



RIAZISARA

سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

**درسنامه ها و جزوه های ریاضی
سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور
نمونه سوالات امتحانات ریاضی
نرم افزارهای ریاضیات**

...

ریاضی سرا در تلگرام: (@riazisara)

<https://t.me/riazisara>



ریاضی سرا در اینستاگرام: (@riazisara.ir)

<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

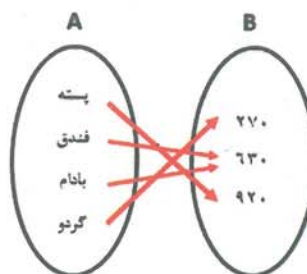


همه‌هنگی کلاس خصوصی آنلاین ریاضی ۰۹۲۲۰۶۳۳۰۶۲

مفهوم تابع: موارد زیادی در پدیده‌های اطراف ما، با یکدیگر در ارتباط هستند و با هم رابطه دارند.

مجموعه $A = \{\text{پسته، فندق، بادام، گردو}\}$ و مجموعه $B = \{۹۲۰, ۶۳۰, ۲۷۰, ۶۳۰\}$ را تعریف می‌کنیم.

نوع محصول	قیمت (تومان)
پسته	۹۲۰
فندق	۶۳۰
بادام	۶۳۰
گردو	۲۷۰



بادام و فندق هر دو دارای یک قیمت هستند (حتی ممکن بود همه دارای یک قیمت باشند). آن چیزی که در تابع بودن اهمیت دارد، این است که یک نوع محصول چند قیمت مختلف نداشته باشد به عبارت دیگر از هر عضو A ، دقیقاً یک پیکان خارج شود و به یکی از عضوهای B نظیر شود. مطلب مهم در رابطه بالا، این است که بالاخره هر محصولی یک قیمتی دارد (هیچ محصولی بدون قیمت نیست) و هیچ محصولی هم نیست که دو تا قیمت داشته باشد.

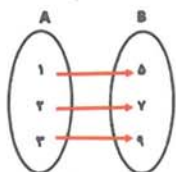
رابطه: بسیاری از پدیده‌های اطراف ما به نوعی با هم ارتباط دارند مثلاً می‌توانیم به هر فرد وزن او یا قد او را نسبت دهیم وقتی رابطه از مجموعه A را به مجموعه B نسبت دهیم ممکن است عضوی از مجموعه A را به دو عضو از مجموعه B نسبت دهیم، به عنوان مثال اگر مجموعه A ، مجموعه ماه‌های سال و B مجموعه دانش آموزان کلاس شما باشد و رابطه از A به B را به صورت ماهی که دانش آموزان در آن متولد شده اند.

گاهی اوقات جدول یا نمودار پیکانی نداریم بلکه تابع به صورت رابطه بین دو پدیده بیان می‌شود.

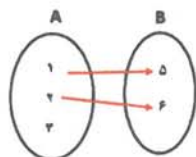
تابع است \rightarrow آیا هر مرد یک تاریخ تولد دارد رابطه افراد با تاریخ تولد آن‌ها
تابع نیست \rightarrow آیا هر مرد فقط یک ورزش انتخاب می‌کند رابطه افراد با ورزش انتخابی آن‌ها

روش‌های مختلف نمایش تابع

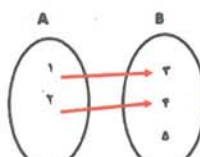
(۱) نمایش نمودار پیکانی (نمودار ون): یک رابطه از مجموعه A به B زمانی تابع است که از هر عضو A دقیقاً یک فلش خارج شود (ولی اینکه به هر عضو مجموعه B چند تا وارد می‌شود یا نمی‌شود مهم نیست).



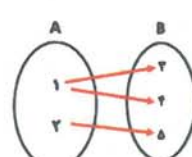
تابع هست



تابع نیست



تابع هست



تابع نیست

تاکید می‌کنم در نمودار ون، مجموعه B به ما ربطی ندارد و فقط حساسیت سر مجموعه A است که دقیقاً باید یکی از آن خارج شود.


(۲) نمایش زوج مرتب: یک رابطه را می توان به صورت مجموعه ای از زوج های مرتب نمایش داد. شرط آنکه این رابطه تابع باشد، آن است که در آن هیچ دو زوج مرتب متمایزی دارای مولفه اول یکسان نباشد.

$$f = \{(1, 2), (3, 6), (7, 6)\} \quad \text{تابع است}$$

$$g = \{(5, 3), (2, 6), (2, 7)\} \quad \text{تابع نیست}$$

$$h = \left\{ (2, \sqrt{2}+1), (3, 5), \left(2, \frac{1}{\sqrt{2}-1}\right) \right\} \quad \text{تابع است} \rightarrow \left\{ (2, \sqrt{2}+1), (3, 5), (2, \sqrt{2}+1) \right\}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} \times \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = \frac{\sqrt{2}+1}{2-1} = \sqrt{2}+1$$

دو زوج مرتب (a, b) و (c, d) زمانی برابرند که $a=c$ و $b=d$ 

x, y را طوری بیابید که دو زوج مرتب $(x+y, 4)$ ، $(3, 6x-y)$ با هم برابر باشند. ?

$$\begin{cases} x+y=3 \\ 7x-y=4 \end{cases} \rightarrow 7x=7 \rightarrow x=1, y=2$$

? اگر رابطه $f = \{(5, 6), (1, 2x-y), (1, 4), (-2, x+3y), (-2, 2)\}$ تابع باشد حاصل x, y را بیابید.

$$\begin{cases} 2x-y=4 \\ x+3y=2 \end{cases} \xrightarrow{\times 3} \begin{cases} 6x-3y=12 \\ x+3y=2 \end{cases} \rightarrow \frac{7x=14}{\text{جمع}} \rightarrow x=2, y=0$$

? رابطه $R = \{(v, a), (a, 2), (v, a'), (0, 3)\}$ به ازای کدام مقدار a یک تابع است.

$$a^2 = a \rightarrow a(a-1) = 0 \rightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=1 \end{cases}$$

$$a=0 \rightarrow R = \left\{ (v, 0), (0, 2), (v, 0), (0, 3) \right\} \quad \text{تابع نیست}$$

$$a=1 \rightarrow R = \left\{ (v, 1), (1, 2), (v, 1), (0, 3) \right\} \quad \text{تابع است}$$



۳) نمایش جدولی:

شهر	تهران	ساری	تبریز	دمای هوا
	۵	۱۱	۳	

مؤلفه اول x	۲	۳	۵
مؤلفه دوم y	۱	۷	۲

مؤلفه اول x	۲	۳	۵
مؤلفه دوم y	۶	۱	۲

تابع است
تابع نیست

اگر جدول زیر نشان دهنده یک تابع باشد حاصل $a+b$ را بیابید.

x	۲	۳	-۵	۲	a-۱
y	۷	b+۱	۲	۲a-۱	۱

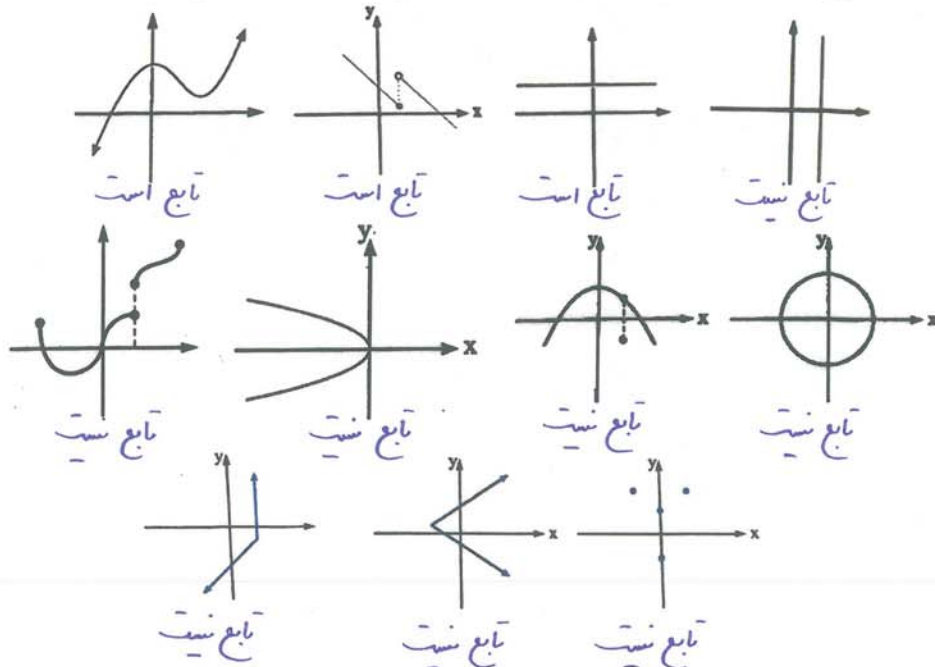
$$2a - 1 = 7 \rightarrow 2a = 8 \rightarrow a = 4$$

x	۲	۳	-۵	۲	۳
y	۷	b+۱	۲	۷	۱

$$b + 1 = 1 \rightarrow b = 0 \Rightarrow a + b = 4$$

۴) نمایش مختصاتی (نموداری): در این حالت رابطه به صورت یک شکل در دستگاه مختصات رسم می‌شود.

این شکل‌ها زمانی تابع هستند که هر خط موازی محورها نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند.



(۵) نمایش توصیفی: بعضی اوقات ورودی‌های یک رابطه را داریم و خروجی‌ها را با یک جمله ریاضی ولی به زبان فارسی بیان می‌کنیم.


رابطه‌ای که به هر کدام از اعضای مجموعه $A = \{-2, 3, 5\}$ توان دوم آن را نسبت دهد.

$$f = \{(-2, 4), (3, 9), (5, 25)\}$$

(۶) نمایش جبری یا ضابطه‌ای تابع:

$$\begin{cases} f: A \rightarrow B \\ y = f(x) \end{cases}$$

مثلاً در تابع $f(x) = y = x^2$ ، $f = \{(1, 1), (2, 4), (3, 9), (4, 16)\}$ در این خصوص در آینده بیشتر بحث می‌کنیم.

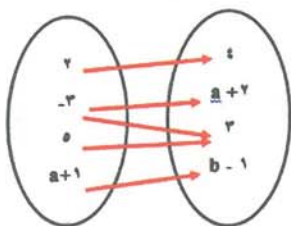
کدام یک از روابط زیر یک تابع را معلوم می‌کند. 

- | | |
|-----------|---|
| تابع است | (۱) رابطه‌ای که به ضلع مربع، مساحت آن را نسبت می‌دهد |
| تابع نیست | (۲) رابطه‌ای که به هر عدد مثبت، ریشه دوم آن را نسبت می‌دهد |
| تابع است | (۳) رابطه‌ای که به هر عدد، ریشه سوم آن را نسبت می‌دهد |
| تابع است | (۴) رابطه‌ای که به هر ساختمان، تعداد طبقات آن را نسبت می‌دهد |
| تابع است | (۵) رابطه‌ای که به هر ماه، تعداد روزهای آن را نسبت می‌دهد |
| تابع نیست | (۶) رابطه بین هر فرد و والدین او |
| تابع است | (۷) رابطه‌ای که به هر فرد، رنگ چشم او را نسبت می‌دهد |
| تابع است | (۸) رابطه‌ای که هر عدد صحیح را به نصف آن نسبت می‌دهد |
| تابع است | (۹) رابطه‌ای که ضلع مثلث متساوی الاضلاع را به محیط آن نسبت می‌دهد |
| تابع است | (۱۰) رابطه‌ای که به هر عدد مجذورش را نسبت می‌دهد |
| تابع نیست | (۱۱) رابطه‌ای که به هر عدد دو رقمی مثبت، مقسوم علیه آن را نسبت می‌دهد |
| تابع نیست | (۱۲) رابطه‌ای که به هر فرد شماره موبایلش را نسبت می‌دهد |
| تابع نیست | (۱۳) رابطه‌ای که به هر کشور، شهرهای توریستی‌اش را نسبت می‌دهد |
| تابع است | (۱۴) رابطه‌ای که به هر کشور، پایتخت آن کشور را نسبت می‌دهد |



کدام یک از رابطه‌های زیر تابع است. ?

