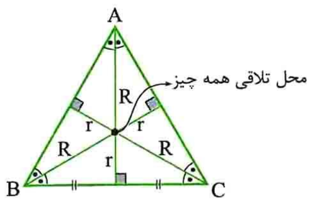
در مثلث های قائم الزاویه محل تلاقی ارتفاع ها رأس قائمه است. (در مثلث های حاد الزاویه محل تلاقی ارتفاع ها داخل مثلث و در مثلث های منفرجه الزاویه همواره خارج مثلث است.)



قضیه۳: نیمسازهای هر مثلث همرس اند و نقطه همرسی نیمسازها از هر سه ضلع مثلث به یک فاصله است.



در مثلث های متساوی الاضلاع محل تلاقی عمودمنصف ها، ارتفاع ها، نیمسازها و میانه ها بر هم منطبق است.



سؤال۱۱: در مثلث قائم الزاویه ABC به اضلاع ۶، ۸ و a فاصله محل تلاقی نیمسازهای داخلی تا ضلع BC برابر ۲ است. مجموع فواصل این نقطه از دو ضلع دیگر مثلث کدام است؟

۱) ۳ ۲) $\frac{۵}{۲}$ ۳) $\frac{۷}{۲}$ ۴) ۴

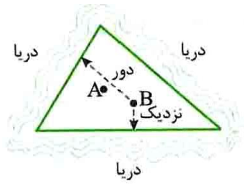
پاسخ گزینه ۴ــ محل تلاقی نیمسازها از سه ضلع مثلث به یک فاصله است بنابراین چون فاصله تا یک ضلع ۲ است تا دو ضلع دیگر هم ۲ است و مجموع فواصل تا دو ضلع دیگر ۴ است.

سؤال۱۲: در جزیره ای به شکل مثلث کدام نقطه است که از دریا دورترین فاصله را دارد؟

۱) محل برخورد ارتفاع های مثلث ۲) محل برخورد میانه های مثلث

۳) محل برخورد نیمسازهای مثلث ۴) محل برخورد عمودمنصف های مثلث

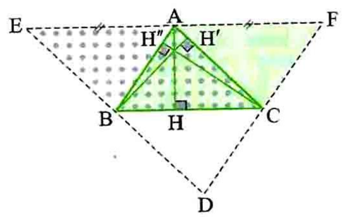
پاسخ گزینه ۳ــ پیرمرد و دریا: فرض کنید جزیره ای به شکل مثلث داریم این یعنی بیرون از مثلث از هر ۳ طرف دریا قرار دارد. حال اگر پیرمردی درون جزیره حرکت کند و از نقطه A به B برود ممکن است فکر کندکه از ساحل و دریا دور شده در حالی که اصلاً این طور نیست. وقتی از یک ساحل دور می شود به ساحل دیگر نزدیک می شود،بنابراین دورترین نقطه از دریا نقطه ای است که از همه ساحل ها به یک فاصله باشد زیرا در غیر این صورت هرچند از یک ساحل دور است ولی به ساحل دیگری نزدیکتر است حال نقطه ای که از همه ساحل ها (یعنی اضلاع مثلث) به یک فاصله است محل تلاقی نیمسازهاست. (این قصه پیرمرد و دریا که البته هیچ ربطی به اثر شاخص همینگوی نداشت، مصداق شعری است که می گوید: زمین گرد است و من با هر قدم به تو نزدیک می شوم!!!)



سؤال۱۳: در مثلث ABC از هر یک از رأس ها خطی به موازات اضلاع می گذرانیم تا همدیگر را E,D و F قطع کنند. نقطه همرسی عمودمنصف های مثلث DEF برای مثلث ABC چه نقطه ای است؟

۱) محل همرسی میانه ها ۲) محل همرسی نیمسازها

۳) محل همرسی عمودمنصف ها ۴) محل همرسی ارتفاع ها

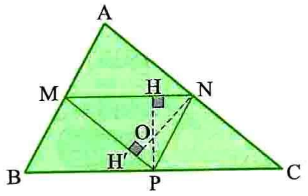


پاسخ گزینه۴ــ شکل را رسم می کنیم حال چون $EF||BC$ و $AB||DF$ است، چهارضلعی های $AFCB$ و $EACB$ هر دو متوازی الاضلاع هستند و در نتیجه AE و AF هر دو برابر BC هستند یعنی نقطه A وسط EF است و چون AH بر BC عمود است بر خط موازی آن یعنی EF هم عمود است یعنی AH عمودمنصف EF است یعنی عمودمنصف یک ضلع مثلث DEF ارتفاع مثلث ABC است. به همین ترتیب در سایر اضلاع نیز این اتفاق تکرار می شود و در نتیجه محل تلاقی عمودمنصف های DEF محل تلاقی ارتفاع های ABC است.

سؤال۱۴: در مثلث ABC پای میانه ها را به هم وصل می کنیم و در مثلث حاصل محل تلاقی ارتفاع ها را O می نامیم. نقطه O برای مثلث ABC چه نقطه ای است؟

۱) محل تلاقی ارتفاع ها ۲) محل تلاقی نیمسازها

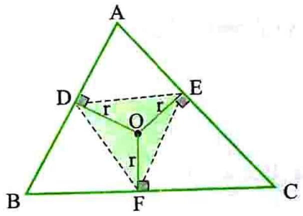
۳) محل تلاقی میانه ها ۴) محل تلاقی عمودمنصف ها



پاسخ گزینه۴ـ چون ارتفاع PH بر ضلع MN عمود است و MN هم موازی BC است (وسط های اضلاع را به هم وصل کرده طبق عکس تالس موازی BC است) پس PH بر BC نیز عمود است و P نیز وسط ضلع BC است پس PH عمود منصف BC است و به طریق مشابه NH' نیز عمود منصف AC و در نتیجه O محل تلاقی عمودمنصف های مثلث ABC است.

سؤال۱۵: در مثلث ABC از نقطه O محل همرسی نیمسازها عمودهایی بر سه ضلع رسم می کنیم و پای عمودها را E,D و F می نامیم. نقطه O برای مثلث DEF چه نقطه ای است؟

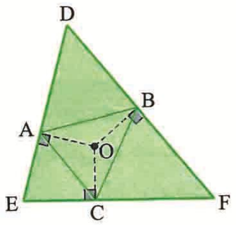
۱) محل همرسی میانه ها
۲) محل همرسی نیمسازها
۳) محل همرسی ارتفاع ها
۴) محل همرسی عمودمنصف ها



پاسخ گزینه۴ـ چون محل تلاقی نیمسازها از سه ضلع به یک فاصله است بنابراین $OD=OE=OF=r$. حال در مثلث DEF نقطه O از سه رأس به یک فاصله است، یعنی در محل تلاقی عمودمنصف های DEF قرار دارد.

