



RIAZISARA

سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

**درسنامه ها و جزوه های ریاضی
سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور
نمونه سوالات امتحانات ریاضی
نرم افزارهای ریاضیات
و...**

ریاضی سرا در تلگرام: (@riazisara)

<https://t.me/riazisara>



ریاضی سرا در اینستاگرام: (@riazisara.ir)

<https://www.instagram.com/riazisara.ir>



همراهنگی کلاس خصوصی آنلاین ریاضی ۰۹۲۲۰۶۳۳۰۶۲

فهرست مطالب

فصل اول: معادله درجه دوم

- درس ۱ معادله و مسائل توصیفی ۲
- درس ۲ معادله درجه ۲ و کاربردها ۴
- درس ۳ معادله‌های شامل عبارات گویا ۱۳

فصل دوم: تابع

- درس ۱ مفهوم تابع ۲۰
- درس ۲ ضابطه جبری تابع ۳۴
- درس ۳ نمودار تابع خطی ۳۹
- درس ۴ نمودار تابع درجه ۲ ۴۷

فصل سوم: کار با داده‌های آماری

- درس ۱ گردآوری داده‌ها ۶۰
- درس ۲ معیارهای گرایش به مرکز ۷۰
- درس ۳ معیارهای پراکندگی ۷۶

فصل چهارم: نمایش داده‌ها

- درس ۱ نمودارهای یک متغیره ۸۴
- درس ۲ نمودارهای چند متغیره ۹۰
- نمونه سوالات امتحانی ۹۸

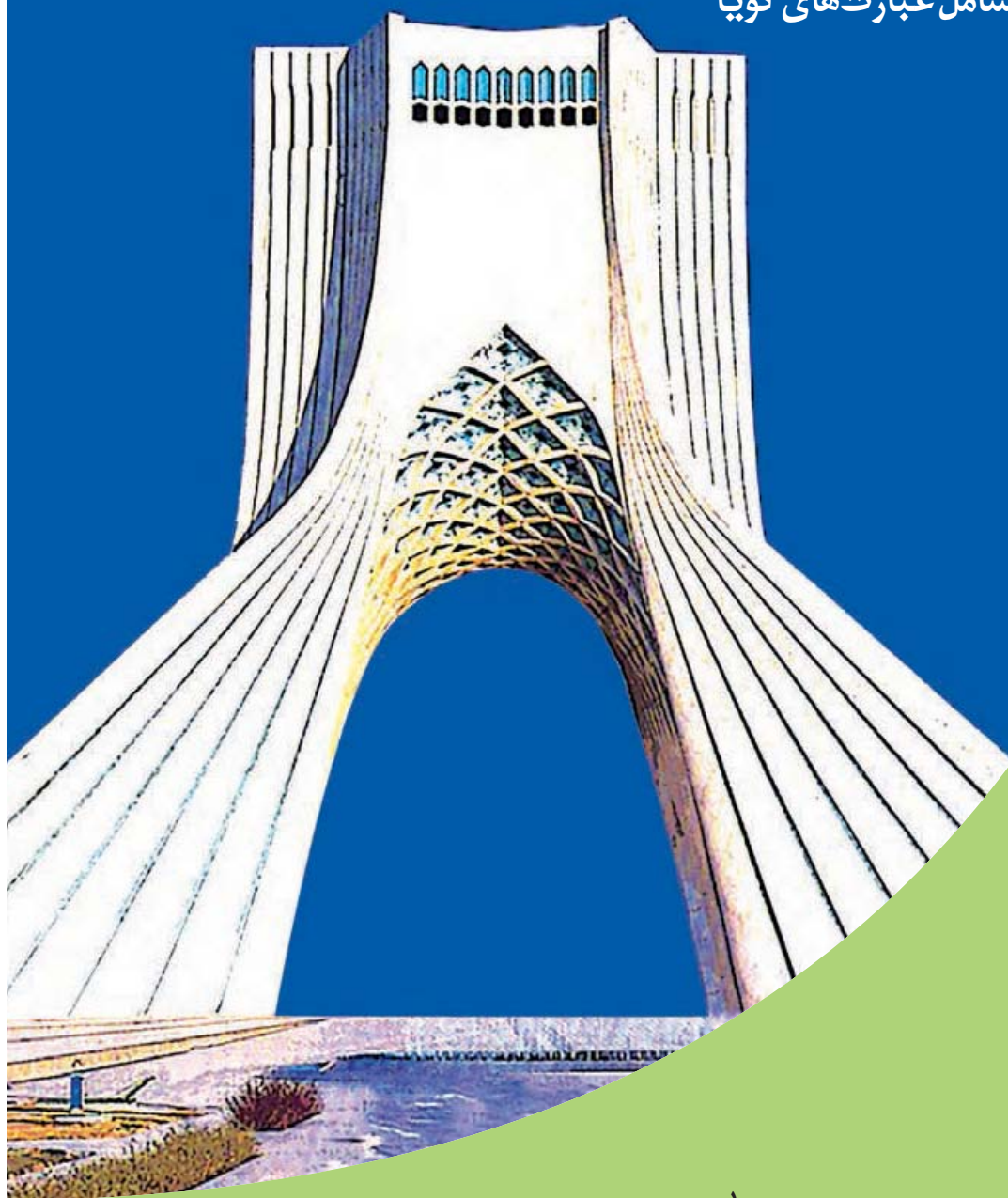
فصل اول

معادله درجه دوم

درس ۱ معادله و مسائل توصیفی

درس ۲ حل معادله درجه ۲ و کاربردها

درس ۳ معادله‌های شامل عبارتهای گویا





تمرین ۱: با توجه به شکل زیر یک معادله طرح کنید و ریشه آن را بیابید.



تمرین ۲: عددی را بیابید که دو برابر آن به علاوه عدد یک، برابر با پنج برابر همان عدد منهای چهار باشد.

هر معادله به صورت $ax + b = 0$ را که در آن a و b اعداد حقیقی و a مخالف صفر است، یک معادله درجه اول می نامند. تنها جواب این معادله از $x = -\frac{b}{a}$ به دست می آید.

تمرین ۳: احمد ۷۰۰۰ تومان پول داشت، که با آن ۴ عدد خودکار خرید و ۴۰۰ تومان نیز برایش باقی ماند. با استفاده از معادله حساب کنید احمد هر خودکار را چند تومان خریده است؟

تمرین ۴: مجموع چهار عدد طبیعی متوالی ۳۴ است آن اعداد را بدست آورید.

تمرین ۵: به ۳ برابر عددی ۲ واحد اضافه کردیم حاصل برابر ۲۰ شد آن عدد را بدست آورید؟

.....

تمرین ۶: یک حواصیل خاکستری به دسته ای حواصیل سفید رسید و به یکی از آنها گفت: اجازه می دهید من هم در گروه شما باشم. یکی از آنها پاسخ داد اگر معمای زیر را حل کنی، تو هم در گروه ما خواهی بود و ادامه داد:
 ((ما و ما نصف ما و نیمه ای از نصف ما، گر تو هم با ما شوی، ما جملگی صد می شویم))
 معادله این معما را بنویسید و سپس آن را حل کنید.

.....

تمرین ۷: محیط مربعی را به دست آورید که قطر آن $2\sqrt{5}$ باشد.

.....

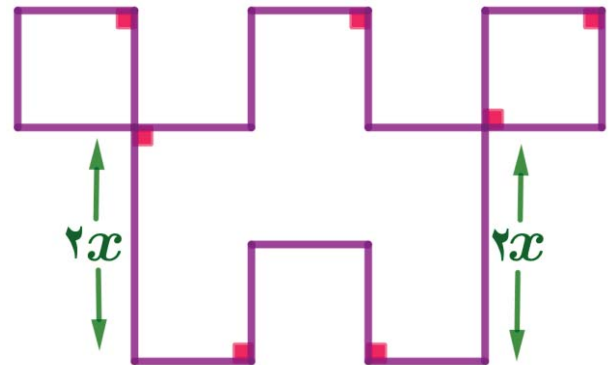
تمرین ۸: عددی بیابید که مربع آن، ۳ برابر خود همان عدد باشد.
 الف) معادله آن را بنویسید.

ب) از میان مقادیر روبرو کدام یک می تواند جواب معادله باشد؟ $x = 0$ $x = 1$ $x = -3$ $x = 4$ $x = 3$

پ) برای حل معادله بالا از روش تجزیه استفاده کنید.

معادله درجه دوم، معادله ای به شکل $ax^2 + bx + c = 0$ است که در آن $a \neq 0$ ضریب x^2 ، b ضریب x و c عدد ثابت است.

تمرین ۹: در شکل زیر طول تمام پاره خط ها به جز دو پاره خط مشخص شده در شکل برابر x است. اگر اندازه مساحت شکل برابر با اندازه محیط آن باشد، مقدار x را به دست آورید.



تمرین ۱۰: نیا از پسر عمویش کیان، سه سال بزرگ تر است. اگر حاصل ضرب سن این دو ۴۰ باشد، پسر عموی کوچک تر چند سال دارد؟

روش های حل معادلات درجه دوم

فرمول کلی (دلتا)

مربع کامل

تجزیه

حل معادله درجه دوم یعنی بدست آوردن مقادیری که به ازای آن ها تساوی برقرار باشد.



نکته: در صورتی که بتوانیم معادله ی درجه دوم را تجزیه کنیم به دو معادله درجه اول می رسیم که جواب دارند.

.....

تمرین ۱۱: معادله $x^2 + 6x = 0$ را حل کنید.

$$x^2 + 6x = 0 \Rightarrow (x)(x + 6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x + 6 = 0 \Rightarrow \underline{x = -6} \end{cases}$$

.....

تمرین ۱۲: معادله $x^2 - 5x = 0$ را حل کنید.

.....

تمرین ۱۳: معادله $x^2 - 16 = 0$ را حل کنید.

.....

تمرین ۱۴: معادله $4x^2 - 9 = 0$ را حل کنید.

.....

تمرین ۱۵: معادله $x^2 + 25 = 0$ را حل کنید.

.....

تمرین ۱۶: معادله $x^2 + 6x + 9 = 0$ را حل کنید.

تمرین ۱۷ : معادله $x^2 - 10x + 25 = 0$ را حل کنید.

.....

تمرین ۱۸ : معادله $9x^2 + 42x + 49 = 0$ را حل کنید.

.....

تمرین ۱۹ : معادله $x^2 + 5x + 6 = 0$ را حل کنید.

.....

تمرین ۲۰ : معادله $x^2 + 3x - 4 = 0$ را حل کنید.

.....

تمرین ۲۱ : معادله $x^2 - 5x - 36 = 0$ را حل کنید.

.....

تمرین ۲۲ : معادله $x^2 + 6x - 40 = 0$ را حل کنید.



تمرین ۲۳ : معادله $3x^2 - 12x - 63 = 0$ را حل کنید.

مرحله ۱ : تمام معادله را بر ضریب x^2 (در اینجا ۳) تقسیم می کنیم.

$$3x^2 - 12x - 63 = 0 \Rightarrow \frac{3}{3}x^2 - \frac{12}{3}x - \frac{63}{3} = \frac{0}{3} \Rightarrow x^2 - 4x - 21 = 0$$

مرحله ۲ : مجهول را در یک طرف تساوی نگه می داریم و عدد ثابت را به طرف دیگر می بریم.

$$x^2 - 4x = 21$$

مرحله ۳ : نصف ضریب x را به توان ۲ می رسانیم که در اینجا $(-2)^2 = 4$ است را به دو طرف معادله اضافه می کنیم.

$$x^2 - 4x + 4 = 21 + 4$$

مرحله ۴ : در طرف چپ معادله صورت اتحاد مربع دوجمله ای به صورت $(\text{نصف ضریب } x + x)$ بوجود می آید. و درست

$$(x - 2)^2 = 25$$

راست نیز یک عدد بدست می آید.

اگر آن عدد منفی باشد معادله جواب حقیقی نخواهد داشت. اگر آن عدد مثبت باشد مرحله بعد را انجام می دهیم.

مرحله ۵ : از دو طرف معادله جذر می گیریم. دو معادله درجه اول بدست می آید آنها را حل می کنیم.

$$(x - 2)^2 = 25 \Rightarrow \begin{cases} x - 2 = 5 \Rightarrow x = 5 + 2 \Rightarrow x = 7 \\ x - 2 = -5 \Rightarrow x = -5 + 2 \Rightarrow x = -3 \end{cases}$$

پس جواب این معادله ۷ و -۳ است.



تمرین ۲۴ : معادله $x^2 + 20x + 30 = 0$ را حل کنید.

تمرین ۲۵ : معادله $x^2 - 6x - 1 = 0$ را حل کنید.



تمرین ۲۶ : معادله $x^2 - 4x + 6 = 0$ را حل کنید.



در هر معادله درجه دوم به صورت $ax^2 + bx + c = 0$ ابتدا باید مقدار عبارت $b^2 - 4ac$ را که با Δ نشان می دهند، بدست آوریم. که سه حالت بوجود می آید.

حالت اول: اگر $\Delta > 0$ باشد آنگاه معادله دو جواب حقیقی دارد، که از فرمول های بدست می آید.

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$$

مثال حالت اول: معادله $x^2 - 3x + 1 = 0$ را حل کنید.

$$x^2 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow a = 1, b = -3, c = 1 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4(1)(1) = 9 - 4 = 5$$

چون $\Delta > 0$ است پس دو جواب حقیقی دارد:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) + \sqrt{5}}{2(1)} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) - \sqrt{5}}{2(1)} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$



حالت دوم: اگر $\Delta = 0$ باشد آنگاه معادله یک جواب حقیقی دارد، که از فرمول $x = \frac{-b}{2a}$ بدست می آید.

مثال حالت دوم: معادله $9x^2 - 12x + 4 = 0$ را حل کنید.

$$9x^2 - 12x + 4 = 0 \Rightarrow a = 9, b = -12, c = 4 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4(9)(4) = 144 - 144 = 0$$

چون $\Delta = 0$ است پس یک جواب حقیقی دارد:

$$x = \frac{-b}{2a} \Rightarrow x = \frac{-(-12)}{2(9)} \Rightarrow x = \frac{12}{18} \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$



حالت سوم: اگر $\Delta < 0$ باشد آنگاه معادله جواب حقیقی ندارد.

مثال حالت سوم: معادله $3x^2 + 7x + 5 = 0$ را حل کنید.

$$3x^2 + 7x + 5 = 0 \Rightarrow a = 3, b = 7, c = 5 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (7)^2 - 4(3)(5) = 49 - 60 = -11$$

چون $\Delta < 0$ است. پس جواب حقیقی ندارد.



تمرین ۲۷: معادله $7x^2 + 14x = -28$ را حل کنید.

تمرین ۲۸: معادله $2x^2 - 7x + 6 = 0$ را حل کنید.

.....

تمرین ۲۹: معادله $x^2 - \frac{2}{3}x + 1 = 0$ را حل کنید.

.....

تمرین ۳۰: طول ضلع مربعی را پیدا کنید که عدد مربوط به محیط آن مساوی عدد مربوط به مساحت آن باشد.

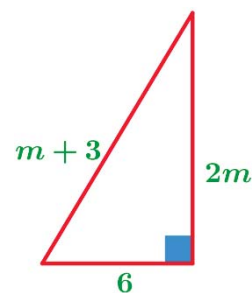
.....

تمرین ۳۱: عدد طبیعی بیابید که اگر در عدد بعد از خودش ضرب شود حاصل ۱۲ شود.

.....

تمرین ۳۲: عدد صحیحی که مجموع مربعش با خودش برابر ۳۰ باشد.

تمرین ۳۳: با توجه به مثلث قائم الزاویه روبرو مقدار n را بدست آورید. آیا چنین مثلثی وجود دارد؟



تمرین ۳۴: جدول زیر را مطابق نمونه کامل کنید.

$ax^2 + bx + c = 0$	ریشه x_1	ریشه x_2	جمع ریشه ها	ضرب ریشه ها	a	b	c	$\frac{-b}{a}$	$\frac{c}{a}$
$4x^2 - 3x - 7 = 0$	-۱	$\frac{7}{4}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{7}{4}$	۴	-۳	-۷	$\frac{3}{4}$	$-\frac{7}{4}$
$3x^2 - 5x + 2 = 0$									
$5x^2 + 6x - 8 = 0$									

اگر x_1 و x_2 جواب های یک معادله درجه دوم باشد دراین صورت داریم:

$$P = x_1 \times x_2 = \frac{c}{a} \quad \text{و} \quad S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

تمرین ۳۵: معادله درجه دومی با ضرایب صحیح بنویسید که ریشه های آن ۳ و -۴ باشد.

تمرین ۳۶ : معادله درجه دومی با ضرایب صحیح بنویسید که ریشه های آن ۸ و ۵ باشد.

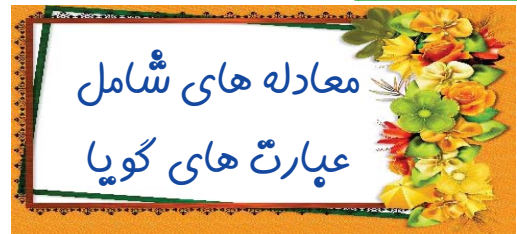
تمرین ۳۷ : معادله درجه دومی با ضرایب صحیح بنویسید که ریشه های آن $3 \pm \sqrt{5}$ باشد.

اگر S و P حاصل جمع و حاصل ضرب جواب های یک معادله درجه دوم باشد،

شکل این معادله درجه دوم به صورت $x^2 - Sx + P = 0$ است.

تمرین ۳۸ : معادله درجه دومی با ضرایب صحیح بنویسید که ریشه های آن $7 \pm \sqrt{2}$ باشد.

تمرین ۳۹ : معادله درجه دومی با ضرایب صحیح بنویسید که ریشه های آن ۱۱- و ۷- باشد.



برای حل معادله های شامل عبارت های گویا ابتدا با توجه به خاصیت معادله و مخرج مشترک گیری، معادله ای نظیر $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$ به دست می آید. به شرط اینکه $Q(x) \neq 0$ ، وقتی معادله جواب دارد که $P(x) = 0$ است، سپس ریشه های این معادله را به دست می آوریم. از بین ریشه های به دست آمده، آنهایی را قبول می کنیم که مخرج کسر $\frac{P(x)}{Q(x)}$ را صفر نکنند.

تمرین ۴۰: معادله $\frac{10}{x-3} - \frac{5(x-1)}{x-3} = 2$ را حل کنید.

تمرین ۴۱: معادله $\frac{x-2}{x-5} - \frac{x-1}{x+4} = \frac{x^2-6x+5}{x^2-x-20}$ را حل کنید.

تمرین ۴۲ : معادله $۱ + \frac{۸}{x^2} = \frac{۴}{x}$ را حل کنید.



تمرین ۴۳ : معادله $\frac{x-2}{x-4} = \frac{x+1}{x+3}$ را حل کنید.



تمرین ۴۴ : معادله $\frac{24}{10+m} + 1 = \frac{24}{10-m}$ را حل کنید.

تمرین ۴۵: معادله $\frac{y+2}{y+3} - \frac{y^2}{y^2-9} = 1 - \frac{y-1}{3-y}$ را حل کنید.

$$\frac{y+4}{y+3} - \frac{y^2}{y^2-9} = 1 - \frac{y-1}{3-y} \Rightarrow$$

$$\frac{y+4}{y+3} - \frac{y^2}{(y+3)(y-3)} - 1 + \frac{y-1}{-(y-3)} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{(y+4) \times (y-3)}{(y+3) \times (y-3)} - \frac{y^2}{(y+3)(y-3)} - \frac{1 \times (y+3)(y-3)}{1 \times (y+3)(y-3)} - \frac{(y-1) \times (y+3)}{(y-3) \times (y+3)} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{y^2 - 3y + 4y - 12 - y^2 - y^2 + 3y - 3y + 9 - y^2 - 3y + y + 3}{(y+3)(y-3)} = 0 \Rightarrow \frac{-2y^2 - y}{(y+3)(y-3)} = 0$$

$$\Rightarrow -2y^2 - y = 0 \Rightarrow -y(2y+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} -y = 0 \Rightarrow y = 0 \\ 2y+1 = 0 \Rightarrow 2y = -1 \Rightarrow y = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

.....

تمرین ۴۶: به ازای چه مقدار a معادله $\frac{a}{x} = \frac{x+1}{x+a}$ دارای جواب $x=1$ است.

تمرین ۴۷: به ازای چه مقدار a معادله $\frac{x}{a-x} + \frac{a-x}{x} = \frac{a}{x}$ دارای جواب $x=2$ است.



طرح و حل چند مسئله به کمک معادله هایی شامل عبارت های گویا



تمرین ۴۸: گلدانی نقره ای داریم که نسبت وزن نقره خالص به وزن مس خالص آن، برابر با ۸ است. استاد قلمکار آن را ذوب و ۱۰۰ گرم مس به آن اضافه کرد و گلدان جدیدی ساخت. می دانیم $\frac{4}{5}$ وزن گلدان جدید، نقره است. این گلدان قبل از ذوب شدن چه وزنی داشته است.

تمرین ۴۹: دو شیر آب A و B به یک استخر متصل اند. شیر A استخر را ۱۰ ساعت زودتر از شیر B پر می کند. چنانچه دو شیر را باهم بازکنیم، آنگاه استخر در ۱۲ ساعت پر می شود. اگر شیر B به تنهایی باز باشد، استخر در چند ساعت پر می شود؟



تمرین ۵۰: یک کیک را بین چند نفر تقسیم کردیم و به هر یک مقدار مساوی رسید. سپس یک نفر دیگر به جمع آن اضافه شد و دوباره کیک را بین آنها را تقسیم کردیم. در این مرحله به هریک به اندازه $\frac{1}{6}$ کمتر رسید. مشخص کنید در ابتدا چند نفر بوده اند؟

تکلیف خانه ۱: پمپ A به تنهایی یک چاه را در ۵۰ دقیقه تخلیه می کند و پمپ های A و B با هم همان چاه را در ۳۰ دقیقه تخلیه می کنند. پمپ B به تنهایی در چه مدتی آن چاه را تخلیه می کند؟



تکلیف خانه ۲: آقای صالحی می خواهد خانه خود را رنگ آمیزی کند. نقاش اول گفته است می تواند خانه او را در ۱۵ روز رنگ آمیزی کند و نقاش دوم گفته است می تواند خانه او را در ۱۰ روز رنگ آمیزی کند. اگر آقای صالحی از این دو نقاش بخواهد با هم خانه را رنگ آمیزی کنند، این رنگ آمیزی چند روز طول می کشد؟



تابع

فصل دوم

مفهوم تابع

درس ۱

ضابطه جبری تابع

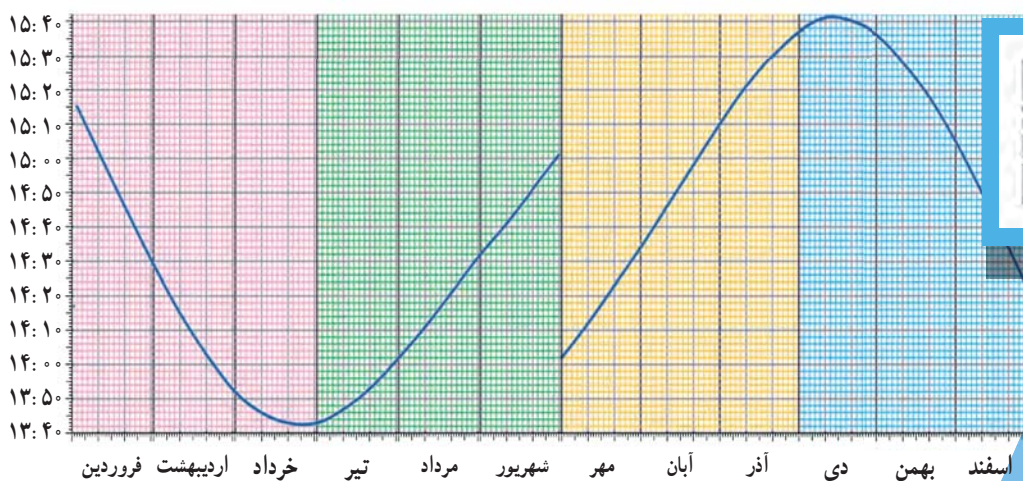
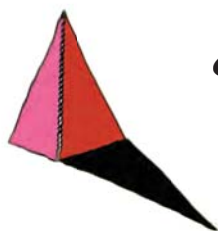
درس ۲

نمودار تابع خطی

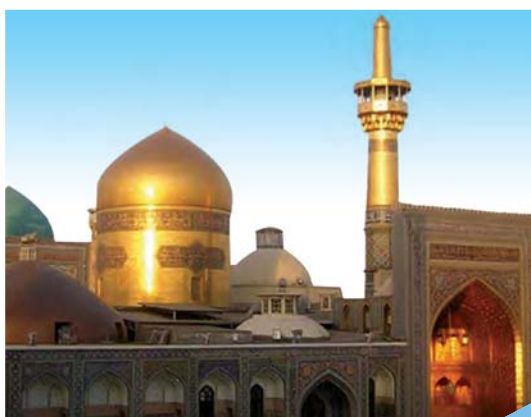
درس ۳

نمودار تابع درجه ۲

درس ۴



نمودار ساعتی که خورشید نسبت به مشهد در جهت قبله قرار می گیرد.