- ۱) رابطه بین افراد و نام مادرشان تابع است
- ۲) رابطه بین دانش‌آموزان نام معلمشان تابع نیست
- ۳) رابطه بین هر انتشارات و اسم نویسنده‌هایش تابع نیست
- ۴) رابطه بین هر عدد مثبت و جذر آن تابع است
- ۵) رابطه بین هر ساعت معین در یک مکان مشخص و دمای آن مکان تابع است
- ۶) رابطه بین طول قد یک فرد و سن او تابع نیست
- ۷) رابطه بین هر مجموعه متناهی و تعداد عضوهای آن تابع است
- ۸) رابطه‌ای که به هر عدد طبیعی یک رقمی مضرب‌های طبیعی و دو رقمی آن را نسبت می‌دهد تابع نیست
- ۹) رابطه بین یک دانش‌آموز و دوستانش تابع نیست
- ۱۰) رابطه‌ای که هر عدد طبیعی کوچکتر از ۵ مقسوم علیه آن را نسبت می‌دهد تابع نیست
- ۱۱) رابطه‌ای که به هر عدد قدر مطلق آن را نسبت می‌دهد تابع است
- ۱۲) رابطه‌ای که به هر زاویه مقدار کسینوس آن زاویه را نسبت می‌دهد تابع است



اگر نمودار ون زیر یک تابع باشد a, b را حساب کنید. ?

$$a + 2 = 3 \rightarrow a = 1$$

$$2 \rightarrow 4$$

$$b - 1 = 4$$

$$-3 \rightarrow 3$$

$$b = 5$$

$$5 \rightarrow 3$$

$$2 \rightarrow b - 1$$

در رابطه زیر a, b را طوری بیابید که رابطه داده شده یک تابع باشد. ?

$$R = \{(1, a^2), (2, 3), (a, -1), (1, a+2), (2, b-1)\}$$

$$a^2 = a + 2 \rightarrow a^2 - a - 2 = 0 \rightarrow (a-2)(a+1) = 0 \rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = -1 \end{cases}$$

$$a = 2 \rightarrow R = \{(1, 4), (2, 3), (2, -1), (1, 4), (2, b-1)\}$$

$$a = -1 \rightarrow R = \{(1, 1), (2, 3), (-1, -1), (1, 1), (2, b-1)\} \quad \begin{cases} b - 1 = 3 \rightarrow b = 4 \end{cases}$$

مقدار a, b را طوری بیابید که روابط داده شده تابع باشند.

$$f = \{(5, a^2 - 2a), (6, b^2 - 1), (7, -2), (5, 3), (6, 26)\}$$

$$a^2 - 2a = 3 \rightarrow a^2 - 2a - 3 = 0 \rightarrow (a-3)(a+1) = 0 \rightarrow \begin{cases} a=3 \\ a=-1 \end{cases}$$

$$b^2 - 1 = 26 \rightarrow b^2 = 27 \rightarrow b = 3$$

$$f = \{(2, a^2 + b^2), (3, ab), (4, -1), (2, 10), (3, 4)\}$$

$$a^2 + b^2 = 10 \rightarrow a^2 + \frac{17}{a^2} = 10 \xrightarrow{a^2=t} t + \frac{17}{t} = 10 \xrightarrow{xt} \\ ab = 4 \rightarrow b = \frac{4}{a}$$

$$t^2 - 10t + 17 = 0 \rightarrow (t-2)(t-8) = 0 \rightarrow \begin{cases} t=2 \rightarrow a^2=2 & a = \pm\sqrt{2} \\ t=8 \rightarrow a^2=8 & a = \pm\sqrt{8} \end{cases}$$

$$\text{if } a = \pm\sqrt{2} \rightarrow b = \pm 2\sqrt{2}$$

$$\text{if } a = \pm\sqrt{8} \rightarrow b = \pm\sqrt{2}$$

به ازای چند مقدار m رابطه زیر یک تابع است.

$$\{(m, 2-m^2), (m, m^2+2), (1, m^2), (1, 2-m^2), (m+1, m^2+2), (m+1, 2-m^2)\}$$

$$2 - m^2 = m^2 + 2 \rightarrow m^2 + m^2 = 0 \rightarrow m^2(m+1) = 0 \rightarrow \begin{cases} m=0 \\ m=-1 \end{cases}$$

$$m=0 \rightarrow (0, 2) (0, 2) (1, 0) (1, 2) (1, 2) (1, 2)$$

غیر تابع

$$m=-1 \rightarrow (-1, 1) (-1, 1) (1, 1) (1, 1) (0, 0) (0, 0)$$

تابع است

اگر رابطه $R = \{(2, 4^{x+y}), (-1, x^2 - y^2), (2, 64), (-1, 15)\}$ یک تابع باشد حاصل x, y کدام است.

$$4^{x+y} = 64 \rightarrow 4^{x+y} = 4^3 \rightarrow x+y = 3$$

$$x^2 - y^2 = 15 \rightarrow (x-y)(x+y) = 15 \rightarrow x-y = 5$$

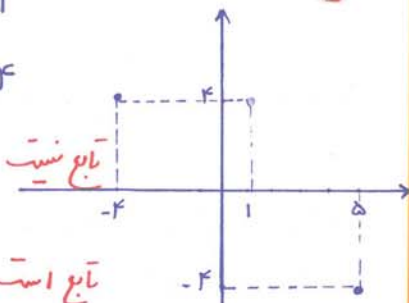
$$\begin{cases} x+y = 3 \\ x-y = 5 \end{cases} \rightarrow 2x = 8 \rightarrow x = 4 \rightarrow y = -1$$



اگر رابطه $f = \{(5, -4), (n, 4), (5, n^2 - 5n), (1, n)\}$ تابع باشد n کدام است. تابع را رسم کنید. ?

$$n^2 - 5n = -4 \rightarrow n^2 - 5n + 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} n=1 \\ n=4 \end{cases}$$

$$n=1 \rightarrow f: \left\{ \cancel{(5, -4)}, (1, 4), (5, -4), (1, 1) \right\}$$



$$n=4 \rightarrow f: \left\{ \cancel{(5, -4)}, (4, 4), (5, -4), (1, 4) \right\}$$

تابع است

اگر $R = \left\{ (2n+1, n^2), (5, 2m), (5, 4m-1), (6-2m, n^2 - \frac{3n}{2}) \right\}$ تابع باشد این تابع چند زوج مرتب متمایز دارد. ?

$$2m = 4m - 1 \rightarrow m = \frac{1}{2} \rightarrow \left\{ (2n+1, n^2), (5, 1), (5, \frac{1}{2}), (5, n^2 - \frac{3n}{2}) \right\}$$

$$n^2 - \frac{3n}{2} = 1 \xrightarrow{\times 2} 2n^2 - 3n - 2 = 0 \rightarrow n^2 - 3n - 4 = 0 \rightarrow$$

$$(n - \frac{4}{2})(2n + 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} n=2 \rightarrow R = \{(5, 4), (5, 1), (5, 1)\} \\ n = -\frac{1}{2} \rightarrow R = \{(5, \frac{1}{4}), (5, 1), (5, 1)\} \end{cases}$$

تابع نیست

تابع است

زوج متمایز دارد

اگر رابطه $R = \{(-1, 2), (5, 3x+2y), (5, 1), (-1, 5x+3y), (2, 7)\}$ یک تابع باشد حاصل x, y را بیابید. ?

$$\begin{cases} 5x + 3y = 2 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases} \xrightarrow{\begin{matrix} \times 2 \\ \times -5 \end{matrix}} \begin{cases} 15x + 9y = 7 \\ -15x - 10y = -5 \end{cases}$$

$$\underline{-y = 1 \rightarrow y = -1}$$

$$x = 1$$

اگر رابطه $R = \{(-4, 1), (-2, 1), (a+1, 5), (a+2, b+1), (-2, a+5), (1, -2), (b+7, c)\}$ یک تابع باشد حاصل a, b, c را بیابید. ?

$$a + 5 = 1 \rightarrow a = -4$$

حاصل a, b, c را بیابید.

$$\xrightarrow{\text{مبار در تابع}} R = \{(-4, 1), (-2, 1), (-3, 5), (-2, b+1), (-2, 1), (1, -2), (b+7, c)\}$$

$$b + 1 = 1 \rightarrow b = 0 \rightarrow \{(-4, 1), (-3, 5), (-2, 1), (-2, 1), (1, -2), (7, c)\}$$

$c =$ عدد دلخواه



عضوهای مجموعه زوج مرتب‌های زیر را بنویسید و مشخص کنید کدام یک از آنها تابع هستند

$$A = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N}, x + 3y = 9\}$$

$$R = \{(3, 2), (7, 1)\} \text{ تابع است}$$

$$x=1 \rightarrow 1 + 3y = 9 \rightarrow y = \frac{8}{3} \text{ غ ق ق}$$

$$x=2 \rightarrow 2 + 3y = 9 \rightarrow y = \frac{7}{3} \text{ غ ق ق}$$

$$x=3 \rightarrow 3 + 3y = 9 \rightarrow y = 2 \rightarrow (3, 2) \text{ ق ق}$$

$$x=4 \rightarrow 4 + 3y = 9 \rightarrow y = \frac{5}{3} \text{ غ ق ق}$$

$$x=5 \rightarrow 5 + 3y = 9 \rightarrow y = \frac{4}{3} \text{ غ ق ق}$$

$$x=6 \rightarrow 6 + 3y = 9 \rightarrow y = 1 \rightarrow (6, 1) \text{ ق ق}$$

$$x=7 \rightarrow 7 + 3y = 9 \rightarrow y = \frac{2}{3} \text{ غ ق ق}$$

$$x=8 \rightarrow 8 + 3y = 9 \rightarrow y = \frac{1}{3} \text{ غ ق ق}$$

$$x=9 \rightarrow 9 + 3y = 9 \rightarrow y = 0 \text{ غ ق ق}$$

$$B = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{Z}, x + y \leq 3\} \text{ غ ق ق} \text{ از این به بعد دیگر اعداد منفی در صم تا}$$

$$x=0 \rightarrow y \leq 3 \rightarrow y = 3, 2, \dots$$

$$x=1 \rightarrow 1 + y \leq 3 \rightarrow y \leq 2 \rightarrow y = 2, 1, \dots$$

$$x=2 \rightarrow 2 + y \leq 3 \rightarrow y \leq 1 \rightarrow y = 1, 0, \dots$$

این رابطه بی‌شمار عضو دارد.

$$B = \{(0, 3), (0, 2), (0, 1), (0, 0), \dots, (1, 2), (1, 1), \dots\}$$

$$C = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{Z}, |x| + |y| = 4\}$$

تابع نیست

$$\begin{cases} |x| = 0 \rightarrow x = 0 \\ |y| = 4 \rightarrow y = \pm 4 \end{cases} \rightarrow (0, 2), (0, -2)$$

$$\begin{cases} |x| = 1 \rightarrow x = \pm 1 \\ |y| = 3 \rightarrow y = \pm 3 \end{cases} \rightarrow (1, 3), (1, -3), (-1, 3), (-1, -3)$$

$$\begin{cases} |x| = 2 \rightarrow x = \pm 2 \\ |y| = 2 \rightarrow y = \pm 2 \end{cases} \rightarrow (2, 2), (2, -2), (-2, 2), (-2, -2)$$

$$\begin{cases} |x| = 3 \rightarrow x = \pm 3 \\ |y| = 1 \rightarrow y = \pm 1 \end{cases} \rightarrow (3, 1), (3, -1), (-3, 1), (-3, -1)$$

$$\begin{cases} |x| = 4 \rightarrow x = \pm 4 \\ |y| = 0 \rightarrow y = 0 \end{cases} \rightarrow (4, 0), (-4, 0)$$

این رابطه تابع نیست ولی اگر حداقل ۷ عضو از این رابطه حذف شود تبدیل به تابع می‌شود.