سؤال۱۶: از نقطه O محل همرسی عمودمنصف های مثلث ABC به سه رأس B,A و C وصل می کنیم و در نقاط B,A و C عمودهایی بر OA , OB و OC رسم می کنیم تا همدیگر را در E,D و F قطع کنند. نقطه O برای مثلث DEF چه نقطه ای است؟

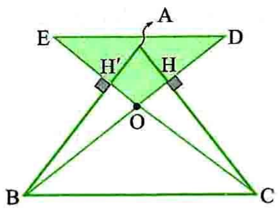
۱) محل همرسی ارتفاع ها
۲) محل همرسی میانه ها
۳) محل همرسی نیمسازها
۴) محل همرسی عمودمنصف ها



پاسخ گزینه۳ـ در مثلث DEF چون $OA=OB=OC$ است پس نقطه O از سه ضلع مثلث به یک فاصله است یعنی O روی محل تلاقی نیمسازهای مثلث ABC است.

سؤال۱۷: در مثلث ABC از نقطه O محل تلاقی نیمسازها، عمودهایی بر اضلاع AB و AC رسم می کنیم و به اندازه خودشان تا نقاط D و E امتداد می دهیم. رأس A برای مثلث ODE چه نقطه ای است؟

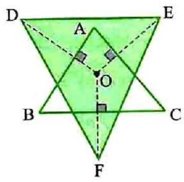
۱) محل همرسی میانه ها
۲) محل همرسی نیمسازها
۳) محل همرسی ارتفاع ها
۴) محل همرسی عمود منصف ها



پاسخ گزینه۴ـ در مثلث ODE اضلاع AB و AC عمودمنصف هستند چون بر ضلع عمودند و آن را نصف کرده اند. بنابراین رأس A محل همرسی عمودمنصف هاست.

سؤال۱۸: در مثلث ABC از نقطه O محل تلاقی نیمسازهای داخلی، عمودهایی بر اضلاع مثلث رسم کرده و به اندازه خودشان امتداد می دهیم تا به نقاط E,D و F برسیم. برای مثلث DEF نقطه O چه نقطه ای است؟

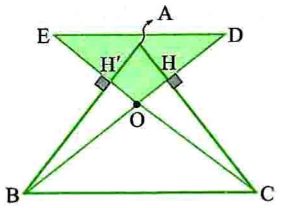
۱) محل تقاطع میانه ها
۲) محل تقاطع ارتفاع ها
۳) محل تقاطع نیمسازها
۴) محل تقاطع عمودمنصف ها



پاسخ گزینه۴ـ چون محل تلاقی نیمسازها از سه ضلع به یک فاصله است حال به اندازه خودشان هم که امتداد دهیم باز هم سه پاره خط مساوی به دست می آید یعنی O از سه رأس DEF به یک فاصله است و در نتیجه روی محل تلاقی عمودمنصف های DEF است.

سؤال۱۹: در مثلث ABC ارتفاع های BH و CH' در O متقاطع اند. این دو ارتفاع را به اندازه OH و OH' تا نقاط D و E امتداد می دهیم. در مثلث ODE محل تلاقی عمودمنصف ها کدام نقطه است؟

۱) وسط ضلع DE ۲) رأس B ۳) رأس A ۴) محل تلاقی نیمسازهای ABC

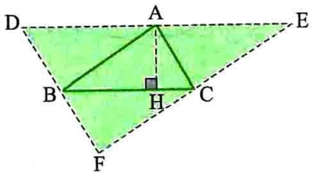


پاسخ گزینه۳ـ در مثلث ODE خطوط AB و AC هم بر اضلاع OE و OD عمودند و هم آن ها را نصف می کنند، پس عمودمنصف های مثلث ODE هستند که در A متقاطع اند، یعنی محل تلاقی عمودمنصف های ODE همان نقطه A است.

سؤال۲۰: در مثلث ABC از نقاط B,A و C خطوطی به موازات اضلاع عبور می دهیم تا همدیگر را در E,D و F قطع کنند. محل تلاقی ارتفاع های مثلث ABC برای مثلث $ADEF$ چه نقطه ای است؟

۱) محل تلاقی میانه ها ۲) محل تلاقی نیمسازها

۳) محل تلاقی عمودمنصف ها ۴) محل تلاقی ارتفاع ها

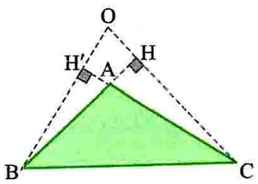


پاسخ گزینه۳ـ در واقع انگار در مثلث DEF وسط های اضلاع را به هم وصل کرده ایم، در این صورت ارتفاع AH در مثلث ABC بر ضلع موازی BC یعنی DE هم عمود است در ضمن A هم وسط DE است یعنی AH عمودمنصف ضلع DE است و در نتیجه محل تلاقی ارتفاعات مثلث ABC محل تلاقی عمودمنصف های مثلث DEF است.

سؤال۲۱: در مثلث ABC نقطه O محل برخورد ارتفاعات است. در مثلث OBC محل تلاقی ارتفاعات کدام نقطه است.

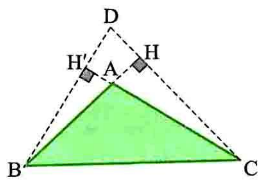
۱) محل تلاقی عمودمنصف های ABC ۲) نقطه ای خارج از مثلث ABC

۳) رأس A از مثلث ABC ۴) محل تلاقی نیمسازهای ABC



پاسخ گزینه۳ـ در مثلث OBC پاره خط BH بر ضلع OC عمود است و هم چنین پاره خط CH' بر ضلع OB عمود است؛ یعنی در مثلث OBC، CH' و BH ارتفاع هستند که در A متقاطع و نقطه A محل تلاقی ارتفاعات مثلث OBC است.

سؤال۲۲: در مثلث ABC اضلاع AB و AC را امتداد می دهیم و از رأس های B و C عمودهایی بر امتداد اضلاع فرود می آوریم و امتداد می دهیم تا همدیگر را در D قطع کنند، کدام گزینه درست است؟



۱) نقطه A محل تلاقی عمودمنصف های DBC است.

۲) نقطه D محل تلاقی عمودمنصف های ABC است.

۳) نقطه D محل تلاقی ارتفاع های ABC است.