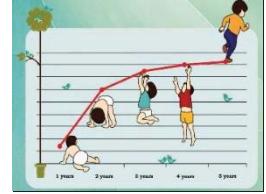


یکی از شیوه‌های جهت‌یابی قبله استفاده از سایه شاخص، هنگام قرار گرفتن خورشید در راستای قبله است. در هر منطقه با تعیین ساعت دقیقی که خورشید در جهت قبله قرار می‌گیرد می‌توان با دقت بسیار بالایی جهت قبله در آن منطقه را تعیین کرد.

مفهوم رابطه

در موارد زیادی پدیده های پیرامون ما با یکدیگر در ارتباط هستند. مانند:

- رابطه بین وزن و سن یک کودک از بدو تولد تا پنج سالگی



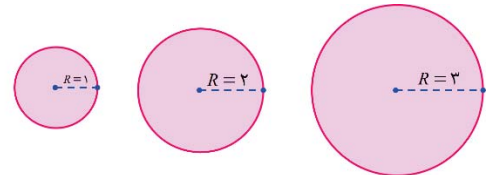
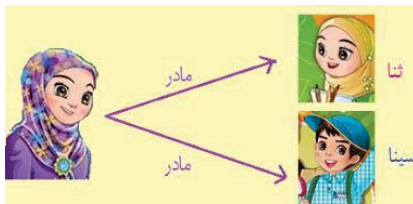
- رشد پدیده ای است که با زمان ارتباط دارد.

- تعداد ساعات کار یک کارگر و میزان دستمزدش



- رابطه مادر و فرزندانش

- رابطه بین مساحت یک دایره و شعاع آن



$$S = \pi R^2$$

$$S = \pi$$

$$S = 4\pi$$

$$S = 9\pi$$

مفهوم تابع

تمرین ۱: دوچرخه سواری با سرعت ثابت ۲ متر در ثانیه در حال حرکت است؛ جدول زیر رابطه بین زمان (t) و مسافت طی شده (d) را نشان می دهد.

شده (d) را نشان می دهد.

الف) جدول زیر را کامل کنید.

زمان بر حسب ثانیه (t)	۰	۱	۲	۲/۵	۴/۵	
مسافت طی شده بر حسب متر (d)	۰	۲		۵	۸	۱۰

ب) رابطه ای بین زمان و مسافت بنویسید.

در تمرین بالا متغیر زمان (t) به صورت مستقل تغییر می کند و متغیر مسافت (d) براساس تغییرات t تغییر می کند. و در واقع تغییرات متغیر d تابعی از تغییرات متغیر t است. t را متغیر مستقل و d را متغیر وابسته می نامند.

.....

تمرین ۲: در جدول زیر مختصات چند نقطه و رابطه بین x و y آنها براساس ضابطه $y = -2x + 3$ داده شده است.

الف) جدول روبرو را کامل کنید.

x	۱	۵	۳		$\frac{1}{2}$	۰	
y	d	-۷		۳			۰

ب) کدام متغیر مستقل و کدام متغیر وابسته است؟

.....

تمرین ۳: در جدول زیر مختصات چند نقطه و رابطه بین x و y آنها براساس ضابطه $y = x^2 + 1$ داده شده است.

الف) جدول روبرو را کامل کنید.

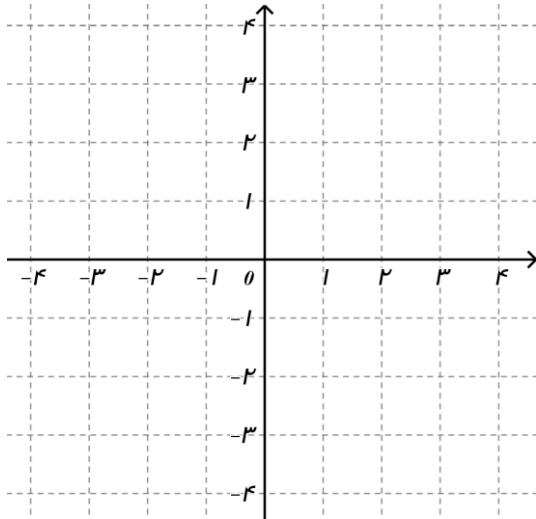
x	d	t		۰	-۱
y	t		$\frac{5}{4}$		

ب) کدام متغیر مستقل و کدام متغیر وابسته است؟

.....

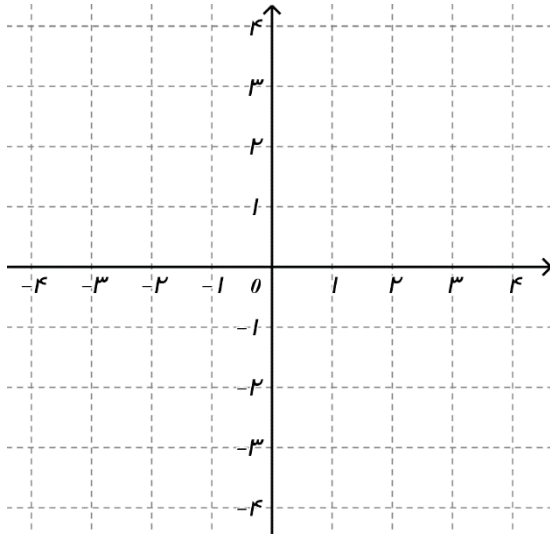
در حالت کلی رابطه هایی به صورت $y = ax + b$ ، را رابطه های خطی می نامیم.

تمرین ۴: نمودار خط $y = 4x - 2$ را روی محورهای زیر رسم کرده و جدول داده شده را کامل کنید.



x	y
۰	
	۰
$\frac{1}{2}$	
	t

تمرین ۵: نمودار خط $y = 3 - x$ را روی محورهای زیر رسم کرده و جدول داده شده را کامل کنید.



x	y

تمرین ۶: می دانیم مساحت دایره از تساوی $S = \pi \times r^2$ و محیط دایره از تساوی $P = 2 \times r \times \pi$ به دست می آید. در این

رابطه π عددی ثابت تقریباً $\pi = 3/14$ در نظر گرفته می شود و r شعاع دایره است:

الف) آیا متغیر تابعی از شعاع دایره است؟

ب) آیا محیط دایره نیز تابعی از شعاع است؟

پ) کدام متغیر، مستقل و کدام متغیر، وابسته است؟

ت) جدول زیر را کامل کنید.

r برحسب سانتی متر (شعاع)	۱	۱/۵	t	۳	۴
P برحسب سانتی متر (محیط)	π			6π	
S برحسب سانتی متر مربع (مساحت)			4π		

تمرین ۷: جدول های زیر را با توجه ضابطه داده شد کامل کنید.

الف) $y = 3x + 1$

x	-۱					۲
y	-۲					$3\sqrt{2} + 1$
(x, y)	$(-1, -2)$	$(\quad, 1)$	$(\frac{2}{3}, 3)$	$(1, \quad)$		

ب) $y = x^2$

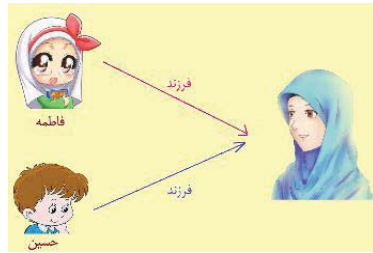
x	-۱					$\frac{4}{7}$
y	۱				۵	
(x, y)	$(-1, 1)$	$(\quad, 1)$	$(\sqrt{3}, 3)$	$(2, \quad)$		



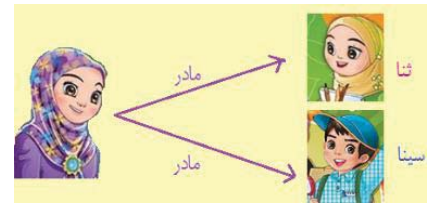
هر دوتایی که ترتیب نوشتن در آن ها مهم باشد، یک **زوج مرتب** می نامیم. مانند دو عدد (دو شی).
 a و b را که به یکی از دو صورت (a, b) یا $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ نوشته می شود و a را **مؤلفه اول** و b را **مؤلفه دوم** می نامیم.

تمرین ۸: رابطه شکل های زیر را به صورت زوج مرتب بنویسید.

- رابطه فرزندان و مادرشان



- رابطه مادر و فرزندانش



شرط این که دو زوج مرتب (a, b) و (c, d) برابر (یا نشان دهنده یک نقطه) باشند این است که و باشد.

تمرین ۹: x و y را طوری تعیین کنید که زوج مرتب $(x - y, x)$ و $(۲, ۳)$ نشان دهنده ی یک نقطه باشند.

تمرین ۱۰: اگر مجموعه $\{(۲a + b, ۱), (۲, a - b)\}$ تک عضوی باشد. مقادیر a و b را محاسبه کنید.

تمرین ۱۱: مقادیر x و y را طوری بیابید که رابطه $(x + y, ۵) = (۶, ۲x - y)$ برقرار باشد.

برای نشان دادن این روابط شکل های متفاوتی وجود دارد. مانند :

(۱) نوشتن به صورت زوج مرتب (۲) نوشتن در جدول (۳) نوشتن ضابطه

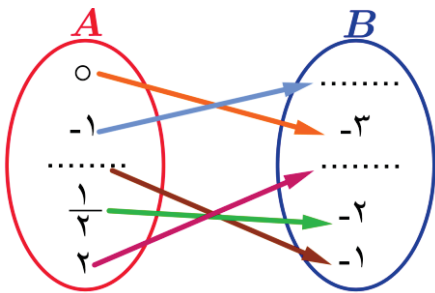
(۴) رسم نمودار ون (۵) رسم نمودار در دستگاه مختصات

تمرین ۱۲: با توجه به رابطه خطی $y = 2x - 3$ اگر فرض کنیم، x ها یا متغیرهای مستقل اعضای مجموعه $A = \left\{ 0, 1, -1, \frac{1}{2}, 2 \right\}$ باشند.

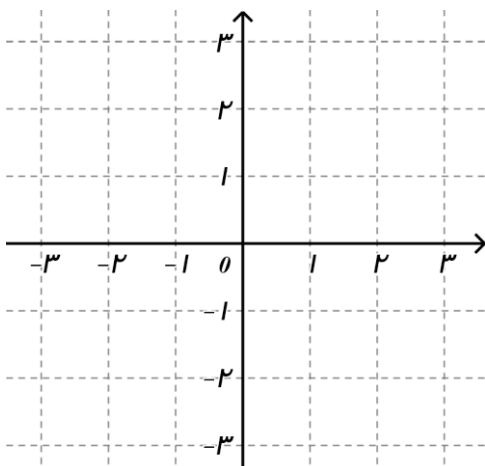
(الف) جدول زیر را کامل کنید.

x	-۱	۰	$\frac{1}{2}$	۱	۲
y	۵				
(x, y)	$(-1, 5)$	(,)	(,)	(,)	(,)

(ب) در نمودار پیکانی این رابطه جاهای خالی را پر کنید.



(پ) نمودار مختصاتی این رابطه خطی را رسم کنید.

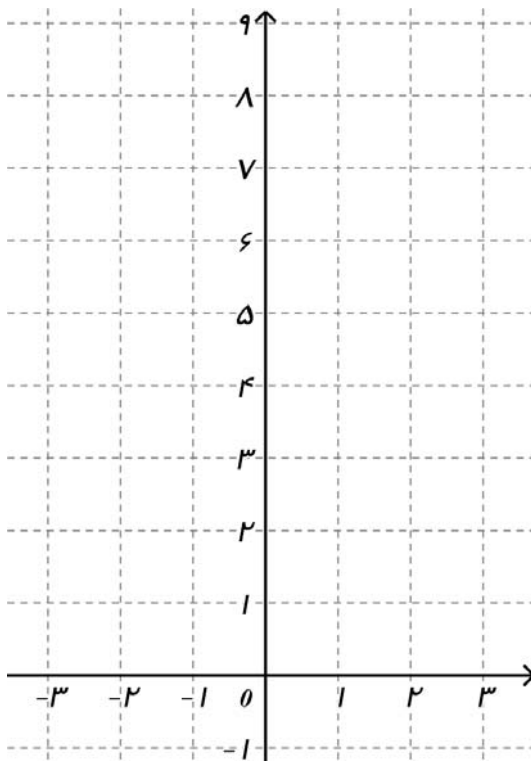


تمرین ۱۳: با توجه به رابطه $y = x^2$ اگر فرض کنیم، x ها یا متغیرهای مستقل اعضای مجموعه $A = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3\}$ باشند. **الف)** جدول زیر را کامل کنید.

x	۰	۱	-۱				
y			۱				
(x, y)	(,)	(,)	(,)	(,)	(,)	(,)	

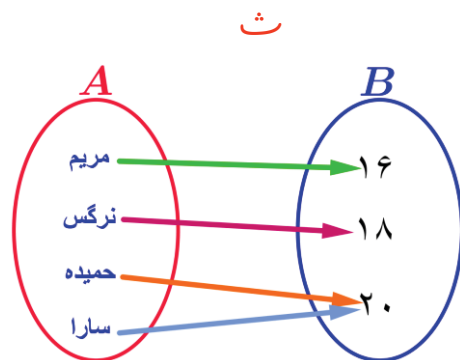
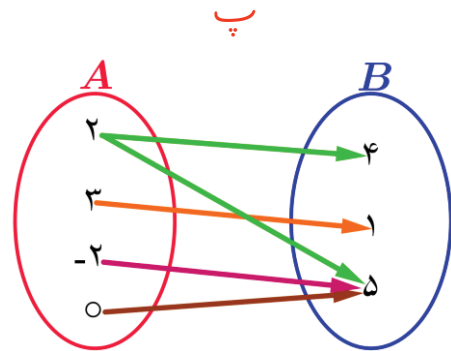
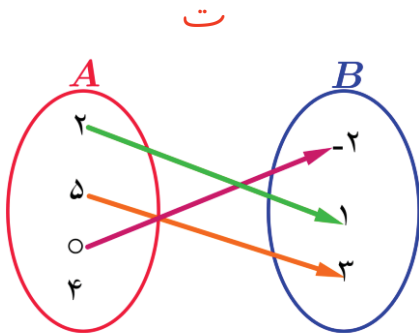
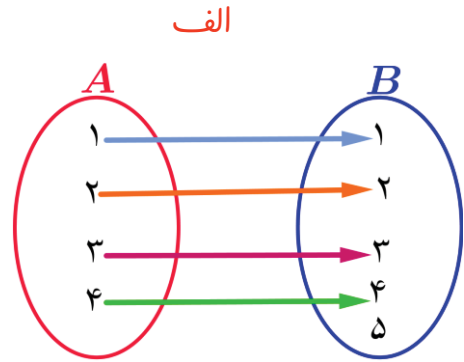
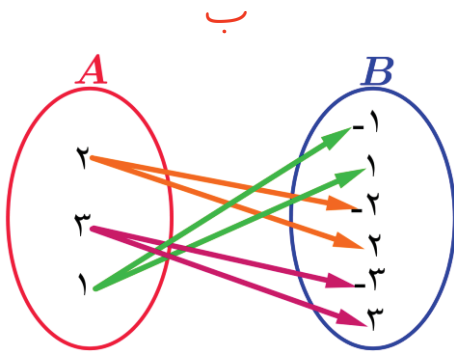
ب) نمودار پیکانی این رابطه رسم کنید.

پ) نمودار مختصاتی این رابطه خطی را رسم کنید.



یک رابطه بین دو مجموعه A و B ، یک تابع نامیده می شود؛ هرگاه متناظر با هر عضو از مجموعه A دقیقاً یک عضو از مجموعه B را بتوان نظیر یا مربوط کرد.

تمرین ۱۴: کدام یک از رابطه ها که با نمودار پیکانی نمایش داده شده اند، تابع اند؟ چرا؟



تمرین ۱۵: کدام مجموعه از زوج مرتب ها، نمایش یک تابع است؟

الف) $F = \{(۲, ۳), (۳, ۳), (۴, ۳), (۵, ۳)\}$

ب) $G = \{(۴, ۱), (۲, -۱), (۱, -۱), (۴, ۲)\}$

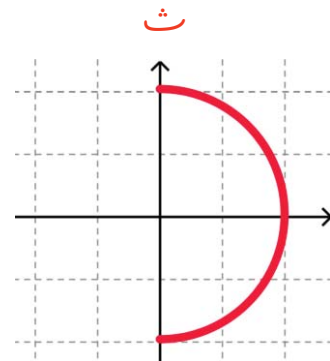
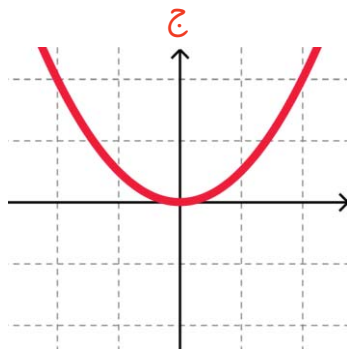
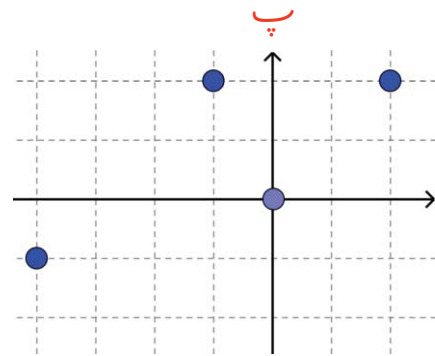
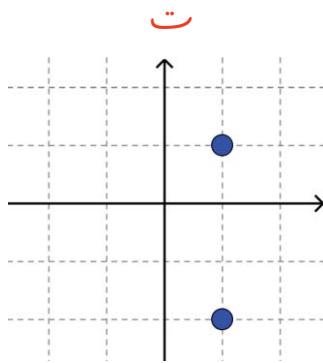
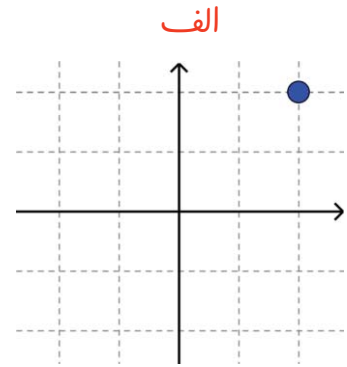
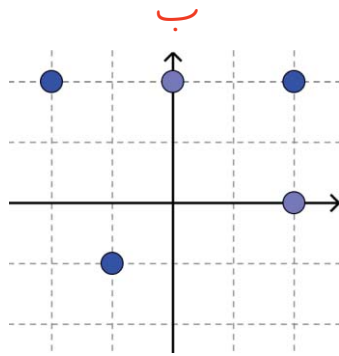
پ) $H = \{(۲, ۳)\}$

ت) $I = \{(۳, ۳)\}$

ث) $J = \{(۱, ۱), (۲, ۲), (۳, ۳), (۴, ۴)\}$

ج) $K = \{(-۴, ۱), (-۴, ۲), (-۴, ۳), (-۴, ۴)\}$

تمرین ۱۶: کدام یک از رابطه ها که نمودار مختصاتی آنها رسم شده است، تابع هستند؟ چرا؟



تمرین ۱۷: کدام یک از رابطه های تعریف شده زیر، تابع است و کدام تابع نیست؟ دلایل خود را بنویسید.

- الف)** رابطه ای که به هر شهر در ایران، سوغاتی آن شهر را نسبت می دهد. ☐ تابع است ☐ تابع نیست
- ب)** رابطه ای که به هر فرد، روز تولد او را نسبت می دهد. ☐ تابع است ☐ تابع نیست
- پ)** رابطه ای که به هر شهر، نماینده آن شهر در مجلس شورای اسلامی را نسبت می دهد. ☐ تابع است ☐ تابع نیست
- ت)** رابطه ای که به هر مسلمان، قبله او را نسبت می دهد. ☐ تابع است ☐ تابع نیست

تشخیص تابع بودن یک رابطه با نمایش های مختلف

یک رابطه بین مجموعه A و مجموعه B که با **نمودار ون** نمایش داده شده است، تنها در صورتی تابع است که از هر عضو مجموعه A دقیقاً یک پیکان شود.

اگر **نمودار یک رابطه در دستگاه مختصات** داده شده باشد، تنها در صورتی تابع است که هر خط موازی محور عرض ها نمودار را حداکثر در قطع کند.

اگر یک رابطه به صورت **مجموعه زوج های مرتب** داده شده باشد، هنگامی این رابطه تابع است که هیچ دو زوج مرتب متمایزی در آن نداشته باشد.

.....

هر تابعی یک رابطه هست اما هر رابطه ای تابع نیست.

نکته

همان گونه که مجموعه ها، بردارها، خطوط و بسیاری از مفاهیم ریاضی را نام گذاری می نماییم. برای رابطه ها و توابع نیز می توان نام هایی را انتخاب کرد. معمولاً رابطه ها را با حروفی مانند $T, S, R, \dots$ (حروف بزرگ انگلیسی) و توابع را با حروفی مانند $h, g, f, \dots$ (حروف کوچک انگلیسی) نام گذاری می کنیم.

نکته

هرگاه دو زوج مرتب دارای مختص اول برابر باشند برای تابع بودن حتماً باید مختص های دوم آن ها نیز باید
.....

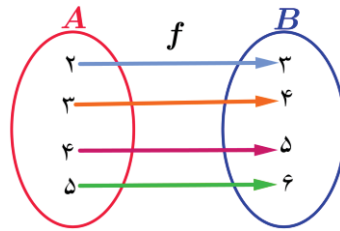
نکته

.....