$$C = \{(0, 2), (0, -2), (1, 3), (1, -3), (-1, 3), (-1, -3), (2, 2), (2, -2), (-2, 2), (-2, -2), (3, 1), (3, -1), (-3, 1), (-3, -1), (4, 0), (-4, 0)\}$$

$$D = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{Z}, x^2 + y^2 = 4\} \quad x, y \in \mathbb{Z} \rightarrow x^2, y^2 \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \\ y^2 = 4 \rightarrow y = \pm 2 \end{cases} \rightarrow (0, 2)(0, -2)$$

$$\begin{cases} x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1 \\ y^2 = 3 \rightarrow y = \pm\sqrt{3} \end{cases} \text{ غَقَق}$$

$$\begin{cases} x^2 = 2 \rightarrow x = \pm\sqrt{2} \\ y^2 = 2 \rightarrow y = \pm\sqrt{2} \end{cases} \text{ غَقَق}$$

$$\begin{cases} x^2 = 3 \rightarrow x = \pm\sqrt{3} \text{ غَقَق} \\ y^2 = 1 \rightarrow y = \pm 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2 \\ y^2 = 0 \rightarrow y = 0 \end{cases} \rightarrow (2, 0)(-2, 0)$$

$$D = \{(0, 2)(0, -2)(2, 0)(-2, 0)\} \text{ تابع نیست}$$

$$E = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N}, 2x + y \leq 7\}$$

$$x = 1 \rightarrow 2 + y \leq 7 \rightarrow y \leq 5 \rightarrow y = 1, 2, 3, 4, 5$$

$$x = 2 \rightarrow 4 + y \leq 7 \rightarrow y \leq 3 \rightarrow y = 1, 2, 3$$

$$x = 3 \rightarrow 6 + y \leq 7 \rightarrow y \leq 1 \rightarrow y = 1$$

$$x = 4 \rightarrow 8 + y \leq 7 \rightarrow y \leq -1 \text{ غَقَق} \quad \text{و دایره را در نمی دهیم}$$

$$E = \{(1, 1)(1, 2)(1, 3)(1, 4)(1, 5)(2, 1)(2, 2)(2, 3)(3, 1)\}$$

از این رابطه حداقل باید 6 عضو حذف شود تا تبدیل به تابع شود.

$$F = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}, (x^2 - 4)^2 + |y^2 - 3y| = 0\}$$

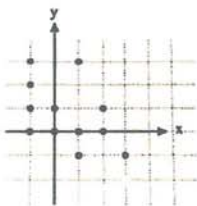
$$x^2 - 4 = 0 \rightarrow x = \pm 2$$

$$y^2 - 3y = 0 \rightarrow y(y - 3) = 0 \begin{cases} y = 0 \\ y = 3 \end{cases}$$

$$F = \{(2, 0)(2, 3)(-2, 0)(-2, 3)\}$$

با حذف حداقل چند نقطه شکل زیر یک تابع می شود. ?

✓
نعمه





? حداقل چند عضو از مجموعه $f = \left\{ (x, y) \mid x, y \in \mathbb{Z}, x = \frac{18}{1+|y|} \right\}$ حذف شود تا یک تابع باشد.

برای اینکه x صحیح شود با ۱۸ بر مخرب بخش پذیر باشد؛ پس باید مخرب مقسوم علیه ۱۸

باشد، در ضمن مخرب همواره مثبت است $(18, 0)$ $y = 0 \rightarrow x = 18$

$1 + |y| = 2 \rightarrow |y| = 1 \rightarrow y = \pm 1 \rightarrow x = 9$ $(9, 1)$ $(9, -1)$

$1 + |y| = 3 \rightarrow |y| = 2 \rightarrow y = \pm 2 \rightarrow x = 6$ $(6, 2)$ $(6, -2)$

$1 + |y| = 6 \rightarrow |y| = 5 \rightarrow y = \pm 5 \rightarrow x = 3$ $(3, 5)$ $(3, -5)$

$1 + |y| = 9 \rightarrow |y| = 8 \rightarrow y = \pm 8 \rightarrow x = 2$ $(2, 8)$ $(2, -8)$

$1 + |y| = 18 \rightarrow |y| = 17 \rightarrow y = \pm 17 \rightarrow x = 1$ $(1, 17)$ $(1, -17)$

حداقل باید ۵ عضو حذف شود

? حداقل چند عضو از مجموعه $f = \left\{ (x, y) \mid x, y \in \mathbb{Z}, x = \frac{72}{y^2 - 1} \right\}$ حذف شود تا یک تابع باشد.

باید مخرب بر ۷۲ بخش پذیر باشد.

$y^2 - 1 = \pm 1 \rightarrow y^2 = 2 \rightarrow y = \pm\sqrt{2}$ غنق
 $y^2 = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow x = -72$ $(-72, 0)$

$y^2 - 1 = \pm 2 \rightarrow y^2 = 3 \rightarrow y = \pm\sqrt{3}$ غنق
 $y^2 = -1$ غنق

$y^2 - 1 = \pm 3 \rightarrow y^2 = 4 \rightarrow y = \pm 2 \rightarrow x = 24$ $(24, 2)$ $(24, -2)$
 $y^2 = -2$ غنق

$y^2 - 1 = \pm 4 \rightarrow y^2 = 5 \rightarrow y = \pm\sqrt{5}$ غنق $y^2 - 1 = \pm 9$ غنق
 $y^2 = -3 \rightarrow$ غنق $y^2 - 1 = \pm 12$ غنق

$y^2 - 1 = \pm 6 \rightarrow y^2 = 7 \rightarrow y = \pm\sqrt{7}$ غنق
 $y^2 = -5$ غنق

$y^2 - 1 = \pm 8 \rightarrow y^2 = 9 \rightarrow y = \pm 3 \rightarrow x = 9$ $(9, 3)$ $(9, -3)$
 $y^2 = -7$ غنق

$y^2 - 1 = \pm 18$ غنق $y^2 - 1 = \pm 24 \rightarrow y^2 = 25 \rightarrow y = \pm 5 \rightarrow x = 3$ $(3, 5)$ $(3, -5)$
 $y^2 = -23$ غنق

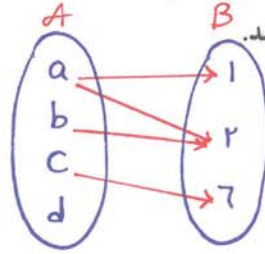
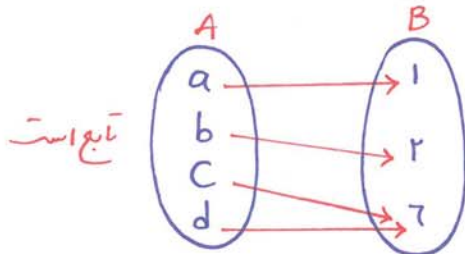
$y^2 - 1 = \pm 36$ غنق
 $y^2 - 1 = \pm 72$ غنق

باید حداقل ۳ عضو حذف شود



$F = \left\{ (-72, 0), (24, 2), (24, -2), (9, 3), (9, -3), (3, 5), (3, -5) \right\}$

مجموعه‌های $A = \{a, b, c, d\}$ و $B = \{1, 2, 6\}$ مفروض است. نمودار پیکانی دو رابطه از A به B بنویسید که یکی تابع باشد و دیگری تابع نباشد.



اگر $A = \{a, b, c\}$ و $B = \{1, 2\}$ باشد چند رابطه از A به B می‌توان تعریف کرد.

$$R = \{(a, 1)(a, 2)(b, 1)(b, 2)(c, 1)(c, 2)\}$$

بزرگترین رابطه از A تا B را نوشتیم این همان مجموعه $R = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$ هر زیرمجموعه از این مجموعه نیز یک رابطه از A به B محسوب می‌شود؛ مانند:

$$R_1 = \{(a, 1)(a, 2)(b, 1)\} \quad \text{یا} \quad R_2 = \{(a, 1)(b, 1)(c, 1)\}$$

ممکن است بعضی روابط تابع نباشند یا نباشند

$$\text{تعداد کل روابط} = 2^6 = 64$$

چند تعداد از این روابط تابع هستند؟ $2^3 = 8$ چرا؟

اگر مجموعه A دارای n عضو و مجموعه B دارای m عضو باشد تعداد توابع از A به B برابر است m^n

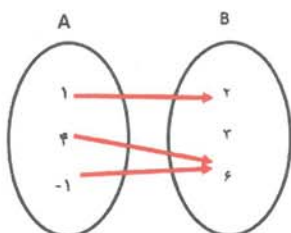
اگر R رابطه‌ای باشد که به هر عدد طبیعی کمتر از ۷ مقسوم علیه‌های آن را نسبت دهد. حداقل چند عضو باید حذف شود تا به تابع تبدیل شود؟

$$R = \{(1, 1)(1, 2)(2, 1)(2, 2)(3, 1)(3, 3)(4, 1)(4, 2)(4, 4)(5, 1)(5, 5)(6, 1)(6, 2)(6, 3)(6, 6)\}$$

حداقل باید ۸ عضو حذف شود تا به تابع تبدیل شود.

**دامنه و برد توابع:**

تابع از ۲ جز مهم به نام دامنه (ورودی تابع) و برد (خروجی تابع) تشکیل شده است. روش‌های مختلف نمایش دامنه و برد:

(۱) نمودار پیکانی:

$$\text{دامنه } D = \{1, 4, -1\}$$

$$\text{دامنه هم } B = \{2, 3, 6\}$$

$$\text{برد } R = \{2, 6\}$$

برد زیر مجموعه هم دامنه است.

۲- جدول:

x	۱	۳	۶
y	۲	۵	-۱

$$D = \{1, 3, 6\}$$

$$R = \{2, 5, -1\}$$

۳- زوج مرتب

$$f = \{(1, 2), (3, 5), (6, -1)\}$$

$$D_f = \{1, 3, 6\} \quad R_f = \{2, 5, -1\}$$

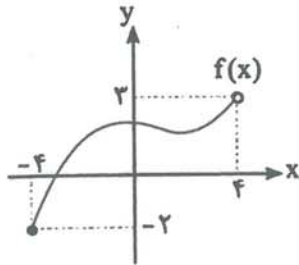
۴- نمودار مختصاتی:

الف) برای به دست آوردن دامنه تابع نمودار را روی محور X ها تصویر می‌کنیم محدوده X دامنه تابع است.

ب) برای به دست آوردن برد تابع نمودار را روی محور Y تصویر می‌کنیم محدوده Y برد تابع است.

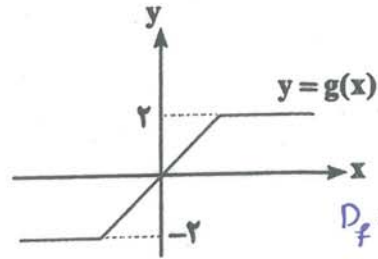


با توجه به نمودارهای زیر دامنه و برد توابع را بیابید. ?



