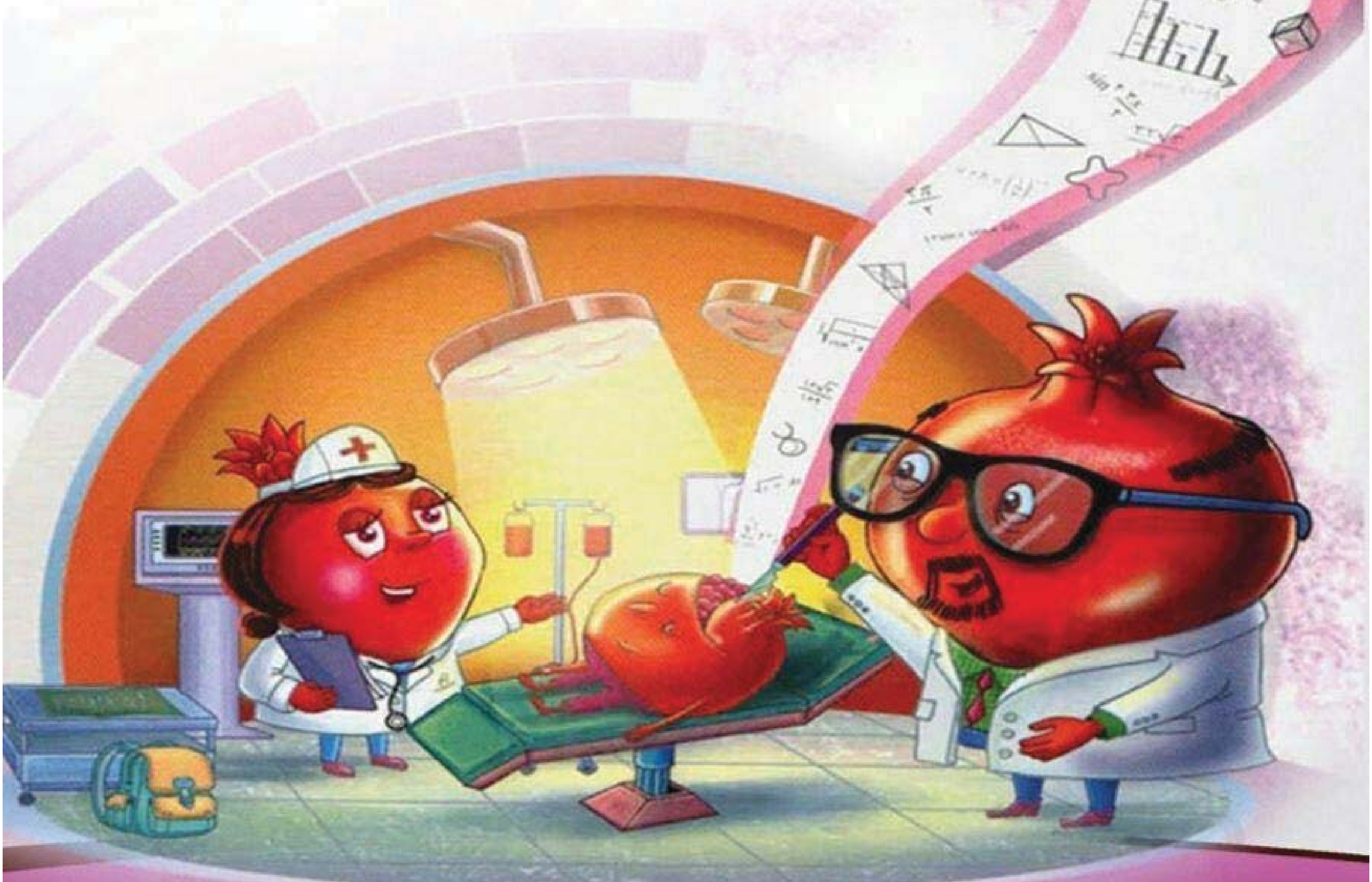
جزوه ترکیبات

ویژه کنکور ۹۹



مؤلف: مهندس حسن پور

@hasanpor_riazi :تلگرام   Hasanpour 6364 :اینستاگرام   ۰۹۱۲۵۳۵۸۰۲۷۴

آنالیز ریاضی (ترکیبیات):

تعریف: شمارش، بدون شمردن (اصل ضرب، اصل جمع، فاکتوریل، جایگشت، ترتیب، ترکیب).

اصل ضرب: فرض کنید عملی را به n_1 طریق و عمل دیگری را به n_2 طریق می توان انجام داد، تعداد کل حالات ممکن برابر است با $n_1 \times n_2$ طریق و این اصل قابل تعمیم است.

$n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_k$

مثال) به چند طریق می توان با ۴ پیراهن متمایز، ۳ کفش متمایز و ۵ شلوار متمایز تیپ های مختلف زد؟

$4 \times 3 \times 5 = 60$ **حالت**

مثال) با ارقام ۶، ۵، ۴، ۳، ۲ چند عدد سه رقمی می توان ساخت؟

بدون تکرار: $\underline{5}\,\underline{4}\,\underline{3} = 60$ **با تکرار :** $\underline{5}\,\underline{5}\,\underline{5} = 125$

مثال: با ارقام ۴، ۳، ۲، ۱، ۰ چند عدد سه رقمی می توان ساخت؟

بدون تکرار: $\underline{4}\,\underline{4}\,\underline{3} = 48$ **با تکرار :** $\underline{4}\,\underline{5}\,\underline{5} = 100$

چند نکته در باب اصل ضرب:

۱) در نوشتن اعداد n رقمی یا کلماتی که n حرفی اند، به تعداد خانه هایی که پر می کنیم از اعداد اصلی کم می کنیم.

جایگشت های کلمه تهران $\underline{5}\,\underline{4}\,\underline{3}\,\underline{2}\,\underline{1} = 5!$

۲) عدد (فرد/ زوج) عددی است که یکانش (فرد/ زوج) باشد

۳) تقسیم کردن (پخش کردن) n تا .... بین k تا ....

الف– کل حالات: برد به توان دامنه

ب– به هر نفر حداکثر یکی برسد... $k(k-1)(k-2)$

مثال) به چند طریق ۴ جایزه را بین ۶ نفر تقسیم کنیم؟ 6^4

مثال) به چند طریق ۴ نفر درون آسانسور در ۶ طبقه پیاده می شوند؟ 6^4

مثال) به چند طریق می توان ۴ جایزه را بین ۶ نفر تقسیم کرد طوری که به هرنفر حداکثر ۱ جایزه برسد؟

$6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$

مثال) به چند طریق ۴ نفر از یک آسانسور می توانند در ۶ طبقه پیاده شوند به طوری که در هر طبقه حداکثر ۱ نفر پیاده شود؟

$6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$

---

۴) در اصل ضرب در ۲ مورد سؤال را دو حالتی حل کن:

الف) رقم ۰ (صفر) داشتیم و عدد زوج یا مضرب ۵ بدون تکرار خواسته شد

ب) رقمی وجود داشت که می توانست دردو خانه قرار گیرد

مثال) با ارقام ۶، ۲، ۱، ۰ چند عدد ۴ رقمی بدون تکرار زوج می توان نوشت؟

$\begin{matrix} \underline{3}\ \underline{2}\ \underline{1}\ \underline{1} \rightarrow = 6 \\ \underline{2}\ \underline{2}\ \underline{1}\ \underline{2} \rightarrow = 8 \end{matrix} \rightarrow$ **کل حالات** $= 6 + 8 = 14$

نکته: حرف (ی) خانه آخر بی نقطه می آید.

اصل جمع: اگر یک عمل به n_1 و عمل دیگر به n_2 طریق قابل انجام باشد ولی انجام هم زمان هم دو عمل امکان پذیر نباشد، آن گاه عمل اول یا دوم (هر دو با هم نه!) را به $n_1 + n_2$ طریق می توان انجام داد.

مثال) شخصی ۴ مداد رنگی متمایز و ۳ خودکار رنگی متمایز دارد. او به چند طریق می تواند با خودکار یا مداد بنویسد؟

۴+۳=۷

مثال) از میان ۷ ایرانی، ۳ آلمانی، ۴ فرانسوی به چند طریق می توان دو نماینده انتخاب کرد به طوری که نماینده ها از ملیت های مختلف باشند؟

ایران و آلمان: $3 \times 7 = 21$

یا

ایران و فرانسه: $4 \times 7 = 28 \rightarrow$ **جمع حالات** $= 21 + 28 + 12 = 61$

یا

آلمان و فرانسه: $4 \times 3 = 12$

فاکتوریل: حاصل ضرب اعداد از ۱ تا n را n فاکتوریل ($n!$) می نامیم.

$1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times (n-1) \times n = n!$

$n! = n(n-1)! = n(n-1)(n-2)!$

مثال) $9! = 9 \times 8! = 9 \times 8 \times 7! = 9 \times 8 \times 7 \times 6! = \cdots$

$0! = 1! = 1 \qquad 2! = 2 \qquad 3! = 6$

$4! = 24 \qquad 5! = 120 \qquad 6! = 720$

انواع سؤالات فاکتوریل:

۱) ساده کردن: الف– فاکتورگیری ب– صورت و مخرج

$19(19! + 18!) = 19(19 \times 18! + 18!) = 19(18!)(19 + 1) = 20 \times 19 \times 18! = 20!$

$\frac{10!}{3! \times 8!} = \frac{10 \times 9 \times 8!}{6 \times 8!} = 15$

۲) حل معادله:

$n! = 6 \rightarrow n = 3$

$(n-2)! = 120 \rightarrow n - 2 = 5 \rightarrow n = 7$

$$(n+2)! = 56 \times n! \rightarrow (n+2)(n+1)n! = 56 \times n! \rightarrow (n+1)(n+2) = 56 \xrightarrow[\text{حدس}]{8\times 7} n = 6$$

جایگشت: تعداد قرار گرفتن n شی متمایز کنار هم را با $n!$ نمایش می دهیم و هر یک از حالات ممکن را یک جایگشت می نامیم.

انواع مسائل جایگشت: الف– بدون تکرار ب– با تکرار

الف– جایگشت بدون تکرار:

در حالت عادی (A)

چند نفر کنار هم (B)

یکی در میان (C)

دور میز گرد (D)

چند نفر کنار هم نباشند (F)

A) **جایگشت در حالت عادی : جایگشت n شی متمایز کنار هم برابر $n!$ است.**

مثال) ۷ نفر به چند طریق می توانند کنار هم قرار گیرند؟

$7! = 5040$

B) **جایگشت چند نفر (شیء) کنار هم : ((روش بسته بندی)): اگر در محاسبه تعداد جایگشت های n شیء متمایز قرار باشد چند شیء (نفر) مشخص هموار کنار هم باشند، کافیست آن ها را یک شیء فرض کنیم (به هم بچسبانیم) و تعداد جایگشت آن ها را با بقیه اشیاء (افراد) حساب و در آخر تعداد جایگشت های خود این اشیاء (افراد) را نیز حساب کرده در جواب قبلی ضرب می کنیم.**

مثال) تعداد جایگشت های حروف کلمه پژوهش به شرطی که دو حرف (و) و (ه) کنار هم باشند را بدست آورید.