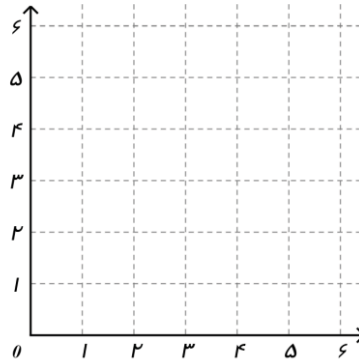
تمرین ۱۷: در هر قسمت یکی از نمایش های رابطه ها مشخص شده است. ابتدا تمام نمایش ها (پیکانی، مختصاتی، زوج مرتبی

، جدولی، توصیفی) را برای هر رابطه بنویسید. سپس تشخیص دهید که کدام رابطه، تابع است؟

الف) نمایش پیکانی:



نمایش مختصاتی:



نمایش زوج مرتبی:

نمایش جدولی:

x				
y				

نمایش توصیفی:

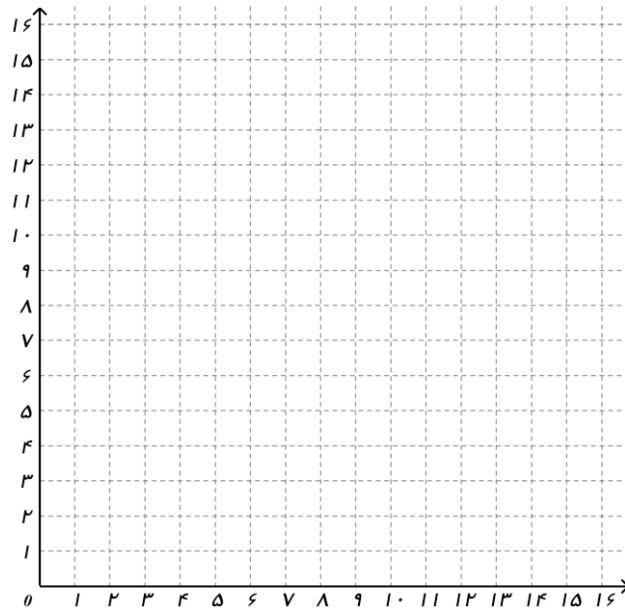
.....

ب) نمایش جدولی:

x	۱	۲	۳	۴
y	۱	۴	۹	۱۶

نمایش پیکانی:

نمایش مختصاتی:



نمایش زوج مرتبی:

نمایش توصیفی:

.....

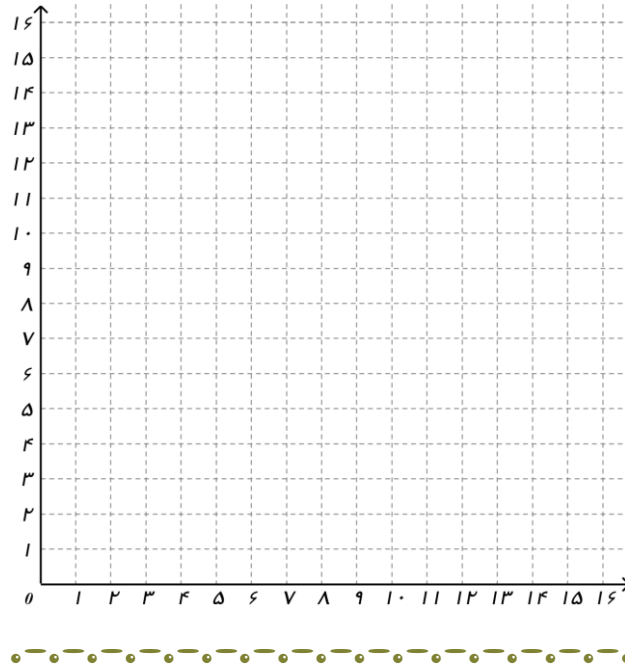
پ) نمایش توصیفی: f رابطه ای است که به هر عضو مجموعه $A = \{0, -1, 1, -2, 2\}$ توان چهارم آن را نسبت می دهد.
نمایش پیکانی:

نمایش زوج مرتبی:

نمایش جدولی:

x				
y				

نمایش مختصاتی:

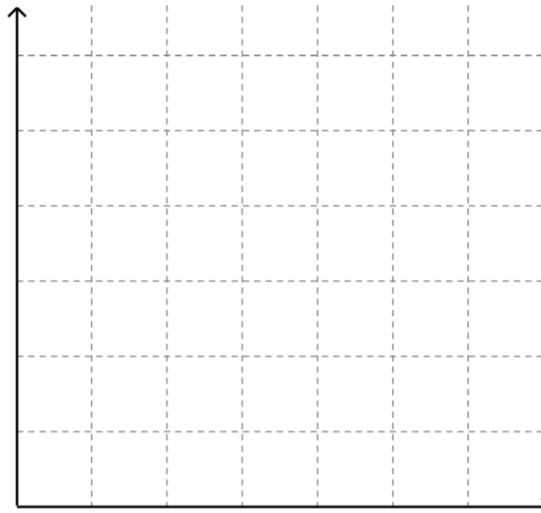


ت) نمایش زوج مرتبی :

$$f = \{ (\text{کشتی ، حمید}) , (\text{تیراندازی ، علی}) , (\text{شنا ، رضا}) , (\text{والیبال ، آرش}) , (\text{شنا ، علی}) , (\text{فوتبال ، رضا}) \}$$

نمایش پیکانی:

نمایش مختصاتی:



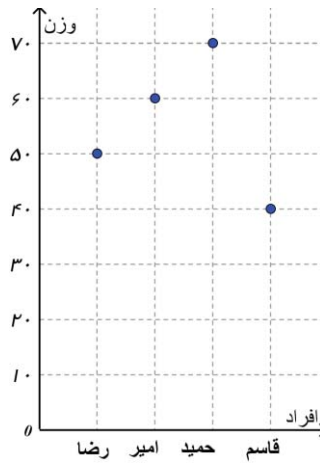
نمایش توصیفی:

نمایش جدولی:

x						
y						



ج) نمایش مختصاتی :



نمایش پیکانی:

نمایش زوج مرتبی:

نمایش توصیفی:

نمایش جدولی:

x				
y				



ضابطهٔ چدیدی

گاهی اوقات می‌توانیم رابطهٔ بین مؤلفهٔ اول و دوم زوج مرتب‌های مربوط به یک تابع را با یک ضابطه (قانون) بیان کنیم. به طور مثال تابع $f = \left\{ (1, 4), (2, 5), (-1, 2), \left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right) \right\}$ را در نظر می‌گیریم در این تابع همواره با اضافه کردن ۳ واحد به مؤلفهٔ اول، مؤلفهٔ دوم بدست می‌آید. به عبارت دیگر اگر $(x, y) \in f$ در این صورت $y = x + 3$. معادلهٔ $y = x + 3$ را ضابطهٔ تابع f می‌نامیم.

اگر تابع f را به عنوان یک ماشین در نظر بگیریم و متغیر x مستقل فرض شود در این صورت تأثیر تابع f روی x را با $f(x)$ نمایش می‌دهیم و حاصل این تأثیر همان y (متغیر وابسته) است؛ یعنی: $y = f(x)$

یک تابع مانند f از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B ، قانون یا ضابطه ای است که به هر عضو از A دقیقاً یک عضو از مجموعه B را نسبت دهد.



دامنه و برد تابع

در نمایش توسط زوج مرتب برای هر تابع :

مجموعهٔ شامل همهٔ مؤلفهٔ های اول را دامنهٔ تابع و مجموعهٔ شامل همهٔ مؤلفهٔ های دوم را برد تابع می‌نامیم. دامنهٔ تابع f را با D_f و برد تابع را با R_f نشان می‌دهیم.

برای نمایش تابعی چون f از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B می‌نویسیم: $\begin{cases} f: A \rightarrow B \\ y = f(x) \end{cases}$ که $f(x)$ را ضابطهٔ تابع و A را دامنهٔ تابع f در نظر می‌گیریم.

تمرین ۱۸: باتوجه به ضابطهٔ هر تابع و مانند نمونه، مجموعهٔ مقادیر یا برد هر تابع را مشخص کنید.

(الف) $\begin{cases} f: A \rightarrow B \\ f(x) = 2x^2 + 1 \end{cases} \quad A = \left\{ -1, \sqrt{2}, 2, 1, 0, \frac{1}{2} \right\}$

$$f(-1) = 2 \times (-1)^2 + 1 = 2 + 1 = 3$$

$$f(\sqrt{2}) = 2 \times (\sqrt{2})^2 + 1 = 4 + 1 = 5$$

$$f(۲) = ۲ \times (۲)^۲ + ۱ = ۸ + ۱ = ۹$$

$$f(۱) = ۲ \times (۱)^۲ + ۱ = ۲ + ۱ = ۳$$

$$f(\circ) = ۲ \times (\circ)^۲ + ۱ = \circ + ۱ = ۱$$

$$f\left(\frac{۱}{۲}\right) = ۲ \times \left(\frac{۱}{۲}\right)^۲ + ۱ = \frac{۱}{۲} + ۱ = \frac{۳}{۲}$$

$$\Rightarrow R_f = \left\{ ۳, ۵, ۹, ۱, \frac{۳}{۲} \right\}$$



ب)
$$\begin{cases} f: A \rightarrow B \\ f(x) = x^۳ - ۱ \end{cases} \quad A = \left\{ ۱, -۱, \circ, ۴, \sqrt[۳]{۳}, \frac{۱}{۳}, ۲ \right\}$$

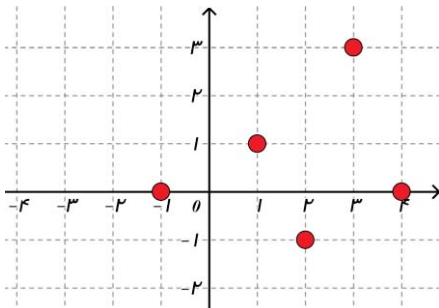
پ)
$$\begin{cases} f: A \rightarrow B \\ f(x) = \sqrt{x+۱} - ۱ \end{cases} \quad A = \{ \circ, -۱, ۸, ۳, ۲ \}$$

$$\text{ت) } \begin{cases} f: A \rightarrow B \\ f(x) = \frac{x+1}{x-2} \end{cases} \quad A = \left\{ -2, 0, 1, \sqrt{2}, \frac{1}{2} \right\}$$

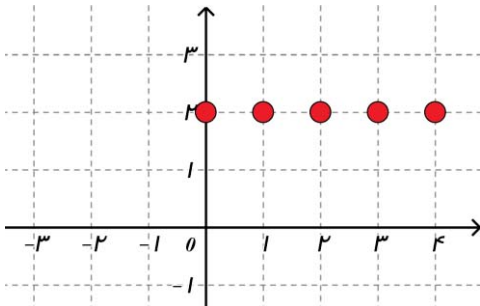


تمرین ۱۹: برای هر یک از توابع زیر، دامنه و برد را مشخص کنید. و در صورت امکان ضابطه هر تابع را بنویسید.

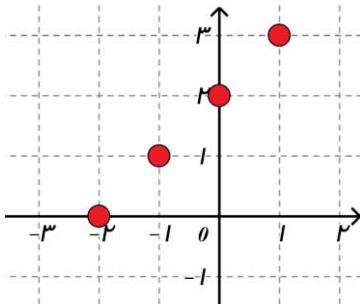
الف)



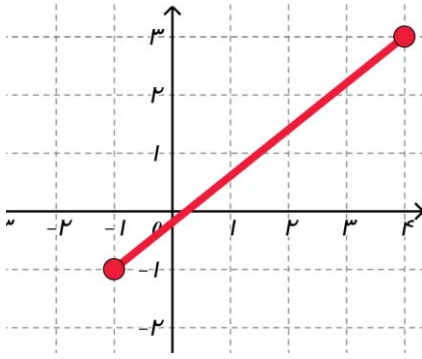
ب)



پ)



ت)



تمرین ۲۰: دامنه و برد هر یک از تابع های زیر را مشخص کنید.

الف)

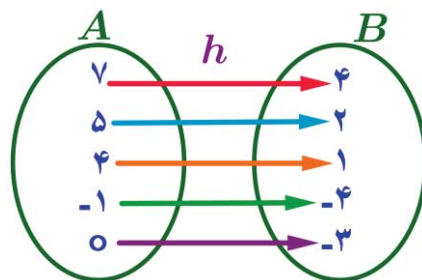
$$\begin{cases} g: A \rightarrow B \\ g(x) = x + 4 \end{cases}$$

$$A = \{2, \dots, \dots, \dots, \dots\}$$

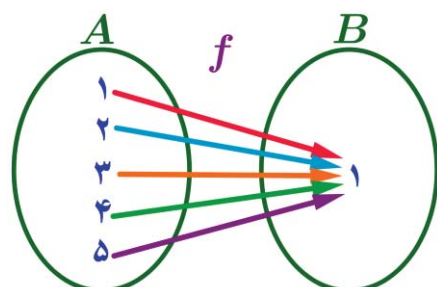
$$R_g = \{2, 3, 4, 5, \dots\}$$

ب) $f = \{(1, -1), (2, -2), (3, -3), (\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (4, -4)\}$

پ)



ت)

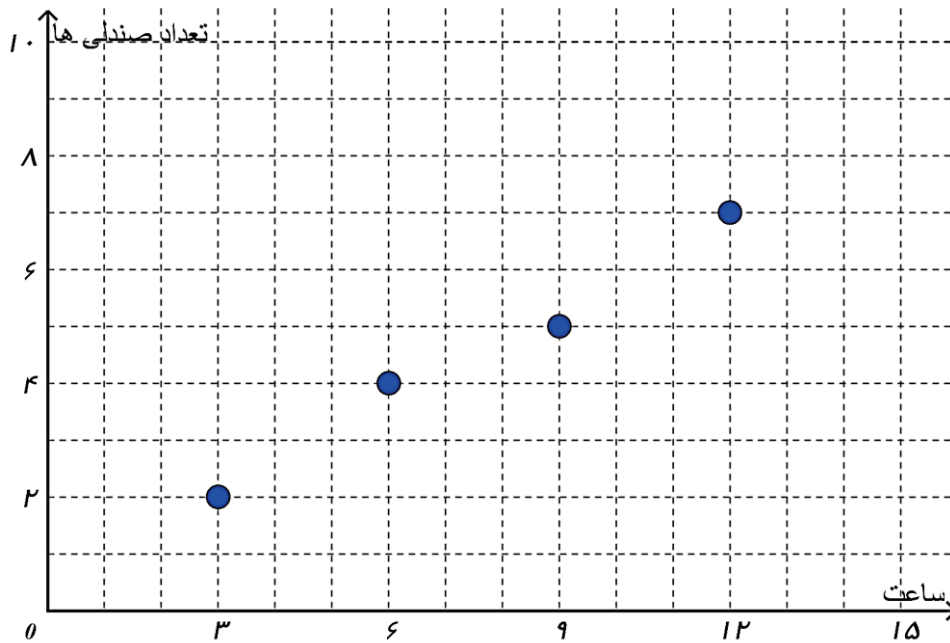


$$f = \left\{ (1, 1), (2, 2), (3, 3), (\sqrt{2}, \sqrt{2}), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), (0, 0) \right\} \quad \text{ث}$$

.....



تمرین ۲۱: نمودار زیر تعداد صندلی هایی را که در پایان هر ۳ ساعت کار در یک کارگاه تولید می شوند، نشان می دهد.



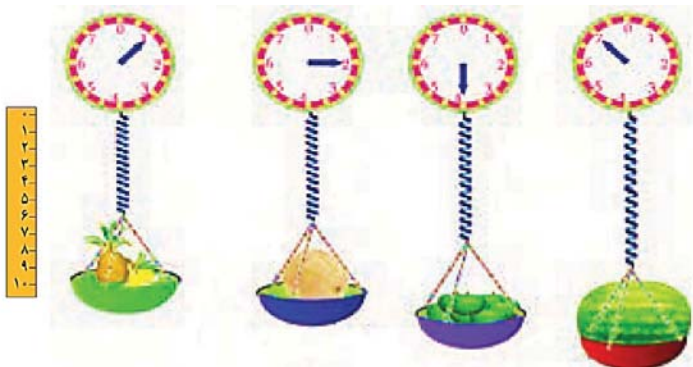
الف) آیا می توانید تعداد صندلی های تولید شده در این کارگاه را در پایان پانزدهمین ساعت کاری پیش بینی کنید؟

ب) آیا تعداد صندلی های تولید شده در این کارگاه در پایان هشتمین ساعت کاری بیش از ۵ عدد است؟

پ) آیا می توانید تعداد صندلی های تولید شده در این کارگاه را در پایان هر ساعت خاص را پیش بینی کنید.

تمرین ۲۲: طول فنر در حالتی که به آن هیچ وزنه ای آویزان نشده است ۵ سانتی متر است و به ازای هر کیلوگرم وزنه ای که به آن آویزان شود ۰/۵ سانتی متر به طول آن افزوده می شود.

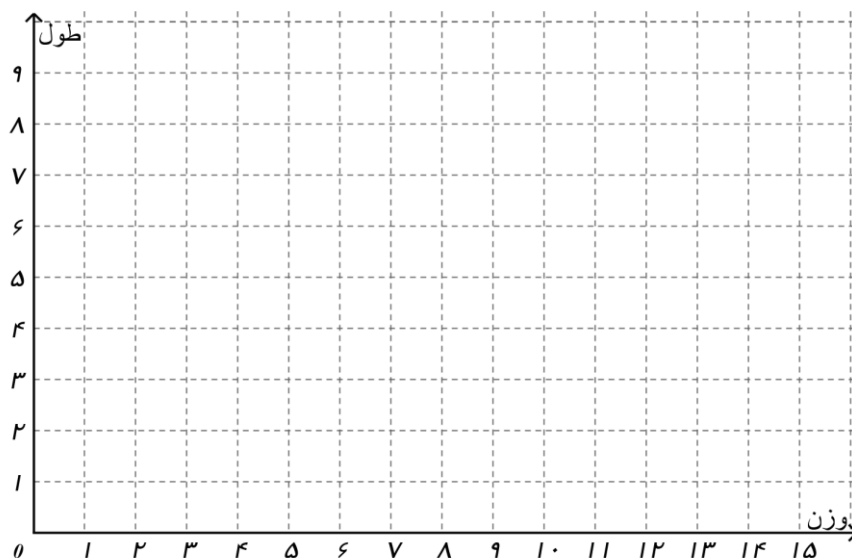
الف) طول فنر را در شکل های زیر مشخص کنید و سپس جدول زیر را تکمیل نمایید.



اندازه وزنه (برحسب کیلوگرم)	۱	۲	۵	۷	۲۰	a
طول فنر (برحسب سانتی متر)						

ب) اگر تابع طول فنر را با f نشان دهیم، مقادیر $f(1)$ ، $f(4)$ ، $f(8)$ و $f(10)$ (برحسب سانتی متر) را محاسبه کنید.

پ) نقاط به دست آمده از قسمت قبل را در دستگاه مختصات مشخص کنید. نقاط حاصل را به هم وصل کنید.



تمرین ۲۳: یک کارخانه تولید لوله های آبیاری کشاورزی در هر ساعت $\frac{1}{3}$ کیلومتر لوله تولید می کند.

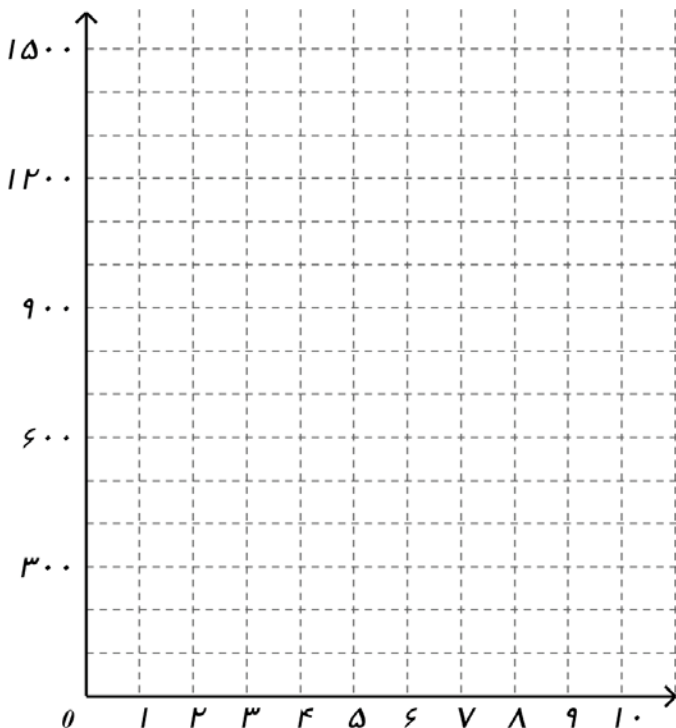
اگر متر از لوله ای را که در این کارخانه پس از x ساعت تولید می کند، بر حسب متر با $f(x)$ نشان دهیم.

الف) جدول زیر را به ازای مقادیر مختلف x کامل نمایید.

$$\frac{1}{3} \times 1000 = \dots\dots\dots$$

x (بر حسب ساعت)	۱	۲	۳	۴	۵	n
$f(x)$ (بر حسب متر)						

ب) نقاط به دست آمده از قسمت قبل را در دستگاه مختصات مشخص کنید. نقاط حاصل را به هم وصل کنید.



هر تابع به صورت $y = f(x)$ که در آن $y = mx + h$



برای رسم نمودار تابع دو نقطه از نمودار تابع $y = mx + h$ را در دستگاه مختصات مشخص می‌کنیم و سپس آن دو نقطه را به وسیله خطی به هم وصل می‌کنیم.

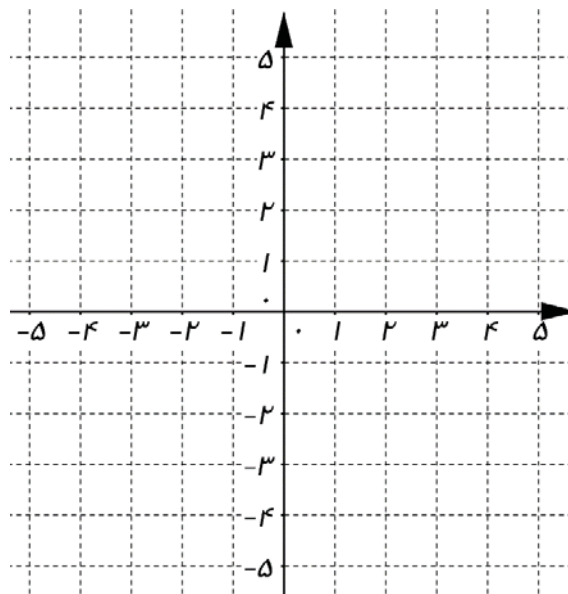


تمرین ۲۴: برای یک تابع خطی داریم: $f(0) = 2$ و $f(2) = 3$

الف) شیب این تابع خطی را بدست آورید.

ب) ضابطه این تابع خطی را بدست آورید.

پ) نمودار این تابع را رسم کنید.

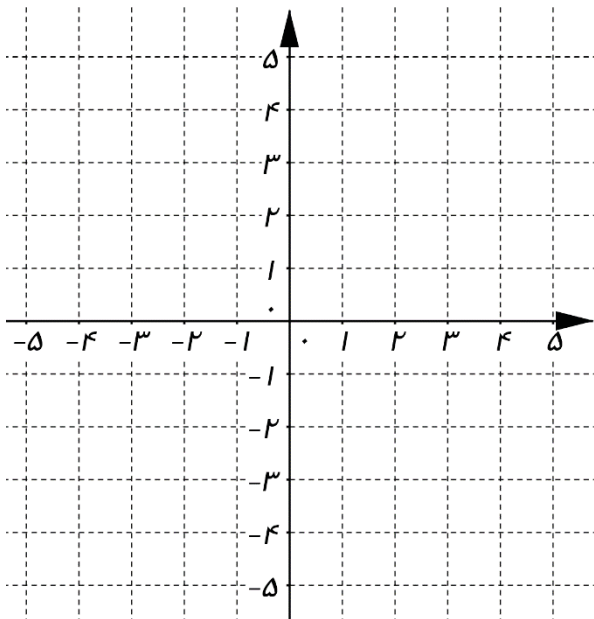


تمرین ۲۵: اگر نمودار یک تابع خطی f از مبدأ عبور کرده و $f(-1) = 2$ باشد.