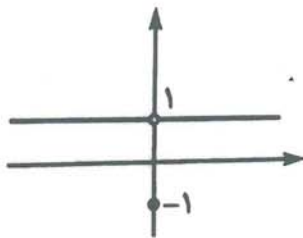
$$D_f = [-2, 2)$$

$$R_f = [-2, 2)$$



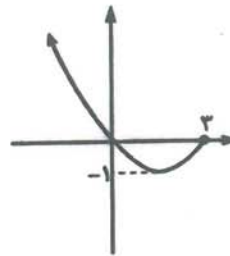
$$D_f = \mathbb{R}$$

$$R_f = [-2, 2]$$



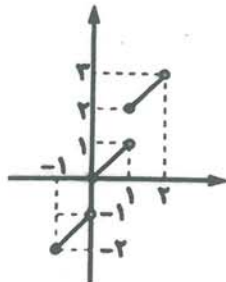
$$D_f = \mathbb{R}$$

$$R_f = \{1, -1\}$$



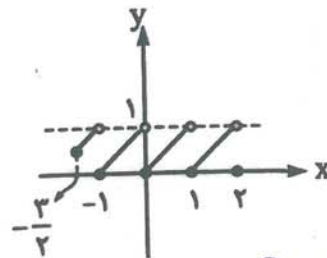
$$D_f = (-\infty, 3]$$

$$R_f = [-1, +\infty)$$



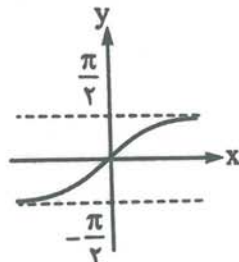
$$D_f = [-2, 3)$$

$$R_f = [-2, -1) \cup [0, 1) \cup [2, 3)$$



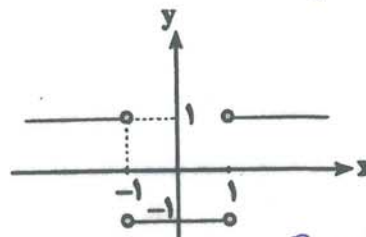
$$D_f = [-\frac{3}{2}, 2]$$

$$R_f = [0, 1)$$



$$D_f = \mathbb{R}$$

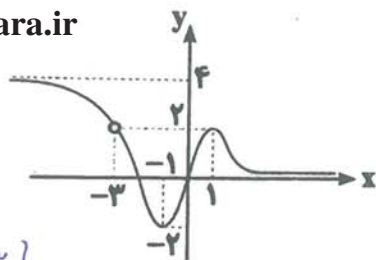
$$R_f = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$



$$D_f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$$

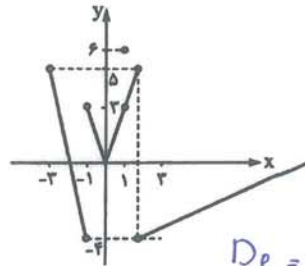
$$R_f = \{-1, 1\}$$





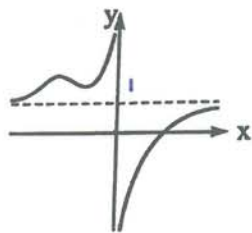
$$D_f = \mathbb{R} - \{-3\}$$

$$R_f = [-2, 2)$$



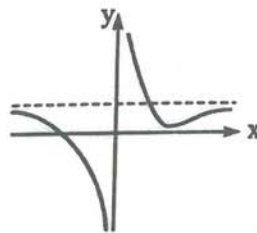
$$D_f = (-3, +\infty)$$

$$R_f = [-4, +\infty)$$



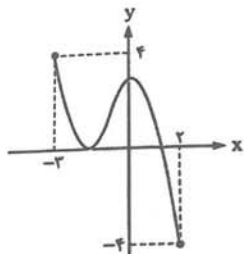
$$D_f = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$R_f = \mathbb{R} - \{1\}$$



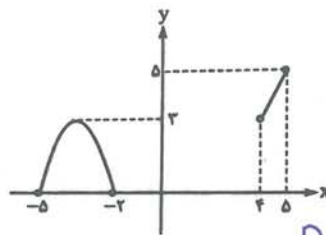
$$D_f = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$R_f = \mathbb{R}$$



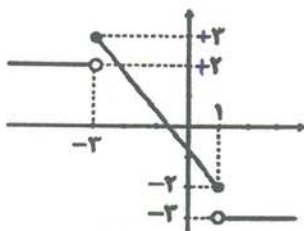
$$D_f = [-3, 2]$$

$$R_f = [-4, 2]$$



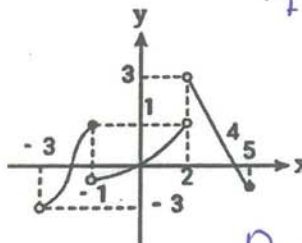
$$D_f = [-\infty, -3] \cup (2, \infty]$$

$$R_f = [0, \infty)$$



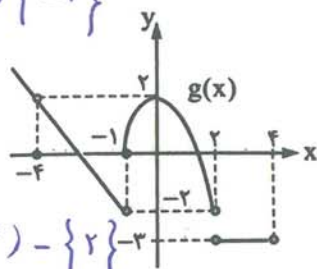
$$D_f = \mathbb{R}$$

$$R_f = [-2, 3] \cup \{-3\}$$



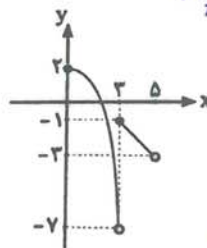
$$D_f = (-3, \infty) - \{2\}$$

$$R_f = (-2, 2)$$



$$D_f = (-\infty, 2) - \{2\}$$

$$R_f = (-2, +\infty) \cup \{-3\}$$



$$D_f = [0, \infty)$$

$$R_f = (-7, 2]$$



تابعی مثال بنویس که :

$$f: \{(1,2)(3,4)(5,6)\}$$

(1) دامنه و برد آن سه عضو داشته باشد

(2) دامنه آن چهار عضو و برد آن سه عضو داشته باشد

$$f: \{(1,0)(2,1)(3,1)(4,5)\}$$

(3) برد آن فقط یک عضو داشته باشد

$$f: \{(2,1)(3,1)(5,1)\}$$

(4) دامنه آن فقط یک عضو داشته باشد

$$f: \{(1,5)\}$$

(5) دامنه آن نامتناهی و برد آن متناهی باشد

$$f: \{(1,3)(2,3)(3,3), \dots\}$$

مثلاً دامنه اعداد طبیعی و برد آن عدد 3

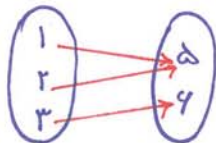
(6) دامنه و برد آن نامتناهی باشد

$$f: \{(1,-1)(2,-2)(3,-3), \dots\}$$

مثلاً دامنه اعداد طبیعی و برد قرینه آنها

در هر قسمت تابعی با شرایط زیر بنویسید:

(1) دامنه آن فقط 3 عضو داشته باشد (با نمودار پیکانی)



(2) تعداد اعضای دامنه و برد برابر باشد (با فرم جدولی)

x	1	3	5
y	2	4	6

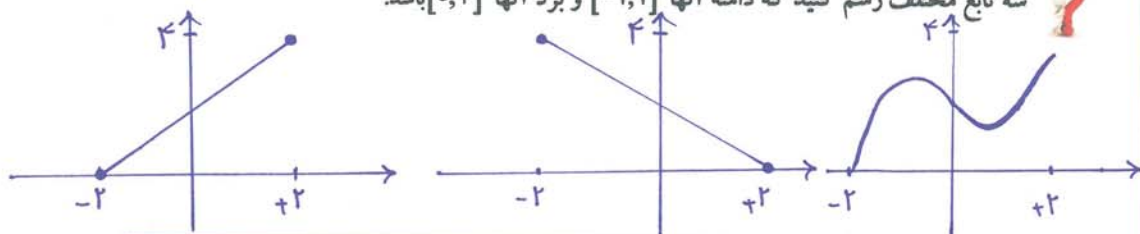
(3) همه اعداد طبیعی را به عدد 3 نسبت دهد (نمایش جبری)

$$f(n) = 3$$

(4) همه اعداد طبیعی را به قرینه آنها نسبت دهد (نمایش جبری)

$$f(n) = -n$$


سه تابع مختلف رسم کنید که دامنه آنها $[-2, 2]$ و برد آنها $[0, 4]$ باشد.



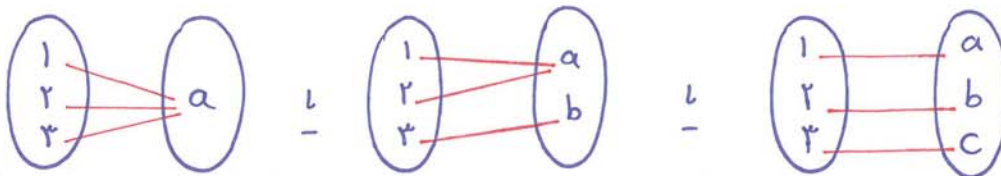
دو تابع مثال بزنید که دامنه و برد آنها یکی باشد ولی هیچ دو زوج مرتب مشترکی نداشته باشند (دامنه ۴ عضو) 

$$f: \{(0, 4), (1, 5), (2, 6), (3, 7)\}$$

$$g: \{(0, 5), (1, 4), (2, 7), (3, 6)\}$$

همیشه تعداد اعضای دامنه از تعداد اعضای برد بزرگتر یا مساوی اند امکان ندارد تعداد اعضای برد از دامنه بیشتر باشد. 

اگر $A = \{1, 2, 3\}$ دامنه تابع باشد تعداد اعضای برد f را بررسی کنید. 



چند مورد از موارد زیر امکان پذیر است 

- (۱) دامنه ۳ عضوی و برد ۵ عضوی امکان ندارد
- (۲) دامنه ۵ عضوی و برد نامتناهی امکان ندارد
- (۳) برد یک عضوی و دامنه ۳۰۰ عضوی امکان دارد
- (۴) دامنه تک عضوی امکان دارد
- (۵) دامنه و برد نامتناهی امکان دارد
- (۶) دامنه اعداد طبیعی و برد اعداد حسابی امکان دارد چون تعداد هر دو نامتناهی است
- (۷) دامنه و برد هر دو نامتناهی امکان دارد
- (۸) دامنه (۳, ۵) و برد $[-3, 50]$ امکان دارد چون هر دو نامتناهی اند



کدام جمله درست یا نادرست است.

- ۱) اگر دامنه تابع متناهی باشد برد آن هم متناهی است درست
- ۲) اگر دامنه تابع متناهی باشد بردش نامتناهی است نادرست
- ۳) اگر دامنه تابع نامتناهی باشد برد هم نامتناهی است نادرست
- ۴) اگر دامنه تابع نامتناهی باشد بردش متناهی است نادرست

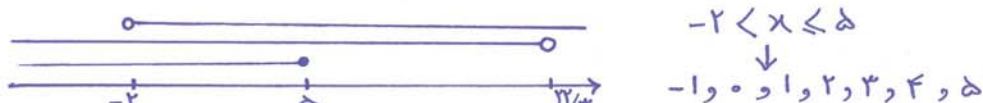
۵) تابعی به صورت زوج مرتب داریم که تعداد اعضای دامنه‌اش از بردش بیشتر باشد درست

دامنه یک تابع $22-3x$ و برد آن $x+2$ عضو دارد x چند مقدار صحیح دارد. $x \leftarrow$ مقدار صحیح دارد
تعداد دامنه از برد بزرگتر یا مساوی و اینکه تعداد آنها باید مثبت و صحیح باشد.

$$22-3x \geq x+2 \rightarrow -4x \geq -20 \rightarrow x \leq 5$$

$$22-3x > 0 \rightarrow x < \frac{22}{3}$$

$$x+2 > 0 \rightarrow x > -2$$

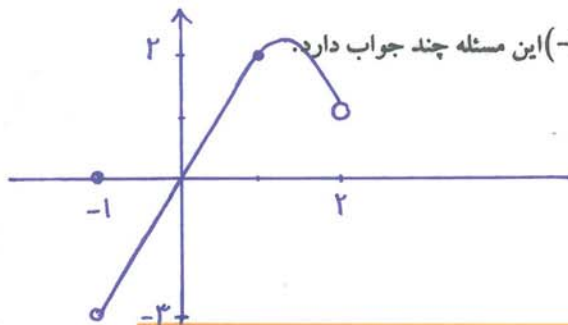


تابع f تعداد اضلاع چند ضلعی را به تعداد قطرهای آن نسبت می‌دهد تابع را به صورت زوج مرتب بنویسید و ضابطه جبری تابع را بنویسید.

$$f(n) = \frac{n(n-3)}{2}$$

n	۳	۴	۵	۶	...
$f(n)$	۰	۲	۵	۹	...

$$f: \{(3,0), (4,2), (5,5), \dots\}$$



نمودار تابعی رسم کنید با دامنه $[-1, 2]$ و برد $[-3, 2]$ این مسئله چند جواب دارد.
بی‌شمار جواب دارد.



ضابطه یا نمایش جبری تابع: ضابطه تابع را با نماد $f(x)$ نمایش می‌دهند به رابطه یا قانون بین اعضای دامنه و برد تابع f ضابطه می‌گویند.