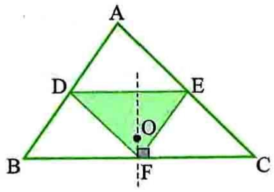
۴) نقطه A محل تلاقی نیمسازهای DBC است.

پاسخ گزینه۳ـ خطوط BH و CH' در مثلث DBC ارتفاع هستند بنابراین در این مثلث نقطه A محل تلاقی ارتفاع هاست و برای مثلث ABC نقطه D محل تلاقی ارتفاع هاست.

سؤال۲۳: در مثلث ABC نقطه O محل تقاطع عمودمنصف هاست. اگر عمود منصف ها در نقاط E,D و F بر اضلاع عمود شده باشند، در مثلث DEF نقطه O چه نقطه ای است؟

۱) محل تقاطع نیمسازها ۲) محل تقاطع ارتفاع ها

۳) محل تقاطع میانه ها ۴) محل تقاطع عمودمنصف ها

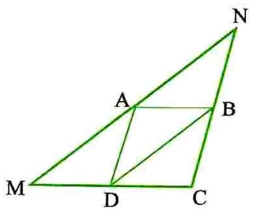


پاسخ گزینه۲ـ نقاط E,D و F وسط اضلاع مثلث ABC هستند بنابراین مثلث DEF مثلثی است که وسط های اضلاع را به هم وصل کرده است. در نتیجه اضلاع آن موازی اضلاع مثلث ABC است در نتیجه عمودمنصف BC بر DE هم عمود است و ارتفاع مثلث محسوب می شود. در نتیجه نقطه O محل تلاقی عمودمنصف های مثلث ABC بر ای مثلث DEF محل تلاقی ارتفاع هاست.

سؤال۲۴: در متوازی الاضلاع $ABCD$ ، قطر BD را رسم می کنیم سپس اضلاع BC و CD را از سمت B و D امتداد می دهیم و از رأس A خطی به موازات قطر BD عبور می دهیم تا آن ها را در M و N قطع کند. محل تلاقی ارتفاع های مثلث ABD برای مثلث MNC چه نقطه ای است.

۱) محل همرسی میانه ها ۲) محل همرسی ارتفاع ها

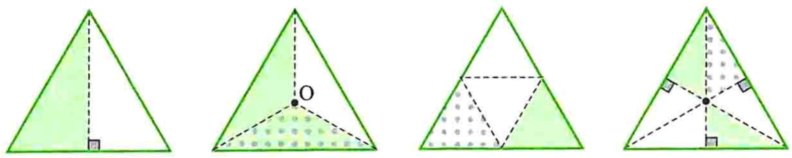
۳) محل همرسی عمودمنصف ها ۴) محل همرسی نیمسازها



پاسخ گزینه۳ـ چون در مثلث MNC خطوط AD,AB و BD به موازات اضلاع رسم شده اند پس معلوم است که نقاط B,A و D وسط اضلاع MNC هستند (هم $AMDB$ و هم $AMBD$ متوازی الاضلاع هستند پس $AM=DB=AN$). حال ارتفاع های مثلث ABD عمودمنصف های MNC خواهند بود.

تقسیمات هیجان انگیز در مثلث متساوی الاضلاع:

۱) فرض کنید می خواهید، یک مثلث متساوی الاضلاع را به ۲ ، ۳ ، ۴ و ۶ مثلث همنهشت تقسیم کنید. همه این موارد با استفاده از ارتفاع ها یا پای ارتفاع ها یا محل تلاقی ارتفاع ها انجام می شود نگاه کنید:

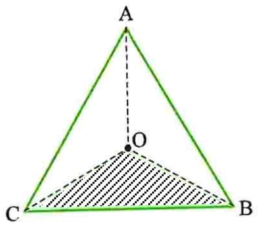


۲) ارتفاع، میانه و نیمساز در مثلث های متساوی الاضلاع $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ضلع است.

۳) میانه ها در هر مثلث همدیگر را به نسبت $\frac{۲}{۳}$ از رأس و $\frac{۱}{۳}$ از پای میانه قطع می کنند.

سؤال۲۵: یک مثلث متساوی الاضلاع به ضلع $\sqrt{۶}$ را به سه مثلث همنهشت تقسیم کرده ایم. در یکی از مثلث های همنهشت فاصله نقطه همرسی ارتفاع ها از نزدیکترین رأس مثلث کدام است؟

۱) $\sqrt{۳}$ ۲) $\frac{\sqrt{۶}}{۲}$ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۶}}{۳}$

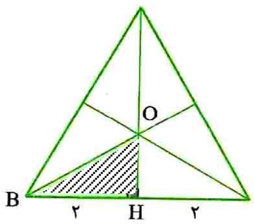


پاسخ گزینه۳ــ کافی است از محل تلاقی ارتفاع های ABC به سه رأس آن وصل کنیم تا سه مثلث همنهشت حاصل شود حال در مثلث OBC محل تلاقی ارتفاع ها رأس A است و فاصله آن تا نزدیکترین رأس برابر است با OA:

$$OA=\frac{۲}{۳}AH=\frac{۲}{۳}\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}a\right)=\frac{\sqrt{۳}}{۳}a=\frac{\sqrt{۳}}{۳}\times\sqrt{۶}=\frac{\sqrt{۱۸}}{۳}=\sqrt{۲}$$

سؤال۲۶: یک مثلث متساوی الاضلاع به ضلع ۴ را به ۶ مثلث همنهشت تقسیم کرده ایم. فاصله نقطه همرسی ارتفاعات یکی از مثلث های همنهشت از دورترین رأس آن کدام است؟

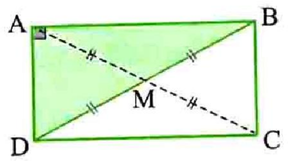
۱) ۲ ۲) ۳ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) $\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$



پاسخ گزینه۱ــ مثلث های همنهشت ایجاد شده قائم الزاویه هستند و محل همرسی ارتفاع ها همان رأس قائمه است. بنابراین فاصله H از دورترین رأس همان۲= BH است.