الف) شیب این تابع خطی را بدست آورید.

ب) ضابطه این تابع خطی را بدست آورید.

پ) نمودار این تابع را رسم کنید.



تمرین ۲۶: جدول زیر رابطه خطی بین عمق و دمای سنگ ها را در زیر زمین نشان می دهد. x معرف عمق (برحسب کیلومتر) و y معرف دما (برحسب سانتی گراد) است.

x (برحسب کیلومتر)	۲	۴
y (برحسب سانتی گراد)	۷۵	۱۸۵

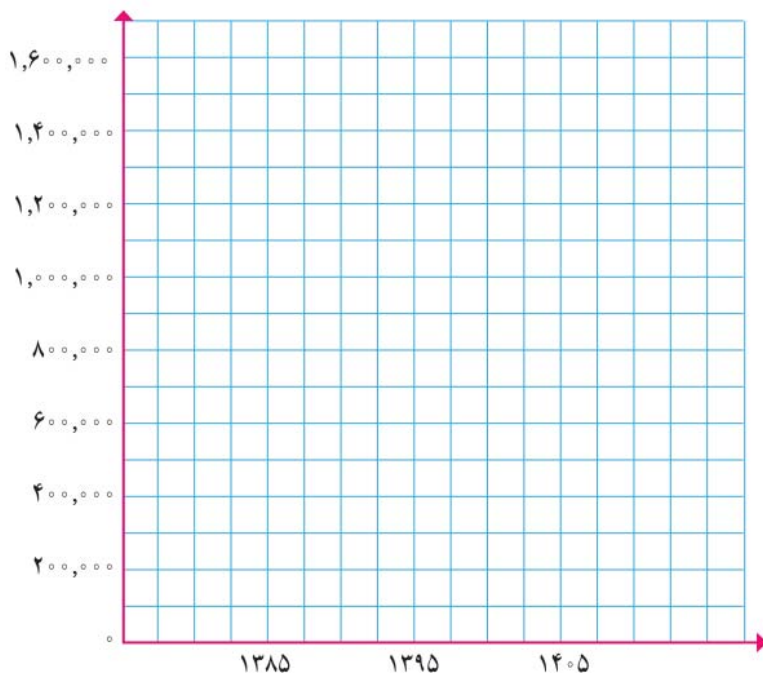
الف) شیب این تابع خطی را بدست آورید.

ب) ضابطه این تابع خطی را بدست آورید.

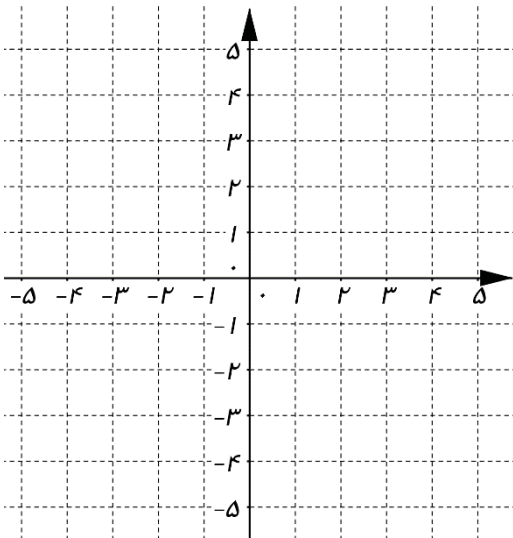
پ) تعیین کنید در چه عمقی دما به 440 درجه سانتی گراد می رسد؟



تمرین ۲۷: فرض کنیم جمعیت یک شهر در سال 1385 برابر یک میلیون و پنجاه هزار نفر و در سال 1395 برابر یک میلیون و دویست و هشتاد هزار نفر بوده است. اگر برای رشد جمعیت این شهر، مدل الگویی رشد خطی در نظر بگیریم، با رسم نمودار تابع جمعیت، جمعیت این شهر را در سال 1405 به طور تقریبی برآورد کنید.

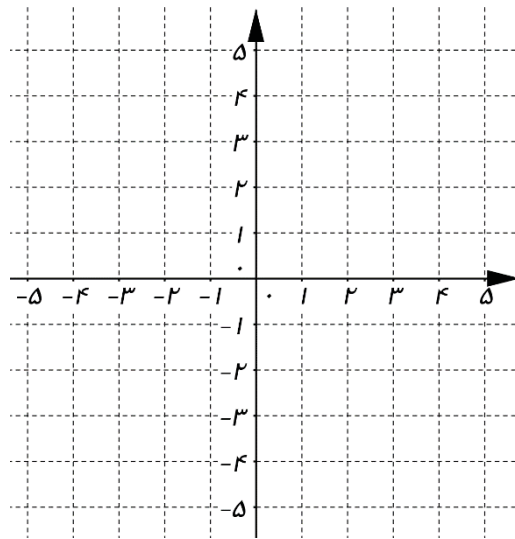


تمرین ۲۸: نمودار تابع خطی $y = -5x + 4$ را رسم کنید.



تمرین ۲۹: برای یک تابع خطی داریم: $h(-1) = -3$ و $h(-5) = 5$

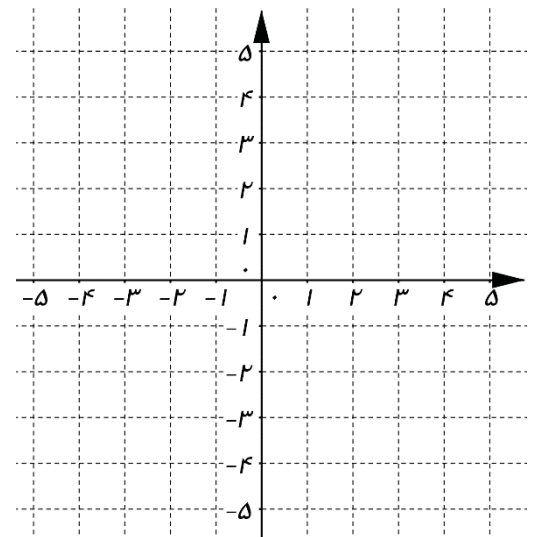
الف) نمودار این تابع را رسم کنید.



ب) شیب این تابع خطی را بدست آورید.

پ) ضابطه این تابع خطی را بدست آورید

تمرین ۳۰: نمودار تابع خطی $y = 2x - 3$ را رسم کنید.



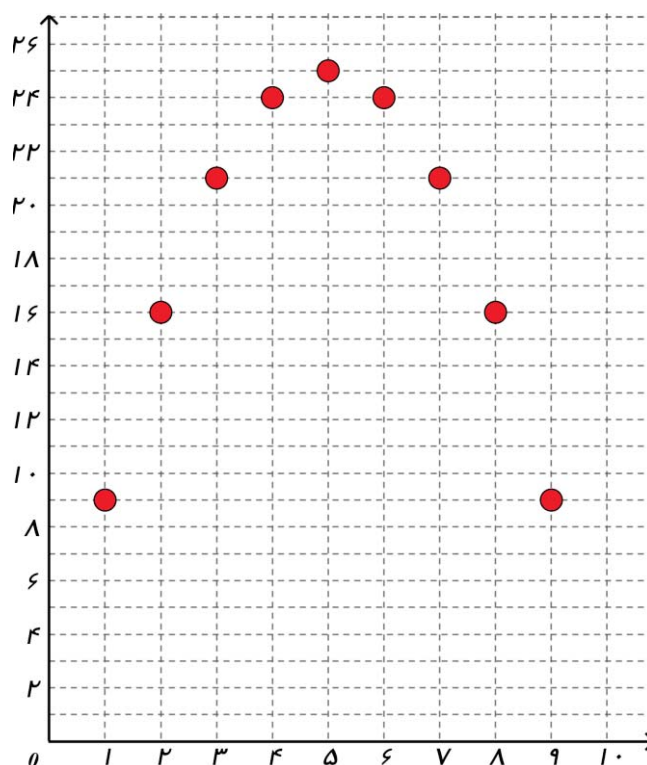


تمرین ۳۱: برای برگزاری یک جلسه، با کنار هم قرار دادن تعدادی میز به صورت مربع هایی ۱×۱ ، یک میز مستطیل شکل به محیط ثابت ۲۰ تهیه می کنیم. اندازه ضلعی را که صندلی رئیس جلسه در آن قرار می گیرید با x و اندازه ضلع دیگر را با y نشان می دهیم همچنین مساحت مستطیل را با S نشان می دهیم.

الف) جدول زیر را کامل کنید.

x	۱	۲				۶			۹
y	۹	۸	۷						
S	۹			۲۴				۱۶	
(x, y)	(۱, ۹)	(۲, ۱۶)			(۵, ۲۵)			(۸, ۱۶)	

ب) اگر هر زوج مرتب جدول بالا را یک نقطه فرض کنیم، این نقاط را در دستگاه مختصات زیر مشخص کنید.



تمرین ۳۲: یک شرکت نقاشی ساختمانی قیمتی را که برای رنگ آمیزی روزانه هر مترمربع از دیوار بیرونی یک کارخانه تعیین می کند، مبلغ $1200 - x$ تومان است. x میزان رنگ آمیزی روزانه گروه بر حسب متر مربع است. هزینه رفت و آمد و صرف غذای گروه به طور ثابت روزانه ۳۰۰۰۰ تومان و همچنین مترمربعی ۲۰۰ تومان هزینه لوازم مصرفی بر عهده گروه است.

(الف) قیمت پرداختی شرکت برای هر متر مربع رنگ آمیزی به ازای $x = 200$ (200 متر مربع کار در یک روز) و $x = 300$ چقدر است؟

حل: برای $x = 200$ هر متر مربع ۱۰۰۰ تومان است $1200 - 200 = 1000 \xrightarrow{x=200} 1200 - x$

برای $x = 300$ هر متر مربع ۹۰۰ تومان است $1200 - 300 = 900 \xrightarrow{x=300} 1200 - x$

(ب) هزینه گروه در یک روز به ازای $x = 200$ و $x = 300$ چقدر است؟

حل: هزینه متغیر + هزینه ثابت = هزینه کل

$$C(x) = 30000 + 200 \cdot x \xrightarrow{x=200} C(200) = 30000 + 200 \cdot (200) = 30000 + 40000 = 70000$$

هزینه برای $x = 200$ هر متر مربع ۷۰۰۰۰ تومان است

$$C(x) = 30000 + 200 \cdot x \xrightarrow{x=300} C(300) = 30000 + 200 \cdot (300) = 30000 + 60000 = 90000$$

هزینه برای $x = 300$ هر متر مربع ۹۰۰۰۰ تومان است

(پ) اگر تابع سود گروه را با P نشان دهیم در یک روز به ازای $P(200)$ ، $P(100)$ ، $P(200)$ و $P(300)$ را محاسبه کنید.

$$R(x) = (1200 - x) \times x \Rightarrow R(x) = 1200x - x^2 \quad \text{میزان رنگ آمیزی} \times \text{قیمت هر متر مربع} = \text{درآمد}$$

$$C(x) = 30000 + 200x \quad \text{هزینه متغیر} + \text{هزینه ثابت} = \text{هزینه کل}$$

$$\text{هزینه} - \text{درآمد} = \text{سود}$$

$$P(x) = R(x) - C(x) \Rightarrow P(x) = 1200x - x^2 - (30000 + 200x) \Rightarrow P(x) = -x^2 + 1000x - 30000$$

$$P(200) = -(200)^2 + 1000(200) - 30000 = -40000 + 200000 - 30000 = 130000$$

$$P(100) = -(100)^2 + 1000(100) - 30000 = -10000 + 100000 - 30000 = 60000$$

$$P(200) = -(200)^2 + 1000(200) - 30000 = -40000 + 200000 - 30000 = 130000$$

$$P(300) = -(300)^2 + 1000(300) - 30000 = -90000 + 300000 - 30000 = 180000$$

(ت) جدول را برای $P(x)$ به ازای مقادیر مختلف x کامل کنید.

x	۱۰۰	۲۰۰	۳۰۰	۴۰۰	۵۰۰	۶۰۰	۷۰۰	۸۰۰	۹۰۰
$P(x)$	۶۰۰۰۰	۱۳۰۰۰۰	۱۸۰۰۰۰						

$$P(۴۰۰) = -(۴۰۰)^2 + ۱۰۰۰(۴۰۰) - ۳۰۰۰۰۰ = -۱۶۰۰۰۰ + ۴۰۰۰۰۰ - ۳۰۰۰۰۰ = ۲۱۰۰۰۰$$

$$P(۵۰۰) = -(۵۰۰)^2 + ۱۰۰۰(۵۰۰) - ۳۰۰۰۰۰ = -۲۵۰۰۰۰ + ۵۰۰۰۰۰ - ۳۰۰۰۰۰ = ۲۲۰۰۰۰$$

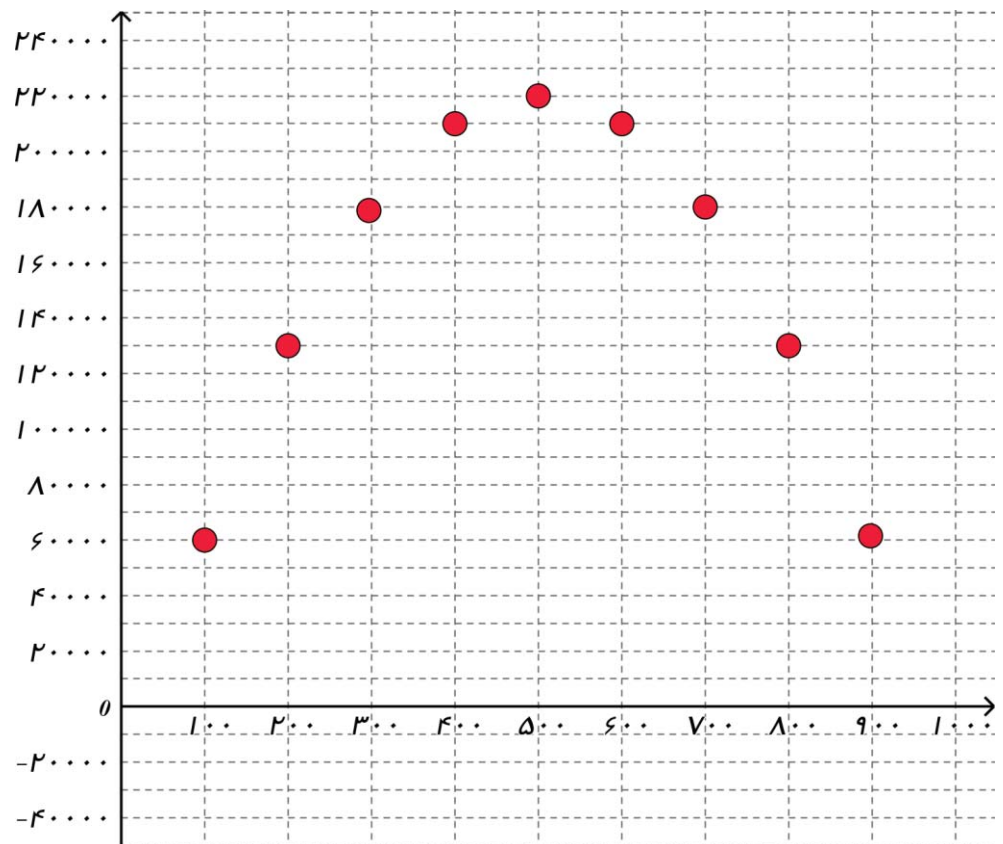
$$P(۶۰۰) =$$

$$P(۷۰۰) =$$

$$P(۸۰۰) =$$

$$P(۹۰۰) =$$

(ت) نقاط به دست آمده از جدول بالا را در دستگاه مختصات زیر مشخص کنید.



(ت) چرا بعضی نقاط پایین تر از محور افقی قرار می گیرند؟ آیا هرچه متراژ بیشتری رنگ آمیزی شود، گروه بیشتری کسب



در این درس با نمودارهای تابع درجه دوم موسوم به سهمی آشنا می شویم. آشنایی با سهمی و معادله آن و درک خواص آن منجر به درک مفاهیم دیگری در ریاضیات می گردد.

نمودار تابع درجه دوم (سهمی)، یک منحنی غیر مستقیم است.

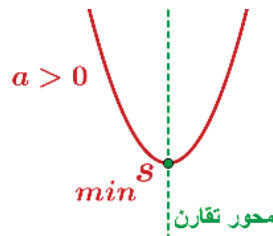
ضابطه یک تابع درجه دوم (سهمی) در حالت کلی به صورت $y = ax^2 + bx + c$ است که a, b, c عدد و $a \neq 0$ است.

(۱) بطور کلی سهمی $y = ax^2 + bx + c$ به یکی از شکل های  و  است.

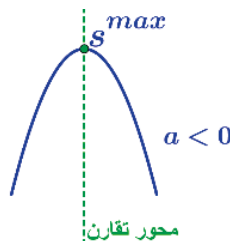
(۲) در سهمی به معادله $y = ax^2 + bx + c$ نقطه ای به طول $x_0 = \frac{-b}{2a}$ رأس سهمی است.

(۳) خط $x = \frac{-b}{2a}$ که از رأس سهمی موازی محور y ها رسم می شود، محور تقارن سهمی است.

(۴) اگر در معادله سهمی $a > 0$ باشد، شکل سهمی به صورت زیر خواهد بود در این حالت سهمی در نقطه رأس خود دارای کمترین مقدار عرض (y) است.



(۵) اگر در معادله سهمی $a < 0$ باشد، شکل سهمی به صورت زیر خواهد بود در این حالت سهمی در نقطه رأس خود دارای بیشترین مقدار عرض (y) است.

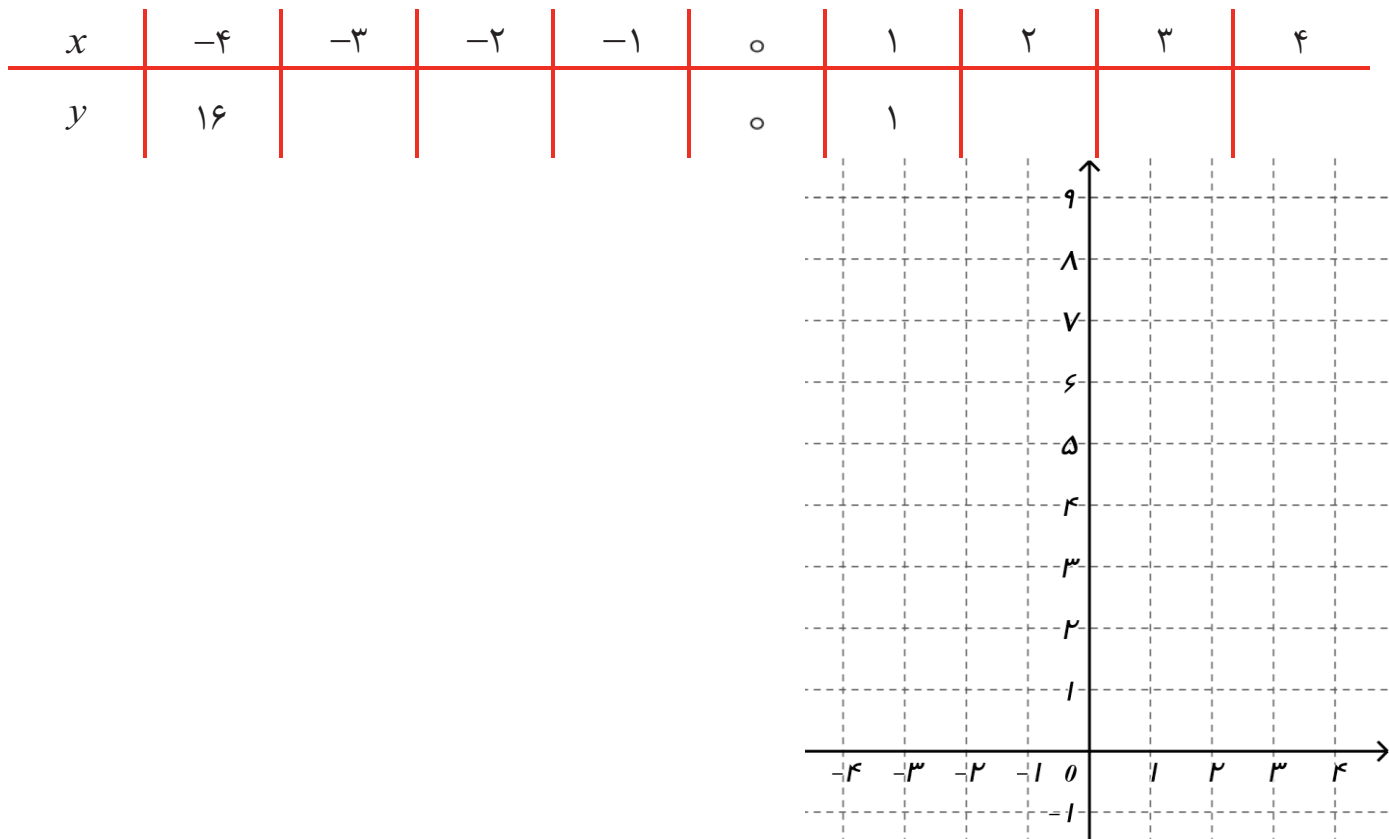


نقاط لازم برای رسم نمودار سهمی :

(۱) رأس سهمی

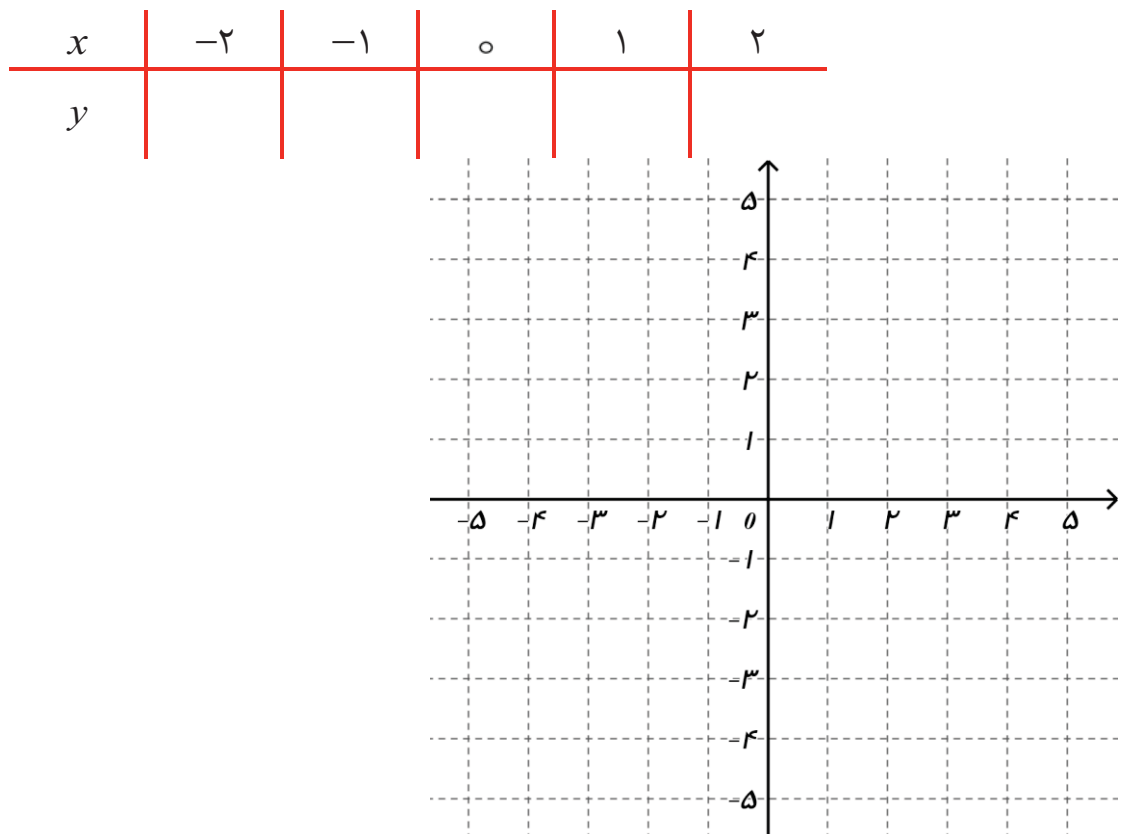
(۲) دو نقطه در طرفین رأس سهمی به فاصله مساوی از رأس

تمرین ۳۳: با توجه به ضابطه تابع $f(x) = x^2$ ابتدا جدول را کامل کنید، سپس به کمک آن نمودار تابع را رسم کنید.