خروجی برد $y = f(x) \rightarrow$ f \rightarrow x ورودی ماشین تابع

رسالت توابع زیر را بگویید. **?**
 هر عددی را بگیرد ابتدا مربع می‌کند و با سه برابرش جمع کرده و یکی کم می‌کند. $f(x) = x^2 + 3x - 1$
 هر عددی را بگیرد عکس کرده و یکی کم می‌کند. $f(x) = \frac{1}{x} - 1$
 هر عددی را بگیرد جذمش را می‌گیرد. $f(x) = \sqrt{x}$

مقدار دهی به تابع:

? اگر $f(x) = 3x + \sqrt{x}$ باشد حاصل هر یک را بیابید.

$$f(9) = 3(9) + \sqrt{9} = 30$$

$$f(f(1)) = f(2) = 3(2) + \sqrt{2} = 6 + \sqrt{2}$$

$$f(1) = 3(1) + \sqrt{1} = 4$$

? با توجه به اینکه $f = \{(1, -1), (3, -2), (5, 4), (-1, 3)\}$ حاصل $f(f(1)) - f(f(-1))$ را بیابید.
 $f(1) = -1$
 $f(-1) = 3 \rightarrow f(f(1)) - f(f(-1)) = f(-1) - f(3) = 3 - 2 = 1$

? تابع $f = \{(1, 2), (3, 4), (5, 7), (7, 8)\}$ و $f(f(x)) = 8$ مقدار x را بیابید.

$$f(f(x)) = 8 \quad \xrightarrow{f(7)=8} \quad f(x) = 7 \quad \xrightarrow{f(5)=7} \quad x = 5$$

? اگر f یک تابع و $f(3) = -1$ و $f(2) = 5$ و $f(1) = 2$ تابع را به صورت زوج مرتب بنویسید.

$$f = \{(1, 2), (2, 5), (3, -1)\}$$



اسم تابع \uparrow دامنه تابع \rightarrow $f: A \rightarrow B$
 $y = f(x)$ \rightarrow هم دامنه
 ضابطه تابع \downarrow

نمایش فرم کامل تابع

برد تابع زیر مجموعه هم دامنه تابع است.

تابع $f: \{-1, 2, 3\} \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = 2x + 3$ را به صورت زوج مرتب بنویسید.

$$f = \{(-1, 1), (2, 7), (3, 9)\}$$

$$f(-1) = -2 - 3 = -5$$

$$f(2) = 4 - 3 = 1$$

$$R_f = \{-5, 1\}$$

برد تابع $f: \{2, -1\} \rightarrow B$
 $f(x) = 2x - 2$ کدام است.

در هر یک از توابع زیر مقادیر خواسته شده را بیابید.

$$f(x) = x^2 + 3x \Rightarrow f(5) = 25 + 15 = 40$$

$$f(x) = x^2 + 2x - 1 \Rightarrow f(\sqrt{2} - 1) =$$

$$f(x) = (x+1)^2 - 2 \rightarrow f(\sqrt{2} - 1) = \sqrt{2}^2 - 2 = 0$$

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 1 \Rightarrow f(\sqrt[3]{7} + 2) =$$

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 1 = (x-2)^3 + 1$$

$$f(\sqrt[3]{7} + 2) = (\sqrt[3]{7} + 2 - 2)^3 + 1 = 7 + 1 = 8$$

$$f(x) = \frac{x^2 + 8x + 1}{x^2 + 8x - 3} \Rightarrow f(\sqrt{5} - 4) =$$

$$f(x) = \frac{x^2 + 8x + 17 - 17 + 1}{x^2 + 8x + 17 - 17 - 3} = \frac{(x+4)^2 - 15}{(x+4)^2 - 19}$$

$$f(\sqrt{5} - 4) = \frac{(\sqrt{5})^2 - 15}{(\sqrt{5})^2 - 19} = \frac{-8}{-14} = \frac{4}{7}$$

اگر $f = \{(0, 2), (4, 3), (-1, 4)\}$ و $g = \{(4, 5), (0, 1), (2, 3)\}$ آنگاه حاصل عبارات زیر را بیابید.

$$f(4) \times g(2) = 3 \times 3 = 9$$

$$g(2f(0)) = g(2(2)) = g(4) = 5$$

$$g(\sqrt{f(-1)}) = g(\sqrt{4}) = g(2) = 3$$

اگر $f(x) = x^2 - 4x + 1$ حاصل عبارات زیر را بیابید.

$$f(x-1) = (x-1)^2 - 4(x-1) + 1 = x^2 - 2x + 1 - 4x + 4 + 1$$

$$= x^2 - 6x + 6$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 - 4(x+h) + 1 - (x^2 - 4x + 1)}{h}$$

$$= \frac{x^2 + 2xh + h^2 - 4x - 4h + 1 - x^2 + 4x - 1}{h} = \frac{h(2x + h - 4)}{h} = 2x + h - 4$$

اگر $f(3x - 2x^2) = 4x^2 - 6x + 8$ باشد حاصل $f(-5)$ را بیابید.

$$3x - 2x^2 = -5 \rightarrow 2x^2 - 3x - 5 = 0$$

$$x = -1 \rightarrow f(-5) = 4 + 6 + 8 = 18$$

$$x = \frac{5}{2} \rightarrow f(-5) = 18$$

اگر $f\left(\frac{2x-1}{x+3}\right) = x - 2|x|$ باشد حاصل $f(1)$ را بیابید.

$$\frac{2x-1}{x+3} = 1 \rightarrow 2x-1 = x+3 \rightarrow x=4$$

$$x=4 \rightarrow f(1) = 4 - 8 = -4$$

اگر $f(2x) = 3 - f(5) - 2x$ مقدار $f(8)$ کدام است.

$$x = \frac{5}{2} \rightarrow f(5) = 3 - f(5) - 5 \rightarrow 2f(5) = -2 \rightarrow f(5) = -1$$

$$f(2x) = 3 + 1 - 2x = 4 - 2x$$

$$x=4 \rightarrow f(8) = 4 - 8 = -4 \rightarrow f(8) = -4$$





تابع
دهم

در هر مورد ضابطه تابع $f(x)$ را بیابید



$$f(x) + 3f(-x) = 5x - 1$$

$$f(x) + 3f(-x) = 5x - 1 \quad (A)$$

$x \rightarrow -x$

$$f(-x) + 3f(x) = -5x - 1 \quad \xrightarrow{x \rightarrow -x} \quad -3f(-x) - 9f(x) = 15x + 3 \quad (B)$$

$$A + B \rightarrow -8f(x) = 20x + 2 \rightarrow f(x) = -\frac{5}{4}x - \frac{1}{4}$$

$$f\left(\frac{2x-1}{3}\right) = \sqrt{x}$$

$$\frac{2x-1}{3} = t \rightarrow 2x = 3t + 1 \rightarrow x = \frac{3t+1}{2}$$

$$f(t) = \sqrt{\frac{3t+1}{2}} \rightarrow f(x) = \sqrt{\frac{3x+1}{2}}$$

$$f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^r + \frac{1}{x^r} + x^r + \frac{1}{x^r} + v$$

$$x + \frac{1}{x} = t \rightarrow x^r + \frac{1}{x^r} + r = t^r \rightarrow x^r + \frac{1}{x^r} = t^r - r$$

$$\rightarrow x^r + 3x^r \frac{1}{x} + 3x \frac{1}{x^r} + \frac{1}{x^r} = t^r \rightarrow x^r + \frac{1}{x^r} = t^r - 3\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

$$x^r + \frac{1}{x^r} = t^r - 3t \rightarrow f(t) = t^r - r + t^r - 3t + v \rightarrow f(t) = t^r + t^r - 3t + \Delta$$

$$f(\sin x \cos x) = \tan x + \cot x$$

$$\tan x + \cot x = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{1}{\sin x \cos x}$$

$$\sin x \cos x = t \rightarrow f(t) = \frac{1}{t}$$

$$f(x^r + x) = x^r + 2x^r + x^r + \Delta$$

$$x^r + x = t \rightarrow f(x^r + x) = (x^r + x)^r + \Delta$$

$$f(t) = t^r + \Delta$$

$$f(\tan x) = \frac{\frac{2 \sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\cos x}}{\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{3 \cos x}{\cos x}} \quad \text{مقدار } f(\Delta) \text{ کدام است.} \quad f(\tan x) = \frac{2 \sin x - \cos x}{\sin x + 3 \cos x} \quad \text{اگر } ?$$

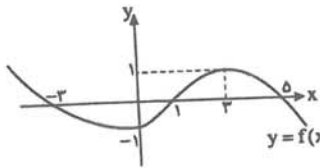
$$= \frac{2 \tan x - 1}{\tan x + 3}$$

$$\tan x = t \rightarrow f(t) = \frac{2t-1}{t+3} \rightarrow f(\Delta) = \frac{2\Delta-1}{\Delta+3} = 9/8$$



معادله $f(x) = \frac{1}{2}$, $f(x) = 2$ و $f(x) = 0$ چند ریشه دارد.

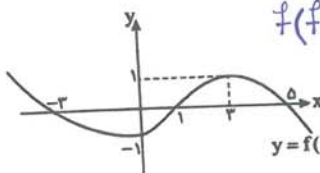
سه ریشه $f(x) = 0 \rightarrow x = -3, x = +1, x = 5$



یک ریشه $f(x) = 2$

سه ریشه $f(x) = \frac{1}{2}$

نمودار $y = f(x)$ داده شده مجموع جواب‌های معادله $f(f(2x-1)) = -1$ را بیابید.



$f(f(2x-1)) = -1 \rightarrow f(2x-1) = 0$

$2x-1 = 5 \rightarrow x = 3$

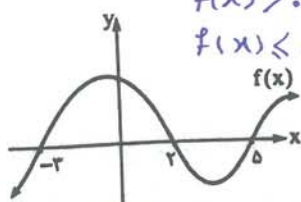
$2x-1 = 1 \rightarrow x = 1$ مربع $3+1-1=3$
مربعا

$2x-1 = -3 \rightarrow x = -1$

با توجه به نمودار نامعادله‌های $f(x) > 0$ و $f(x) \leq 0$ و $xf(x) < 0$ حل کنید.

$f(x) > 0 \rightarrow (-3, 2) \cup (5, +\infty)$

$f(x) \leq 0 \rightarrow (-\infty, -3] \cup [2, 5]$



	-3	0	2	5	
x	-	-	+	+	+
f(x)	-	+	+	-	+

$\rightarrow (-3, 0) \cup (2, 5)$

$xf(x) < 0 \rightarrow xf(x)$

اگر $f(\sqrt{x}) = 2x - \sqrt{x} + 1$ حاصل $f(3)$ کدام است.

$x = 9 \rightarrow f(3) = 18 - 3 + 1 = 16$

اگر $f(x-3) = x^2 - 4x + 5$ باشد، حاصل $f(1-x)$ کدام است.

$x^2 - 4x + 5$ (۴) $x^2 + 4x + 5$ (۳) $x^2 + 3$ (۲) $x^2 + 1$ (۱)

$x - 3 = t \rightarrow x = t + 3 \rightarrow f(t) = (t+3)^2 - 4(t+3) + 5$

$f(t) = t^2 + 7t + 9 - 4t - 12 + 5 = t^2 + 3t + 2$

$f(1-x) = (1-x)^2 + 3(1-x) + 2 = 1 - 2x + x^2 + 3 - 3x + 2 = x^2 - 5x + 6$

$f(1-x) = x^2 - 5x + 6$


اگر $f\left(\frac{x^2+1}{x}\right) = 4x + \frac{4}{x} - 1$ مقدار $f(3)$ را بیابید.

$f\left(x + \frac{1}{x}\right) = 4\left(x + \frac{1}{x}\right) - 1$

$f(t) = 4t - 1 \rightarrow f(3) = 11$

مدل سازی در توابع ریاضی: در این قسمت نوشتن ضابطه تابع وظیفه ماست.

طول یک مستطیل ۵ واحد از عرض آن بیشتر است مستطیل را بر حسب طول بیابید. ?



$$x = y + 5 \rightarrow y = x - 5$$

$$S = xy \rightarrow S(x) = x(x - 5) = x^2 - 5x$$

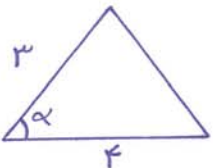
مساحت دایره را به عنوان تابعی از محیط آن بنویسید و برعکس. ?

$$S = \pi R^2 \rightarrow R = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$$

$$P = 2\pi R \rightarrow R = \frac{P}{2\pi} \quad S = \pi R^2 \rightarrow S(P) = \pi \left(\frac{P}{2\pi}\right)^2 = \frac{P^2}{4\pi}$$

مثلی ساخته‌ایم که که طول دو ضلع آن ۳ و ۴ است و زاویه بین آنها α است تابع مساحت مثلث را بر حسب α بنویسید. ?