خواص هیجان انگیز مثلث قائم الزاویه:

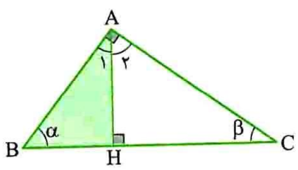
۱) در هر متوازی الاضلاع قطرها همدیگر را نصف می کنند پس در هر مستطیل هم قطرها همدیگر را نصف می کنند. حال در مستطیل اندازه قطرها نیز با هم برابر است. بنابراین اندازه ۴ قطعه ایجاد شده روی قطرها برابر است. اما هر مستطیل از دو مثلث قائم الزاویه از وتر به هم چسبیده ساخته شده است. بنابراین:



قضیه: میانه وارد بر وتر در هر مثلث قائم الزاویه نصف وتر است.

$$AM=MB=MD\Rightarrow \boxed{AM=\frac{BD}{۲}}$$

۲) اگر ارتفاع یک مثلث قائم الزاویه را رسم کنیم، زاویه های مثلث های ایجاد شده با زاویه های مثلث اصلی یکسان است.



$$\alpha+\beta=۹۰^\circ\Rightarrow\begin{cases}\overset{\Delta}{AHB}:\alpha+\hat{A}_۱=۹۰^\circ\Rightarrow\boxed{\hat{A}_۱=\beta}\\ \overset{\Delta}{AHC}:\beta+\hat{A}_۲=۹۰^\circ\Rightarrow\boxed{\hat{A}_۲=\alpha}\end{cases}$$

سؤال۲۷: در مثلث ABC به اضلاع ۸، ۱۵ و ۱۷ فاصله محل تلاقی عمودمنصف ها تا محل تلاقی ارتفاع ها چقدر است؟

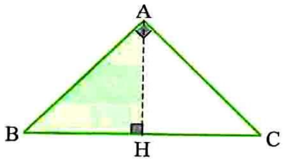
۱) ۹ ۲) ۵ ۳) ۸/۵ ۴) ۸

پاسخ گزینه۳ـ در مثلث ABC چون $17^2=15^2+8^2$ می باشد مثلث قائم الزاویه است، بنابراین محل تلاقی ارتفاع ها رأس قائمه و محل تلاقی عمودمنصف ها وسط وتر است. در نتیجه فاصله آن ها برابر طول میانه وارد بر وتر است که میانه وارد بر وتر هم نصف وتر است یعنی ۸/۵.

سؤال۲۸: یک مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین را به دو مثلث همنهشت تقسیم کرده ایم. محل تلاقی ارتفاعات یکی از دو مثلث همنهشت برای مثلث اصلی چه نقطه ای است؟

۱) محل تلاقی میانه ها ۲) محل تلاقی نیمسازها

۳) محل تلاقی ارتفاع ها ۴) محل تلاقی عمودمنصف ها

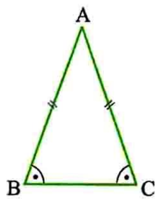


پاسخ گزینه۴ـ نقطه H محل تلاقی ارتفاع های یکی از دو مثلث همنهشت است که برای مثلث ABC محل تلاقی عمودمنصف هاست چون در مثلث های قائم الزاویه محل تلاقی عمودمنصف ها وسط وتر است.

چند قضیه‌ی مهم

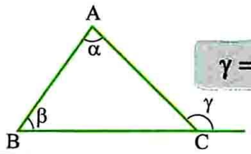
۱) در هر مثلث متساوی‌الساقین زوایای رو به ساق‌ها با هم برابرند و برعکس.

$AB=AC \Leftrightarrow \hat{B}=\hat{C}$



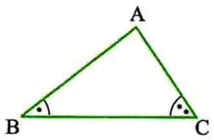
۲) هر زاویه‌ی خارجی یک مثلث از هر زاویه‌ی داخلی غیرمجاورش بزرگ‌تر است.

$\gamma=\alpha+\beta \Rightarrow \gamma>\alpha \ , \ \gamma>\beta$



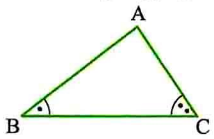
۳) اگر در مثلثی دو ضلع نابرابر باشند، زاویه‌ی روبه‌رو به ضلع بزرگ‌تر، از زاویه‌ی روبه‌رو به ضلع کوچک‌تر، بزرگ‌تر است.

$AB>AC \Rightarrow \hat{C}>\hat{B}$



۴) اگر در مثلثی دو زاویه نابرابر باشند، ضلع روبه‌رو به زاویه‌ی بزرگ‌تر از ضلع روبه‌رو به زاویه‌ی کوچک‌تر، بزرگ‌تر است.

$\hat{C}>\hat{B} \Rightarrow AB>AC$



حواست باشه! قضیه (۳) و (۴) عکس هم هستند و هر دو درست هستند بنابراین می توان گفت این یک قضیه دوشرطی است.

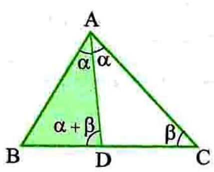
➤ اگر در مثلثی یک زاویه 90° یا بزرگتر از 90° باشد، قطعاً بزرگترین زاویه مثلث است و ضلع روبه رو به آن قطعاً بزرگترین ضلع است.

سؤال۲۹: در مثلث ACB نیمساز داخلی زاویه A ، ضلع BC را در نقطه D قطع می کند. کدام نامساوی همواره صحیح است؟(داخلی ریاضی ۸۰)

۱) $AB>BD$ ۲) $AD>BD$ ۳) $AB>AD$ ۴) $BD>AD$

پاسخ گزینه۱ـ در مثلث ADC زاویه خارجی رأس D برابر با مجموع دو زاویه داخلی غیرمجاور است حال در مثلث ABD داریم:

$$\alpha+\beta>\alpha \Rightarrow AB>BD$$

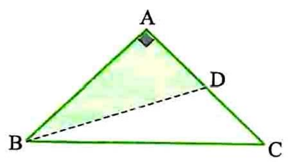


نتیجه هیجان انگیز: به طور کلی در مثلث، قطعه های ایجاد شده توسط نیمساز داخلی از اضلاع کناری خود کوچکترند، اما مقایسه نیمساز با اضلاع یا قطعه های ایجاد شده مقدور نیست، مگر در موارد خاص مانند مثلث های قائم الزاویه یا متساوی الساقین.

سؤال۳۰: در مثلث قائم الزاویه ABC $(\hat{A}=90^\circ)$ اگر نیمساز BD را رسم کنیم، کدام نامساوی نادرست است؟

۱) $AD<DC$ ۲) $AB>AD$ ۳) $BC>DC$ ۴) $BD<AD$

پاسخ گزینه۴ــ در مثلث ABD ضلع BD وتر و AD ضلع زاویه قائمه است پس $BD>AD$ است و گزینه۴ نادرست است.



تست های استدلال

سؤال ۱: کدامیک از عبارتهای زیر یک حجم کلی است؟

۱) هر مثلث متساوی الساقین، متساوی الاضلاع است.

۲) در مثلث قائم الزاویه، میانه و عمودمنصف وارد بر وتر برهم منطبق اند.