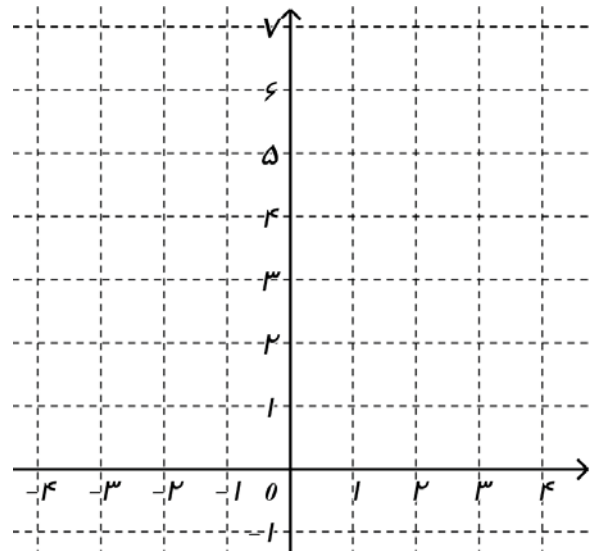


.....

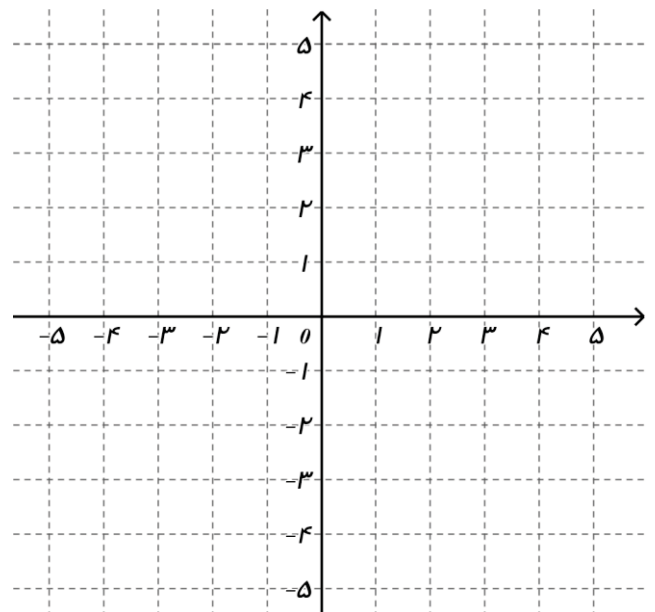
تمرین ۳۴: با توجه به ضابطه تابع $f(x) = 4 - x^2$ ابتدا جدول را کامل کنید، سپس به کمک آن نمودار تابع را رسم کنید.



تمرین ۳۵: رأس و خط تقارن سهمی به معادله $y = 2x^2 - 4x + 1$ را مشخص کنید و سپس آن را رسم کنید.



تمرین ۳۶: رأس و خط تقارن سهمی به معادله $y = -2x^2 + 4x + 3$ را مشخص کنید و سپس آن را رسم کنید.



ضابطه هر سهمی در حالت استاندارد به صورت $y = a(x - h)^2 + k$ که $a \neq 0$ است،
رأسی به مختصات (h, k) و خط تقارنی با معادله $x = h$ دارد.

تمرین ۳۷: مختصات رأس سهمی هایی که معادله های آنها داده شده است مشخص کنید.

الف) $y = x^2$

ب) $y = x^2 + 4$

پ) $y = x^2 - 12x$

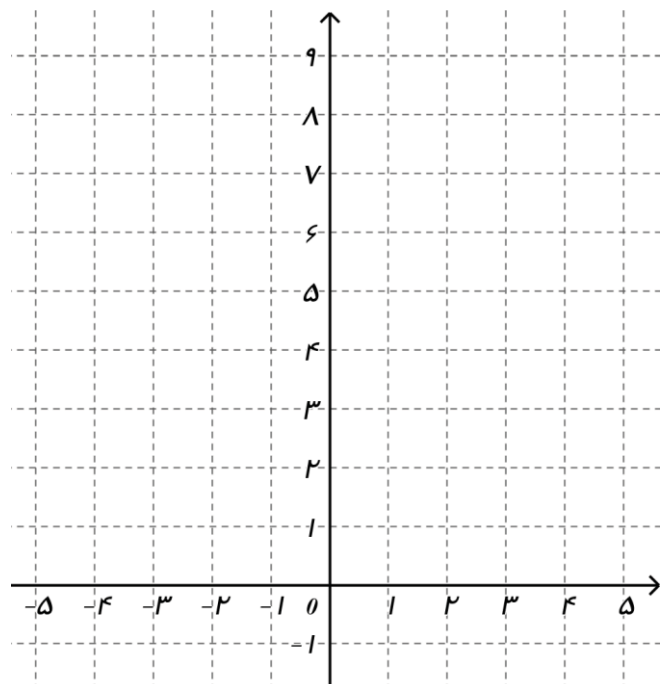
ت) $y = (x + 1)^2 - 2$

ث) $y = (x - 7)^2 + 6$

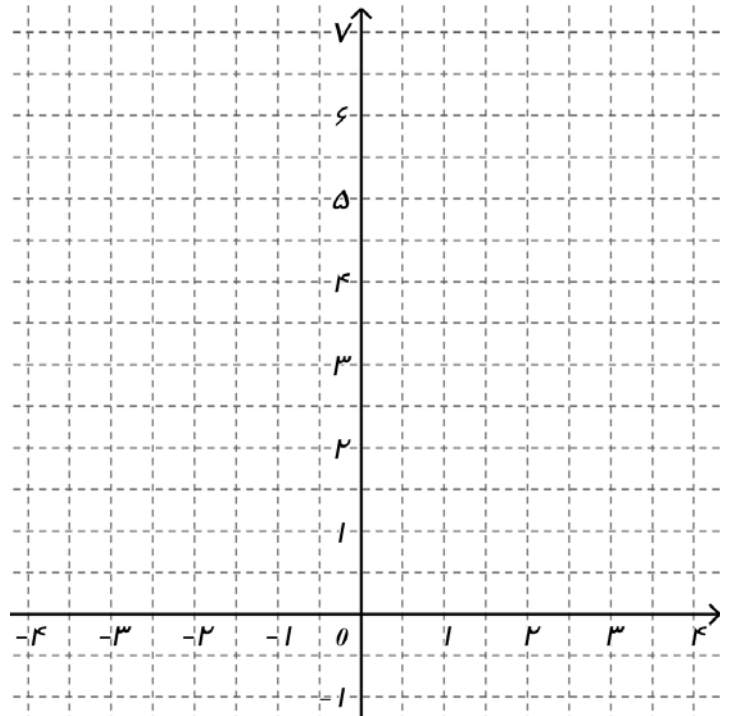
ج) $y = 2(x - 1)^2 + 1$



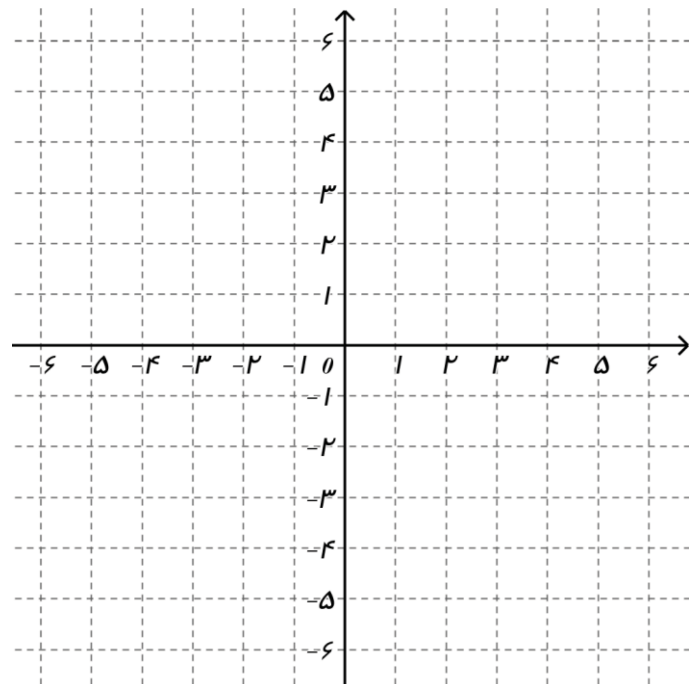
تمرین ۳۸: رأس سهمی به معادله $y = 2(x - 1)^2 + 1$ را مشخص کنید و سپس نمودار آن را رسم کنید.



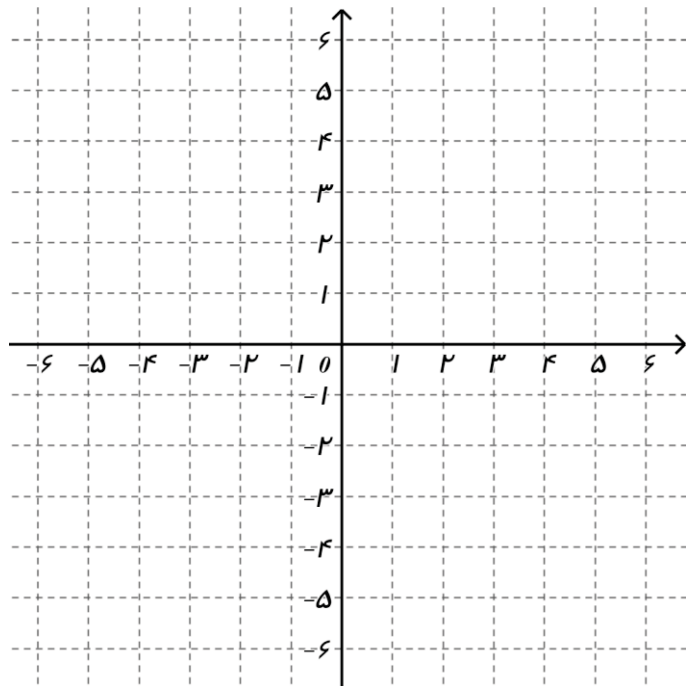
تمرین ۳۹: رأس سهمی به معادله $y = \frac{1}{4}(x+2)^2 + 5$ را مشخص کنید و سپس نمودار آن را رسم کنید.



تمرین ۴۰: نمودار توابع درجه دوم $y = -x^2 + 6x - 10$ و $y = 2x^2 + 4x + 1$ را رسم کنید.



تمرین ۴۱: نمودار توابع درجه دوم $y = -x^2 + 6x - 10$ و $y = x^2 - 4x - 2$ را رسم کنید. و مختصات برخورد این دو سهمی را مشخص کنید.



تمرین ۴۲: تابع درآمد یک شرکت به صورت $R(x) = 21x - x^2$ و تابع هزینه به صورت $C(x) = 20 + x$ است:

الف) تابع سود این شرکت را بنویسید.

$$P(x) = R(x) - C(x) \Rightarrow P(x) = (21x - x^2) - (20 + x) = 21x - x^2 - 20 - x = -x^2 + 20x - 20.$$

$$P(x) = -x^2 + 20x - 20.$$

ب) چند واحد کالا تولید کند تا بیشترین سود را داشته باشد؟

$$P(x) = -x^2 + 20x - 20 \Rightarrow x_0 = \frac{-b}{2a} \Rightarrow x_0 = \frac{-20}{2(-1)} = \frac{-20}{-2} = 10.$$

۱۰ عدد کالا باید بفروشد تا بیشترین سود را ببرد.

پ) ماکزیم سود این شرکت چقدر است؟

$$P(x) = -x^2 + 20x - 20 \Rightarrow P(10) = -(10)^2 + 20(10) - 20 = -100 + 200 - 20 = 80. \text{ بیشترین سود } 80 \text{ واحد است.}$$

تمرین ۴۳: قیمت کلایی ۱۰۰ تومان می باشد. اگر کارگاهی روزانه x کالا تولید و به فروش برساند و نیز معادله هزینه به

صورت $C(x) = x^2 + 20x + 800$ باشد.

(الف) تابع سود را بدست آورید.

(ب) چند واحد کالا تولید شود تا سود ماکزیمم شود؟

(پ) بیشترین سود این شرکت چقدر است؟



تمرین ۴۴: تابع درآمد به صورت $R(x) = 15x - x^2$ و تابع هزینه به صورت $C(x) = 16 + 3x$ است:

(الف) تابع سود این شرکت را بنویسید.

(ب) چند واحد کالا تولید کند تا بیشترین سود را داشته باشد؟

(پ) ماکزیمم سود این شرکت چقدر است؟

تمرین ۴۵: در یک کارگاه جعبه هایی تولید می شود اگر هر یک از این جعبه ها ۷۰۰ تومان بفروشند و تابع هزینه آن برابر

$$C(x) = 50x^2 - 2100x + 3000 \text{ است:}$$

(الف) تابع سود این شرکت را بنویسید.

(ب) چند واحد کالا تولید کند تا بیشترین سود را داشته باشد؟

(پ) ماکزیم سود این شرکت چقدر است؟



تمرین ۴۶: محیط مستطیلی ۶۰ متر است، طول و عرض آن را طوری تعیین کنید که مقدار مساحت آن ماکزیم شود.

حل: طول مستطیل x عرض مستطیل w

$$2(x + w) = 60 \Rightarrow x + w = 30 \Rightarrow w = 30 - x$$

$$S(x) = x \times w \Rightarrow S(x) = x \times (30 - x) \Rightarrow S(x) = 30x - x^2$$

$$S(x) = 30x - x^2 \Rightarrow x = \frac{-b}{2a} \Rightarrow x = \frac{-30}{2(-1)} = \frac{-30}{-2} = 15$$

$$w = 30 - x \Rightarrow w = 30 - 15 = 15$$

تمرین ۴۷: اگر داشته باشیم $2x + y = 40$ مقدار x و y را طوری بیابید که حاصل ضرب آنها ماکزیمم باشد.

حل:

$$2x + y = 40 \quad \Rightarrow \quad y = 40 - 2x$$

$$P(x) = x \times y \quad \Rightarrow \quad P(x) = x \times (40 - 2x) \quad \Rightarrow \quad P(x) = 40x - 2x^2$$

$$x = \frac{-b}{2a} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-40}{2(-2)} = \frac{-40}{-4} = 10$$

$$y = 40 - 2x \quad \Rightarrow \quad y = 40 - 2(10) = 40 - 20 = 20$$



تمرین ۴۸: اگر داشته باشیم $4x + 3y = 240$ مقدار x و y را طوری بیابید که حاصل ضرب آنها ماکزیمم باشد.

فصل سوم

کار با داده‌های آماری

گردآوری داده‌ها

درس ۱

معیارهای گرایش به مرکز

درس ۲

معیارهای پراکندگی

درس ۳





داده ها: واقعیت هایی درباره یک چیز هستند که در محاسبه ، استنباط ، یا برنامه ریزی به کار می روند.

واحد آماری: به هریک از افراد یا چیزهایی می گویند که داده های مربوط به آنها در یک بررسی آماری گردآوری می شود.

مجموعه کلّ واحدهای آماری را جامعه آماری می نامند.

هر زیر مجموعه از جامعه آماری را که با روش مشخصی انتخاب شده باشد، یک نمونه می نامند.

نمونه ای را که در آن، همه اعضای جامعه، شانس انتخاب یکسان در نمونه داشته باشند نمونه تصادفی می نامند.

تمرین ۱: می خواهیم وزن ماهی های یک حوضچه پرورش ماهی را به منظور فروش آنها تخمین بزنیم. واحد آماری ، جامعه آماری و داده این موضوع را مشخص کنید.

تمرین ۲: می خواهیم درباره سابقه تدریس دبیران ریاضی استان خوزستان را بررسی کنیم. واحد آماری ، جامعه آماری و داده این موضوع را مشخص کنید.

تمرین ۳ : وضعیت قد دانش آموزان دبیرستان آیین روشن را بررسی کرده ایم. واحد آماری ، جامعه آماری و داده این موضوع را مشخص کنید.

گردآوری داده ها به یکی از روش های ممکن را آمارگیری می نامند.

کسی را که آمارگیری را انجام می دهد آمارگیر می نامند.

روش های گردآوری داده ها



مشاهده: گردآوری داده ها بدون نیاز به فرد پاسخگو

مثال: شمارش تعداد وسایل نقلیه عبوری از یک تقاطع در هر ساعت.

آزمایش: گردآوری داده ها با انجام یکسری آزمایش روی آنها این روش برای علوم تجربی بسیار مرسوم است.

مثال: اندازه گیری وزن محصولات یک باغ ، اثر داروی جدید بیماری دیابت بر روی بیماران دیابتی ، تاثیر نور خورشید را بر روی رشد گیاهان

پرسش نامه (پرسش کتبی) : مجموعه سوالات از پیش تعیین شده که توسط تعدادی پاسخگو تکمیل می شود.

مثال: میزان رضایت مشتریان بانک از نحوه برخورد و رسیدگی به درخواست های آنها

مصاحبه (پرسش شفاهی) : حالت خاصی از پرسش که معمولاً بین دو نفر صورت می گیرد. یکی مصاحبه گر (همان آمارگیر) و دیگری مصاحبه شونده یا پاسخگو است.

مثال : میزان استقبال مردم از مجموعه های تلویزیونی

.....

دادگان : شامل مجموعه ای از اطلاعات که در گذشته ذخیره شده اند. در بسیاری از موارد، داده ها را می توان از اطلاعاتی که قبلاً ذخیره شده اند، به دست آورد.

مثال : بررسی درصد قبولی دانش آموزان مدارس شهر اهواز در سال ۱۳۸۰

.....

تمرین ۴ : بهترین روش جمع آوری داده ها را برای هر یک از موضوعات زیر بیان کنید.

(الف) تعداد افراد غیر دانش آموزی که در یک روز وارد یک مدرسه مشخص می شوند.

(ب) مشکلی رنگ مورد علاقه بیشتر دختران برای مقنعه است.

(پ) سن همه دانش آموزان مدرسه برحسب ماه در پایه دهم

(ت) تاثیر موسیقی بر شکل ملکول های آب

(ث) نظر دانش آموزان در مورد فضای سبز مدرسه شان

(ج) تعداد سرنشینان خودرو های سواری در یکی از محورهای خروجی شهر اهواز

چ) اندازه گیری قد و وزن نوزادان

ح) بررسی نحوه عملکرد کارمندان یک اداره

خ) تعداد کودکان بستری شده ۱۰۰ روز یک بیمارستان

تمرین ۵: کدام روش برای گردآوری داده ها مناسب است؟

الف) تعداد قلم های هر دانش آموز در یک کلاس

ب) ساعات خواب دانش آموزان کلاس درس شما در شب گذشته.

پ) طول قد دانش آموزان یک کلاس.



معایب بعضی از روش های گردآوری داده

پرسش نامه: اگر تعداد واحدهای نمونه زیاد باشد، این روش زمان بر است.

مشاهده: اگر به دقت زیادی نیاز داشته باشیم مناسب نیست.

دادگان ها: همیشه اطلاعات ثبتي در اختيار نيست.

متغیر: هر ویژگی از اشخاص یا اشیا که قرار است بررسی شود.

مثال: اگر در یک کلاس بخواهیم قد دانش آموزان را مورد مطالعه قرار دهیم. متغیر قد دانش آموزان است.

مثال: اگر در یک اداره بخواهیم متأهل یا مجرد بودن کارمندان آن اداره را بررسی کنیم. متغیر وضعیت تأهل کارمندان است.

متغیر کمی : متغیری است که مقادیر عددی می گیرد و برای آن عملیات ریاضی از قبیل جمع ، تفریق و معدل گیری قابل انجام است.

مثال: وزن افراد یک گروه ، تعداد طبقات آپارتمان های یک محله و

متغیر کیفی: متغیری است که صرفاً برای دسته بندی افراد یا اشیا در گروه ها به کار می رود و لزوماً مقدار عددی نمی گیرد.

مثال: رنگ چشم افراد یک گروه ، استان محل زندگی بازیکنان تیم های والیبال ایران و

.....

تمرین ۶ : قرار است درباره افرادی که بالای کوه دنا رفته اند، پژوهشی آماری صورت گیرد بنابراین پرسش نامه ای شامل قد ، وزن ، سن ، جنسیت ، میزان تحصیلات و ملیت به آنها داده شد تا تکمیل کنند. نوع هر یک از متغیرهای پرسش نامه را مشخص کنید.

.....

تمرین ۷ : نوع متغیرهای جدول زیر را با گذاشتن علامت $\times$ مشخص کنید.

متغیر مورد نظر	کمی	کیفی
طول شعاع دایره		
رنگ لباس های شما		
تعداد مراجعین یک دکتر		
مراحل رشد یک پروانه		
میزان گنجایش یک تانکر		

سرشماری: بررسی تمام واحد های آماری جامعه را سرشماری می گوئیم.

معمولاً در سرشماری ها با مشکلاتی مواجه هستیم، مهم ترین آن ها عبارتند از:

۱- هزینه زیاد گردآوری داده ها

۲ - زمان بر بودن گردآوری داده ها

۳ - خطای بیشتر در گردآوری داده ها

۴ - از بین رفتن واحدهای آماری در برخی از مطالعات

.....

پارامتر جامعه: یک مشخصه عددی است که توصیف کننده جنبه خاصی از جامعه است و در صورتی که داده های کل جامعه در اختیار باشند قابل محاسبه است.

.....

آماره نمونه: یک مشخصه عددی است که توصیف کننده جنبه خاصی از نمونه است و از داده های نمونه به دست می آید.

مثال: اداره کشاورزی استان خوزستان در حال ارزیابی هندوانه های آماده برداشت است.

اگر پژوهشگران وزن همه هندوانه ها را اندازه گیری کنند و سپس میانگین وزن آنها را به دست آورند. این میانگین وزن یک پارامتر جامعه است.

اگر پژوهشگران بخواهند مزه هندوانه ها را بررسی کنند از آنجا که نمی توانند همه هندوانه ها را مزه مزه کنند. فقط بخشی از هندوانه ها را بررسی می کنند. یعنی نمونه می گیرند پس عددی که برای تعداد هندوانه های خوشمزه بدست می آید آماره نمونه است.

تمرین ۸ : یک شبکه می خواهد نسبت دارندگان تلویزیون در شیراز را بداند، که برنامه جدید این شبکه را حداقل یکبار در هفته تماشا می کنند. بدین منظور یک گروه ۱۰۰۰ نفری از دارندگان تلویزیون را در این شهر بررسی می کند.