پ ژ و ه ش   **جواب**: $4! \times 2!$

مثال) تعداد جایگشت های حروف کلمه $logarithm$ به شرطی که بخش log در آن دیده شود چگونه است؟

$\boxed{log}$ a r i t h m   **جواب**: $7!$

C) **جایگشت یک در میان:**

الف) تعداد برابر، اگر n شیء متمایز دیگر یک در میان قرار گیرند. $n! \times n! \times 2$

ب) تعداد نابرابر، اگر n شیء متمایز و $(n+1)$ شیء متمایز دیگر یک در میان قرار گیرند. $(n+1)! \times n!$

مثال) به چند طریق می توان ۴ مرد و ۴ زن را یک در میان قرار داد؟

$M_1\ Z_1\ M_2\ Z_2\ M_3\ Z_3\ M_4\ Z_4$

$Z_1\ M_1\ Z_2\ M_2\ Z_3\ M_3\ Z_4\ M_4$

جواب: ۱۱۵۲=۲×!۴×!۴

مثال) به چند طریق می توان ۴ زن و ۳ مرد را یک در میان قرار داد؟

$Z_1\ \ M_1\ Z_2\ \ M_2\ Z_3\ M_3\ Z_4$

$M_1\ Z_1\ M_2\ Z_2\ M_3\ Z_3\ Z_4$ **امکان پذیر نیست**

$\rightarrow$ **جواب**: $4! \times 3! = 144$

$D)$ **جایگشت دور میزگرد:** n **نفر برابر** $(n-1)!$ **است چون یک نفر به عنوان مبدأ قرار می گیرد.**

مثال) ۶ نفر به چند طریق می توانند دور یک میز گرد قرار گیرند؟

$(6-1)! \rightarrow 5! = 120$

مثال) به چند طریق می توان ۷ درخت بلوط متمایز و ۳ درخت گلابی متمایز را دور یک محیط دایره ای شکل کاشت؟

درخت $10 \rightarrow$ **جواب**: $9!$

مثال) به چند طریق می توان ۷ درخت بلوط متمایز و ۳ درخت گلابی متمایز را دور یک محیط دایره ای شکل کاشت به طوری که درخت های هم نوع کنار هم باشند؟

ب ب ب ب ب ب ب

گ ، گ ، گ

$(2-1)! \times 7! \times 3!$

$F)$ **جایگشت چند نفر که کنار هم نباشند ((روش حفره)):**

مثال) حروف کلمه logarithm **به چند طریق جا به جا شوند تا حروف** a,r,t **کنار هم نباشند؟**

○ l ○ o ○ g ○ i ○ h ○ m ○

$6!$ ↓ $\boxed{\text{جا به جایی حروف } logimh}$

$\binom{7}{3}$ ↘ $\boxed{\text{انتخاب حفره}}$

$3!$ ↓ **جا به جایی** a,r,t **درون** 3 **حفره انتخابی**

تعداد حالات $6! \times \binom{7}{3} \times 3!$

ب– جایگشت با تکرار: n **شیء یکسان** (A')

n **شیء که** k **تای آن ها مثل هم باشد** (B')

ضریب جمله ای از بسط دو جمله ای (C')

n **شیء که** k **تای آن ها تکراری باشد و انتخابی نیز باشد** (D')

(A') **: جایگشت** n **شیء یکسان برابر یک است چون جا به جایی اشیاء حالت جدید ایجاد نمی کند.**

مثال) با عدد ۵و ۵ و ۵ چند عدد سه رقمی می توان نوشت؟ ۱ حالت

(B')**: اگر** n **شیء داشته باشیم که** n_1 **تای آن از نوع اول،** n_2 **تای آن از نوع دوم و... تعداد حالات ممکن برابر است با:**

$$\frac{n!}{n_1!\times n_2!\times \dots n_k!}$$

مثال) با حروف کلمه بامداد چند کلمه ۶ حرفی می توان نوشت؟

جواب: $\frac{6!}{2!\times 2!}$ **ب ا م د ا د**

مثال) با ارقام ۱، ۱، ۵، ۳، ۳، ۴، ۴، ۴ چند عدد ۸ رقمی می توان ساخت؟

$$\frac{8!}{3!\times 2!\times 2!}$$

مثال) به چند طریق می توان حروف کلمه Mississippi **را کنار هم قرار داد به طوری که:**

الف– بدون محدودیت: $\frac{11!}{4!\times 4!\times 2!}$

ب– حروف یکسان کنار هم باشند: $4!$ $m\ \underline{iiii}\ \underline{ssss}\ \underline{pp}$

ج– هیچ دو حرف p **کنار هم نباشند:** $\frac{11!}{4!\times 4!\times 2!}-\frac{10!}{4!\times 4!}$

مثال) با حروف کلمه بامداد چند کلمه ۶ حرفی می توان ساخت به طوری که:

الف– دو حرف الف کنار هم باشند: $\frac{5!}{2!}$ د ب اا م د

ب– با حرف (د) شروع شود: $\frac{5!}{2!}$ $\frac{د}{\times}$ – – – – – –

ج– به حرف (م) ختم شود: $\frac{5!}{2!\times 2!}$ – – – – – – $\frac{م}{\times}$

د– با حرف (د) شروع و به (م) ختم شود: $\frac{4!}{2!}$ د ـــ ـــ ـــ ـــ م

مثال) جایگشت حروف DAMDARAN به شرطی که:

الف– بدون محدودیت: $\frac{8!}{2!\times 3!}$

ب– حروف یکسان کنار هم باشند: $5!$ $\underline{DD}$ $\underline{AAA}$ M R N

مثال) جایگشت حروف ASSIST به شرطی که:

الف– بدون محدودیت: $\frac{6!}{3!}$

ب– S ها کنار هم باشند: $\left(1=\frac{3!}{3!}\right)$ $4!\times 1$ **:جواب** $SSS\ \ A\ \ I\ \ T$

$3!\times 1\times 2!$

ج– S ها یک در میان باشند: $\boxed{\text{جا به جایی بسته}}$ $\boxed{\text{جا به جایی S}}$ $\boxed{T, A, I}$ A S I S T S

مثال (C'): در بسط دو جمله ای $(a+b)^5$ ضریب جمله a^3b^2 چند است؟

$a^3b^2 = aaabb$ **ضریب** $= \frac{5!}{3!\times 2!} = 10$

مثال) چند عدد سه رقمی داریم که:

الف) متقارن باشد   ب) متقارن زوج باشد   ج) متقارن فرد باشد   د) متقارن فرد بین ۳۰۰ تا ۷۰۰ باشد

$\underline{9}\,\underline{10}\,\underline{1}=\underline{90}$ $\underline{4}\,\underline{10}\,\underline{1}=\underline{40}$ $\underline{5}\,\underline{10}\,\underline{1}=\underline{50}$ $\underline{2}\,\underline{10}\,\underline{1}=\underline{20}$

مثال) ۲ سرباز و ۴ افسر در چند حالت می توانند کنار هم قرار بگیرند به طوری که:

الف– بدون محدودیت: !۶

ب– افسرها کنار هم و سربازها کنار هم باشند: $2! \times 4! \times 2!$

ج– سربازها در ابتدا و انتها قرار گیرند: $2! \times 4!$

د– فقط سربازها کنار هم باشند: $2! \times 5!$

نکته: به چند طریق می توان n **شیء یکسان را بین دو نفر تقسیم کرد؟ حالت** $(n+1)$

تعداد حالات $n+1$

$$\begin{matrix} A \\ B \end{matrix}\begin{cases} 0 \\ n \end{cases} \quad \begin{cases} 2 \\ n-2 \end{cases} \cdots \begin{cases} n-1 \\ 1 \end{cases} \quad \begin{cases} n \\ 0 \end{cases}$$

مثال) به چند طریق می توان ۵ خودکار یکسان را بین رضا و علی تقسیم کرد؟ ۶ طریق

مثال) سه نفر با هم مسابقه می دهند چند حالت برای برنده شدن آن ها وجود دارد؟

با هم نرسند : $3! = 6$

با هم برسند $b, a = 2!$ $\rightarrow$ **جمع** $= 6$ **در کل** 13 **حالت**

با هم برسند $a, c = 2!$

با هم برسند $b, c = 2!$

همه با هم برسند $= 1$

ترتیب: هرگاه بخواهیم از بین n نفر متمایز r شی را انتخاب کنیم، به شرطی ک ترتیب اهمیت داشته باشد.

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال)به چند طریق میتوان از بین ۵ نفر، ۲ نفر را به عنوان رئیس و معاون انتخاب کرد:

ترکیب: هرگاه بخواهیم از بین n شیء متمایز، r شیء را انتخاب کنیم، به شرطی که ترتیب اهمیت نداشته باشد:

$$c(n,r)=\binom{n}{r}=\frac{n!}{(n-r)!r!}$$

همواره $p(n,r)\ge c(n,r)$

مثال) به چند طریق می توان از بین ۵ نفر، دو نفر را انتخاب کرد؟

$\binom{5}{2}=\frac{5!}{2!\times 3!}=10$

$\binom{n}{0}=1$ $\binom{n}{1}=n$ $\binom{n}{n-1}=n$ $\binom{n}{n}=1$

نکته: $\binom{n}{a}=\binom{n}{b}\to\begin{cases}a=b\\a+b=n\end{cases}$

مثال) اگر $\binom{14}{2x-1}=\binom{14}{x}$ **باشد، آنگاه x کدام است؟**

$x=2x-1\to x=1$

$x+2x-1=14\to x=5$

مثال:

$\binom{8}{3}=$

$\binom{12}{9}=$

قانون پاسکال:

$\binom{n}{r}+\binom{n}{r+1}=\binom{n+1}{r+1}$

مثال) $\binom{18}{15}+\binom{18}{16}=\binom{19}{16}$

$=\binom{18}{5}+\binom{18}{6}+\binom{19}{7}+\binom{20}{8}=\binom{19}{6}+\binom{19}{7}+\binom{20}{8}=\binom{20}{7}+\binom{20}{8}=\binom{21}{8}=\binom{21}{13}$

مثال) اگر $p(n-1,3)=c(n,n-4)$ **باشد، n کدام است؟**

$$\frac{(n-1)!}{(n-4)!}=\frac{n!}{(n-4)!4!}\to(n-1)!=\frac{n(n-1)!}{4!}\to n=24$$

نکته: تعداد زیر مجموعه های r عضوی از یک مجموعه n عضوی برابر است با $\binom{n}{r}$

تعداد کل زیر مجموعه های یک مجموعه n عضوی برابر است با

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}=2^n$$

مثال) تعداد زیر مجموعه های مجموعه $A=\{a,b,c\}$ را بررسی کنید.