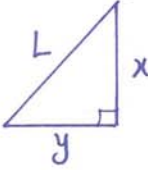
$$P = 2\pi R \rightarrow P(S) = 2\pi \left(\sqrt{\frac{S}{\pi}}\right) = 2\pi \frac{\sqrt{S}}{\sqrt{\pi}} = 2\sqrt{\pi} \sqrt{S}$$



$$S = \frac{1}{2} (3)(4) \sin \alpha$$

$$S = 6 \sin \alpha$$

در مثلث‌های قائم الزاویه‌ای که مساحت آنها ۶ سانتی متر مربع است، طول وتر را به عنوان تابعی از یک ضلع قائمه بنویسید. ?



$$S = \frac{1}{2} xy = 6 \rightarrow y = \frac{12}{x}$$

$$L^2 = x^2 + y^2 \rightarrow L = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$L(x) = \sqrt{x^2 + \left(\frac{12}{x}\right)^2} = \sqrt{x^2 + \frac{144}{x^2}} = \frac{\sqrt{x^4 + 144}}{x}$$

یک تانکر آب از یک استوانه و دو نیمکره به شعاع r در دو انتهای استوانه ساخته شده اگر ارتفاع استوانه ۸ متر باشد

حجم تانکر را به صورت تابعی از r بنویسید. ?

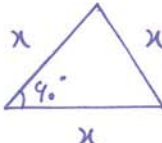
$$V = \text{حجم استوانه} + \text{حجم کره} = \frac{4}{3} \pi r^3 + \pi r^2 h$$

$$h=8 \rightarrow V(r) = \frac{4}{3} \pi r^3 + 8\pi r^2$$



اگر مساحت یک مثلث متساوی الاضلاع S باشد تابعی بنویسید که S را به ضلع مثلث وابسته کند، محیط مثلث را

بر حسب مساحت بیابید.

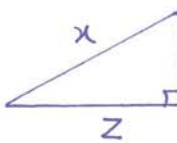


$$S = \frac{1}{2} x \cdot x \sin 60^\circ \rightarrow S = \frac{\sqrt{3}}{4} x^2$$

$$x = 2 \sqrt{\frac{S}{\sqrt{3}}}$$

$$P = 3x \rightarrow P(S) = 6 \sqrt{\frac{S}{\sqrt{3}}}$$

محیط یک مثلث قائم الزاویه ۱۰ سانتی متر است مساحت مثلث را به صورت تابعی بر حسب وتر بنویسید.



$$x^2 = y^2 + z^2 \rightarrow x + y + z = 10 \rightarrow y + z = 10 - x$$

$$y^2 + z^2 + 2yz = 100 + x^2 - 20x$$

$$x^2 + 2yz = 100 + x^2 - 20x \rightarrow yz = 50 - 10x$$

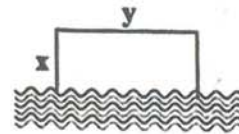
$$S = \frac{1}{2} yz \rightarrow S(x) = \frac{1}{2} (50 - 10x) = 25 - 5x$$

با یک طناب به طول ۲۰ متر در کنار یک رودخانه زمین به شکل مستطیل جدا کردیم مساحت مستطیل را بر

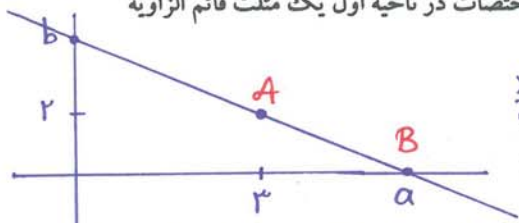
حسب عرض آن بیابید.

$$2x + y = 20 \rightarrow y = 20 - 2x$$

$$S = xy \rightarrow S(x) = x(20 - 2x) = 20x - 2x^2$$



خطی با شیب منفی که از نقطه (۳, ۲) می گذرد با محورهای مختصات در ناحیه اول یک مثلث قائم الزاویه



می سازد مساحت مثلث را به صورت تابعی از طول از مبدا خط بیابید.

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \xrightarrow{(3,2)} \frac{3}{a} + \frac{2}{b} = 1 \xrightarrow{\times ab} 3b + 2a = ab$$

$$3b + 2a = ab \rightarrow 2a = b(a - 3) \rightarrow b = \frac{2a}{a - 3}$$

$$S = \frac{1}{2} ab \rightarrow S(a) = \frac{1}{2} a \cdot \frac{2a}{a - 3} = \frac{a^2}{a - 3}$$

مساحت کل یک نیمکره را به صورت تابعی بر حسب حجم آن بنویسید.

$$S = 2\pi R^2 + \pi R^2 = 3\pi R^2 \rightarrow R = \sqrt{\frac{S}{3\pi}}$$

$$V = \frac{2}{3} \pi R^3 \rightarrow V = \frac{2}{3} \pi \left(\sqrt{\frac{S}{3\pi}} \right)^3 \rightarrow V(S) = \frac{2S\sqrt{S}}{27\sqrt{\pi}}$$

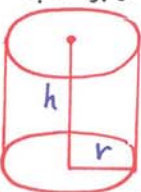
در یک استوانه مجموع ارتفاع و دو برابر شعاع قاعده برابر ۱۰ است تابعی بنویسید که حجم استوانه را بر حسب

$$h + 2r = 10 \rightarrow h = 10 - 2r$$

شعاع قاعده بیان کند.

$$V = \pi r^2 h \rightarrow V(r) = \pi r^2 (10 - 2r)$$

$$V(r) = 10\pi r^2 - 2\pi r^3$$



محاسبه دامنه توابع از روی ضابطه آنها:

دامنه: ورودی مجاز یک تابع

$$f(x) = x^2$$

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

(1) دامنه توابع چند ضابطه‌ای $D_f = \mathbb{R}$

$$f(x) = 3x^2 + \sqrt{7x} - 1 \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$f(x) = 5x - \frac{2}{3} \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$f(x) = 3 \quad D_f = \mathbb{R}$$

(2) دامنه توابع گویا {ریشه‌های مخرج} $D_f = \mathbb{R} - \{ \dots \}$

دامنه توابع زیر را بیان کنید. ?

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4} \quad x^2 - 4 = 0 \rightarrow x = \pm 2$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{2, -2\}$$

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2+9} \quad x^2+9=0 \text{ ریشه ندارد} \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{5x}{x^2-9x} \quad x^2-9x=0 \rightarrow x(x^2-9)=0$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{0, 3, -3\}$$

$x=0$
 $x=3$
 $x=-3$ دامنه توابع رادیکالی

$$y = \sqrt{\Delta} \Rightarrow \Delta \geq 0 \quad y = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \Rightarrow \Delta > 0$$

دامنه توابع زیر را بیابید. ?

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 4} \quad x^2 - 4 \geq 0$$

-2	2
/	/
-	-
/	/

$$D = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$$

$$y = \sqrt{9 - x^2} \quad 9 - x^2 \geq 0$$

-3	3
-	-
/	/

$$D = [-3, 3]$$

$$y = \sqrt{\frac{x-3}{x+1}} \quad \frac{x-3}{x+1} \geq 0$$

-1	3
/	/
-	-
/	/

$$D = (-\infty, -1) \cup [3, +\infty)$$

$$y = \frac{x-1}{\sqrt{x-2}} \quad x-2 > 0 \rightarrow x > 2$$

$$D = (2, +\infty)$$

انواع توابع:

$$f(x) = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots \quad a, b, c \in R$$

(۱) توابع چند جمله‌ای:

$$f(x) = 3x^2 + \sqrt{2}x + \frac{1}{5} \quad f(x) = x^0 + 3x^2 + 7x^2$$

دامنه این توابع همیشه R است

(۲) تابع خطی: به تابع $f(x) = ax + b$ تابع خطی می‌گوییم a شیب خط و b عرض از مبدا خط است.



? اگر f یک تابع خطی باشد به طوری که $f(3) = 7$ و $f(7) = 19$ باشد نمایش جبری تابع را بنویسید حاصل

$$f(x) = ax + b$$

$f(10)$ را بیابید و نمودار آن را رسم کنید.

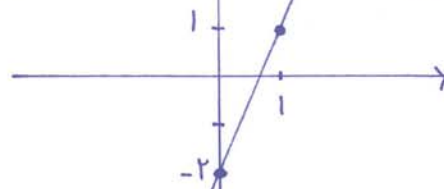
$$\begin{cases} f(3) = 7 \\ f(7) = 19 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 7 = 3a + b \\ 19 = 7a + b \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 12 &= 4a \rightarrow a = 3 \\ b &= -2 \end{aligned}$$

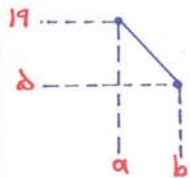
$$f(x) = 3x - 2$$

$$f(10) = 3(10) - 2 = 28$$

x	y
0	-2
1	1



? اگر $f(x) = 4 - 5x$ با دامنه $[a, b]$ و برد $[5, 19]$ باشد، مقدار ab را بیابید.



$$\begin{aligned} f(a) &= 19 \rightarrow 4 - 5a = 19 \rightarrow a = -3 \\ f(b) &= 5 \rightarrow 4 - 5b = 5 \rightarrow b = \frac{1}{-5} \end{aligned} \rightarrow ab = \frac{3}{5}$$

? اگر تابع $f(x) = (x-1)^2 + ax^2 + b$ خطی باشد و $f(2) = 4$ حاصل $f(5)$ را بیابید.

$$f(x) = x^2 - 2x + 1 + ax^2 + b = (1+a)x^2 - 2x + b + 1 \quad \begin{aligned} \alpha + 1 &= 0 \\ \alpha &= -1 \end{aligned}$$

$$f(x) = -2x + b + 1 \quad f(2) = 4 \rightarrow 4 = -4 + b + 1 \rightarrow b = 7$$

$$f(x) = -2x + 8 \rightarrow f(5) = -10 + 8 = -2$$



اگر تابعی خطی باشد و از نقاط $(1, 7)$ و $(-3, -1)$ عبور کند حاصل $f(5)$ را بیابید.

$$f(x) = ax + b$$

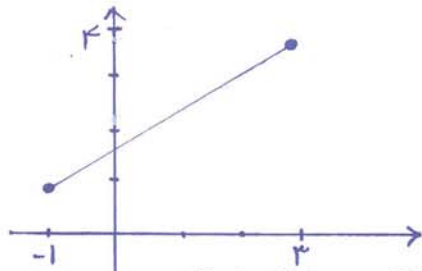
$$f(1) = 7 \rightarrow 7 = a + b$$

$$f(-3) = -1 \rightarrow -1 = -3a + b$$

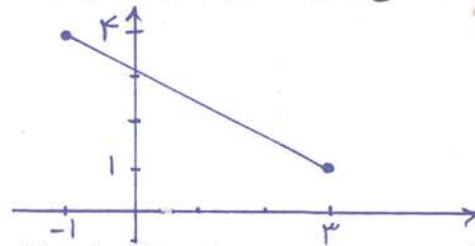
$$\begin{aligned} \rightarrow \Delta = 7a &\rightarrow a = 2 \\ &b = 5 \end{aligned}$$

$$f(x) = 2x + 5 \rightarrow f(5) = 2(5) + 5 = 15$$

چند تابع خطی با دامنه $[-1, 3]$ و برد $[1, 4]$ وجود دارد.



در خط



در تابع خطی f رابطه $f(2x+1) - f(x+1) = 2$ برقرار است اگر $f(2) = 1$ حاصل $f(-1) + f(5)$ را بیابید.

$$f(x) = ax + b$$

$$2f(x+1) - f(2x+1) = 2 \rightarrow 2(a(x+1) + b) - (a(2x+1) + b) = 2$$

$$\rightarrow 2ax + 2a + 2b - 2ax - a - b = 2$$

$$\rightarrow a + b = 2 \quad \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} \quad a = -1$$

$$f(2) = 1 \rightarrow 2a + b = 1 \quad b = 3$$

$$f(x) = -x + 3 \rightarrow f(-1) + f(5) = 4 - 2 = 2$$

اگر برد تابع خطی $f(x) = 3x + 2$ بازه $[-4, 17]$ باشد دامنه این را بیابید.

$$y = f(x)$$

$$-4 \leq 3x + 2 \leq 17 \quad \xrightarrow{-2} \quad -6 \leq 3x \leq 15 \quad \xrightarrow{\div 3} \quad -2 \leq x \leq 5$$

$$D_f = [-2, 5]$$

در تابع خطی $f(x) = (a+b)x^2 - (2a-b+3)x + 2ax - b + 3$ حاصل $f(3)$ را بیابید.