الف) داده ها و متغیرهایی را که بررسی می شوند مشخص کنید.

ب) آیا این داده های یک نمونه هستند؟ اگر بله جامعه آماری را مشخص کنید؟

پ) متغیر کمی است یا کیفی؟

ت) چند متغیر کمی را که ممکن است در اینجا جالب باشد، مشخص کنید.

ث) نسبت افرادی در که در این بررسی برنامه جدید را تماشا می کنند، آماره است یا پرامتر؟

(تعداد اعضای مورد نظر بر تعداد کل اعضای یک مجموعه را نسبت می گوئیم).

.....



اندازه گیری در تعریف به معنی ایجاد تفلیک بین افراد یا اشیا است.

اسمی : این مقیاس برای متغیرهایی است که شامل نام ها ، برچسب ها و گروه ها می شود. در اینجا هیچ معیاری که بتوان داده ها را از کوچک به بزرگ مرتب کرد وجود ندارد.

مثال : گروه خونی انسان ها ، رنگ چشم انسان ها ، اسم میوه ها ، کد دانش آموزی



کدهای عددی در این مقیاس در واقع عدد نیستند؛ بلکه صرفاً برای گروه بندی به کار می روند.

.....

ترتیبی : این مقیاس با استفاده از الفاظ، ضمن ایجاد تفکیک بین افراد و اشیا ، ارجحیت نیز قائل می شود.

مقیاس ترتیبی برای متغیرهایی است که قابل مرتب کردن هستند و در عین حال محاسبه اختلاف بین مقادیر داده ها ، یا اماکن پذیر نیست یا بی معنا است.

مثال : رتبه دانش آموزان در یک کلاس ، مراحل تحصیلی و

.....

فاصله ای : این مقیاس به دلیل استفاده از لوازم یا قواعد دقیق اندازه گیری ویژگی افراد یا اشیا به دقت اندازه گیری می شود.

به بیان دیگر مقیاس فاصله ای برای داده هایی است که قابل مرتب کردن هستند و همچنین اختلاف بین مقادیر داده ها با معنا است.

مثال : درجه حرارت در شهرهای مختلف برحسب سلسیوس ، نمره ، سال تولد و



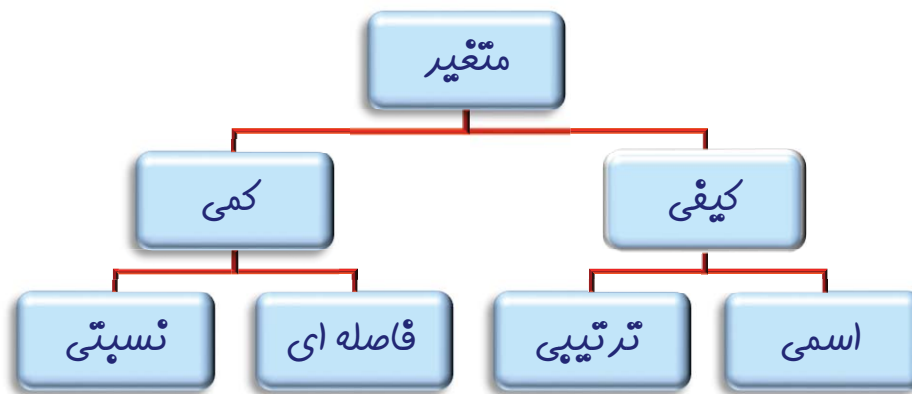
مقادیری که به دو نفر یا دو شیء داده می شود صرفاً بیان کننده فاصله بین آنها است.

نسبتی : این مقیاس برای داده هایی است که قابل مرتب کردن هستند و اختلاف بین مقادیر داده ها و نسبت داده ها نیز با معنا است.

مثال : درجه حرارت در شهرهای مختلف برحسب کلوین ، سن شما ، وزن شما و



در این مقیاس صفر به معنای نبود ویژگی در فرد یا شیء است.



تمرین ۹ : نوع و مقیاس هر یک از متغیرهای زیر را با گذاشتن علامت $\times$ کامل کنید.

مقیاس اندازه گیری				نوع متغیر		متغیر مورد نظر
نسبیتی	فاصله ای	ترتیبی	اسمی	کمی	کیفی	
						تعداد دانشجویان یک دانشکده
						مراحل رشد یک پروانه
						مدت زمانی که نوجوانان صرف مطالعه می کنند
						اهل کدام شهر بودن
						رنگ پوست انسان
						سال شروع به کار معلمان
						تعداد مراجعین یک دکتر
						طول ماهی های قزل آلا در رودخانه هراز
						دمای بدن ماهی های قزل آلا در رودخانه هراز (برحسب سلسیوس)

تمرین ۱۰: نوع و مقیاس هر یک از متغیرهای زیر را مشخص کنید:

(الف) فاطمه کلاس دهم انسانی است. اسامی کتاب های درسی او منطق، ریاضی و آمار و ... است.

(ب) محسن، محمود، محمد و میثم هگی اسامی مذکر هستند.

(پ) در یک دبیرستان، ۳۱۹ دانش آموز فارغ التحصیل وجود دارد. احمد رتبه بیست و پنجم، رضا رتبه نوزدهم، صادق رتبه دهم و جواد رتبه چهارم را کسب کرده است و می دانیم بهترین رتبه یک است.

(ت) غذاهای مورد علاقه شیرین، ماکارونی، پلو عدس و است.



علوم تجربی نظیر کشاورزی و پزشکی نیازهای اساسی بشر را رفع می کنند. در این علوم، یقین کامل برای حل مسئله وجود ندارد، بسیار کاربردی اند و مورد استفاده قرار می گیرند. یک پزشک معمولاً به صورت دقیق بیماری را تشخیص نمی دهد و داروی بیماری نیز به همین وضع دچار است. ولی پزشک براساس تجربه حکم به بیماری می دهد و دارو تجویز می کند و در اکثر مواقع نیز نتیجه نمی گیرد. از سوی دیگر در علوم ریاضی روابط به صورت صد در صد حاکم هستند. و هیچ شک و شبه ای به آن راه ندارد. وجود رابطه بین برخی پدیده ها در علوم تجربی باعث کشف حقایقی است که موجب پیشرفت آنها می شود. معمولاً روابط حاکم بر علوم تجربی را نمی توان به صورت ریاضی بیان کرد. علم آمار راهی برای بیان ریاضی چنین پدیده هایی است.

به مطالعه نحوه گردآوری، سازماندهی، تحلیل و تفسیر داده ها برای استخراج اطلاعات و تصمیم گیری، آمار گفته می شود.

شعارهای برتر سال جهانی آمار:

- بهترین برنامه ریزی مستلزم بهترین آمار
- آمار جهت نمای توسعه پایدار
- با آمار بهتر بفهمیم، بهتر تصمیم بگیریم
- آمار راهنمای ما در تصمیم گیری و برنامه ریزی صحیح



اگر n مشاهده به صورت $x_1, x_2, \dots, x_n$ داشته باشیم، میانگین آن ها را با نماد $\bar{x}$ نشان می دهیم

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

به صورت زیر تعریف می شود:



تمرین ۱۱: درآمد ماهانه سال جاری حضار انجمن خیریه یک دبیرستان به ترتیب حروف الفبا به صورت زیر می باشد. میانگین درآمد این خیرین را به دست آورید.

نام	آرمان	احمد	جوانه	حسنا	رسول	سبحان	نجیه
درآمد (برحسب میلیون ریال)	۲۵	۲۲	۳۰	۳۲	۲۸	۱۲	۴۰

$$\bar{x} = \frac{۲۵ + ۲۲ + ۳۰ + ۳۲ + ۲۸ + ۱۲ + ۴۰}{۷} = \frac{۱۸۹}{۷} = ۲۷$$



تمرین ۱۲: بهزاد در آزمایشگاه فیزیک، پس از انجام یک آزمایش به داده های ۲۰۲۰، ۲۰۹۶، ۲۲۰۲، ۲۰۱۶، ۲۰۷۳، ۲۰۳۹ دست پیدا کرد. میانگین این داده ها را حساب کنید.

تمرین ۱۳ : در یک امتحان ریاضی ۱۵ نفر نمرات زیر را کسب نمودند. میانگین این نمرات را محاسبه کنید.

۰, ۱, ۳, ۱۴, ۱۴, ۱۵, ۱۶, ۱۶, ۱۷, ۱۷, ۱۸, ۱۸, ۱۸, ۱۹, ۲۰۰

.....

تمرین ۱۴ : میانگین داده های ۳, ۷, y , ۱۲, ۱۴, ۲۱ برابر ۱۱ است مقدار y را بیابید.

$$\frac{3+7+y+12+14+21}{6} = 11 \Rightarrow \frac{57+y}{6} = 11 \Rightarrow 57+y = 66 \Rightarrow y = 66 - 57 \Rightarrow y = 9 \text{ حل:}$$

.....

تمرین ۱۵ : میانگین اعداد ۵, ۷, ۳, ۱۷, a , ۸, ۱۳, ۱۵ عدد a را محاسبه کنید.

.....

تمرین ۱۶ : میانگین داده های ۱۰, ۲۰, ۳۰, ۴۰, ۵۰ چقدر است؟

.....

تمرین ۱۷ : اگر میانگین داده های ۱۰, x , ۴۰ شود مقدار x چقدر است؟

تمرین ۱۸ : میانگین داده های ۱,۲,۳,۴,۵ چقدر است؟

.....

تمرین ۱۹ : میانگین داده های ۲,۴,۶,۸,۱۰ چقدر است؟

.....

تمرین ۲۰ : میانگین داده های ۵,۶,۷,۸,۹ چقدر است؟

.....

تمرین ۲۱ : میانگین داده های ۵۰,۶۰,۷۰,۸۰,۹۰ چقدر است؟

.....

اگر همه داده ها را در عددی ثابت ضرب کنیم آنگاه میانگین نیز

اگر به همه داده ها را با عدد ثابتی جمع کنیم آنگاه میانگین نیز

.....

تمرین ۲۲ : میانگین یک سری داده برابر ۱۵ است. اگر از تمام داده ها ۳ واحد کم کنیم و سپس آنها را در ۴ ضرب کنیم

میانگین جدید چند می شود؟

تمرین ۲۳ : میانگین یک سری داده برابر ۴۳ است. اگر به تمام داده ها ۷ واحد اضافه کنیم و سپس آنها را بر ۸ تقسیم کنیم میانگین جدید چند می شود؟

.....

تمرین ۲۴ : اگر به تمرین ۱۱ یک فرد دیگر با درآمد ماهیانه ۵۰۷ میلیون ریال اضافه شود. میانگین درآمد این خیرین را به دست آورید.

نام	آرمان	احمد	جوانه	حسنا	رسول	سبحان	نجیه	علی
درآمد	۲۵	۲۲	۳۰	۳۲	۲۸	۱۲	۴۰	۵۰۷

$$\bar{x} = \frac{۲۵ + ۲۲ + ۳۰ + ۳۲ + ۲۸ + ۱۲ + ۴۰ + ۵۰۷}{۸} = \frac{۶۹۶}{۸} = ۸۷$$

.....

داده دور افتاده: مقداری متفاوت با سایر مقادیر داده هاست. معمولاً مقدار آن بسیار بزرگ تر یا بسیار کوچک تر از بقیه داده ها است.

.....

در مثال خیریه ، داده دور افتاده باعث اشتباه ما در تخمین متوسط داده ها شد. میانگین مرسوم ترین معیار گرایش به مرکز است که گاهی ممکن است ما را به اشتباه بیندازد، ولی می توان از معیار دیگری نیز برای بیان متوسط استفاده کرد.

.....

پس از مرتب کردن داده ها، مقداری را که تعداد داده های بعد از آن با تعداد داده های قبل از آن برابر است، میانه می نامیم.

روش به دست آوردن میانه

۱ - داده ها را مرتب کنید.

۲ - اگر تعداد داده ها فرد باشد، داده ای که در وسط قرار می گیرد برابر میانه است.

۳ - اگر تعداد داده ها زوج باشد، نصف مجموع دو داده ای که در وسط قرار گرفته اند برابر میانه است.

.....

مد داده ای که بیشترین فراوانی را دارد. برای محاسبه مد فقط کافی است تعداد تکرار داده ها را با هم مقایسه کنیم.

.....

تمرین ۲۵ : میانه داده های تمرین ۱۱ و ۲۴ را بدست آورید.

.....

تمرین ۲۶ : میانه و مد داده های ۱۵، ۱۵، ۱۸، ۱۶، ۱۸، ۱۹، ۲۰، ۱۷، ۱۴، ۱۷، ۱۴، ۳، ۱۰، ۱ را بدست آورید.

.....

تمرین ۲۷ : میانه و مد داده های ۱۷، ۱۹، ۳، ۷، ۱۴، ۱۱، ۵، ۶، ۸، ۹، ۶، ۱۳، ۴، ۷، ۳، ۲، ۱۳، ۲۱ را بدست آورید.

تمرین ۲۸ : داده های ۲,۵,۴۵,۷,۳۵,۳۰,۵۰,۲۵۰ مبالغ هزینه های جراحی در یک بیمارستان بر حسب میلیون ریال است.

میان و میانگین این داده ها را بدست آورید.

.....



یک استنباط درست از داده ها تنها چیزی نیست که شما در یک بررسی آماری خواهان آن هستید خواسته دیگر ما برنامه ریزی و تصمیم گیری است.

.....

تمرین ۲۹ : با سه واژه « داده دورافتاده ، میان و میانگین » پنج جمله زیر را کامل کنید.

الف) آنچه اکثر مردم « حد وسط » می نامند، نزد آمارشناسان به معروف است. برای محاسبه ، به داده های خود به عنوان فهرستی از اعداد نگاه کنید؛ همه اعداد را با هم جمع کنید و بر تعدادشان تقسیم کنید.

ب) در واقع نقطه وسطی فهرست اعداد مرتب شده است . نیمی از اعداد مقادیر بزرگ تر از ، نیمی دیگر مقادیر کوچک تر از هستند.

پ) زمانی با مواجه هستیم که مشاهده ای داشته باشیم که از الگوی داده هایمان پیروی نکند.

ت) وقتی با مواجه هستید ، معمولاً بازتاب بهتری از داده ها می دهد تا

ث) به طور کلی، برای برنامه ریزی و تصمیم گیری، بهتر از است.



اگر n مشاهده به صورت $x_1, x_2, \dots, x_n$ داشته باشیم، واریانس آنها را با نماد σ^2 و انحراف معیار آنها را با نماد σ نشان می دهیم به صورت زیر تعریف می شود:

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}, \quad \sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}$$

.....

تمرین ۳۰: داده های مربوط به سه کلاس دهم در زیر آمده است. میانگین، دامنه تغییرات و انحراف از معیار هر سه کلاس را بدست آورید.

الف) ۶۵, ۷۵, ۷۳, ۵۰, ۶۰, ۶۴, ۶۹, ۶۲, ۶۷, ۸۵

$$\bar{x} = \frac{۵۰ + ۶۰ + ۶۲ + ۶۴ + ۶۵ + ۶۷ + ۶۹ + ۷۳ + ۷۵ + ۸۵}{۱۰} = \frac{۶۷۰}{۱۰} = ۶۷$$

$$\sigma^2 = \frac{(۵۰ - ۶۷)^2 + (۶۰ - ۶۷)^2 + (۶۲ - ۶۷)^2 + (۶۴ - ۶۷)^2 + (۶۵ - ۶۷)^2 + (۶۷ - ۶۷)^2}{۱۰}$$

$$+ (۶۹ - ۶۷)^2 + (۷۳ - ۶۷)^2 + (۷۵ - ۶۷)^2 + (۸۵ - ۶۷)^2$$

$$= \frac{(-۱۷)^2 + (-۷)^2 + (-۵)^2 + (-۳)^2 + (-۲)^2 + (۰)^2 + (۲)^2 + (۶)^2 + (۸)^2 + (۱۸)^2}{۱۰}$$

$$= \frac{۲۸۹ + ۴۹ + ۲۵ + ۹ + ۴ + ۰ + ۴ + ۳۶ + ۶۴ + ۳۲۴}{۱۰} = \frac{۸۰۴}{۱۰} = ۸۰/۴$$

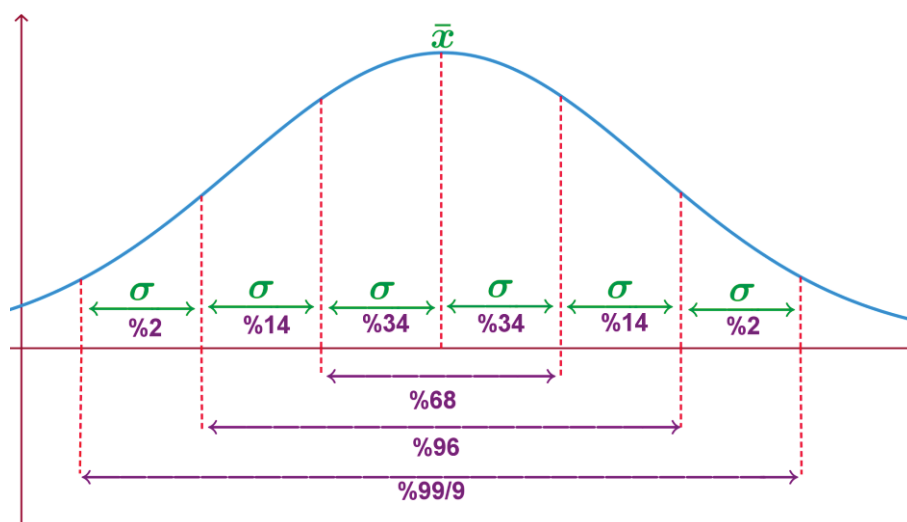
$$\sigma = \sqrt{۸۰/۴} \approx ۸/۹۷$$

ب) ۸۵, ۷۹, ۵۷, ۳۹, ۴۵, ۷۱, ۶۷, ۸۷, ۹۱, ۴۹

پ) ۴۳, ۵۱, ۵۳, ۱۱۰, ۵۰, ۴۸, ۸۷, ۶۹, ۶۸, ۹۱



اگر تمام داده ها با هم برابر باشند انحراف از معیار صفر است و برعکس

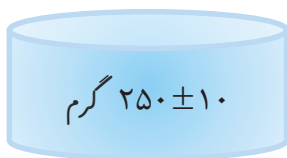




شکل منحنی نرمال زنگوله ای و متقارن است. و در منحنی نرمال میانگین و میان و مد برابر هستند.

.....

تمرین ۳۱: حتماً بر روی قوطی ها یا پاکت های مواد غذایی یا بهداشتی اعدادی به صورت زیر مشاهده کرده اید. به نظر شما هر یک از اعداد چه چیزی را نشان می دهد؟



.....

تمرین ۳۲: بر روی یک جعبه بسکویت وزن خالص به صورت $475 \pm 5 \text{ gr}$ نوشته شده است.

الف) به نظر شما هر یک از اعداد چه چیزی را نشان می دهد؟

ب) وزن واقعی این کالا در چه فاصله ای است؟

تمرین ۳۳: جدول زیر را کامل کنید.

$(\bar{x} - 3\sigma, \bar{x} + 3\sigma)$	الف) تقریباً ۹۹/۹ درصد از مشاهدات در فاصله ۳ برابر انحراف معیار از میانگین قرار دارند.
--	--

$(\bar{x} - 3\sigma, \bar{x} + 3\sigma)$	ب) تقریباً درصد از مشاهدات در فاصله برابر انحراف معیار از میانگین قرار دارند.
	پ) تقریباً درصد از مشاهدات در فاصله یک برابر انحراف معیار از میانگین قرار دارند.

.....

تمرین ۳۴ : تعداد تصادفات اتومبیل در شهری در ۱۵ روز اول تابستان عبارتند از :

۱۹, ۳۱, ۲۵, ۱۸, ۳۲, ۴۳, ۴۱, ۳۴, ۱۶, ۲۷, ۱۴, ۲۳, ۱۵, ۱۰, ۱۲

الف) میانه را پیدا کنید.

ب) اعدادی را که در نیمه قبل از میانه قرار دارند بنویسید.

پ) برای اعداد قسمت ب میانه را بدست آورید.

ت) اعدادی را که نیمه بعد از میانه قرار دارند بنویسید.

ث) برای اعداد قسمت ت میانه را بدست آورید.

میانه داده های قبل از میانه را چارک اول (Q_1) می نامند.

میانه داده های بعد از میانه را چارک اول (Q_3) می نامند.

اختلاف چارک اول و سوم را دامنه میان چارکی می نامند. ($IQR = Q_3 - Q_1$)



تمرین ۳۵: در آمد ماهانه سال جاری حضار انجمن خیریه یک دبیرستان به ترتیب حروف الفبا به صورت زیر می باشد. دامنه میان چارکی در آمد این خیرین را در دو حالت زیر محاسبه کنید.

نام	آرمان	احمد	جوانه	حسنا	رسول	سبحان	نجیه
درآمد	۲۵	۲۲	۳۰	۳۲	۲۸	۱۲	۴۰

نام	آرمان	احمد	جوانه	حسنا	رسول	سبحان	علی	نجیه
درآمد	۲۵	۲۲	۳۰	۳۲	۲۸	۱۲	۵۰۷	۴۰

تمرین ۳۶: جمله های زیر را کامل کنید.

الف) میانگین ها و میانه ها برای توصیف مجموعه داده ها مفیدند. و انواعی از معیارهای گرایش به مرکز هستند.

ب) شما معمولاً نه تنها معدل یک مجموعه را می خواهید، بلکه میزان تغییرات حوالی آن نقطه را هم نیاز دارید که آن معیار است.

پ) معیار پراکندگی که معمولاً با میانگین بیان می شود، است.

ت) معیار پراکندگی که معمولاً با میانه بیان می شود، نام دارد.

ث) و اطلاعات سریعی درباره داده ها بدون نیاز به هرگونه محاسبه می دهند.

ج) آماره ای که برای توصیف یک مجموعه داده، میانگین و میانه، انحراف معیار و دامنه های میان چارکی به کار می رود، نام دارد.

چ) درصد داده ها قبل از میانه و درصد داده ها بعد از میانه قرار دارند.

ح) ۷۵ درصد داده ها قبل از یا بعد از قرار دارند.

خ) ۲۵ درصد داده ها قبل از یا بعد از قرار دارند.

د) ۵۰ درصد داده ها بین و قرار دارند.

ذ) تقریباً ۹۶ درصد از مشاهدات در فاصله از میانگین هستند.

ر) تقریباً ۶۸ درصد از مشاهدات در فاصله از میانگین هستند.

.....



همه آماره هایی که در اینجا ذکر شد (میانگین ها، میانه ها، انحراف های معیار، دامنه میان چارکی) تحت عنوان

آمار توصیفی شناخته می شوند.

اگر داده های $x_1, x_2, \dots, x_n$ به ترتیب دارای ضرایب های $w_1, w_2, \dots, w_n$ باشند. در این صورت میانگین داده های

$$\bar{x}_w = \frac{w_1 x_1 + w_2 x_2 + \dots + w_n x_n}{w_1 + w_2 + \dots + w_n} \quad \text{بالا با احتساب ضرایب مربوطه به صورت زیر محاسبه می شود:}$$

میانگین وزن دار

.....

تمرین ۳۷: نمرات ریاضی محمد در درس ریاضی مطابق جدول زیر است. نمره سالیانه محمد در درس ریاضی را بدست آورید.

نوبت	مستمر اول	پایانی اول	مستمر دوم	پایانی دوم
ضریب	۱	۲	۱	۴
نمره	۱۹	۱۸/۵	۱۷	۱۶

.....