$A_1=\{\ \ \}\quad \binom{3}{0}=1$

$A_2=\{\mathrm{A}\}\quad A_3=\{b\}\quad \mathrm{A}_4=\{c\}\qquad \binom{3}{1}=3$

$A_5=\{a,b\}\quad A_6=\{a,c\}\quad \mathrm{A}_7=\{b,c\}\qquad \binom{3}{2}=3$

$A_8=\{a,b,c\}\quad \binom{3}{3}=1$

تعداد کل: $\binom{3}{0}+\binom{3}{1}+\binom{3}{2}+\binom{3}{3}=2^3=8$

مثال) حاصل $\binom{6}{1}+\binom{6}{2}+\binom{6}{3}+\binom{6}{4}$ کدام است؟

$\binom{6}{0}+\binom{6}{1}+\binom{6}{2}+\binom{6}{3}+\binom{6}{4}+\binom{6}{5}+\binom{6}{6}=2^6\rightarrow\binom{6}{1}+\binom{6}{2}+\binom{6}{3}+\binom{6}{4}=2^6-7=56$

مثال) مجموعه $A=\{a,b,c,d,e,f\}$ مفروض است؛

الف– تعداد زیر مجموعه های سه عضوی A را بیابید. $\binom{6}{3}$

ب– تعداد زیر مجموعه های سه عضوی A که شامل d باشد. $\binom{5}{2}$

ج– تعداد زیر مجموعه های سه عضوی A که شامل b,c نباشد. $\binom{4}{3}$

د– تعداد زیر مجموعه های سه عضوی A که شامل a باشد ولی شامل b نباشد. $\binom{4}{2}$

مثال) به چند طریق می توان از بین ۱۰ مرد و ۵ زن، یک کمیته ۵ نفره انتخاب کرد به شرطی که:

الف– بدون محدودیت $\binom{15}{5}$

ب– ۲ مرد و ۳ زن باشند $\binom{10}{2} \times \binom{5}{3}$

ج– همه مرد یا همه زن باشند $\binom{10}{0}\binom{5}{5} + \binom{10}{5}\binom{5}{0}$

د– تعداد مردها بیشتر باشد $\binom{10}{5}\binom{5}{0} + \binom{10}{4}\binom{5}{1} + \binom{10}{3}\binom{5}{2}$

ه– حداقل ۲ مرد موجود باشد

$\binom{15}{5} - \left(\binom{10}{0}\binom{5}{5} + \binom{10}{1}\binom{5}{4}\right)$ **روش** 2: $\binom{10}{2}\binom{5}{3} + \binom{10}{3}\binom{5}{2} + \binom{10}{4}\binom{5}{1} + \binom{10}{5}\binom{5}{0}$

مثال) به چند طریق می توان از بین ۵ مرد و ۷ زن موجود، ۲ مرد و ۳ زن را انتخاب کرد و در یک صف قرارداد به شرطی که:

الف– بدون محدودیت $\binom{5}{2}\binom{7}{3} \times 5!$

ب– مردها کنار هم وزن ها کنار هم باشند $\binom{5}{2}\binom{7}{3} \times 2! \times 3! \times 2!$

ج– یک در میان قرار بگیرند $\binom{5}{2}\binom{7}{3} \times 3! \times 2!$

د– مردها در ابتدا و انتهای صف قرار گیرند $\binom{5}{2}\binom{7}{3} \times 2! \times 3!$

مثال) از بین ۵ مهره سفید و ۴ مهره سیاه به چند طریق می توان ۳ مهره انتخاب کرد که:

الف– همه سیاه باشند $\binom{4}{3}\binom{5}{0}$

ب– همه از یک رنگ باشند $\binom{5}{3} + \binom{4}{3}$

ج– ۲ سیاه و ۱ سفید باشد $\binom{5}{1}\binom{4}{2}$

د– حداقل ۲ سفید باشد $\binom{5}{2}\binom{4}{1} + \binom{5}{3}\binom{4}{0}$

۰۹۳۵۳۵۸۰۳۷۴ اینستاگرام: Hasanpour 6364 تلگرام: hasanpor_riazi@

انواع مسائل انتخاب:

۱– (و) $\leftarrow x$

۲– (یا) $\leftarrow +$

۳– <u>حداقل</u> n تا $\leftarrow$ از n به بالا

۴– <u>حداکثر</u> n تا $\leftarrow$ از n به پایین

۵– در سؤالات لنگه به لنگه برای انتخاب n لنگه مختلف، ابتدا n جعبه بر می داریم سپس از هر جعبه یک لنگه خارج می کنیم.

مثال) از بین ۵ جفت کفش به چند طریق می توانیم ۳ لنگه مختلف برداریم؟

$$\binom{5}{3}\binom{2}{1}\binom{2}{1}\binom{2}{1} = 80$$

سه جفت بردار   حالا از هر جفت یک لنگه

مثال) از ۶ مدرسه، ۴ نفر از هر کدام به اردو می روند، اگر ۳ نفر از آن ها را انتخاب کنیم در چند حالت هم مدرسه ای نیستند.

$$\binom{5}{3}\binom{4}{1}\binom{4}{1}\binom{4}{1} = 1280$$

سه مدرسه انتخاب کن   حالا از هر مدرسه یک نفر بردار

مثال) با حروف کلمه منوچهری و حافظ چند کلمه ۵ حرفی می توان ساخت که:

الف– شامل ۲ حرف از منوچهری و ۳ حرف از حافظ باشد $\binom{7}{2}\binom{4}{3} \times 5!$

ب– همان الف ، به شرطی که با (م) شروع و به (ح) ختم شود $\binom{6}{1}\binom{3}{2} \times 3!$

مثال) با حروف کلمه منوچهری چند کلمه ۴ حرفی می توان ساخت؟

$\binom{7}{4} \times 4! = 35 \times 24 = 846$

مسائل شکل هندسی: نقاط روی محیط دایره

اگر نقاط در یک راستا باشند ••• **مثلث ساخته نمی شود**

تعداد چهار ضلعی و مربع ها :
$\left.\begin{array}{l}\bullet\bullet\bullet\bullet \\ \bullet\bullet\bullet \\ \bullet\end{array}\right\}$ **چهار ضلعی ساخته نمی شود**

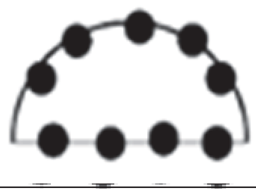
مثال) روی یک دایره ۱۰ نقطه موجود است:

الف– تعداد مثلث های ساخته شده $\binom{10}{3}$

ب– تعداد ۴ ضلعی های ساخته شده شامل رأس A $\binom{9}{3}$

ج) تعداد ۴ ضلعی های ساخته شده شامل A **و فاقد** B $\binom{8}{3}$

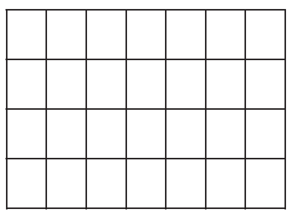
مثال) از اتصال نقاط شکل روبرو:



الف– تعداد مثلث ها $\binom{9}{3} - \binom{4}{3}$

ب– تعداد ۴ ضلعی ها $\binom{9}{4} - \left(\binom{4}{4} + \binom{4}{3}\binom{5}{1}\right)$

مثال) در شکل مقابل تعداد مستطیل ها و مربع ها را بیابید.



تعداد مستطیل ها: $\binom{8}{2} \times \binom{5}{2}$

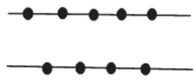
دو خط افقی   دو خط عمودی

تعداد مربع ها: $7 \times 4 + 6 \times 3 + 5 \times 2 + 4 \times 1 = 60$ **تا**

مثال) با نقاط زیر چند مثلث می توان ساخت؟

$\binom{9}{3} - 8$

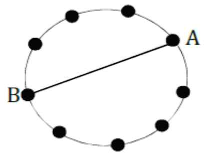
مثال) با نقاط شکل زیر چند مثلث می توان ساخت؟



روش 1: $\binom{9}{3} - \left(\binom{5}{3} + \binom{4}{3}\right)$

روش 2: $\binom{5}{2}\binom{4}{1} + \binom{5}{1}\binom{4}{2}$

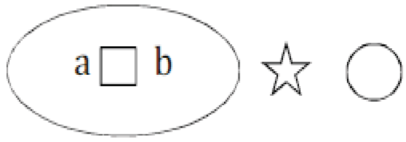
مثال) چند ۴ ضلعی می توان ساخت به طوری که:



الف– AB **قطر باشد** $\binom{3}{1}\binom{4}{1} = 12$

ب– AB **ضلع باشد** $\binom{4}{2} + \binom{3}{2} = 13$

مثال) در یک همایش ۵ نفر جهت سخنرانی ثبت نام کرده اند، چند ترتیب سخنرانی وجود دارد که بین افراد a و b یک نفر از آنها سخنرانی کند؟



$3! \times \binom{3}{1} \times 2! = 36$

مثال) با حروف کلمه KAMYAB **چند رمز عبور ۴ حرفی می توان ساخت؟**

*** این کلمه دارای دو حرف تکراری A است:**

الف– فاقد A باشد $\binom{4}{4} \times 4! = 24$

ب– دارای یک حرف A باشد $\binom{4}{3} \times 4! = 96$

ج– دارای دو حرف A باشد $\binom{4}{2} \times \frac{4!}{2!} = 72$

جمع حالات: $24 + 96 + 72 = 192$

۱) با ارقام ۱و ۲و ۳و ۴و ۶و ۷ چند عدد ۶ رقمی زوج بدون رقم تکراری می توان ساخت؟

$$\underline{5}\ \underline{4}\ \underline{3}\ \underline{2}\ \underline{1}\ \underset{\nearrow\ 2,6}{\underline{2}} = 240$$

---

۲) با ارقام ۰ تا ۸ چند عدد ۹ رقمی بدون تکرار می توان ساخت؟

عدد غیر صفر ↘ $\underline{8}\ \underline{8}\ \underline{7}\ \underline{6}\ \underline{5}\ \underline{4}\ \underline{3}\ \underline{2} = 8 \times 8!$

---

۳) با ارقام ۰ تا ۸ چند عدد ۹ رقمی فرد بدون رقم تکراری می توان ساخت؟

$$\underline{7}\ \underline{7}\ \underline{6}\ \underline{5}\ \underline{4}\ \underline{3}\ \underline{2}\ \underline{4} = 7 \times 7! \times 4 = 28 \times 7!$$

---

۴) با ارقام ۰ تا ۴ چند عدد ۵ رقمی زوج بدون تکرار می توان ساخت؟

۴و ۳و ۲و ۱و ۰

$$\underline{4}\ \underline{3}\ \underline{2}\ \ \underline{1}\ \underset{\swarrow\ 0}{\underline{1}} = 4! = 24$$

$\underline{3}\ \underline{3}\ \underline{2}\ \ \underline{1}\ \underline{2} = 36$ → **جمع** $= 60$

---

۵) با ارقام *0, 2, 3, 5, 6, 7, 8* **چند عدد فرد چهار رقمی بدون تکرار ارقام می توان ساخت؟**

$$\underline{5}\ \underline{5}\ \underline{4}\ \ \underline{3} = 300$$

---

۶) چند عدد سه رقمی با ارقام متمایز وجود دارد؟

$$\underline{9}\ \underline{9}\ \underline{8} = 648$$

---

۷) چند عدد ۳ رقمی بخش پذیر بر ۵ و متشکل از ارقام فرد وجود دارد؟

$$\underset{\nwarrow\ 1,3,5,7,9}{\underline{5}} \times \underset{\nearrow\ 1,3,5,7,9}{\underline{5}} \times \underset{\nearrow\ 5}{\underline{1}} = 25$$

---

۸) چند عدد ۴ رقمی مضرب ۵ وجود دارد (تکرار مجاز)

0**یا**5

$$\underline{9}\ \ \underline{10}\ \underline{10}\ \ \underline{2} = 1800$$

۹) چند عدد ۴ رقمی مضرب ۵ وجود دارد (بدون تکرار)

$$\underline{8}\ \underline{8}\ \underline{7}\ \underset{\nearrow 5}{\underline{1}} = 448$$

یا ← تعداد حالات کل $\rightarrow 448 + 504 = 952$

$$\underline{9}\ \underline{8}\ \underline{7}\ \underset{\nearrow 0}{\underline{1}} = 504$$

۱۰) چند عدد پنج رقمی زوج با ارقام 5 ,4 ,3 ,2 ,1 ,0 می توان نوشت (با تکرار)

4 و 2 و 0

$$\underline{5}\ \underline{6}\ \underline{6}\ \underline{6}\ \underset{\uparrow}{\underline{3}} = 216 \times 15$$