۳) هر لوزی یک مربع است.

۴) هر مربع یک لوزی است.

سؤال ۲: کدامیک از گزینه های زیر مثال نقضی برای حدس کلی «ارتفاع های هر مثلث در نقطه ای داخل یا خارج مثلث همرس اند.» می باشد؟

۱) مثلث حاده الزاویه ۲) مثلث متساوی الساقین

۳) مثلث قائم الزاویه ۴) مثلث منفرجه الزاویه

سؤال ۳: کدام گزینهٔ زیر مثال نقض دارد؟

۱) توان دوم هر عدد بزرگتر از توان سوم آن است. ۲) هر مثلث متساوی الاضلاع متساوی الساقین است.

۳) هر عدد اول بزرگتر از ۲، فرد است. ۴) هر مربع یک لوزی است.

سؤال ۴: کدام قضیه دو شرطی نیست؟

۱) متوازی الاضلاعی که دو ضلع مجاورش برابرند، لوزی است.

۲) مربع، مستطیلی است که طول اقطارش برابر است.

۳) هر ذوزنقه اگر متساوی الساقین باشد دو قطر آنب رابرند.

۴) مثلثی که نیمساز یک زاویهٔ آن میانهٔ ضلع مقابل به آن زاویه است، متساوی الساقین است.

سؤال ۵: مثال نقض حدس کلی زیر کدام گزینه است؟ «چهار ضلعی که دو ضلع برابر و دو ضلع موازی داشته باشد، متوازی الاضلاع است.»

۱) مستطیل ۲) کایت ۳) ذوزنقهٔ متساوی الساقین ۴) لوزی

سؤال ۶: نوع استدلال در هر یک از موارد زیر به ترتیب کدام است؟

الف) عدد چهاررقمی به صورت $\overline{abab}$ بخش پذیر بر ۱۰۳ وجود ندارد.

ب) مشاهدات اولیه در رفتار نوسانی وزنه های آویزان، منجر به اختراع ساعت آونگ دار شد.

۱) استقرایی ـ استنتاجی ۲) استنتاجی ـ استنتاجی

۳) استنتاجی ـ استقرایی ۴) استقرایی ـ استقرایی

سؤال ۷: برطبق الگوی مقابل حاصل سطر چهارم کدام است؟

$$۱^۲ - ۲^۲ + ۳^۲$$

$$۲^۲ - ۳^۲ + ۴^۲$$

۱) ۲۷

۲) ۲۸

۳) ۲۹

۴) ۳۰

سؤال ۸: جواب های کدام حاصل ضرب نشان می دهد که استدلال استقرایی، عمومیت ندارد؟

۱) ۲۱×۳۲ , ۱۲×۲۳ ۲) ۲۱×۳۱ , ۱۳×۱۴

۳) ۲۱×۳۱ , ۱۲×۱۳ ۴) ۱۱×۲۱ , ۱۱×۱۲

سؤال ۹: کدامیک از موارد زیر ضعف استدلال استقرایی را نشان می دهد؟

الف) حکیمان اولیه متوجه اثربخشی مفید گیاهی، برای بهبود بیماری خاص شدند.

ب) اعداد ۱۲، ۳۲، ۸۴، ۱۰۸، ۲۲۰ بر ۴ بخش پذیرند، پس نتیجه می گیریم که «هر عددی که رقم یکان آن زوج باشد، بر ۴ بخش پذیر است.»

۱) فقط الف ۲) فقط ب ۳) الف و ب ۴) هیچکدام

سؤال ۱۰: کدامیک از موارد زیر را می توان به کمک استدلال استنتاجی اثبات کرد؟

الف) حاصل ضرب هر عدد دو رقمی در ۱۰۱ را می توان به صورت $\overline{abab}$ نشان داد.

ب) حاصل جمع هر عدد زوج با هر عدد فرد عددی زوج است.

۱) فقط الف ۲) فقط ب ۳) الف و ب ۴) هیچکدام

سؤال ۱۱: «اگر a عدد گنگ دلخواه و b عددی گویای دلخواه باشد آنگاه $a-b$ همواره گنگ است.» برای اثبات........ این حکم، از روش .... استفاده می شود.

۱) نادرستی ـ استدلال استنتاجی ۲) درستی ـ استدلال استقرایی

۳) نادرستی ـ مثال نقض ۴) درستی ـ برهان خلف

سؤال ۱۲: «عدد $\sqrt{۳}+۱$، عددی گنگ است.» برای اثبات........ این حکم، از........... می توان استفاده کرد.

۱) نادرستی ـ مثال نقض ۲) درستی ـ استدلال استقرایی

۳) نادرستی ـ استدلال استقرایی ۴) درستی ـ برهان خلف

سؤال ۱۳: اثبات کدام قضیهٔ زیر احتیاج به استدلال به روش برهان خلف ندارد؟

۱) عدد $\sqrt{۵}$ گنگ است.

۲) از یک نقطه فقط یک خط موازی خط مفروض می توان رسم کرد.

۳) در یک صفحه از یک نقطهٔ مفروض فقط یک خط می توان بر خط مفروض عمود کرد.

۴) مربع هر عدد طبیعی فرد، از مضرب ۸ یک واحد بیشتر است.

سؤال ۱۴: چه تعداد از قضیه های زیر را نمی توان به صورت دو شرطی بیان کرد؟

الف) در هر مستطیل، قطرهای با هم برابر هستند.

ب) اگر در یک مثلث زاویه های روبه روی دو ضلع با هم برابر باشند، آن دو ضلع با هم برابرند.

پ) در متوازی الاضلاع، قطرها یکدیگر را نصف می کنند.

۱) صفر ۲) ۳) ۲ ۴) ۳

سؤال ۱۵: کدام دو عدد مثال نقضی برای حکم «مجموع هر دو عدد گنگ مثبت، عددی گویا است.» هستند.

۱) $۴+\sqrt{۳}, ۴-\sqrt{۳}$ ۲) $\sqrt{۲}+\sqrt{۳}, ۱-\sqrt{۳}$

۳) $\sqrt{۳}-۳, \sqrt{۲}+۳$ ۴) $\sqrt{۵}-۲, \sqrt{۳}+۲$

📖 سؤال ۱۶: کدام گزینه مثال نقض دارد؟

۱) هر مربع یک لوزی است.
۲) هر عدد اول و بزرگتر از ۲، فرد است.
۳) هر مثلث متساوی الاضلاع، متساوی الساقین است.
۴) توان سوم هر عدد حقیقی، بزرگتر از توان دوم آن است.