تمرین ۳۸: درصد پاسخ گویی به دروس مختلف عمومی کنکور یک داوطلب مطابق جدول زیر است. نمره کل آزمون عمومی او

را محاسبه کنید.

درس	ادبیات فارسی	دین و زندگی	عربی	زبان انگلیسی
ضریب	۴	۳	۱	۲
درصد	۶۵	۷۰	۵۲	۸۰

فصل چهارم

نمایش داده‌ها

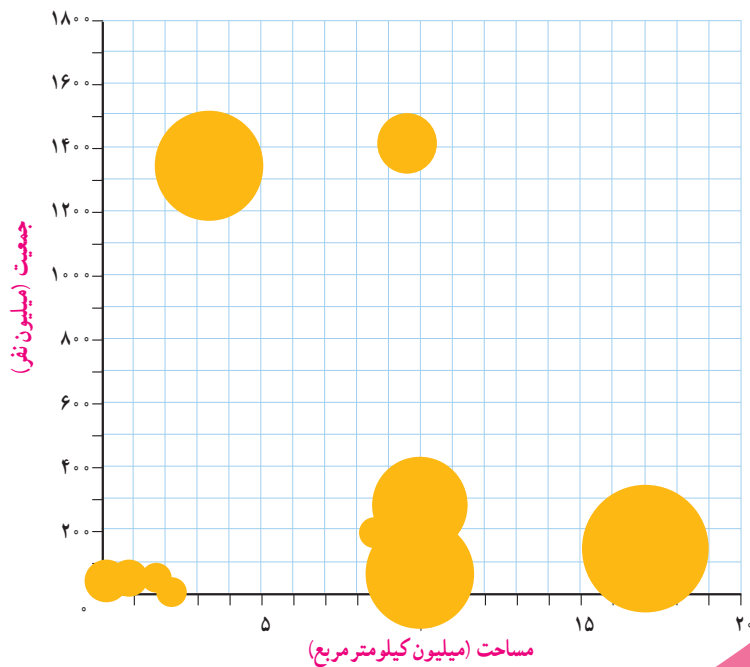
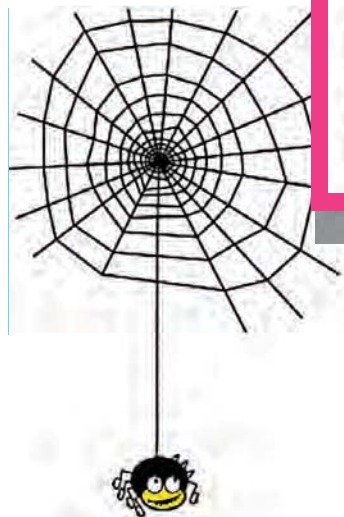


نمودارهای یک متغیره

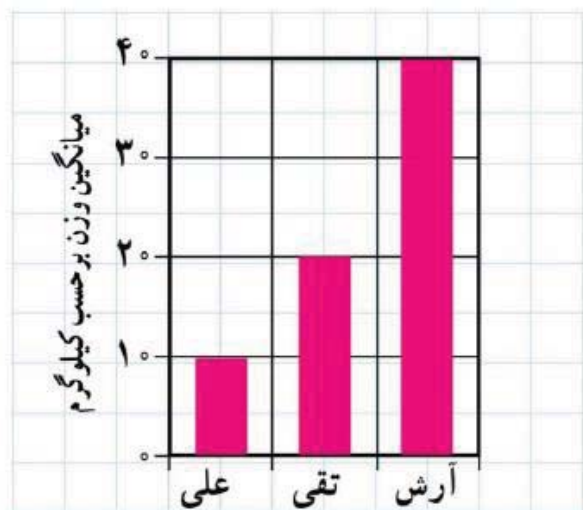
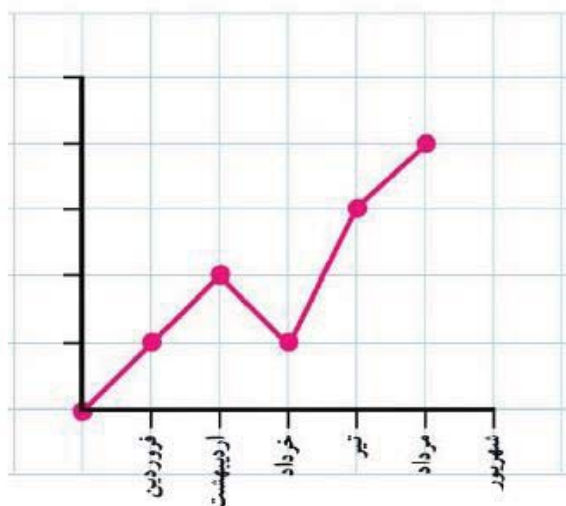
درس ۱

نمودارهای چند متغیره

درس ۲



نمونه هایی از نمودار میله ای ، چند بر فراوانی .



نمونه ای از نمودار نقطه ای :

مربی گروه (تیم) بسکتبال شهر می خواهد بر اساس نتایج بازی های قبلی دو بازیکن، نسبت به حضور یکی ز آنها در بازی بعدی تصمیم بگیرد. امتیازهای کسب شده توسط این دو بازیکن به صورت زیر است.

۱۱ بازیکن الف :

۱	۱	۱	۳	۲	۱	۲	تعداد بازی
۳۰	۱۳	۱۱	۱۰	۷	۶	۳	امتیاز کسب شده

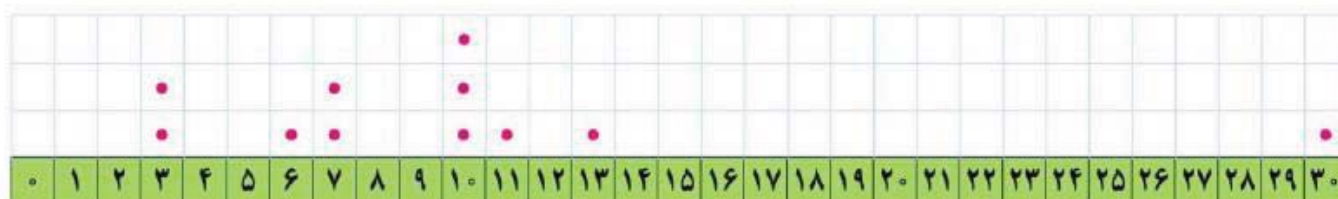
۱۰ بازیکن ب :

۱	۱	۲	۲	۲	۱	۱	تعداد بازی
۱۳	۱۲	۱۱	۱۰	۹	۸	۷	امتیاز کسب شده

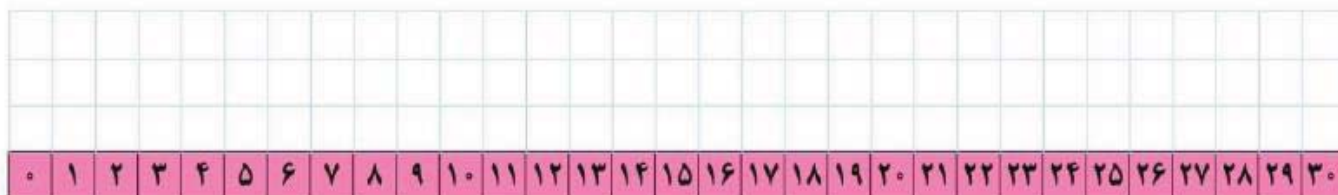
می توان داده ها را به صورت مرتب شده زیر نوشت :

بازیکن الف	۳۰	۱۳	۱۱	۱۰	۱۰	۷	۷	۶	۳	۳
بازیکن ب	۱۳	۱۲	۱۱	۱۱	۱۰	۱۰	۹	۹	۸	۷

اگر هر یک از اعداد را به صورت نقطه بالای یک محور علامت بزنیم، به نمودار حاصل نمودار نقطه ای داده ها می گویند. نمودار نقطه ای امتیازهای بازیکن الف را می توان به صورت زیر نمایش داد.

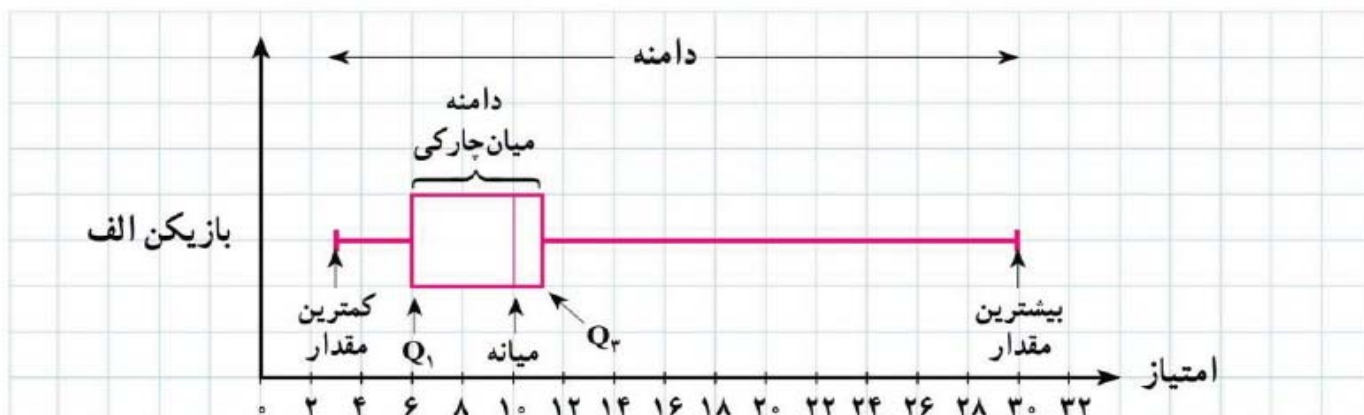


نمودار نقطه ای داده ها را برای بازیکن ب بر روی محور نمایش دهید.



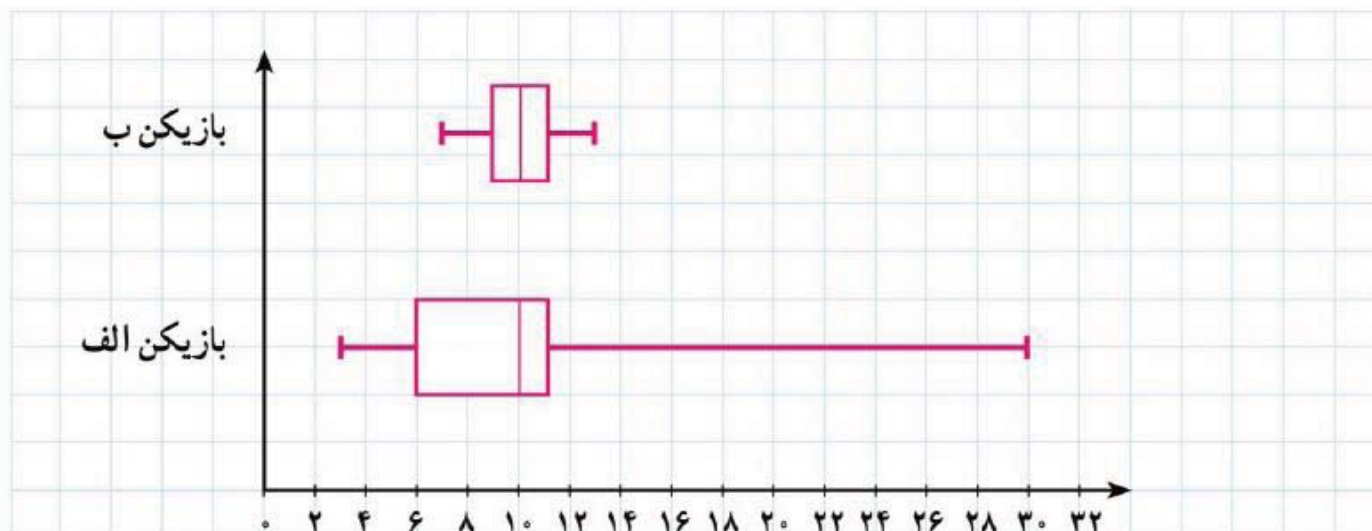
به نظر شما کدام بازیکن بهتر است؟ البته سؤال کلی است و اگر به شما بگوییم این بازی آخر است یا گروه مقابل تیمی است که تاکنون امتیاز بیشتری نسبت به گروه شهر کسب کرده، ممکن است پاسخ سؤال عوض شود. در فصل گذشته برای تصمیم درست تر، از معیارهای گرایش به مرکز و پراکندگی به طور هم زمان استفاده می شد. پس خالی از لطف نیست که معیارهای گرایش به مرکز و پراکندگی مجموعه های گوناگون از داده ها را به شکل تصویری مورد مقایسه قرار دهیم. امتیازهای بازیکن الف را در نظر بگیرید. برای این منظور کمترین مقدار، چارک اول، میانه، چارک سوم و بیشترین مقدار را محاسبه کنید و روی یک محور نمایش دهید.

برای مشخص کردن حدود دامنه میان چارکی، یک جعبه به عرض دلخواه رسم می‌کنیم. برای مشخص کردن دامنه دو خط، از دو طرف جعبه به کمترین مقدار و بیشترین مقدار داده‌ها وصل می‌کنیم. با مشخص کردن میانه روی جعبه، نمودار جدیدی ارائه کرده‌ایم به نام نمودار جعبه‌ای. برای این منظور خطی عمودی بکشید تا میانه مشخص شود.



این نمودار دامنه، دامنه میان چارکی و میانه مجموعه داده‌ها را به‌طور هم‌زمان نشان می‌دهد. بیش از یک مجموعه داده را می‌توان در یک نمودار نشان داد. این بدان معناست که این روش برای مقایسه داده‌ها بسیار عالی است.

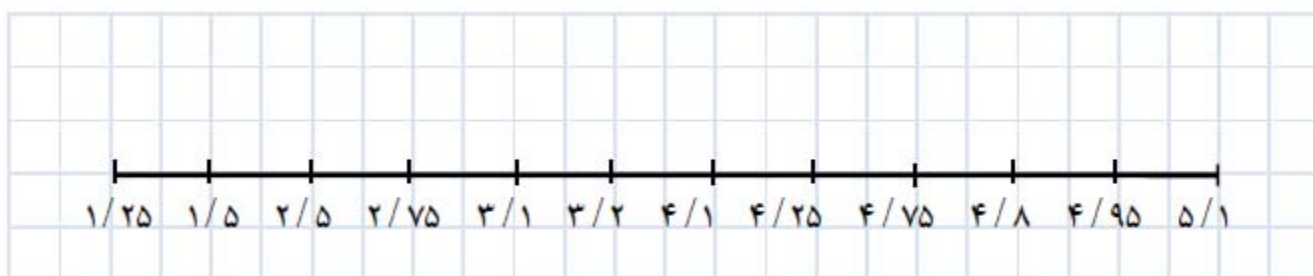
نمودار جعبه‌ای دو بسکتبالیست در اینجا نشان داده شده است. دامنه این امتیازات را مقایسه کنید. اگر مجبور بودید از بین این دو بازیکن، یک نفر را انتخاب کنید، کدام را انتخاب می‌کردید؟ اکنون بهتر می‌توانید به سؤال قبل در وضعیت‌های مختلف گروه مقابل یا حساسیت بازی تصمیم‌گیری کنید.



بازیکن ب دامنۀ نسبتاً کوچکی دارد، ولی میانۀ هر دو برابر با ۱۰ است.
 بازیکن الف دامنۀ امتیازات بزرگی دارد. گاهی این بازیکن، امتیازاتی بسیار بیشتر از بازیکن ب می آورد،
 و گاهی هم بسیار کمتر.
 بازیکن ب ثبات بیشتری دارد و معمولاً امتیازاتش از بازیکن الف بیشتر است (میانۀها و دامنۀ میان چارکی
 را با هم مقایسه کنید)، پس بهتر است بازیکن ب را انتخاب کنیم.

برای مجموعه داده های زیر نمودار جعبه ای بکشید.

$۴/۸, ۲/۵, ۴/۱, ۱/۲۵, ۱/۵, ۲/۵, ۳/۱, ۳/۲, ۴/۲۵, ۴/۷۵, ۴/۹۵, ۵/۱$



کار در کلاس

برای مجموعه داده‌های زیر نمودار جعبه‌ای بکشید.

$4/8, 2/5, 4/1, 1/25, 1/5, 2/5, 3/1, 3/2, 4/25, 4/75, 4/95, 5/1$

چارک اول، بین مقادیر و قرار می‌گیرد. بنابراین، مقدار اولین چارک می‌شود :
 چارک سوم بین مقادیر و قرار می‌گیرد. بنابراین، مقدار سومین چارک می‌شود :

تمرین

۱. نمودارهای میله‌ای فراوانی یا درصدها را نشان می‌دهند. چه زمانی باید از فراوانی‌ها و چه زمانی از درصدها استفاده کرد؟

۲. نمودارهای میله‌ای افقی درست شبیه نمودارهای میله‌ای عمودی هستند. با این تفاوت که محورهای چرخیده‌اند. نمودارهای میله‌ای عمودی مرسوم‌تر هستند. به نظر شما رسم نمودارهای میله‌ای افقی چه زمانی مفید است؟

۳. سن بازیکنان تیم ملی فوتبال یک کشور به شرح زیر است :

۲۷	۲۴	۲۶	۲۶	۲۹	۱۹	۳۱	۱۸	۲۳	۲۲	۲۵	۲۶	۲۷	۲۳	۲۹	۲۵	۲۵	۳۳	۳۱	۲۱	۲۶	۲۵
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

الف) نمودار نقطه‌ای رسم کنید و مقادیر میانگین، مد و میانه سن بازیکنان این تیم روی محور افقی نشان دهید.

ب) نمودار جعبه‌ای داده‌ها را رسم کنید.

پ) تعداد بازیکنانی که سن آنها بیشتر از میانگین است، بیشتر است یا تعداد بازیکنانی که سن آنها از میانگین کمتر است؟

ت) تعداد بازیکنانی که سن آنها بالاتر از میانه است بیشتر است یا تعداد بازیکنانی که سن آنها از میانه کمتر است؟ میانه و میانگین را در این بررسی مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

ث) چه تعداد از بازیکنان سن آنها بین چارک اول و سوم قرار دارد؟ آیا بدون محاسبه چارک‌ها می‌توانستید به این سؤال پاسخ دهید؟

نمودارهای چندمتغیره

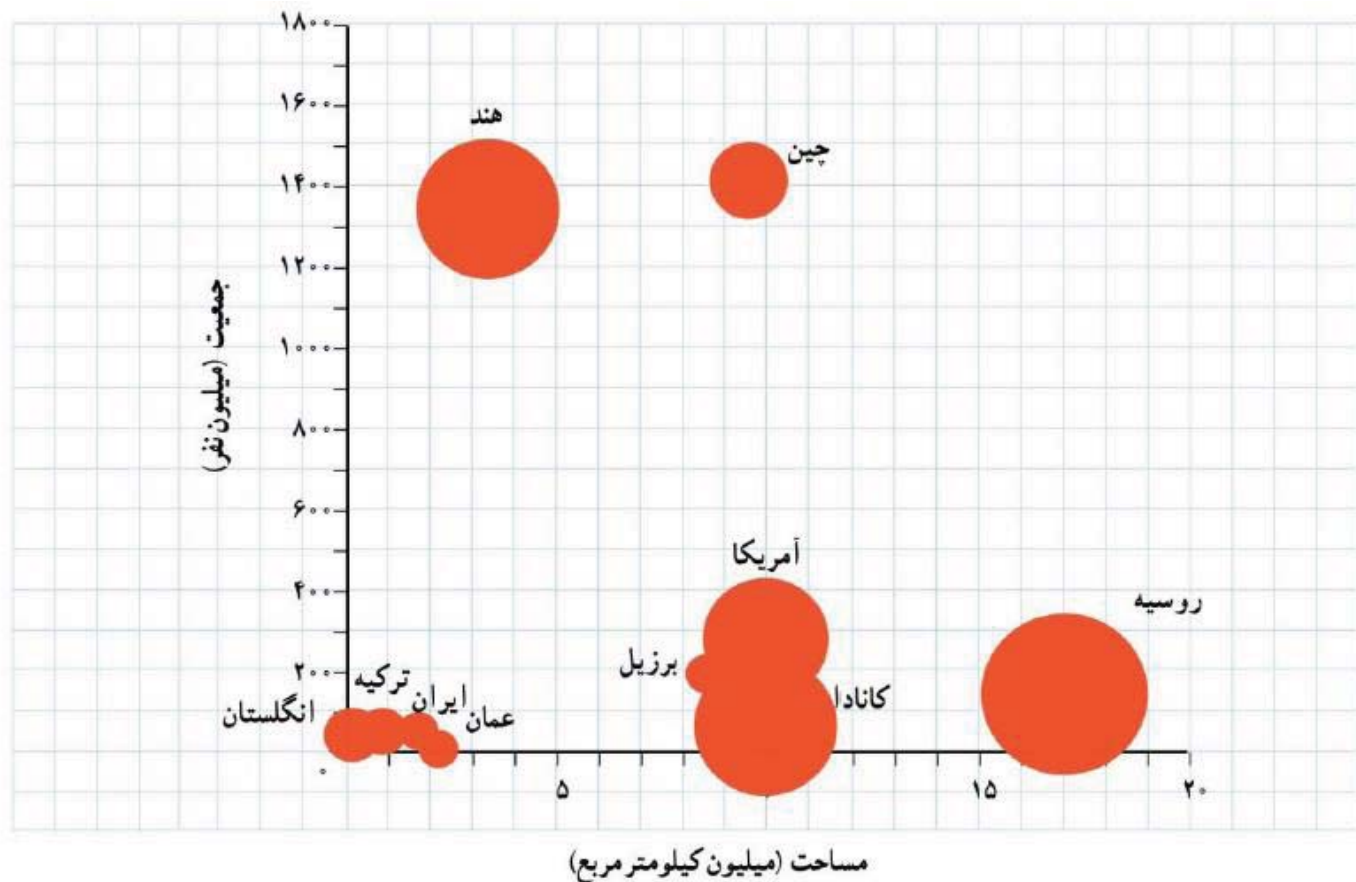
درس ۲

پوریا علاقه زیادی به جغرافیا دارد. او فهرستی از مقادیر سه متغیر مربوط به ۱۰ کشور را تهیه کرده است:

نام کشور	جمعیت	مساحت	آب ها (درصد)
۱ ایران	۷۹,۲۰۰,۰۰۰	۱,۶۴۸,۱۹۵	۰/۷۰
۲ آمریکا	۳۲۲,۳۶۹,۳۱۹	۹,۸۵۷,۳۰۶	۷/۱۰
۳ انگلستان	۶۴,۷۱۶,۰۰۰	۲۴۲,۴۹۵	۱/۳۴
۴ برزیل	۲۰۵,۳۳۸,۰۰۰	۸,۵۱۵,۷۶۷	۰/۶۵
۵ ترکیه	۷۹,۴۶۳,۶۶۳	۸۱۴,۵۷۸	۱/۳۰
۶ چین	۱,۳۷۶,۰۴۹,۰۰۰	۹,۵۹۶,۹۶۱	۲/۸۰
۷ روسیه	۱۴۴,۱۹۲,۴۵۰	۱۷,۰۹۸,۲۴۲	۱۳
۸ عمان	۳۰,۷۷۰,۳۷۵	۲,۱۴۹,۶۹۰	۰/۷۰
۹ کانادا	۳۶,۰۴۸,۵۲۱	۹,۹۸۴,۶۷۰	۸/۹۲
۱۰ هند	۱,۲۷۶,۲۶۷,۰۰۰	۳,۲۸۷,۲۶۳	۹/۶۰

پوریا می داند که برای هر کدام از متغیرهای مربوط به کشورها؛ یعنی مساحت و جمعیت و درصد آب ها، می تواند نموداری میله ای رسم کند. برای هر جفت از این متغیرها هم می تواند پراکنش نگاشت رسم کند (مثلاً نمودار جمعیت در مقابل مساحت)؛ اما این سؤال برایش مطرح است که آیا راهی وجود دارد تا هر سه متغیر مربوط به این کشورها را به طور هم زمان فقط در یک نمودار نشان دهد؟

پوریا همین طور که به پراکنش نگاشت جمعیت در مقابل مساحت کشورها نگاه می کرد، ناگهان به این فکر افتاد که اندازه نقطه های نمودار را متناسب با درصد آب های کشورها رسم کند. پس نموداری به شکل زیر کشید:



به این ترتیب، او موفق شد سه متغیر مربوط به کشورها را در یک نمودار، نمایش دهد. نموداری که پوریا رسم کرد، به نام نمودار حبابی معروف است.