۱۱) چند عدد پنج رقمی زوج با ارقام 5 ,4 ,3 ,2 ,1 ,0 می توان نوشت (بدون تکرار)

$$\underline{5}\ \underline{4}\ \underline{3}\ \underline{2}\ \underset{\nearrow 0}{\underline{1}} = 120$$

یا $\rightarrow \quad 120 + 192 = 312$

4 یا 2

$$\underline{4}\ \underline{4}\ \underline{3}\ \underline{2}\ \underline{2} = 192$$

۱۲) در یک مسابقه ۵ نفر به فینال رسیده اند، به چند طریق می توان از بین این ۵ نفر، برنده های اول و دوم را انتخاب کرد؟

$5 \times 4 = 20$

۱۳) با ارقام $4, 3, 2, 1, 0$ و با تکرار ارقام:

الف) چند عدد چهار رقمی می توان نوشت. $\underline{4}\ \underline{5}\ \underline{5}\ \underline{5}\ \underline{5} = 2500$

ب) چند عدد پنج رقمی مضرب ۵ می توان نوشت؟ $\underline{4}\ \underline{5}\ \underline{5}\ \underline{5}\ \underline{1} = 500$

ج) چند عدد چهار رقمی بزرگتر از ۴۰۰۰ می توان نوشت؟ $(\underline{1}\ \underline{5}\ \underline{5}\ \underline{5}) - \underset{\nearrow 4000}{\underline{1}} = 124$

۱۴) با ارقام 5,4,3,2,1,0 **بدون تکرار ارقام:**

الف) چند عدد پنج رقمی فرد می توان نوشت؟

فرد

$\underline{4}\ \underline{4}\ \underline{3}\ \underline{2}\ \underline{3} = 288$

ب) چند عدد پنج رقمی مضرب ۵ می توان نوشت؟

$\underline{5}\ \underline{4}\ \underline{3}\ \underline{2}\ \underline{1} = 120$

$\underline{4}\ \underline{4}\ \underline{3}\ \underline{2}\ \underline{1} = 96$

جمع $= 216$

ج) چند عدد پنج رقمی می توان نوشت که دو رقم سمت چپ مضرب ۱۲ باشد؟

$\underbrace{\_\ \_}_{\text{دو حالت}}\ \underline{4}\ \underline{3}\ \underline{2} = 48$

24 **یا** 12

د) چند عدد چهار رقمی بزرگتر از ۲۳۰۰ می توان نوشت؟

2

$\underline{1}\ \underline{3}\ \underline{4}\ \underline{3} = 36$

$\underline{3}\ \underline{5}\ \underline{4}\ \underline{3} = 180$

جمع $= 216$

ه) چند عدد چهار رقمی فاقد رقم ۵ می توان نوشت؟

$\underline{4}\ \underline{4}\ \underline{3}\ \underline{2} = 96$

و) چند عدد چهار رقمی کوچکتر از ۴۳۰۰ می توان نوشت؟

4   3 **یا** 2 **یا** 1

$\underline{1}\ \underline{3}\ \underline{4}\ \underline{3} + \underline{3}\ \underline{5}\ \underline{4}\ \underline{3} = 36 + 180 = 216$

---

۱۵) با ارقام *1 ,2 ,3 ,4, 7,6,5* **و بدون تکرار ارقام:**

الف) چند عدد هفت رقمی می توان ساخت که رقم های زوج کنار هم و رقم های فرد کنار هم باشند؟

تعداد $3! \times 4! \times 2! = 288$

2, 4,   1, 3,

ب) چند عدد پنج رقمی می توان نوشت که با عدد زوج شروع شود و به عدد فرد ختم شود؟

زوج   **فرد**

$\underline{3}\ \underline{5}\ \underline{4}\ \underline{3}\ \underline{4} = 720$

۱۶) با ارقام $5, 7, 8$ **چند عدد حداکثر چهار رقمی می توان ساخت؟**

۳= تک رقمی

دو رقمی $= 3 \times 3 = 9$ $\rightarrow$ **جمع** $= 120$

سه رقمی $= 3 \times 3 \times 3 = 27$

چهار رقمی $= 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$

---

۱۷) چند عدد فرد بین ۳۰۰۰ و ۸۰۰۰ با ارقام متمایز وجود دارد؟ $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0$

4 **یا** 6 **فرد**

$\underline{2}\,\underline{8}\,\underline{7}\,\underline{5} = 560$

یا $\rightarrow$ **جمع** $= 1232$

3 **یا** 5 **یا** 7

$\underline{3}\,\underline{8}\,\underline{7}\,\underline{4} = 672$

---

۱۸) با ارقام $1, 3, 5, 7, 9$ **چند عدد ۳ رقمی با شرط صدگان > دهگان > یکان می توان نوشت؟**

به خاطر شرط گفته شده اعداد غیر تکراری اند ابتدا از ۵ عدد ۳ تا بر می داریم تنها در یک حالت شرط بالا برقرار است.

$$\binom{5}{3} \times 1 = 10$$

---

۱۹) با ارقام ۳ تا ۹ چند عدد زوج ۴ رقمی می توان ساخت که شامل دو رقم زوج و دو رقم فرد باشند؟

$\binom{4}{2}\binom{2}{1}\binom{3}{1} \times 3! = 216$

عدد سمت راست باید زوج باشد، $\binom{3}{1}$

اکنون ۳ رقم دیگر را بصورت یکی زوج $\binom{2}{1}$ **و دو تا فرد** $\binom{4}{2}$ **انتخاب می کنیم در حالات جابجایی یعنی** $3!$ **ضرب می کنیم.**

---

۲۰) به چند طریق می توان ۱۰ نفر را به سه تیم ۲ و ۳و ۵ نفره تقسیم کرد؟

$\binom{10}{2}\binom{8}{3}\binom{5}{5}$

۲۱) ۱۲ نفر را به چند طریق می توان به دو تیم ۳ نفره و سه تیم ۲ نفره تقسیم کرد؟

$$\frac{1}{2!\times 3!}\binom{12}{3}\binom{9}{3}\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{2}$$

به خاطر جابجایی افراد در اسم گروه ها

دو گروه سه نفره A,B

سه گروه دو نفره C, D, E

---

۲۲) ۱۰ نفر را به چند طریق می توان به دو تیم ۵ نفره با نام های B, A **تقسیم کرد.**

$$\binom{10}{5}\binom{5}{5}$$

---

۲۳) ۱۰ نفر را به چند طریق می توان به دو تیم ۵ نفره تقسیم کرد؟

$$\frac{1}{2!}\binom{10}{5}\binom{5}{5}$$

---

۲۴) در یک مراسم شام، ۸ مدل غذای مختلف G, H, F,E,D,C,B,A **تدارک دیده شده، رضا به چند طریق می تواند سه غذای مختلف انتخاب کند به طوری که:**

الف) حداقل یکی از غذاهای A **یا** B **در بین غذاهای سفارش داده شده باشد**

تعداد مطلوب = کل حالات − حالاتی B, A **نباشند** $= \binom{8}{3}-\binom{6}{3}=36$

ب) دو غذای B,A **را نتواند همزمان با هم استفاده کند؟**

A.B **یک غذای دیگر**

تعداد مطلوب = کل حالات − هر دو غذای B, A **انتخاب شوند** $= \binom{8}{3}-\binom{2}{2}\binom{6}{1}=50$

ج) غذاها به دو دسته 4 تایی تقسیم می شوند که هیچ کدام از غذاهای دسته اول با هیچ کدام از غذاهای دسته دوم سازگاری ندارند ؟

$\times\times\times\times \vdots \times\times\times\times$ $\qquad \binom{4}{3}+\binom{4}{3}=8$

۲۵) در یک جمع ۲۰ نفره، ۴ دکتر، ۵ پرستار، ۳ خدمه حضور دارند به چند طریق می توان یک گروه ۳ نفره از میان این افراد انتخاب کرد به طوری که:

الف) هیچ دکتری نباشد ولی فقط یک خدمه حضور داشته باشد $\binom{3}{1}\binom{13}{2} = 234$

ب) حداکثر ۲ خدمه حضور داشته باشند.

حالات مطلوب = کل حالات − هر سه نفر خدمه = $\binom{20}{3} - \binom{3}{3} = 1139$

ج) فقط یک دکتر و حداقل یک پرستار حضور داشته باشد.

$$\binom{4}{1}\binom{5}{1}\binom{11}{1} + \binom{4}{1}\binom{5}{2}\binom{11}{0} = 260$$

د) در گروه انتخابی حداقل یک دکتر و حداقل یک پرستار و حداقل یک خدمه حضور داشته باشند

ناچاریم دقیقا از هر کدام از نفرات مشخص شده دکتر، پرستار و خدمه یک نفر انتخاب شود.

$$\binom{4}{1}\binom{5}{1}\binom{3}{1} = 60$$

---

۲۶) با حروف کلمه ARRANGE چند کلمه هفت حرفی می توان ساخت به طوری که:

الف) بدون محدودیت $\frac{7!}{2!\times 2!} = 1260$

ب) دو حرف R کنار هم باشند $\frac{6!}{2!} = 360$

ج) دو حرف R کنار هم و دو حرف A نیز کنار هم باشند $5! = 120$

د) دو حرف R کنار هم نباشند $900 = \frac{7!}{2!\times 2!} - \frac{6!}{2!}$ **روش متمم**

ه) دو حرف A کنار هم ولی دو حرف R کنار هم نباشند

کافیست از حالاتی که دو حرف A کنار هم اند، تعداد حالاتی که دو حرف R کنار هم نیستند را کم کنیم $\frac{6!}{2!} - 5! = 240$

۲۷) با حروف کلمه «تهران» چند کلمه پنج حرفی متمایز بدون تکرار حروف می توان ساخت به طوری:

الف) بدون محدودیت $5!$

ب) با حروف ت شروع شود $4!$

ج) با حروف «ه» شروع و به حرف «ن» ختم شود $3!$

د) حروف « ر» و «ن» کنار هم باشند $4! \times 2!$ ت ه ا ۱

ه) کلمه « ران» دیده شود. $3!$ ت ه ۱۱

---

۲۸) به چند طریق می توان ۳ کتاب ادبی مختلف، ۴ کتاب ریاضی مختلف و ۲ کتاب مختلف فیزیک را کنار هم قرار چید، به طوری که کتاب های ادبی همواره کنار هم و کتاب های فیزیک در طرفین کتاب ادبی قرار گیرند؟ $5! \times 2! \times 3! = 1440$

ر ر ر ر | ف ۱۱۱ ف

---

۲۹) پنج کارمند زن و چهار کارمند مرد به چند طریق می توانند در یک صف کنار هم قرار گیرند به طوری که کارمندهای اول و آخر هم جنس باشند.

مرد **۲ مرد و ۵ زن** مرد **یا** زن **۳ زن و ۴ مرد** زن

$$\binom{5}{2} \times 2! \times 7! + \binom{4}{2} \times 2! \times 7! = 32 \times 7!$$

---

۳۰) با حروف کلمه $microgaj$ **و بدون تکرار حروف، چند کلمه ۸ حرفی می توان ساخت که با حروف** m **شروع نشود و حروف کلمه** gaj **سه حرف آخر آن باشد.**

m **نباشد**

$\underline{4}\ \underline{4}\ \underline{3}\ \underline{2}\ \underline{1}\ \boxed{\underline{g}\ \underline{a}\ \underline{j}}$ $3!$

جواب $4 \times 4! \times 3! = 576$

۳۱) یک آشپز ده نوع ادویه دارد. او با استفاده از هر ۳ تا از این ادویه ها یک طعم مخصوص درست میکند. این آشپز چند طعم میتواند درست کند هرگاه:

الف) هیچ محدودیتی در استفاده از ادویه ها نداشته باشد.