📖 سؤال ۱۷: استدلال استقرایی.........

۱) روش نتیجه گیری کلی بر مبنای مجموعهٔ محدودی از مشاهدات است.
۲) روش نتیجه گیری با استفاده از حقایقی است که درستی آنها را پذیرفته ایم.
۳) استدلالی است که از حکم کلی، حکم جزئی را نتیجه می دهد.
۴) هیچکدام

📖 سؤال ۱۸: کدام جمله دربارهٔ استدلال استقرایی درست نیست؟

۱) برای حدس زدن استفاده می شود.
۲) نتیجهٔ آن حتماً درست است.
۳) از مجموعه ای مشاهدات برای رسیدن به حکم کلی استفاده می شود.
۴) نتیجهٔ این استدلال لزوماً درست نیست.

📖 سؤال ۱۹: در اثبات حکم «نمی توان از یک نقطهٔ غیر واقع بر یک خط، دو عمود بر آن خط رسم کرد.» به روش برهان خلف، ابتدا فرض می کنیم که:

۱) نقطه ای روی خط است.
۲) یک عمود می توان رسم کرد.
۳) دو خط عمود رسم شده است.
۴) بیش از ۲ دو خط عمود رسم شده است.

📖 سؤال ۲۰: کدام گزینهٔ زیر مثال نقض دارد؟

۱) توان سوم هر عدد بزرگتر از توان دوم آن است.
۲) هر مثلث متساوی الاضلاع، متساوی الساقین است.
۳) هر عدد اول و بزرگتر از ۲، فرد است.
۴) هر مربع یک لوزی است.

📖 سؤال ۲۱: کدامیک از گزینه های زیر، مثال نقضی برای حدس کلی «ارتفاع های هر مثلث در نقطه ای داخل یا خارج مثلث همرس اند.» می باشد؟

۱) مثلث حاده الزاویه
۲) مثلث متساوی الساقین
۳) مثلث قائم الزاویه
۴) مثلث منفرجه الزاویه

📖 سؤال ۲۲: مثال نقض حدس کلی زیر کدام گزینه است؟ «چهار ضلعی ای که دو ضلع برابر و دو ضلع موازی داشته باشد، متوازی الاضلاع است.»

۱) مستطیل
۲) مربع
۳) ذوزنقهٔ متساوی الساقین
۴) لوزی

📖 سؤال ۲۳: کدام قضیه به صورت قضیهٔ دوشرطی بیان نمی شود؟

۱) در مثلث متساوی الساقین، ارتفاع و میانهٔ یک ضلع بر هم منطبق اند.
۲) در مثلث قائم الزاویه، عمود منصف اضلاع روی وتر متقاطع اند.
۳) در مثلث قائم الزاویه یکی از میانه ها نصف وتر است.
۴) در هر مثلث، ضلع مقابل به زاویهٔ 90° بزرگترین ضلع است.

سؤال ۲۴: کدامیک از قضایای زیر دو شرطی نیست؟

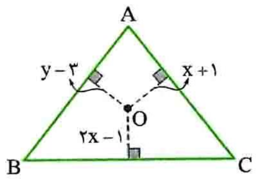
۱) در هر مثلث اگر دو زاویه برابر باشند اضلاع روبه رو به آنها نیز با هم برابرند.

۲) در هر مثلث اگر سه ضلع برابر باشند، آنگاه سه زاویهٔ مثلث نیز با هم برابرند.

۳) هر مربع یک مستطیل است.

۴) اگر دو دایره شعاع های برابر داشته باشند، آنگاه مساحت های برابر دارند.

سؤال ۲۵: مطابق شکل نقطه O روی محل تلاقی نیمسازهای زوایای B و C قرار دارد. مقدار $x+y$ کدام است؟



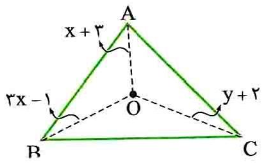
۱) ۷/۵

۲) ۹

۳) ۸

۴) ۷

سؤال ۲۶: در مثلث ABC مطابق شکل نقطه O روی محل تلاقی عمودمنصف های اضلاع AB و AC قرار دارد. $x+y$ کدام است؟



۱) ۴/۵

۲) ۵/۵

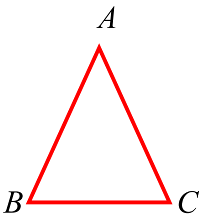
۳) ۶

۴) ۵

پاسخنامه تست های استدلال

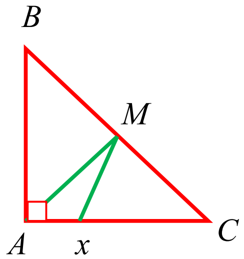
۱ـ پاسخ: گزینه۴

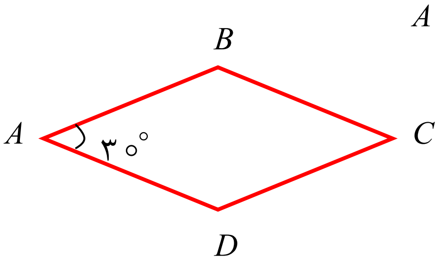
یک گزاره زمانی یک حجم کلی است که همواره درست باشد. با بررسی گزینه ها به راحتی می توان فهمید که فقط (۴) همواره صحیح است اما با توجه به شکل های زیر، مشخص می شود که گزینه های دیگر الزاماً درست نمی باشند:



گزینه۱) $\overset{\Delta}{ABC}$ متساوی الساقین است ولی متساوی الاضلاع نیست $AB = AC, \hat{C} = \hat{B} = ۸۰^\circ \Rightarrow$

گزینه۲) در مثلث قائم الزاویه ABC و MC عمودمنصف BC و AM میانهٔ وارد بر وتر (BC) است. MC و AM بر هم منطبق نیستند.

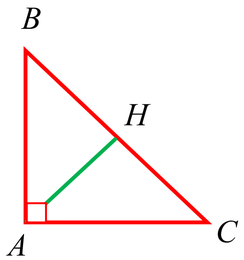




گزینه۳) در لوزی $AB=BC=CD=DA$ است ولی $\hat{A}$ قائمه نیست.

۲ـ پاسخ: گزینه۳

برای نقض این حدس باید مثلثی را مثال بزنیم که ارتفاع هایش روی محیط (روی یکی از سه ضلع) همرس شوند که با دقت در گزینه ها می بینیم مثلث قائم الزاویه این خاصیت را دارد.



CA ارتفاع وارد بر ضلع AB

BA ارتفاع وارد بر ضلع AC

AH ارتفاع وارد بر ضلع BC

سه ارتفاع همرس اند.