نکته: در این نمودار مرکز دواير دارای مختصات (جمعیت، مساحت) است و شعاع دایره ها برابر با جذر متغیر سوم (درصد آب) است.

هر نقطه یا دایره در نمودار حبابی، در واقع یک سه تایی مرتب به صورت (V_1, V_2, V_3) را مشخص می کند، که در آن داریم:

- V_1 : موقعیت نقطه روی محور افقی،
- V_2 : موقعیت نقطه روی محور عمودی،
- V_3 : اندازه نقطه (مساحت دایره).

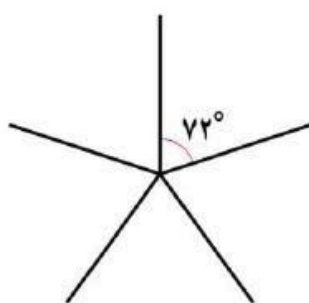
نمودارهای حبابی را می توان گونه خاصی از پراکنش نگاشت دانست که برای نمایش هم زمان سه متغیر عددی به کار می روند و در آنها به جای نقطه از دایره های توپر استفاده می شود.

تمرین

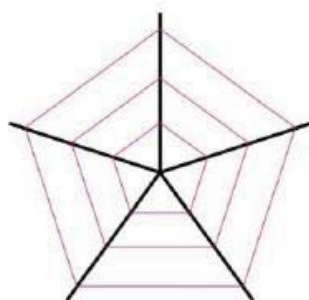
۱. مقدار متغیر سوم در نمودار حبابی، متناسب با کدام یک از موارد زیر است؟
 - الف) شعاع دایره ها
 - ب) قطر دایره ها
 - پ) محیط دایره ها
 - ت) مساحت دایره ها
۲. نمودارهای حبابی برای نمایش چند متغیر عددی در یک نمودار به کار می روند؟
 - الف) یک متغیر
 - ب) دو متغیر
 - پ) سه متغیر
 - ت) محدودیتی ندارد

نمودار راداری:

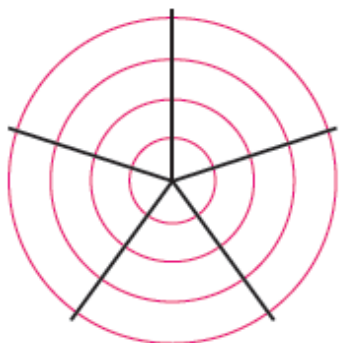
نمودار راداری، روشی برای نمایش داده های چندمتغیره در قالب نموداری دوبعدی است، که در آن سه متغیر کمی یا بیشتر بر روی محورهای نشان داده می شوند که نقطه شروع همه آنها یکی است. محل قرارگیری و زاویه محورها نسبت به یکدیگر، هیچ اطلاعات خاصی را بیان نمی کند.



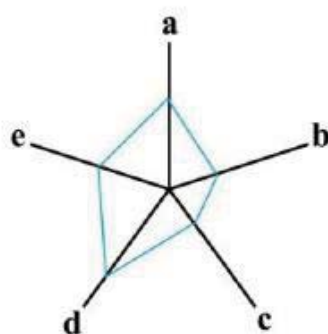
نمودار راداری از چند خط (به طور دقیق تر: نیم خط) به شکل پره های چرخ دوچرخه تشکیل می شود که در نقطه ای مرکزی به یکدیگر اتصال دارند و با زاویه های یکسان بین هم، گرداگرد آن نقطه قرار گرفته اند. هر کدام از این خطوط، در واقع یک محور و نشان دهنده یک متغیر است؛ پس می توانند درجه بندی شوند. به این خطوط، اصطلاحاً شعاع های نمودار راداری می گویند.



اگر درجه بندی شعاع ها به گونه ای انجام گیرد که فاصله بین نشانک های متوالی بر روی همه شعاع ها یکسان باشد، می توان خطوط راهنمای مقادیر را هم رسم کرد؛ به شرطی که باعث شلوغی نمودار نشود.



گاهی این خطوط راهنما را به جای راست خط به صورت خط خم و دایره رسم می کنند. در این حالت، نمودار واقعاً شبیه صفحه نمایش رادار می شود.



نسبت مقدار یک متغیر، برای یک مشاهده به پیشینه آن متغیر به ازای همه مشاهدات، اندازه آن مقدار روی شعاع مربوط را مشخص می کند. این کار را برای همه متغیرها و بر روی همه شعاع ها انجام می دهیم. سپس نقاط مشخص شده روی شعاع های مجاور به ازای هر مشاهده را به هم وصل می کنیم. به این ترتیب، نمودار راداری برای یک مشاهده به دست خواهد آمد. اگر نمودار مربوط به دو یا چند مشاهده را روی هم بیندازیم، می توانیم مشاهدات را با هم مقایسه کنیم.

نمودار راداری به ما می گوید:

- کدام مشاهدات شبیه به یکدیگرند؟
- آیا داده دور افتاده ای وجود دارد؟

- مقدار کدام متغیر برای یک مشاهده نسبت به متغیرهای دیگر بیشتر یا کمتر است؟
- مقدار کدام متغیر برای یک مشاهده نسبت به مشاهدات دیگر بیشتر یا کمتر است؟

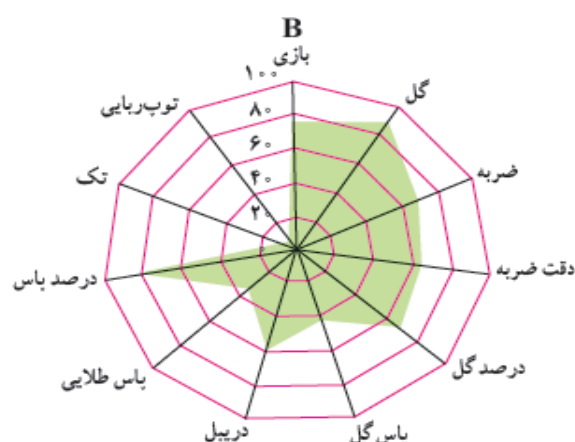
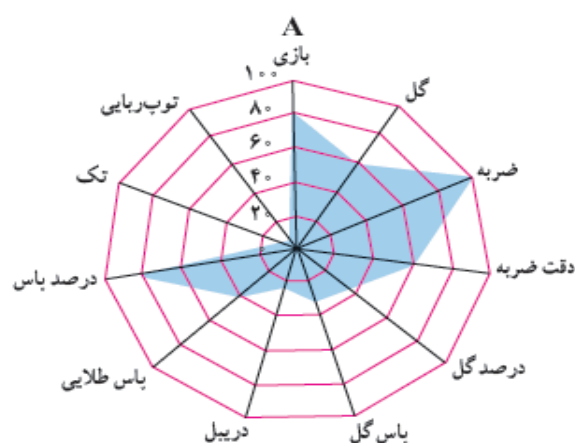
از این نمودار در ورزش برای نشان دادن میزان قدرت و ضعف بازیکنان نسبت به یکدیگر استفاده می شود.

◆ مثال: نامزدهای نهایی دریافت جایزه «توپ طلا» در سال ۲۰۱۳ میلادی سه بازیکن A و B و C بودند که در

نهایت، جایزه به بازیکن A تعلق گرفت.

برای اینکه ببینیم آیا این انتخاب عادلانه بوده است یا نه، داده های گردآوری شده از این سه بازیکن در طول فصل ۲۰۱۳-۲۰۱۲ را بررسی می کنیم. (همه داده ها، به جز تعداد بازی، به صورت میانگین مقادیر اندازه گیری شده در طول هر ۹۰ دقیقه محاسبه شده اند.)

متغیر	A	B	C	پیشینه
تعداد بازی	۳۰/۱	۲۹/۱	۲۳/۵	۳۸
گل زده (غیر از پنالتی)	۰/۹۳	۱/۴۴	۰/۴۳	۱/۶
ضربه به سمت دروازه	۷/۷۸	۵/۶	۲/۷۷	۸
دقت ضربه (درصد)	۴۴/۶	۴۹/۱	۴۷/۷	۷۵
ضربه های گل شده (درصد)	۱۴/۵	۲۸	۱۵/۳	۴۰
پاس گل	۰/۳۳	۰/۴۱	۰/۶	۱
دریبل موفق	۱/۸۹	۴/۱۹	۵/۲	۷
پاس طلایی (مهم)	۲/۰۵	۱/۵۸	۳/۶۶	۵
پاس های موفق (درصد)	۷۶/۸	۸۵	۸۷/۸	۹۵
تک (تکل)	۰/۴۶	۰/۶۵	۱/۱۵	۶
توپ ربایی	۰/۳	۰/۳۴	۰/۸۹	۶

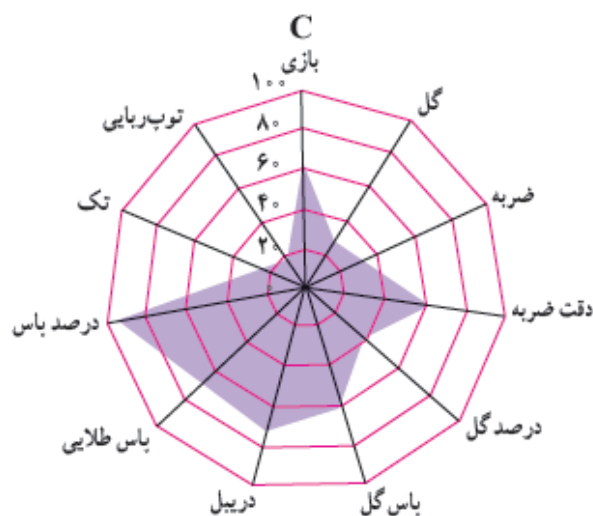


اکنون نمودار راداری مربوط به هر سه بازیکن را رسم می کنیم.

ملاحظه می شود که تعداد ضربه های بازیکن A به سمت دروازه، تقریباً به حد نهایی نمودار رسیده است. یعنی تعداد ضربه های او به سمت دروازه، بیشتر از هر بازیکن دیگری در جهان بوده است؛ اما از سوی دیگر، تعداد دریبل های موفق او به ویژه نسبت به دو نامزد دیگر، خیلی کم است.

تعداد گل های زده بازیکن B در جریان بازی، نزدیک به حد نهایی نمودار شده و از این لحاظ، او جزء برترین های جهان بوده است. درصد ضربه هایی هم که او به سمت دروازه زده و گل شده (درصد گل)، بسیار زیاد است. به طور کلی، ناحیه مربوط به گل زدن در نمودار B، وسعت زیادی دارد.

نمودار C به شکل جذابی کاملاً متفاوت با نمودار دو نامزد دیگر است. علت این موضوع، نقش متفاوت او در زمین است.



نمودارهای A و B شباهت زیادی به هم داشت. آنان از بزرگ‌ترین گلزنان اند؛ اما بازیکن C یک «گل‌ساز» بزرگ است. با اینکه آمار تعداد گل‌های او برای یک هافبک کناری، بسیار خوب است و درصد ضربه‌های گل شده‌اش نیز عالی است، درخشش اصلی او در آمار پاس و دریبل است. ببینید که ناحیه مربوط به پاس و دریبل در نمودارش چه وسعت زیادی دارد.

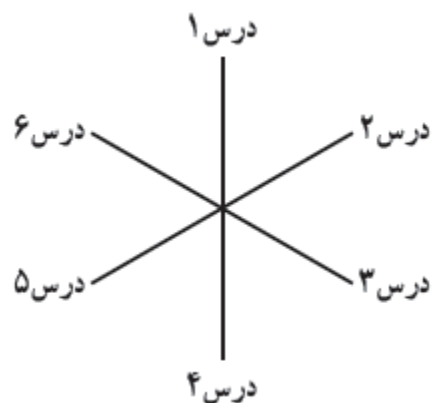


اگر داده‌های مربوط به هر سه نفر را در قالب یک نمودار رسم کنیم، شاید مقایسه بین آنان آسان‌تر شود. اکنون آیا می‌توانید بگویید که کدام بازیکن، شایستگی بیشتری برای دریافت توپ طلای سال ۲۰۱۳ میلادی داشت؟

کار در کلاس

آموزگارتان شش درس را انتخاب و برای شما به صورت زیر فهرست می‌کند :

- | | |
|--------|--------|
|۱ |۲ |
|۳ |۴ |
|۵ |۶ |



الف) نمودار راداری نمره‌های خود را به صورت
مقابل رسم کنید:

ب) نمودار خود را با یکی دیگر از دانش‌آموزان
ادغام کنید و با کمک یکدیگر، نمودار جدیدی
رسم کنید.

پ) به نظر شما نمره‌های کدامتان بهتر است؟



۱. نمودار راداری برای نمایش داده‌های چند متغیر کمی به طور هم‌زمان به کار می‌رود؟

۲. زاویه بین شعاع‌های مجاور در نمودار راداری، چه چیزی را نشان می‌دهد؟

۳. نمودار راداری چه چیزی به ما می‌گوید؟

۴. کاربرد نمودار راداری در ورزش چیست؟

۵. اگر زاویه بین دو شعاع مجاور در نمودار راداری، 40° درجه باشد، چند متغیر در نمودار حضور دارد؟

۶. داده‌های زیر را که مربوط به شاخص‌های سلامت است، در قالب یک نمودار راداری نمایش دهید:

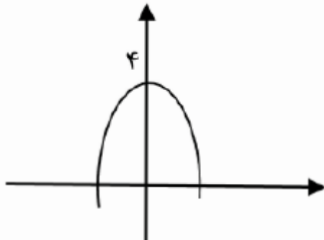
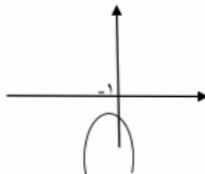
متغیر		ایران	پاکستان	ترکیه	بیشینه
X_1	عمر مورد انتظار در بدو تولد (سال)	۷۵/۵	۶۶/۴	۷۵/۸	۸۴
X_2	نسبت متخصصان سلامت (به ازای هر ۱۰ هزار نفر جمعیت)	۲۳/۰	۱۴/۰	۴۱/۱	۲۴۵
X_3	نسبت ولادت‌ها به وسیله متخصصان سلامت (درصد)	۹۶	۵۲	۹۷	۱۰۰
X_4	نسبت جمعیت دارای دسترسی به شبکه فاضلاب	۹۰	۶۴	۹۵	۱۰۰
X_5	شاخص آمادگی اجرای مقررات بین‌المللی سلامت	۸۵	۴۳	۷۸	۱۰۰

(داده‌ها برگرفته از گزارش آماری سازمان جهانی بهداشت، سال ۲۰۱۶ میلادی)

نمونه سوالات امتحانی

ردیف	سوالات	بارم								
۱	جاهای خالی را پر کنید. الف) اگر در یک معادله درجه دوم، مقدار عددی دلتا (Δ) شود، آن معادله جواب حقیقی ندارد. ب) معیار پراکندگی که معمولاً با میانگین بیان می شود، نام دارد. ج) هر ویژگی از اشخاص یا اشیاء که قرار است بررسی شود، نامیده می شود. د) نمودار روشی برای نمایش داده های چند متغیره (سه متغیر کمی یا بیشتر) در قالب نمودار دو بعدی است.	۱								
۲	در هر مورد گزینه درست را انتخاب کنید. الف) ریشه های کدام یک از معادله های زیر ۹ و ۴- است؟ $x^2 + 13x - 36 = 0$ (۱) $x^2 - 5x - 36 = 0$ (۲) $x^2 + 5x - 36 = 0$ (۳) $x^2 - 13x - 36 = 0$ (۴) ب) مقدار متغیر سوم در نمودار حبابی، متناسب با کدام یک از موارد زیر است؟ ۱) شعاع دایره ها ۲) قطر دایره ها ۳) محیط دایره ها ۴) مساحت دایره ها ج) تجزیه ی عبارت $x^3 - x^2$ کدام است؟ $x(x^2 - x)$ (۱) $x^2(x - 1)$ (۲) $x^3(x - 1)$ (۳) $x(3x - x)$ (۴)	۰/۷۵								
۳	بهترین روش جمع آوری داده برای هر یک از موضوعات ستون سمت راست را از ستون سمت چپ انتخاب کرده و بنویسید. <table><tr><td>الف) بررسی تصادفات در جاده اهواز - ماهشهر در سال ۹۴</td><td>a - مشاهده</td></tr><tr><td>ب) دانش آموزان دوست دارند در هنگام درس خواندن موسیقی هم گوش دهند.</td><td>b - پرسش نامه</td></tr><tr><td>ج) بررسی رفتار دانش آموزان در یک کلاس درس</td><td>c - مصاحبه</td></tr><tr><td></td><td>d - دادگان</td></tr></table>	الف) بررسی تصادفات در جاده اهواز - ماهشهر در سال ۹۴	a - مشاهده	ب) دانش آموزان دوست دارند در هنگام درس خواندن موسیقی هم گوش دهند.	b - پرسش نامه	ج) بررسی رفتار دانش آموزان در یک کلاس درس	c - مصاحبه		d - دادگان	۰/۷۵
الف) بررسی تصادفات در جاده اهواز - ماهشهر در سال ۹۴	a - مشاهده									
ب) دانش آموزان دوست دارند در هنگام درس خواندن موسیقی هم گوش دهند.	b - پرسش نامه									
ج) بررسی رفتار دانش آموزان در یک کلاس درس	c - مصاحبه									
	d - دادگان									
۴	با استفاده از اتحادها، حاصل عبارت مقابل را بدست آورید. $(2b + 5)^2 =$	۱								
۵	حاصل عبارت زیر را بدست آورید. $\frac{2}{x+2} + \frac{x}{x+2} = x + 3$	۱								

ردیف	«سوالات»	بارم																																			
۶	با استفاده از روش فرمول کلی معادله $3x^2 - x - 4 = 0$ را حل کنید.	۱/۵																																			
۷	اگر رابطه ی $R = \{(2.9). (17.8). (5.2 a - 3). (5.1). (17.b + 3)\}$ تابع باشد، مقادیر a و b را محاسبه کنید.	۱																																			
۸	کدامیک از رابطه های زیر که به صورت های متفاوت نمایش داده شده اند، یک تابع هستند؟ دلیل را بیان کنید. ب) $E = \{(a,b), (c,a), (b,d), (a,c)\}$ <table><tr><td>۵</td><td>۲</td><td>۱</td><td>-۳</td><td>۲</td><td>x</td></tr><tr><td>$\sqrt{8}$</td><td>۰/۵</td><td>۱</td><td>$\sqrt{8}$</td><td>$\frac{1}{2}$</td><td>y</td></tr></table> پ) ت)	۵	۲	۱	-۳	۲	x	$\sqrt{8}$	۰/۵	۱	$\sqrt{8}$	$\frac{1}{2}$	y	۱																							
۵	۲	۱	-۳	۲	x																																
$\sqrt{8}$	۰/۵	۱	$\sqrt{8}$	$\frac{1}{2}$	y																																
۹	با علامت $\times$ نوع هر یک از متغیرهای جدول و مقیاس اندازه گیری را به طور کامل مشخص کنید. <table><tr><th>متغیر مورد نظر</th><th>کمی</th><th>کیفی</th><th>فاصله ای</th><th>نسبتی</th><th>ترتیبی</th><th>اسمی</th></tr><tr><td>نمره درس ریاضی</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>مراحل کشت یک محصول</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>نژاد اسب ها</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>درجه حرارت اهواز</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>	متغیر مورد نظر	کمی	کیفی	فاصله ای	نسبتی	ترتیبی	اسمی	نمره درس ریاضی							مراحل کشت یک محصول							نژاد اسب ها							درجه حرارت اهواز							۲
متغیر مورد نظر	کمی	کیفی	فاصله ای	نسبتی	ترتیبی	اسمی																															
نمره درس ریاضی																																					
مراحل کشت یک محصول																																					
نژاد اسب ها																																					
درجه حرارت اهواز																																					
۱۰	برای یک تابع خطی داریم: $f(-2) = -5$ و $f(1) = 4$ الف) نمودار این تابع را بدست آورید. ب) شیب این تابع خطی را بدست آورید. ج) ضابطه ی این تابع خطی را بدست آورید.	۲																																			
۱۱	میانگین و انحراف معیار داده های ۱۵ و ۱۰ و ۹ و ۷ و ۴ را حساب کنید.	۱/۵																																			

ردیف	«سوالات»	بارم																		
۱۲	تابع درآمد یک کارگاه به صورت $R(x) = 21x - x^2$ و تابع هزینه به صورت $C(x) = 20 + x$ است: الف) معادله سود این شرکت را بنویسید. ب) چند واحد کالا تولید شود تا بیشترین سود را داشته باشد؟ ج) بیشترین سود این شرکت چقدر است؟	۲																		
۱۳	سن ورزشکاران یک باشگاه والیبال به شرح زیر است: ۱۵ ۵ ۱۲ ۱۴ ۱۶ ۱۷ ۱۳ ۱۸ ۱۱ ۱۶ ۱۵ ۱۰ ۱۵ ۶ ۱۸ ۱۵ ۱۹ ۸ ۷ ۸ ۱۴ الف) مد داده های بالا را بدست آورید. ب) نمودار جعبه ای داده های بالا را رسم کنید.	۲																		
۱۴	نمرات دو دانش آموز در چند درس مختلف مطابق جدول زیر است. برای این درس ها یک نمودار راداری رسم کنید. <table><tr><th>درس</th><th>ادبیات</th><th>دین و زندگی</th><th>شیمی</th><th>ریاضی</th><th>فیزیک</th></tr><tr><td>نمرات زهرا</td><td>۱۸</td><td>۱۹</td><td>۹</td><td>۱۵</td><td>۱۳</td></tr><tr><td>نمرات فاطمه</td><td>۱۵</td><td>۱۹</td><td>۱۱</td><td>۱۷</td><td>۱۲</td></tr></table>	درس	ادبیات	دین و زندگی	شیمی	ریاضی	فیزیک	نمرات زهرا	۱۸	۱۹	۹	۱۵	۱۳	نمرات فاطمه	۱۵	۱۹	۱۱	۱۷	۱۲	۱/۵
درس	ادبیات	دین و زندگی	شیمی	ریاضی	فیزیک															
نمرات زهرا	۱۸	۱۹	۹	۱۵	۱۳															
نمرات فاطمه	۱۵	۱۹	۱۱	۱۷	۱۲															
۱۵	معادله مربوط به هر نمودار را مشخص کنید (یک معادله اضافی است) الف) $y = -(x + 1)^2 - 2$ ب) $y = 2x^2 - x + 1$ ج) $y = 4 - x^2$ 	۱																		