ب)دو نوع ادویه هستند ک باهم نمیتوانند استفاده شوند.

پ)سه ادویه هستندکه نباید هر سه باهم استفاده شوند.

ت) ادویه ها به ۲ دسته ۵ تایی تقسیم میشوند که هیچ یک از ادویه های دسته اول با هیچ یک از ادویه های دسته دوم سازگاری ندارد.

---

۳۲) در یک ردیف ۸ صندلی وجود دارد به چند طریق ۵ نفر را روی این صندلی ها نشاند

$\binom{8}{5} \times 5! = \frac{8!}{3!}$

---

۳۳) می خواهیم ۲۰ کتاب متمایز را که شامل ۳ کتاب ریاضی خاص و ۴ کتاب فیزیک خاص است را در دو قفسه ده تایی بچینیم این کار به چند روش امکان پذیر است اگر بخواهیم کتاب های ریاضی خاص را در قفسه اول و کتاب های فیزیک خاص را در قفسه دوم قرار دهیم.

$\binom{10}{3} \times 3! \times \binom{10}{4} \times 4! \times 13!$

---

۳۴) مثال) با جابجایی ارقام عدد ۵۷۶۳۳۳ چند عدد ۶ رقمی می توان ساخت که رقم های ۲ یک در میان باشند.

$3! \quad \times \quad 1! \quad \times \quad 2 \quad = 12$

جابجایی $5,7,6$ — **جابجایی** 3 **ها** — **اول** 3 **باشد یا اعداد دیگر**

---

۳۵) چهار مرد و سه زن به چند طریق می توان در یک ردیف قرار بگیرند به طوری که حداقل دو زن کنار هم باشند ؟

باید از کل حالات، حالاتی که هیچ زنی کنار هم نیست را کم کنیم $7! - 3! \times 4! = 4896$

م ز م ز م ز م

۳۶) چند عدد n رقمی داریم

$\underline{9}\ \underline{10}\ \underline{10} \dots \underline{10} = 9 \times 10^{n-1}$

---

۳۷) مثال) به چند روش می توان ۸ قلعه متمایز را در صفحه شطرنج چید بطوریکه که همدیگر را نزنند؟

---

۳۸) از میان ۳ نجار، ۲ بنا، ۴ بقال، به چند طریق می توان دو نماینده انتخاب کرد به طوری که از مشاغل مختلف باشند.

بنا یا نجار $= 3 \times 2 = 6$

بنا یا بقال $= 4 \times 2 = 8$ $\quad \rightarrow$ **جمع** $= 26$ **حالت**

نجار و بقال $= 4 \times 3 = 12$

---

۳۹) چند عدد سه رقمی وجود دارد که بر ۲ یا ۵ بخش پذیراند.

اعداد بخش پذیر بر 2 $\dfrac{9}{\text{عدد غیر صفر}}\ \dfrac{10}{\text{همه اعداد}}\ \dfrac{5}{\text{عدد زوج}} = 450 = n(A)$

اعداد بخش پذیر بر 5 $\dfrac{9}{\text{عدد غیر صفر}}\ \dfrac{10}{\text{همه اعداد}}\ \dfrac{2}{0 \text{ یا } 5} = 180 = n(B)$

(**بخش پذیر بر** 10) **اعداد بخش پذیر هم بر** 2 **هم بر** 5 $\dfrac{9}{\text{عدد غیر صفر}}\ \dfrac{10}{\text{همه اعداد}}\ \dfrac{1}{0} = 90 = n(A \cap B)$

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 450 + 180 - 90 = 540$

۴۰) چند عدد کوچکتر از ۱۰۰۰۰ وجود دارد که در آن رقم ۵، ۳ بار تکرار شده است؟

عدد باید ۳ یا ۴ رقمی باشد.

در بین اعداد ۳ رقمی تنها عدد دارای ۳ تا ۵، عدد ۵۵۵ است

در بین اعداد ۴ رقمی که ۵ سه بار تکرار شده

$$\frac{8}{\text{غیر 0 و 5}}\ \frac{1}{\boxed{5}}\ \frac{1}{\boxed{5}}\ \frac{1}{\boxed{5}} = 8$$

یا $$\frac{1}{\boxed{5}}\ \frac{9}{\boxed{\text{عدد غیر 5}}}\ \frac{1}{\boxed{5}}\ \frac{1}{\boxed{5}} = 9$$

$$\frac{1}{\boxed{5}}\ \frac{1}{\boxed{5}}\ \frac{9}{\boxed{\text{عدد غیر 5}}}\ \frac{1}{\boxed{5}} = 9$$

$$\frac{1}{\boxed{5}}\ \frac{1}{\boxed{5}}\ \frac{1}{\boxed{5}}\ \frac{9}{\boxed{\text{عدد غیر 5}}} = 9$$

جمع $= 1 + 8 + 3(9) = 36$

---

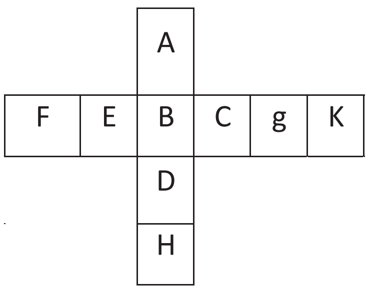
۴۱) چند عدد ۳ رقمی بدون اعداد ۵ و ۷ وجود دارد؟

$\underline{7}\quad \underline{8}\quad \underline{8} = 448$

$7, 5, 0$ **به جز** $\qquad 7,5$ **به جز**

---

۴۲) با استفاده از سه رنگ قرمز، آبی، زرد به چند طریق می توان خانه های شکل زیر را رنگ کرد به طوری که خانه های مجاور، رنگ مختلف داشته باشند؟



اول سراغ خانه وسطی (b) می رویم

$$\overset{\overset{b}{\uparrow}}{3} \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 3 \times 2^8 = 768$$

۴۳) چهار گلدان متمایز را به چند طریق می توان در کناره های ۲ پله قرار داد؟

پله اول

۱	۲

پله دوم $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4!$

۳	۴

---

۴۴) در خانه های جدول مقابل با سه رنگ قرمز، سبز، آبی به چند طریق می توان شماره های ۱ تا ۴ را نوشت؟

برای نوشتن عدد یک، ۴ جا و ۳ رنگ داریم $4 \times 3 = 12$

برای نوشتن عدد دو، ۳ جا و ۳ رنگ داریم $3 \times 3 = 9$

برای نوشتن عدد سه، ۲ جا و ۳ رنگ داریم $3 \times 2 = 3$

برای نوشتن عدد چهار، ۱ جا و ۳ رنگ داریم $1 \times 3 = 3$

تعداد حالات $= 12 \times 9 \times 3 \times 3 = 1944$

---

۴۶) گل فروشی ۸ شاخه متمایز از گل هایش را جدا کرده تا با هر سه شاخه گل، یک دسته گل بسازد. این گل فروش چند دسته گل می تواند درست کند هرگاه:

الف) بدون محدودیت $\binom{8}{3} = 56$

ب) از یک شاخه گل خاص، حتماً استفاده کند $\binom{7}{2} = 21$

ج) دو شاخه گل است که نباید از هر دو با هم استفاده شود

اگر دو شاخه مورد نظر A و B باشند:

A, B نباشند Bباشد A نباشد Aباشد B نباشد

$$\binom{6}{2} + \binom{6}{2} + \binom{6}{3} = 15 + 15 + 20 = 50$$

د) اگر شاخه گل ها به ۲ دسته چهارتایی تقسیم شده باشند، به چند طریق امکان پذیر است که گل ها فقط از یک دسته انتخاب نشوند؟ $\boxed{\circ\circ\circ\circ}$ $\boxed{\times\times\times\times}$

$$\binom{4}{2}\binom{4}{1} + \binom{4}{1}\binom{4}{2} = 24 + 24 = 48$$

تست های اصل ضرب

۱) عبارت $(x+y+t)(\mathrm{a}+\mathrm{b})(\mathrm{c}+\mathrm{d})$ **پس از بسط دادن چند جمله دارد؟**

۱) ۱۸ ۲) ۴ ۳) ۱۲ ۴) ۱۶

$3\times2\times2=12$

---

۲) عبارت $(x+y+t)(\mathrm{a}+\mathrm{b})(\mathrm{c}+\mathrm{d})$ **پس از بسط دادن، چند جمله فاقد** x **دارد.**

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۰

از پرانتز اول x **را حذف می کنیم**

$2\times2\times2=8$

---

۳) عبارت $(x+y+t)(\mathrm{a}+\mathrm{b})(\mathrm{a}+\mathrm{b})\ (\mathrm{c}+\mathrm{d}+\mathrm{e})$ **پس از بسط، چند جمله دارد که** ax **دیده نمی شود.**

۱) ۱۲ ۲) ۹ ۳) ۶ ۴) ۲۴

$(x+y+t)\ (a^2+2\,a\,b+b^2)\ (c+d+e)$

$3\times3\times3=27$ **تعداد جملات کل بسط**

$1\times1\times3=3$ **تعداد جملات بسط شامل** ax

$27-3=24$ **حالات مطلوب** $\rightarrow$

---

۴) چند تابع از مجموعه $A=\{1{,}2{,}3{,}4\}$ **به مجموعه** $B=\{2{,}3{,}5\}$ **وجود دارد.**

۱) ۳۲ ۲) ۱۲ ۳) ۸۱ ۴) ۶۴

$\mathrm{f}=\{(1,\dots)\ (2,\dots)(3,\dots)(4,\dots)\}$

هر جای خالی با یکی از ارقام $B=\{\,2{,}3{,}5\}$ **پر می شود.**

$3\times3\times3\times3=3^4=81$

---

۵) چند تابع یک به یک f **از** $A=\{1,2{,}3,4\}$ **به مجموعه** $B=\{1{,}2{,}3{,}4\}$ **قابل تعریف است.**

۱) ۱۶ ۲) ۲۴ ۳) ۸ ۴) ۶۴

$$\begin{array}{cccc} 4 & 3 & 2 & 1 \\ \nearrow & \nwarrow & \nwarrow & \nwarrow \end{array}$$

$\mathrm{f}=\{(1,\dots)\ (2,\dots)(3,\dots)(4,\dots)\}$

$4\times3\times2\times1=24$

---

۶) چند تابع مانند f از مجموعه $A=\{1,2,3\}$ به مجموعه $B=\{1,2,3,4\}$ وجود دارد بطوریکه $f(2)=4$

۱) ۲۷   ۲) ۱۶   ۳) ۹   ۴) ۱۲

$4\times1\times4=16$ $f=\{(1,\dots)(2,4)(3,\dots)\}$

---

۷) چند تابع مانند f از مجموعه $A=\{a,b,c,d\}$ به مجموعه $B=\{1,2,3\}$ وجود دارد بطوریکه $1\in R_f$ باشد.