۳ـ پاسخ: گزینه۱

به وضوع عدد ۲ مثال نقض برای گزارهٔ گفته شده در (۱) است. چرا که $۲^۳ < ۲^۲$ است. گزینه های دیگر نیز همواره درست هستند.

۴ـ پاسخ: گزینه۲

برابری قطرهای یک مستطیل هیچ ارتباطی با برابری اضلاع مستطیل ندارد (در واقع قطرهای مستطیل همواره با هم برابرند) در نتیجه (۲) نمی تواند یک قضیهٔ دو شرطی باشد. گزینه های دیگر را نیز به سادگی می توان ثابت کرد که قضیه های دو شرطی اند.

۵ـ پاسخ: گزینه۳

بدیهی است که ذوزنقهٔ متساوی الساقین، یک چهارضلعی است که دو ضلع برابر و دو ضلع موازی دارد ولی الزاماً متوازی الاضلاع نیست.

۶ـ پاسخ: گزینه۳

الف) می توان از طریق استدلال استنتاجی ثابت کرد که این حکم همواره برقرار است.

ب) چون با مشاهدهٔ چند حالت، به نتیجه کلی رسیده اند، پس از استدلال استقرایی استفاده شده است.

۷ـ پاسخ: گزینه۱

براساس استدلال استقرایی می توانیم با استفاده از سطرهای اول و دوم، حاصل سطر چهارم را به دست آوریم.

$$۱^۲ - ۲^۲ + ۳^۲$$

$$\underline{۲^۲ - ۳^۲ + ۴^۲}$$

سطر سوم $۳^۲ - ۴^۲ + ۵^۲$

سطر چهارم $۴^۲ - ۵^۲ + ۶^۲ = ۱۶ - ۲۵ + ۳۶ = ۲۷$

۸ـ پاسخ: گزینه۲

همهٔ گزینه ها را بررسی می کنیم:

(گزینه۲) $\begin{cases} ۳۱ \times ۴۱ = ۱۲۷۱ \\ ۱۳ \times ۱۴ = ۱۸۲ \end{cases}$ (گزینه۱) $\begin{cases} ۲۱ \times ۳۲ = ۶۷۲ \\ ۱۲ \times ۲۳ = ۲۷۶ \end{cases}$

(گزینه۴) $\begin{cases} ۱۱ \times ۲۱ = ۲۳۱ \\ ۱۱ \times ۱۲ = ۱۳۲ \end{cases}$ (گزینه۳) $\begin{cases} ۲۱ \times ۳۱ = ۶۵۱ \\ ۱۲ \times ۱۳ = ۱۵۶ \end{cases}$

با کمی دقت متوجه می شوید که در حاصل ضرب اعداد گزینه های ۱، ۳ و ۴ هنگامی که اعداد مقلوب می شوند (مثلاً دو عدد ۷۲۱ و ۱۲۷ را مقلوب هم می نامیم)، جواب ها (حاصل ضرب ها) نیز مقلوب می شوند، اما در گزینهٔ ۲ این اتفاق نمی افتد.

۹ـ پاسخ: گزینه۲

الف) با توجه به اینکه حکیمان اولیه با تعداد مشاهدهٔ محدود، متوجه اثر یک گیاه بر روی اشخاص می شدند و براساس تجزیهٔ خود حکم می کردند، پس می توان گفت از استدلال استقرایی استفاده می کرده اند، بنابراین مورد (الف) مثالی برای نشان دادن ضعف استدلال استقرایی به حساب نمی آید.

ب) از آن جا که با مشاهدهٔ پنج عدد داده شده به یک نتیجه گیری رسیده ایم که در حالت کلی نادرست می باشد، می توان از این مورد به عنوان مثالی برای نشان دادن ضعف استدلال استقرایی استفاده کرد.

۱۰ـ پاسخ: گزینه۱

اثبات مورد (الف) از طریق استدلال استنتاجی است. اما در مورد (ب) می توانیم از طریق مثال نقض به سادگی درستی آن را رد کنیم ببینید:

$a = ۴$ (زوج) $b = ۵$ (فرد) $\Rightarrow a + b = ۹$ (فرد)

۱۱ـ پاسخ: گزینه۴

برانید که تفاضل یک عدد گویا و گنگ، همواره عددی گنگ است زیرا اگر $a+b$ عدد گویایی مثل x باشد (از برهان خلف استفاده کردیم!) آنگاه $a+b=x$ و در نتیجه $a=x-b$ که یک تناقض است. زیرا x و b هر دو اعداد گویا هستند و در نتیجه $x-b$ گویا است که نمی تواند برابر عدد گنگ a باشد در نتیجه به طور حتم $a+b$ گنگ است.

۱۲ـ پاسخ: گزینه۴

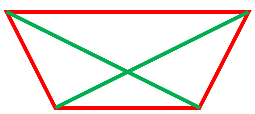
یادتان باشد برای اثبات درستی حکم هایی مثل « $\sqrt{3}$ عدددی گنگ است» یا « $\sqrt{5}-\sqrt{2}$ عددی گنگ است» و... از برهان خلف استفاده می کنیم.

۱۳ـ پاسخ: گزینه۴

در گزینه۴ اثبات به روش استدلال استنتاجی است و به برهان خلف احتیاجی ندارد ببینید:

$$a=2k+1 \Rightarrow a^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1=\underbrace{4k(k+1)}_{2n}+1=4(2n)+1=8n+1$$ اگر

۱۴ـ پاسخ: گزینه۲



الف) عکس قضیهٔ «در هر مستطیل، قطرها با هم برابر هستند.» به صورت «هر چهارضلعی که قطرهای آن با هم برابر باشند، مستطیل نیست.» در می آید که درست نیست. مثلاً قطرهای چهارضلعی شکل مقابل با هم برابرند ولی مستطیل نیست.

ب) عکس قضیهٔ « اگر در یک مثلث زاویه های روبه روی دو ضلع با هم برابر باشند، آن دو ضلع با هم برابرند.» به صورت «اگر در یک مثلث، دو ضلع با هم برابر باشند، زاویه های روبه روی دو ضلع نیز با هم برابر هستند.» می باشد که درست است.

پ) عکس قضیهٔ « در متوازی الاضلاع، قطرها یکدیگر را نصف می کنند.» به صورت «هر چهارضلعی که قطرهای آن یکدیگر را نصف می کنند، متوازی الاضلاع است.» درمی آید که درست است.

بنابراین مورد (الف) را نمی توان به صورت قضیهٔ دو شرطی بیان کرد.