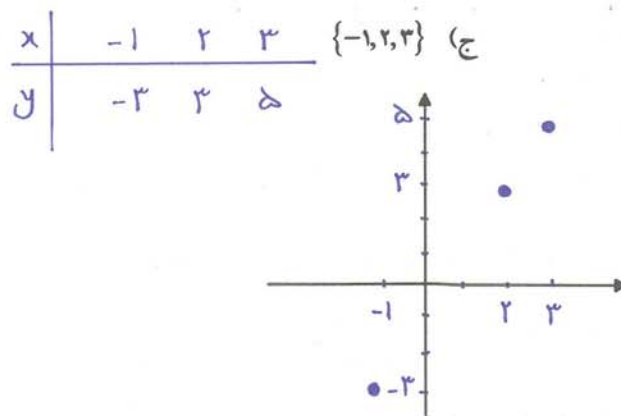
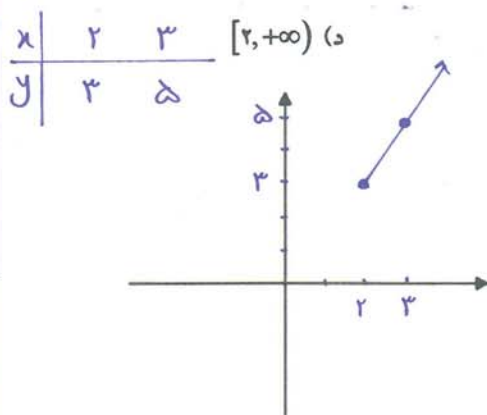
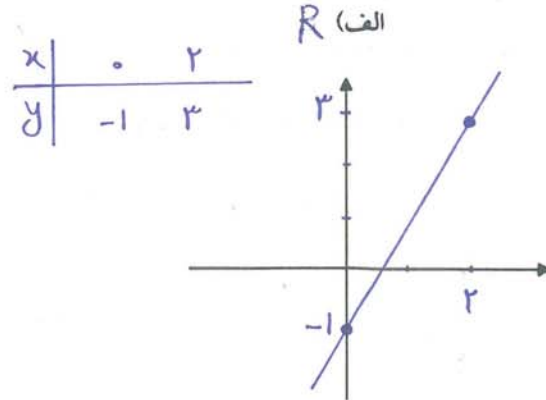
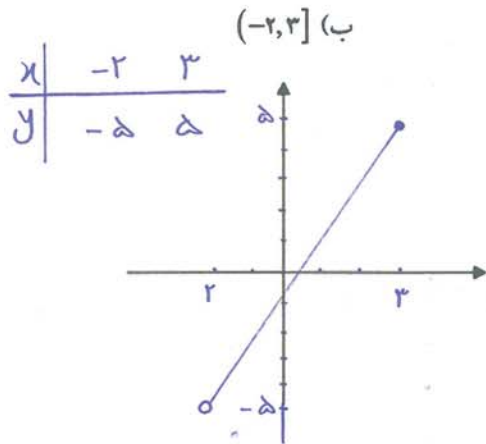
$$a + b = 0$$

$$2a - b + 3 = 0 \quad \xrightarrow{\text{جمع}} \quad 3a + 3 = 0 \rightarrow a = -1, b = 1$$

$$f(x) = -2x - 1 + 3 \rightarrow f(x) = -2x + 2$$

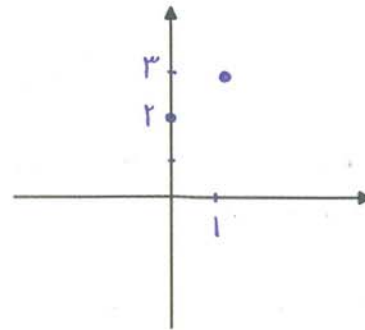
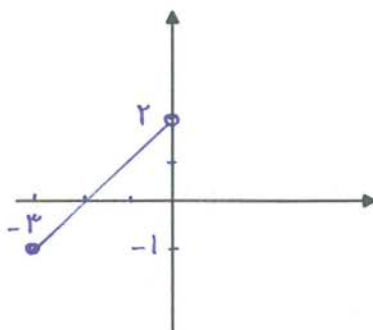
$$f(3) = -6 + 2 = -4$$

تابع خطی $f(x) = 2x - 1$ را با دامنه‌های زیر رسم کنید.



تابع خطی $f(x) = x + 2$ را با بردهای زیر رسم کنید.

الف) $\{2, 3\}$ ب) $[-1, 2]$



$y = x + 2 \rightarrow -1 = x + 2 \rightarrow x = -3$
 $y = x + 2 \rightarrow 2 = x + 2 \rightarrow x = 0$

؟ برای اندازه گیری دما از واحدهای سانتیگراد و فارنهایت استفاده می شود با رابطه خطی $F = \frac{9}{5}C + 32$ به هم وابسته اند.

الف) منفی ۲۰ درجه سانتیگراد چند درجه فارنهایت است.

$$F = \frac{9}{5}(-20) + 32 \rightarrow F = -4$$

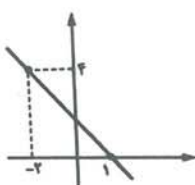
ب) ۱۰۴ درجه فارنهایت چند سانتیگراد است.

$$104 = \frac{9}{5}C + 32 \rightarrow C = 40$$

پ) معادله ای بنویسید که سانتیگراد را بر حسب فارنهایت بیان کند.

$$F = \frac{9}{5}C + 32 \xrightarrow{\Delta} \Delta F = 9C + 170 \rightarrow C = \frac{\Delta F}{9} - \frac{170}{9}$$

؟ ضابطه تابع خطی زیر را بنویسید.



$$f(x) = ax + b$$

$$(1, 0) \rightarrow f(1) = 0 \rightarrow 0 = a + b$$

$$(-2, 4) \rightarrow f(-2) = 4 \rightarrow 4 = -2a + b$$

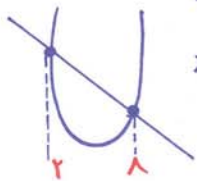
$$\rightarrow \begin{cases} a = -\frac{4}{3} \\ b = \frac{4}{3} \end{cases}$$

$$f(x) = -\frac{4}{3}x + \frac{4}{3}$$

؟ تابع خطی $y = 13 - x$ در دو نقطه به طول های ۲ و ۸ با سهمی $y = -\frac{1}{2}x^2 + ax + b$ متقاطع اند مختصات راس سهمی را بیابید.

$$x = 2 \xrightarrow{\text{عوض کن}} 11 = -2 + 2a + b \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} a = 4$$

$$x = 8 \rightarrow 5 = -32 + 8a + b \rightarrow b = 5$$



$$y = -\frac{1}{2}x^2 + 4x + 5 \rightarrow S(4, 13)$$

؟ اگر f یک تابع خطی افزایشی باشد و $f(f(x)) = 9x + 4$ باشد حاصل $f(6)$ کدام است.

$$f(x) = ax + b \rightarrow f(f(x)) = a f(x) + b = a(ax + b) + b = 9x + 4$$

$$a^2x + ab + b = 9x$$

$$a^2 = 9 \rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ a = -3 \end{cases}$$

$$ab + b = 4 \rightarrow 3b + b = 4 \rightarrow b = 1$$

$$f(x) = 3x + 1 \rightarrow f(6) = 19$$

تاکسی متر یک تاکسی بدین صورت کار می کند که مبلغ ۲۰۰ تومان ورودی گرفته و هر یک کیلومتر که تاکسی طی می کند مبلغ ۷۵ تومان کرایه در نظر می گیرد.

الف) جدول زیر را تکمیل کنید و رابطه خطی بین کیلومتر طی شده و مبلغ کرایه را بیابید.

x (km)	۰	۱	۲	۱۰	x
کرایه y	۲۰۰	۲۷۵	۲۰۰ + ۲(۷۵)	۲۰۰ + ۳(۷۵)	۲۰۰ + x(۷۵)

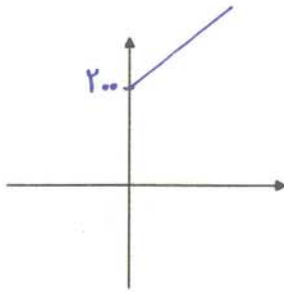
ب) اگر تاکسی برای رسیدن به مقصد یک مسافر ۲۷ کیلومتر طی کند کرایه مسافر چقدر می شود.

$$f(27) = 200 + 75(27) = 2225 \text{ تومان}$$

ج) با ۱۸۰۰ تومان حدوداً چه مسافتی می توان با تاکسی طی کرد.

$$1800 = 200 + 75x \rightarrow x = \frac{1600}{75} \approx 21,3 \text{ km}$$

د) نمودار تابع را رسم کرده و دامنه آن را بیابید.



$$D = [0, +\infty)$$

اگر تابع $f = \{(-1, 2)(2, -5)(b, -b+1)(a, 2b-1)\}$ خطی باشد، مقدار a, b را بیابید.

$$f(-1) = 2 \rightarrow f(x) = ax + b \rightarrow 2 = -a + b$$

$$f(2) = -5 \rightarrow f(x) = ax + b \rightarrow -5 = 2a + b$$

$$\xrightarrow{\text{حل}} \begin{aligned} a &= \frac{-7}{3} \\ b &= \frac{-1}{3} \end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{-7}{3}x - \frac{1}{3} \xrightarrow{(b, -b+1)} -b+1 = \frac{-7}{3}b - \frac{1}{3} \rightarrow \frac{4}{3}b = -\frac{4}{3} \rightarrow b = -1$$

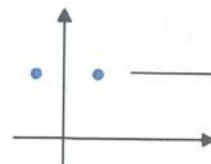
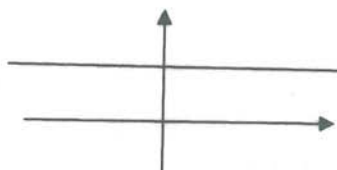
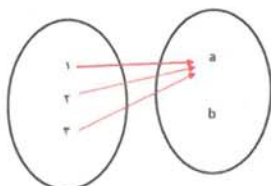
$$(a, 2b-1) \xrightarrow{b=-1} (a, -3) \xrightarrow{\text{صورت ضرب}} -3 = \frac{-7}{3}a - \frac{1}{3}$$

$$\rightarrow \frac{-8}{3} = \frac{-7}{3}a \rightarrow a = \frac{8}{7}$$

تابع ثابت: تابع را ثابت می‌گوییم هرگاه برد آن شامل یک عضو باشد.

$$f = \{(2, 3)(5, 3)(6, 3)\}$$

$$f(x) = c$$



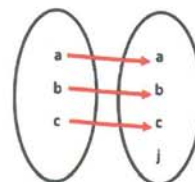
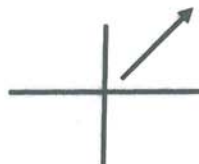
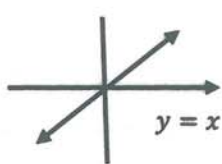
تابع ثابت نوعی از توابع خطی است که $a = 0$

$$f(x) = 5 \rightarrow f(3) = 5 \quad f(17) = 5 \quad f(بز) = 5$$

تابع همانی: تابع f را همانی می‌گوییم هرگاه هر عضو دامنه f دقیقاً به همان عضو در برد تابع نزدیک شود نمودار آن نیمساز ربع اول و سوم یا بخشی از آن است.

$$f(x) = x \quad \underline{y = x}$$

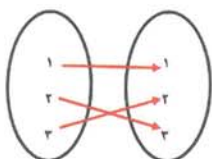
$$f(x) = \{(2, 2)(5, 5)(\sqrt{2}, \sqrt{2})\}$$



تابع همانی نوعی از توابع خطی است که $a = 1$ و $b = 0$

در تابع همانی همیشه دامنه و برد با هم برابرند ولی هر تابعی که دامنه

و برد برابر دارد لزوماً همانی نیست.