۱) ۳۲   ۲) ۴۶   ۳) ۶۵   ۴) ۱۶

$f=\{(a,\dots)(b,\dots)(c,\dots)(d,\dots)\}$ $3\times3\times3\times3=81$ **تعداد کل توابع**

$f=\{(a,\dots)(b,\dots)(c,\dots)(d,\dots)\}$ $2\times2\times2\times2=16$ **تعداد توابع که** $1\notin R_f$

$81-16=65$ **کل حالات مطلوب**

---

۸) به چند طریق می توان، ۶ مهره متمایز را درون ۱۰ جعبه قرار داد به طوری که در هر جعبه حداکثر یک مهره قرار گیرد؟

۱) $\frac{10!}{6!}$ ۲) $\frac{10!}{4!}$ ۳) $\binom{10}{6}$ ۴) $10!$

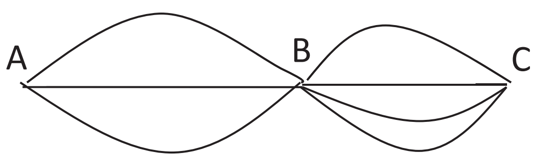
مهره اول   دوم

$10\times9\times8\times7\times6\times5=\frac{10!}{4!}$

---

۹) نمودار زیر، ارتباط بین سه شهر C, B, A را با جاده هایی که همگی دو طرف هستند نشان می دهد، شخصی می خواهد از شهر A به C برود و برگردد به طوری که در مسیر برگشت از مسیرهای رفت دوباره عبور نکند، او چند انتخاب خواهد داشت؟

۱) ۶۶   ۲) ۷۲   ۳) ۱۸   ۴) ۱۲۰



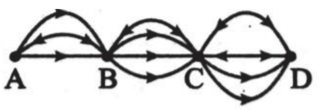
تعداد حالات رفت $=3\times4=12$

تعداد حالات برگشت $=2\times3=6$

$\rightarrow$ **کل حالات** $=12\times6=72$

---

۱۰) بین ۴ شهر D,C, B, A مطابق شکل زیر، راه های ارتباطی وجود دارد به چند طریق می توانیم از A به D برویم و برگردیم به شرطی که در مسیر رفت از راه های یک طرفه و در مسیر برگشت از راه های دو طرفه استفاده کنیم.



۱) ۱۲ **۲) ۱۴** **۳) ۲۴** **۴) ۱۸**

رفت: $\begin{matrix} AB & BC & CD \\ 2 \times & 3 \times & 2 = 12 \end{matrix}$ $\rightarrow$ **کل** $= 12 \times 2 = 24$

برگشت: $\begin{matrix} OC & CB & BA \\ 2 \times & 1 \times & 1 = 2 \end{matrix}$

---

۱۱) شخصی قصد دارد از تهران به مشهد برود و برگردد. اگر یکی از مسیرهای بین تهران و سمنان مسدود باشد این شخص به چند طریق می تواند سفر خود را انجام دهد.

۱) ۱۱ **۲) ۲۸** **۳) ۱۴** **۴) ۱۲۱**

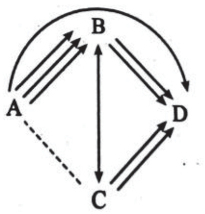
رفت: پایین وسط بالا
$(2 \times 2) + 1 + (2 \times 3) = 11$

برگشت: پایین وسط بالا
$(2 \times 2) + 1 + (3 \times 2) = 11$

رفت و برگشت : $11 \times 11 = 121$

---

۱۲) بین ۴ شهر D, C, B, A راه هایی مفروض است. اگر بتوان به ۲۹ طریق ازشهر A به شهر D سفر کرد تعداد راه هایی که از شهر A به C وجود دارد چندتاست



۱) ۴ **۲) ۳** **۳) ۵** **۴) ۹**

$$\begin{matrix} AD & ABC & ABCD & ACD & ACBD \\ 1 + & (3 \times 2) + & (3 \times 1 \times 2) + & (x \times 2) + & (x \times 1 \times 2) = 29 \end{matrix}$$

$\Rightarrow 1 + 6 + 6 + 2x + 2x = 29 \qquad x = 4$

تست های اصل ضرب، اصل جمع

۱۳) از بین ۵ کشور اروپایی، ۳ کشور آسیایی و ۶ آفریقایی می خواهیم یک کشور را برای سفر انتخاب کنیم چند حالت برای سفر خواهیم داشت؟

۱) ۹۰ ۲) ۱۸۰ ۳) ۱۴ ۴) ۲۸

اروپایی یا آسیایی یا آفریقایی $= 6 + 3 + 5 = 14$

---

۱۴) به چند طریق می توان یک خودکار یا یک مداد یا یک روان نویس از بین ۵ خودکار با رنگ های متمایز و ۸ مداد با رنگ های متمایز و ۳ روان نویس با رنگ های مختلف انتخاب کرد.

۱) ۱۲۰ ۲) ۱۶ ۳) ۱۶۰ ۴) ۱۲

$5 + 8 + 3 = 16$

---

۱۵) یک کارخانه اتومبیل، خودروهایی در ۷ رنگ، ۳ حجم موتور، ۲ نوع گیربکس و ۲ نوع مختلف داشبورد تولید می کند، یک خریدار برای تولید یک خودرو از این کارخانه چند انتخاب خواهد داشت.

۱) ۱۴ ۲) ۸۴ ۳) ۲۸ ۴) ۱۲۰

تمام موارد ذکر شده همزمان باید روی خودرو موجود باشد پس اصل ضرب: $7 \times 3 \times 2 \times 2 = 84$

---

۱۶) تعداد راه های ممکن برای پاسخ دادن به تعدادی سوال ۲ گزینه ای برابر 81^5 است. تعداد سوالات برابر کدام گزینه است. (پاسخ دادن به این سوالات الزامی نیست)

۱) ۱۰ ۲) ۲۰ ۳) ۵ ۴) ۱۵

تعداد حالات پاسخ گویی $= (\text{تعداد گزینه ها} + 1)^{\text{تعداد سوالات}}$

$81^5 = 3^x \rightarrow (3^4)^5 = 3^x \rightarrow 3^{20} = 3^x \rightarrow \boxed{x = 20}$

۱۷) یک دانش آموز در کنکور، به ۲۸۰ سوال موجود در دفترچه ها به چند طریق می تواند پاسخ دهد؟

۱) 4^{280} **۲)** 280^4 **۳)** 5^{280} **۴)** 280^5

تعداد حالات $= (4+1)^{280} = 5^{280}$

---

۱۸) تعداد حالات پاسخ گویی به یک آزمون ۴ سوالی که هر سوال ۳ گزینه دارد چند برابر تعداد حالات پاسخ گویی به یک آزمون ۳ سوالی ۲ گزینه ای است. (پاسخ به همه سوالات الزامی است)

۱) $\frac{27}{256}$ **۲)** $\frac{256}{27}$ **۳)** $\frac{8}{81}$ **۴)** $\frac{8}{81}$

$$\frac{3^4}{2^3} = \frac{81}{8}$$

---

۱۹) با ارقام ۷،۷،۷،۰،۰،۰،۰ **چند عدد ۷ رقمی زوج می‌توان نوشت؟**

۱) ۲ **۲)** ۳ **۳)** ۴ **۴)** ۷۴

---

۲۰) چند عدد ۵ رقمی با ارقام ۳،۲،۰،۰،۰ **می‌توان ساخت؟**

۱) ۱۵ **۲)** ۲۰ **۳)** ۲۳ **۴)** ۱۴

---

۲۱) چند عدد ۴ رقمی با ارقام ۳،۳،۳،۲،۲ می‌توان ساخت؟

۱) ۱۸ **۲)** ۳۶ **۳)** ۸ **۴)** ۱۶

۲۲) با ارقام 1,1,0,0,5,5 **چند عدد ۴ رقمی می توان ساخت؟**

۱) ۲۴ **۲) ۴۸** **۳) ۳۶** **۴) ۱۲**

$1,1,5,5 \rightarrow \frac{4!}{2!\times2!}=6$

$1,1,0,0 \rightarrow \frac{2\times3\times2\times1}{2!\times2!}=3$

$5,5,0,0 \rightarrow \frac{2\times3\times2\times1}{2!\times2!}=3$ **جمع حالات** $=36$

$1,1,5,0 \rightarrow \frac{3\times3\times2\times1}{2!}=9$

$5,5,0,1 \rightarrow \frac{3\times3\times2\times1}{2!}=9$

$1,5,0,0 \rightarrow \frac{2\times3\times2\times1}{2!}=6$

---

۲۳) چند عدد چهار رقمی زوج با ارقام طبیعی متمایز می توان ساخت؟

$4\,P(8,3)$ $5\,P(9,4)$ $4\,P(8,4)$ $5\,P(9,3)$

$\underline{8}\ \underline{7}\ \underline{6}\ \underline{4}=\frac{4\times8!}{5!}=4\,P(8,3)$

دقت شود عدد صفر طبیعی نیست.

---

۲۴) باارقام 1,2,3,…,9 **به چند طریق می توان یک عدد ۵ رقمی با ارقام متمایز ساخت به طوری که درست دو رقم آن زوج باشد. (ریاضی ۹۴)**

۱) ۷۲۰۰ **۲) ۸۴۰۰** **۳) ۶۴۰۰** **۴) ۹۶۰۰**

$$\underset{\text{زوج}}{\binom{4}{2}}\ \underset{\text{فرد}}{\binom{5}{3}}\times5!=7200$$

---

۲۵) چند عدد طبیعی ۴ رقمی فرد وجود دارد که دهگان و صدگان آن، فرد نباشد.

۱) ۱۲۵۰ **۲) ۷۲۰** **۳) ۱۱۲۵** **۴) ۶۷۵**

$$\underset{\neq0}{\underline{9}}\ \underset{\text{فرد}}{\underline{5}}\ \underset{\text{زوج}}{\underline{5}}\ \underset{\text{فرد}}{\underline{5}}=1125$$

---

۲۶) با ارقام 0, 1, 2, 3, 4,5 **چند عدد چهار رقمی بزرگتر از ۲۰۰۰ و کوچکتر از ۴۰۰۰ می توان نوشت؟**

۱) ۱۰۰ ۲) ۸۶ ۳) ۱۲۰ ۴) ۱۴۰

2 **یا** 3

$\underline{2}\ \underline{5}\ \underline{4}\ \underline{3} = 120$

---

۲۷) با ارقام 0,1,2,3,4,5 **چند عدد ۳ رقمی بزرگتر از ۳۳۰ بدون تکرار ارقام می توان ساخت؟**

۱) ۶۰ ۲) ۲۴ ۳) ۳۲ ۴) ۴۸

۳ **۵،۴**

$\underline{1}\quad \underline{2}\quad \underline{4} = 8$

$\underline{2}\quad \underline{5}\quad \underline{4} = 40$ $\longrightarrow$ **جمع** $= 48$

۴،۵

تست های جامع

۲۸) تعداد جایگشت های سه حرفی انتخاب شده از حروف کلمه DELAVAR **کدام است؟ (تجربی ۹۰)**

۱) ۱۱۵ ۲) ۱۲۵ ۳) ۱۳۰ ۴) ۱۳۵

---

۲۹) حروف کلمه EARNEST **را به چند طریق می توان در کنار هم قرار داد به طوری که حرف** N **همواره در وسط قرار گیرد. (سراسری ۹۱)**

۱) ۱۸۰ ۲) ۲۱۶ ۳) ۲۴۰ ۴) ۳۶۰

$$\frac{6!}{2!} = \frac{720}{2} = 360$$

حرف N **را وسط قرار می دهیم. و سپس جایگشت های حروف** EAREST **را می یابیم.**

۳۰) حروف کلمه LAGRANGE **را با جایگشت های مختلف کنار هم قرار می دهیم. در چند حالت حروف یکسان کنار هم قرار می گیرند. (سراسری ۹۴)**

۱) ۳۶۰ ۲) ۵۴۰ ۳) ۷۲۰ ۴) ۳۶۰

L A G RE N $6! = 720$

---

۳۱) تعداد جایگشت های حروف کلمه system **به طوری که** s**ها کنار هم نباشند کدام است؟ (سراسری ۹۲)**

۱) ۱۲۰ ۲) ۱۸۰ ۳) ۲۴۰ ۴) ۳۶۰

کل حالات $\frac{6!}{2!} = 360$

مطلوب جواب $\rightarrow 360 - 120 = 240$

ها کنار هم s $\boxed{ss}\, y\, tem$ $5! = 120$

---

۳۲) با حروف کلمه « music » چند کلمه سه حرفی می توان نوشت به طوری که حرف «i» استفاده نشود و حرف « u » وسط قرار بگیرد.