۱۵ـ پاسخ: گزینه۴

حواستان باشد که اعداد $\sqrt{3}-3{,}1-\sqrt{3}$ هر دو منفی هستند پس گزینه های (۲) و (۳) رد می شوند.

گزینه۲ هم رد می شود زیرا با این که $\sqrt{3}-4{,}\sqrt{3}+4$ هر دو اعداد گنگ و مثبت هستند ولی مجموع آنها برابر ۸ می شود پس نمی توانند به عنوان مثال نقض برای حکم داده شده، در نظر گرفته شوند.

اما در گزینه۴ با دو عدد گنگ و مثبت $\sqrt{3}+2{,}\sqrt{5}-2$ روبرو هستیم که مجموع آنها برابر $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ می شود که عددی گنگ است و در نتیه مثال نقض مناسبی برای حکم داده شده هستند.

۱۶ـ پاسخ: گزینه۴

فراموش نکنید که هر مربع یک لوزی است. پس گزینه۱ درست است.

از طرفی اعداد اول بزرگتر از ۲ عبارتند از ۳، ۵، ۷، ۱۱ و... که همگی فرد هستند بنابراین گزینه ۲ هم درست است.

هم چنین در هر مثلث متساوی الاضلاع هر سه ضلع با هم برابرند، بنابراین می توان مثلث متساوی الساقین نیز باشد. بنابراین گزینه۳ هم درست است.

اما گزینه۴ درست نیست و مثال نقض آن را می توان $n=\frac{۱}{۲}$ دانست، زیرا که توان سوم عدد $\frac{۱}{۲}$، بزرگتر از توان دوم آن نیست

$$\left(\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۳}<\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۲}\right).$$

۱۷ــ ☜ پاسخ: گزینه۱

۱۸ــ ☜ پاسخ: گزینه۲

نتیجه ای که از استدلال استقرایی به دست می آید چون با مثال به دست آمده است ارزش ریاضی ندارد و نتیجهٔ آن لزوماً درست نیست!

۱۹ــ ☜ پاسخ: گزینه۳

در برهان خلف، نقیض حکم را درست فرض می کنیم یعنی فرض می کنیم ۲ خط عمود رسم شده باشد و در نهایت به تناقض بر می خوریم.

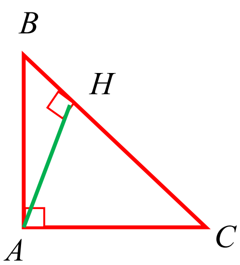
۲۰ــ ☜ پاسخ: گزینه۱

اعداد بین صفر و یک این جوری اند که هر چقدر توان آنها بزرگتر شود حاصل کمتر می شود مثلاً $a=\frac{۱}{۲}$ را در نظر بگیرید:

$$a^{۳}=\frac{۱}{۸},a^{۲}=\frac{۱}{۴}$$

بدیهی است که $\frac{۱}{۴}$ از $\frac{۱}{۸}$ بزرگتر است پس $a^{۲}>a^{۳}$ شده است در نتیجه $a=\frac{۱}{۲}$ مثال نقضی برای (۱) است.

۲۱ــ ☜ پاسخ: گزینه۳

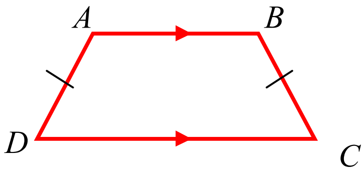


مثلث قائم الزاویه را نگاه کنید؛ AH ، AB و AC ارتفاع های این مثلث هستند که بدیهی است همگی در نقطهٔ A به هم رسیده اند. پس محل همرسی ارتفاع ها نه داخل مثلث است نه خارج آن! بلکه روی محیط مثلث قرار دارد.

۲۲ــ ☜ پاسخ: گزینه۳

اولاً که مثال نقض ما باید متوازی الاضلاع نباشد!

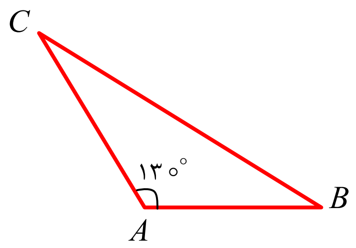
مستطیل ، مربع و لوزی نوعی متوازی الاضلاع اند، نقض متوازی الاضلاع نبودن باشند! در ذوزنقهٔ متساوی الساقین $AB||CD$ و $AD=BC$ است ولی متوازی الاضلاع نیست!

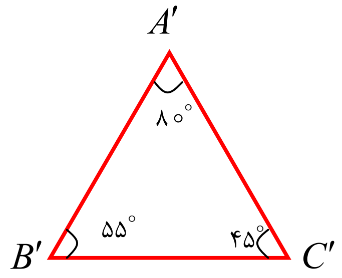


پس اصلاً نمی توانند مثال نقض باشند! پس شکل مثل مقابل متوازی الاضلاع نیست!

۲۳ــ ☜ پاسخ: گزینه۴

گزینه های (۱) و (۲) و (۳) قضایای دوشرطی هستند. یعنی هم خودشان و هم عکسشان درست هستند اما عکس (۴) درست نیست. یعنی همواره بزرگترین ضلع، روبه رو به زاویهٔ ۹۰° نیست. شکل های زیر را ببینید:





در مثلث ABC، بزرگترین ضلع، روبه رو به زاویهٔ ۱۳۰° است.

در مثلث $A'B'C'$ بزرگترین ضلع روبه رو به زاویهٔ ۸۰° است.

۲۴ـ پاسخ: گزینه۳

گزینه های (۱) و (۲) و (۴) قضایای دو شرطی هستند، اما (۳) قضیهٔ دوشرطی نیست، زیرا هر مستطیل، مربع نیست؛ بلکه مستطیلی مربع است که اضلاع برابر داشته باشد.

۲۵ـ پاسخ: گزینه۳

چون هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع زاویه به یک فاصله است، بنابراین محل تلاقی نیمسازهای داخلی یک مثلث از سه ضلع آن به یک فاصله است:

$$\left.\begin{array}{l}۲x-۱=x+۱\Rightarrow x=۲\\ y-۳=x+۱\Rightarrow y=۶\end{array}\right\}\Rightarrow x+y=۸$$

۲۶ـ پاسخ: گزینه۴

محل تلاقی عمود منصف ها از سه رأس مثلث به یک فاصله است بنابراین:

$$\begin{cases}x+۳=۳x-۱\Rightarrow ۲x=۴\Rightarrow x=۲\\ x+۳=y+۲\Rightarrow y=۳\end{cases}\Rightarrow x+y=۵$$