۱) ۹ ۲) ۶ ۳) ۱۲ ۴) ۱۲۰

$\cancel{i}$ $\overset{3}{-}\ u\ \overset{2}{-} = 6$ **حالت**

---

۳۳) در یک دوره بازی فوتبال بین ۸ تیم، بازی ها بصورت رفت و برگشت انجام می شود. اگر همه تیم ها با هم بازی داشته باشند در پایان دوره، چند بازی انجام می شود.

۱) ۵۶ ۲) ۲۸ ۳) ۳۸ ۴) ۴۶

تعداد بازی های رفت $\binom{8}{2} = 28 \rightarrow$ **تعداد کل بازی ها** $28 + 28 = 56$

۳۴) در هفته پایانی یک لیگ فوتبال مشخص شده است که فقط ۵ تیم بالای جدول شانس قهرمانی دارند، به چند حالت مختلف تیم های اول تا سوم می توانند مشخص شوند.

۱) ۴۸ **۲) ۲۴** **۳) ۶۰** **۴) ۱۰**

روش اول $P(5,3) = \frac{5!}{2!} = 60$

روش دوم $\binom{5}{3} \times 3! = 60$

---

۳۵) در یک مهمانی ۲۰ نفر حضور دارند اگر هر دو نفر از آنها با هم دست داده باشد تعداد دفعات که دست داده اند چندتاست؟

۱) ۲۰ **۲) ۴۰** **۳) ۱۶۰** **۴) ۱۹۰**

$\binom{20}{2} = 190$

---

۳۶) در یک مسابقات شطرنج، ۸ نفر شرکت کرده اند، قرار است هر دو شطرنج باز، یک بار با هم مسابقه دهند، تعداد کل بازی ها چندتاست؟

۱) ۲۸ **۲) ۱۴** **۳) ۶۴** **۴) ۸۴**

تعداد کل بازی ها $\binom{8}{2} = \frac{8\times7}{2\times1} = 28$

---

۳۷) به چند طریق می توان ۸ مهره متمایز را درون ده جعبه قرار داد به طوری که در هر جعبه، حداکثر یک مهره موجود باشد .

۱) ۹۰ **۲) ۴۵** **۳) ۱۸۰** **۴) ۳۰**

$P(10,8) = \frac{10!}{2!} = \frac{10\times9}{2} = 45$

با توجه به متمایز بودن، مهره ها، ترتیب قرار گرفتن آنها اهمیت دارد.

---

۳۸)۳ نفر در طبقه همکف یک ساختمان ۸ طبقه وارد آسانسوری می شوند. به چند طریق این ۳ نفر از آسانسور خارج می شوند اگر بدانیم در هر طبقه حداکثر یک نفر خارج می شوند.

۱) ۳۱۶ ۲) ۳۲۶ ۳) ۳۳۶ ۴) ۳۴۶

روش 2 $P(8,3)=\frac{8!}{5!}=8\times7\times6=336$

روش 2 $\binom{8}{3}\times3!=\frac{8!}{5!\times3!}\times3!=336$

---

۳۹) ۸ نفر جهت سوار شدن به هواپیما در لیست انتظار هستن در این پرواز ۳ جای خالی وجود دارد، به ترتیب به چند طریق اساسی آنها جهت سوار شدن خوانده می شود؟

۱) ۳۳۶ ۲) ۴۴۸ ۳) ۲۲۸ ۴) ۴۶

$\binom{8}{3}\times3!$ **یا** $P(8,3)=\frac{8!}{5!}=336$

---

۴۰) به چند طریق می توان از بین ۷ نفر که دوتای آنها برادرند ۵ نفر انتخاب کرد به طوری این دو برادر با هم انتخاب نشوند.

۱) ۱۱ ۲) ۱۰ ۳) ۲۱ ۴) ۲۴

(تعداد حالاتی که با هم انتخاب شوند) – (تعداد کل حالات)

$$\binom{7}{5}-\binom{2}{2}\binom{5}{3}=21-10=11$$

دو برادر **3 نفر از 5 نفر دیگر**

---

۴۱) اگر ۳ سیب و ۴ گلابی داشته باشیم و بخواهیم در طول یک هفته روزی یکی از این میوه ها را مصرف کنیم، چند حالت مختلف ممکن است. پیش آید.

۱) ۱۰ ۲) ۱۲۰ ۳) ۶۰ ۴) ۳۵

۴۲) به چند طریق می توان ۲ عدد از میان اعداد ۱ تا ۲۰ انتخاب کرد به طوری که مجموع آن ها فرد باشد.

۱) ۹۰ ۲) ۱۰۰ ۳) ۵۰ ۴) ۴۰

فرد زوج

$$\binom{10}{1}\binom{10}{1} = 10 \times 10 = 100$$

مجموع زوج؟

---

۴۳) ۵ حرف از ۸ حرف کلمه «BUSINESS» را با جایگشت های متمایز کنار هم قرار می دهیم. تعداد کلماتی که هر سه S در آنها موجود باشند کدام است؟

۱) ۱۵۰ ۲) ۱۶۰ ۳) ۲۰۰ ۴) ۲۴۰

۳ حرف S که انتخاب شده اند پس ۲ حرف از دیگر حروف انتخاب می کنیم.

$$\binom{5}{2}\frac{5!}{3!} = 10 \times 5 \times 4 = 200$$

---

۴۴) با حروف کلمه «RANGIN» چند کلمه رمز ۳ حرفی می توان ساخت ؟

۱) ۶۰ ۲) ۷۲ ۳) ۸۴ ۴) ۱۲۰

$\binom{4}{1}\frac{3!}{2!} = 4 \times 3 = 12$ N N

$\binom{4}{2}\ 3! = 6 \times 6 = 36$ $\cancel{N}$ N → **جمع حالات** $= 72$

$\binom{4}{3} \times 3! = 4 \times 6 = 24$ $\cancel{N}$ $\cancel{N}$

---

۴۵) از بین ۵ حسابدار و ۳ منشی به چند طریق می توان یک گروه ۳ نفری انتخاب کرد به طوری که رئیس گروه حسابدار باشد.

۱) ۸۵ ۲) ۱۰۵ ۳) ۱۲۰ ۴) ۲۱۰

$$\binom{5}{1} \times \binom{7}{2} = 105$$

یک نفر از حسابدار ها 2 **نفر از الباقی نفر است**

۴۶) به چند طریق می توان 6 عدد اسباب بازی متمایز را بین سه بچه با تعداد یکسان تقسیم کرد؟

۱) ۵۴ **۲) ۶۰** **۳) ۷۲** **۴) ۹۰**

$\binom{6}{2} \times \binom{4}{2} \times \binom{2}{2} = 15 \times 6 \times 1 = 90$

ترتیب پخش اسباب بازی ها مهم نیست **بچه اول بچه دوم بچه سوم**

---

۴۷) تعداد جایگشت های « SHYSTEM» که در آنها بین دو حرف S دقیقاً دو حرف دیگر وجود داشته باشد کدام است؟

۱) ۵۴۰ **۲) ۳۶۰** **۳) ۲۸۰** **۴) ۴۸۰**

$\boxed{S\ O\ O\ S} \ast \Delta \square$

$4!\binom{5}{2} \times 2! = 24 \times 20 = 480$

---

۴۸) شش جفت کفش داریم به چند طریق می توان ۴ لنگه کفش در بین آنها انتخاب کرد که جفت نباشند؟

۱) ۳۰ **۲) ۲۴۰** **۳) ۱۲۰** **۴) ۶۰**

ابتدا ۴ جفت از ۶ جفت انتخاب می کنیم

و حال از هر کدام یک لنگ انتخاب می کنیم

$\binom{6}{4}\binom{2}{1}\binom{2}{1}\binom{2}{1}\binom{2}{1} = 240$

---

۴۹) از هر یک از مدارس E, D, C, B, A چهار نفر به اردوگاه دانش آموزی دعوت شده اند، به چند طریق می توان سه دانش آموز که دو به دو غیر هم مدرسه باشند انتخاب کرد؟ (سراسری ۹۲)

۱) ۱۶۰ **۲) ۳۲۰** **۳) ۴۸۰** **۴) ۶۴۰**

---

۵۰) از بین ۵ جفت کفش، به چند طریق می توان ۴ لنگه انتخاب کرد که فقط یک جفت در میان آنها باشد.

۱) ۱۲۰ **۲) ۱۱۰** **۳) ۱۴۶** **۴) ۱۲۸**

ابتدا یک جفت کفش از ۵ برداشته حال باید از ۴ جفت باقی مانده ۲ لنگ مختلف بردارید.

$\binom{5}{1} \times \binom{4}{2}\binom{2}{1}\binom{2}{1} = 120$

۵۱) چهار شخص D,C,B,A بصورت غیر هم زمان سوار اتوبوس می شوند این عمل به چند طریق ممکن است هرگاه D قبل از A سوار شود.

۱) ۱۲ ۲) ۲۴ ۳) ۱۸ ۴) ۶

بطور کلی این ۴ نفر به !۴ طریق می توانند سوار اتوبوس شوند که در نصف حالات D قبل از A و در نصف حالات A قبل از D سوار اتوبوس می شوند.

$$\frac{4!}{2} = \frac{24}{2} = 12$$

---

۵۲) از هر یک از ۸ مدرسه علاقه مند، ۶ نفر برای بازی تنیس ۴ نفره (۲ نفر در مقابل ۲ نفر) انتخاب شده اند. به چند طریق این بازی ممکن است انجام شود، به شرطی که هر دو نفر هم یار هم از یک مدرسه باشند (بازی بین مدارس مختلف برگزار می شود) (ریاضی ۹۲)

۱) ۴۲۰۰ ۲) ۵۴۰۰ ۳) ۵۶۰۰ ۴) ۶۳۰۰

ابتدا ۲ مدرسه از بین ۸ مدرسه انتخاب می شود حال از هر مدرسه انتخابی ۲ نفر انتخاب می کنیم.

$$\binom{8}{2}\binom{6}{2}\binom{6}{2} = 28 \times 15 \times 15 = 6300$$

---

۵۳) قرار است ۵ نفر در یک سمینار سخنرانی کنند این کار به چند طریق امکان پذیر است اگر شخص A بلافاصله پس از شخص B سخنرانی کند.

۱) ۴۸ ۲) ۱۲۰ ۳) ۳۶ ۴) ۲۴

A و B را در حکم یک نفر می گیریم که حالت جابجایی ندارند.

$$\underline{4}\,\underline{3}\,\underline{2}\,\underline{1} = 4! = 24$$

---

۵۴) گل فروشی در مغازه اش ۱۰ مدل گل مختلف دارد. او با توجه به تقاضای مشتریان دسته گل هایی درست می کند که در آن ها حداقل ۸ شاخه گل متمایز به کار رفته است. وی چند دسته گل مختلف می تواند درست کند.

۱) ۴۲ ۲) ۵۲ ۳) ۵۴ ۴) ۵۶

$$\binom{10}{8} + \binom{10}{9} + \binom{10}{10} = \binom{10}{2} + \binom{10}{1} + 1 = 45 + 10 + 1 = 56$$

@hasanpor_riazi :تلگرام Hasanpour 6364 :اینستاگرام ۰۹۳۵۳۵۸۰۲۷۴

۵۵) از ۱۰ پرسش موجود، به چند طریق ۸ پرسش را جهت پاسخ گویی انتخاب کرد به شرط آن که حداقل ۴ پرسش از ۵ پرسش اول انتخاب شود. (ریاضی ۸۹)

۱) ۲۵ ۲) ۳۰ ۳) ۳۳ ۴) ۳۵

۱۰ پرسش را به دو دسته «۵ پرسش اول» و «۵ پرسش دوم» تقسیم می کنیم.

$\binom{5}{4}\binom{5}{4}+\binom{5}{5}\binom{5}{3} = 5\times 5 + 1\times 10 = 35$

تست زیر مجموعه

۵۶) تعداد زیر مجموعه های ۳ عضوی یک مجموعه ۷ عضوی، از تعداد زیر مجموعه های ۲ عضوی یک مجموعه n عضوی، ۲۰ واحد بیشتر است این دو مجموعه روی هم چند عضو دارند؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۲ ۳) ۱۳ ۴) ۱۵

$\binom{7}{3} = \binom{n}{2} + 20 \rightarrow 35 = \frac{n(n-1)}{2} + 20$

$\rightarrow n\,(n-1) = 30 \xrightarrow{\text{حدس}} n = 6$

این دو مجموعه روی هم ۱۳=۶+۷ عضو دارند

---

۵۷) تعداد زیر مجموعه های فرد عضوی یک مجموعه ۷ عضوی کدام است؟

۱) ۳۲ ۲) ۶۴ ۳) ۱۲۸ ۴) ۸۴

$2^{7-1} = 2^6 = 64$

---

۵۸) در مجموعه ای با افزایش ۳ عضو، تعداد زیر مجموعه ها ۱۱۲ واحد اضافه می شود در این صورت تعداد زیر مجموعه های ۳ عضوی چند واحد افزایش می یابد.

۱) ۲۷ ۲) ۴۲ ۳) ۳۵ ۴) ۳۱

$2^{n+3} = 2^n + 112 \rightharpoonup 8(2^n) - 2^n = 112 \rightharpoonup 7(2^n) = 112$

$2^n = 16 \rightharpoonup n = 4$

خواسته سوال: $\binom{n+3}{3} - \binom{n}{3} \overset{n=4}{\Longrightarrow} \binom{7}{3} - \binom{4}{3} = 35 - 4 = 31$

---

۵۹) A مجموعه ای ۶ عضوی است، تعداد زیر مجموعه های A که تعداد اعضایشان زوج است چند برابر تعداد زیر مجموعه هایی است که به تعداد فرد عضو دارند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۵

نکته مهم:

$$\binom{6}{0}+\binom{6}{2}+\binom{6}{4}+\binom{6}{6}=32$$
$$\binom{6}{1}+\binom{6}{3}+\binom{6}{5}=32$$
$$\rightarrow \frac{32}{32}=1$$

---

۶۰) یک مجموعه n عضوی، ۵۵ زیر مجموعه $(n-2)$ عضوی دارد n کدام است.

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

---

۶۱) اگر مجموعه A دارای $n-1$ عضو باشد و تعداد زیر مجموعه های ۳ عضوی آن برابر ۲۰ باشد تعداد زیر مجموعه های دو عضوی این مجموعه کدام است؟

۱) ۱۵ ۲) ۲۰ ۳) ۱۰ ۴) ۱۶

$$\binom{n-1}{3}=20 \rightarrow \frac{(n-1)!}{3!\,(n-4)!}=20$$

$$\rightarrow \frac{(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{6}=4\times 5 \rightarrow (n-1)(n-2)(n-3)=6\times 5\times 4 \xrightarrow{\text{حدس}} n=7$$

پس مجموعه A دارای ۶ عضو است

A **تعداد زیر مجموعه های دو عضوی** $\binom{6}{2}=\frac{6\times 5}{2\times 1}=15$

---

۶۲) تعداد زیر مجموعه های پنج عضوی مجموعه $\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$ که فقط یکی از دو حرف f و h را داشته باشد کدام است.

۱) ۱۵ ۲) ۲۰ ۳) ۳۰ ۴) ۴۰

روش اول: h **یا** f **دارد یا** $\rightarrow \binom{6}{4}+\binom{6}{4}=15+15=30$

روش دوم $\binom{2}{1} \times \binom{6}{4}=2\times 15=30$

انتخاب یکی از f یا g انتخاب 4 تا از 6 تای دیگر

---

۶۳) مجموعه $s=\{1,2,3,\dots,16\}$ چند زیر مجموعه دو عضوی دارد که حاصل ضرب اعضای آن مضرب ۵ باشد.

۱) ۱۵ ۲) ۸۱ ۳) ۴۲ ۴) ۵۲

یکی از B **یکی از** A **هر دو از** A

$$\binom{3}{2}+\binom{3}{1}\times\binom{13}{1}=42$$

$B=S-A \qquad ,A=\{5,10,15\}$

---

۶۴) حاصل $\binom{11}{7}+\binom{10}{6}+\binom{9}{5}+\binom{8}{4}+\binom{8}{3}$ **کدام است؟**

۱) $\binom{11}{8}$ ۲) $\binom{11}{7}$ ۳) $\binom{12}{8}$ ۴) $\binom{12}{7}$

---

۶۵) اگر $C(n,8)=2\,C(n,7)$ **باشد حاصل** n **کدام است؟**

۱) ۱۸ ۲) ۱۹ ۳) ۲۳ ۴) ۲۰

---

۶۶) اگر $p(2n,3)=28\,p(n,2)$ **آنگاه** $c(n,2)$ **کدام است؟**

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۲ ۴) ۴

$$\frac{(2\,n)!}{(2\,n-3)!}=28\times\frac{n!}{(n-2)!}\rightarrow(2\,n)(2\,n-1)(2n-2)=28\times n(n-1)$$

$$\rightarrow\ (2\,n)(2n-1)2(n-1)=28\times n(n-1)\rightarrow$$

$$\rightarrow 2n-1=7\rightarrow n=4\rightarrow c(4,2)=\frac{4\times3}{2\times1}=6$$

---

۶۷) اگر $p(n+1,r+1)=6p(n,r)$ **حاصل** n **کدام است؟**

۱) ۷ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) ۶

---

۶۸) اگر $p(n,2)-\binom{n}{2}=36$ **حاصل** $\binom{n}{6}$ **کدام است؟**

۱) ۷۲ ۲) ۸۴ ۳) ۹۶ ۴) ۱۰۸

---

۶۹) مجموع جواب های معادله $\binom{2\,x}{x+1}=\binom{2\,x}{3}$ **کدام است؟**

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

۷۰) اگر $c(7,3) = c(n,2) + c(n,3)$، مقدار n کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

$$\binom{7}{3} = \binom{n}{2} + \binom{n}{3} \to \binom{7}{3} = \binom{n+1}{3} \to n+1 = 7 \qquad n = 6$$

---

۷۱) از معادله $\binom{n+3}{n} + 15n = \binom{n+4}{n+1} + 30$ مجموع مقادیر n کدام است؟

۱) ۲۵ ۲) ۲۳ ۳) ۳۰ ۴) ۴۰

---

۷۲) حاصل $(7^3 - 7)(5^3 - 5)$ فاکتوریل چه عددی است؟

۱) ۸ ۲) ۷ ۳) ۹ ۴) ۱۰

---

۷۳) اگر $c(n,4) = P(n-1,3)$ باشد n کدام است؟

۱) ۲۳ ۲) ۲۴ ۳) ۳۴ ۴) ۴۰

تمرین جایگشت

۱) با حروف کلمه «فرزانه» چند کلمه ۴ حرفی می توان نوشت که در آن «رز» دیده می شود؟

۱) ۹۶ ۲) ۴۸ ۳) ۶۴ ۴) ۳۶

---

۲) با حروف کلمه « *children* » چند کلمه ۵ حرفی می توان ساخت که در آن دو حرف *d* و *n* کنار هم باشند.

۱) $112 \times 4!$ **۲)** $40 \times 4!$ **۳)** $80 \times 4!$ **۴)** $100 \times 4!$

---

۳) تعداد جایگشت های حروف کلمه « *SYSTEM* » به طوری که *S* ها کنار هم نباشند، کدام است؟ (تجربی ۹۲)

۱) ۱۲۰ ۲) ۱۸۰ ۳) ۲۴۰ ۴) ۳۶۰

---

۴) ۵ توپ قرمز، ۴ توپ آبی، ۳ توپ سفید متمایز داریم، به چند طریق می توان ۲ توپ با رنگ های متفاوت انتخاب کرد (دو روش)

۱) ۴۰ ۲) ۴۷ ۳) ۳۵ ۴) ۵۰

---

۵) درون ظرفی ۴ مهره سفید، ۶ مهره آبی و ۳ مهره زرد وجود دارد به چند طریق می توان ۳ مهره انتخاب کرد که حداقل ۲ تای آنها همرنگ باشند؟

۱) ۱۹۰ ۲) ۲۰۲ ۳) ۲۱۴ ۴) ۲۲۶

۶) تعداد جایگشت های سه حرفی از حروف کلمه «*SERESHT*» کدام است؟

۱) ۶۰ ۲) ۷۲ ۳) ۸۴ ۴) ۹۶

---

۷) حاصل $\frac{P(n,r)}{P(n+1,r+1)}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{n+1}$ ۲) $\frac{r}{n}$ ۳) $\frac{1}{(n+1)!}$ ۴) $\frac{r+1}{n+1}$

---

۸) به چند طریق می توان از بین ۸ سوال یک امتحان به ۵ سوال پاسخ داد به طوری که پاسخ به ۲ سوال آخر، اجباری باشد؟

۱) ۱۸ ۲) ۲۰ ۳) ۴۲ ۴) ۸۰

---

۹) اگر تعداد زیر مجموعه های ۲ عضوی یک مجموعه n عضوی با تعداد زیر مجموعه های ۶ عضوی آن برابر باشد حاصل $\binom{n}{3}$ کدام است؟

۱) ۳۶ ۲) ۲۰ ۳) ۷۲ ۴) ۴۸

---

۱۰) تعداد جایگشت های ۳ عضوی یک مجموعه n عضوی برابر ۳۳۶ است این مجموعه چند زیر مجموعه ۳ عضوی دارد؟

۱) ۶۵ ۲) ۴۲ ۳) ۵۶ ۴) ۲۴

---

۱۱) با حروف کلمه *DANESH* چند رمز عبور چهار حرفی می توان ساخت به طوری که حرف *S* در هر رمز باشد؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۲۷۰ ۳) ۲۶۰ ۴) ۲۴۰

---

۱۲) ۵ نوع سبزی مخصوص تهیه سالاد موجود است، چند نوع سالاد می توان با این سبزی ها درست کرد، هرگاه حداقل در هر سالاد دو سبزی به کار برود؟

۱) ۲۶ ۲) ۳۶ ۳) ۲۴ ۴) ۳۶

---

۱۳) با حروف «مهاباد» چند کلمه چهار حرفی می توان ساخت؟

۱) ۲۸۸ ۲) ۱۲۰ ۳) ۱۶۸ ۴) ۱۹۲