در تابع همانی f ، $D_f = \{1, 5, a\}$ و $R_f = \{b, 1, 8\}$ است حاصل a, b را بیابید. ?

$$b = 5$$

$$a = 8$$

? اگر f تابعی ثابت باشد و $f(2) = a + 3$ و $f(5) = 2a - 1$ حاصل $f(-3)$ کدام است.

$$2a - 1 = a + 3 \rightarrow a = 4$$

$$f(5) = 7$$

$$f(2) = 7$$

$$f(-3) = 7$$



در هر مورد مقادیر a, b, c را طوری بیابید که تابع f تابع ثابت باشد.

الف) $f = \{(r, r)(c, c-1)(-1, a+rb)(r, ra-b)\}$

$$C-1=r \rightarrow C=r$$

$$\begin{cases} a+rb=r \\ ra-b=r \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a+rb=r \\ ra-3b=r \end{cases} \rightarrow \begin{cases} va=\lambda \rightarrow a=\frac{\lambda}{v} \\ b=\frac{r}{v} \end{cases}$$

ب) $f(x) = (a-1)x^r + x^r - rbx + cx^r + rx + r$

$$f(x) = (a-1)x^r + (1+C)x^r + (r-rb)x + r$$

$$a-1=0 \rightarrow a=1 \quad 1+C=0 \rightarrow C=-1 \quad r-rb=0 \rightarrow b=r$$

ج) $f = \{(r, a+b), (1, ra), (-1, a+1-rb), (c, c-r)\}$

$$a+b=ra \rightarrow a=b$$

$$a+b = a+1-rb \rightarrow rb=1 \rightarrow b=\frac{1}{r} \rightarrow a=\frac{1}{r}$$

$$a+b=c-r \rightarrow \frac{1}{r} + \frac{1}{r} = c-r \rightarrow c = \frac{2}{r} + r$$

در هر مورد مقادیر a, b, c را چنان بیابید که تابع همانی باشد.

الف) $a=r, r=a-b \rightarrow r=r-b \rightarrow b=0$ $f = \{(a, r)(r, a-b)(c-r, a+b)\}$

$$c-r = a+b \rightarrow c-r = r-1 \rightarrow c=r$$

ب) $f(x) = ax^r + (a+b-r)x + c + b - ra$

ب) $f(x) = x, a=0, a+b-r=1 \rightarrow \alpha=0 \rightarrow b=r$

$$c+b-ra=0 \rightarrow c+r-2(0)=0 \rightarrow c=-r$$

ج) $f(x) = \frac{rx^r - ax + c + 1}{bx + r}$

$$\frac{rx^r - ax + c + 1}{bx + r} = x \rightarrow rx^r - ax + c + 1 = bx^r + rx \rightarrow b=r$$

$$c+1=0 \rightarrow c=-1 \quad -a=r \rightarrow a=-r$$

د) $f = \{(a+b, 1)(r, a+c)(b+c, r)(r, r)\}$

$$\begin{cases} a+b=1 \\ a+c=r \\ b+c=r \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b-c=-1 \\ b+c=r \end{cases} \rightarrow \begin{cases} rb=r \rightarrow b=1 \\ a=0 \\ c=r \end{cases}$$



اگر برد تابع ثابت f برابر با مجموعه $R_f = \{5, a+1\}$ و زوج مرتبهای $(3, 2b-1)$ و $(6, b+c)$ عضو f باشد ؟

a, b, c را بیابید.

$$5 = a + 1 \rightarrow a = 4$$

$$2b - 1 = 5 \rightarrow 2b = 6 \rightarrow b = 3$$

$$b + c = 5 \rightarrow 3 + c = 5 \rightarrow c = 2$$

در تابع ثابت f حاصل $2f(a+b) - f(a) - f(b)$ را بیابید. ؟

$$f(x) = c \rightarrow 2f(a+b) - f(a) - f(b) = 2c - c - c = 0$$

اگر f تابعی ثابت و g تابعی همانی باشد و رابطه $\frac{g(3)+f(g(1))}{f(g(5))-1} = 2$ باشد حاصل $\frac{g(3)}{f(5)}$ کدام است. ؟

$g(x) = x$ $f(x) = c$ $(D_f = D_g = \mathbb{R})$

$$\frac{3 + f(1)}{f(5) - 1} = 2 \rightarrow \frac{3 + c}{c - 1} = 2 \rightarrow 3 + c = 2c - 2 \rightarrow c = 5$$

$$\frac{g(3)}{f(5)} = \frac{3}{5}$$

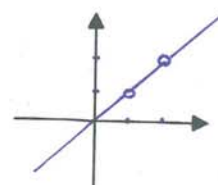
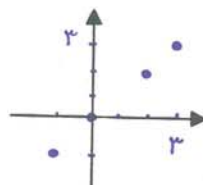
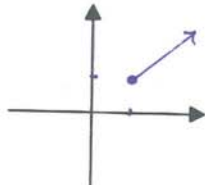
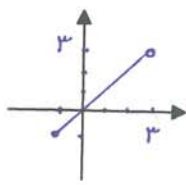
f تابع همانی با دامنه‌های زیر رسم کنید. ؟

$D_f = [-1, 3]$

$D_f = [1, +\infty)$

$D_f = \{-1, 0, 2, 3\}$

$D_f = \mathbb{R} - \{1, 2\}$



تابع ثابت $f(x) = 2$ را با دامنه‌های زیر رسم کنید. ؟

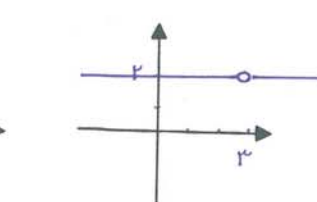
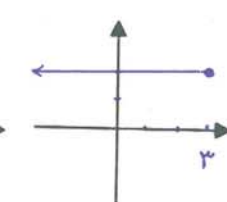
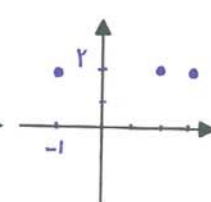
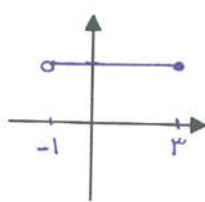
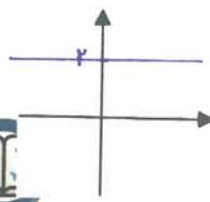
$D_f = \mathbb{R}$

$D_f = (-1, 3]$

$D_f = \{-1, 2, 3\}$

$D_f = (-\infty, 2]$

$D_f = \mathbb{R} - \{3\}$



اگر $f(x) = (a-b)x + c + 3$ و $g(x) = (a+b)x - 2a$ تابع تابعی ثابت باشد مقدار $f(a) + g(b)$ را

بیابید.

$$c + 3 = 0 \rightarrow c = -3$$

$$a - b = 1$$

$$a + b = 0 \rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$f(x) = x$$

$$g(x) = -1$$

$$b = -\frac{1}{2} \quad f(a) + g(b) = f\left(\frac{1}{2}\right) + g\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

اگر $f(x) = \frac{(a-b)x + 3}{3x - 2}$ تابعی ثابت است مقدار a را بیابید.

$$f(x) = \frac{(a-b)x + 3}{3x - 2} = c \rightarrow (a-b)x + 3 = 3cx - 2c$$

$$-2c = 3 \rightarrow c = \frac{3}{-2} \quad a - b = 3c \quad c = \frac{3}{-2} \rightarrow a - b = \frac{-9}{2}$$

$$a = \frac{1}{2}$$

در تابع همانی f اگر $f(5-2m) = 3m + 12$ باشد حاصل $f(5m+1)$ را بیابید.

$$f(x) = x$$

$$5 - 2m = 3m + 12 \rightarrow -5m = 7 \rightarrow m = \frac{7}{-5}$$

$$f(5m+1) \xrightarrow{m = \frac{7}{-5}} f\left(-\frac{7}{5} + 1\right) = f\left(-\frac{2}{5}\right) = -\frac{2}{5}$$

اگر f همانی و g ثابت باشد و $\frac{f(2)g(2)}{f^2(\sqrt{2}) + g(\sqrt{2})} = 1$ حاصل $\frac{f(4) + g(4)}{g(1) + 1}$ را بیابید.

$$f(x) = x$$

$$g(x) = c \rightarrow \frac{2c}{2+c} = 1 \rightarrow 2c = 2+c \rightarrow c = 2$$

$$\rightarrow \frac{f(4) + g(4)}{g(1) + 1} = \frac{4 + 2}{2 + 1} = 2$$

اگر $f = \{(3, n^2 - 2n)(m, 8)(2n - 5, t)(4, 3m + 2)\}$ یک تابع ثابت سه عضوی باشد حاصل $m + n + t$ را

$$n^2 - 2n = 8 \rightarrow n^2 - 2n - 8 = 0 \rightarrow (n-4)(n+2) = 0 \rightarrow \begin{cases} n=4 \\ n=-2 \end{cases}$$

$$t = 8$$

$$3m + 2 = 8 \rightarrow 3m = 6 \rightarrow m = 2$$

$$n=4, t=8, m=2 \rightarrow f = \{(3, 8)(2, 8)(4, 8)\} \quad \text{۳ عضوی}$$

$$n=-2, t=8, m=2 \rightarrow f = \{(3, 8)(2, 8)(-9, 8)(4, 8)\} \quad \text{۴ عضوی}$$

اگر $f(x) = \frac{2x^2 + 3x + c}{ax^2 + bx - 1}$ تابع همانی باشد حاصل a, b, c, d را بیابید.

$$f(x) = x$$

$$\frac{2x^2 + 3x + c}{ax^2 + bx - 1} = x \rightarrow 2x^2 + 3x + c + d = ax^2 + bx - x$$

$$a=2 \quad b=3 \quad c=-1 \quad d=0$$

اگر $f = \{(n^2 + 2n, 8)(n+3, k)(m+7, t)\}$ یک تابع همانی با دامنه دو عضوی باشد و $m, n \in \mathbb{N}$ مقدار

$$n^2 + 2n = 8 \rightarrow \begin{cases} n=2 \\ n=-4 \end{cases} \text{ غ ق و غ ق و غ ق}$$

را بیابید. $m+t+k+n$

$$n=2 \rightarrow f = \left\{ (8, 8) \left(\underset{k=8}{5}, k \right) (m+7, t) \right\}$$

چون ۲ عضوی است

$$m+7 = 8 \rightarrow m=1, \quad t=8 \quad \text{ق و غ}$$

$$m+7 = 5 \rightarrow m=-2, \quad t=8 \quad \text{غ ق و غ ق و غ ق}$$

$$n=2, \quad m=1, \quad t=8 \rightarrow m+t+k+n = 17$$

آیا توابع زیر ثابت هستند.

$$f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \text{تابع ثابت}$$

$$f(x) = \tan x \cot x = 1 \quad \text{تابع ثابت}$$

$$f(x) = (\sin^2 x)(2 + \tan^2 x + \cot^2 x) \cos^2 x = \sin^2 x \cos^2 x (1 + \tan^2 x + 1 + \cot^2 x)$$

$$= \sin^2 x \cos^2 x \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) = \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \text{تابع ثابت}$$

اگر $f(x) = (a-c)x^2 + (a-b)x + 2x - 4 + b$ تابع همانی است مقدار $\frac{f(a)+f(b)}{f(a+c)}$ را بیابید.

$$f(x) = (a-c)x^2 + (a-b+2)x + b-4 = x$$

$$a-c=0 \rightarrow a=c \rightarrow c=2$$

$$a-b+2=1 \rightarrow a-b=-1 \rightarrow a=2$$

$$b-4=0 \rightarrow b=4$$

$$\frac{f(a)+f(b)}{f(a+c)} = \frac{f(2)+f(4)}{f(4)} = \frac{3}{2}$$

توابع زیر را رسم کنید. ?

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = \frac{(x-1)(x+2)}{x-1} = x+2 \quad x \neq 1$$

x	0	1
y	2	3

$$f(x) = \frac{x^2}{x} = x \quad x \neq 0$$

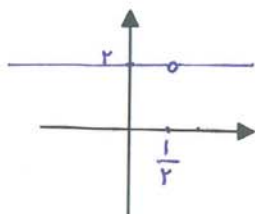
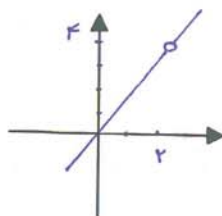
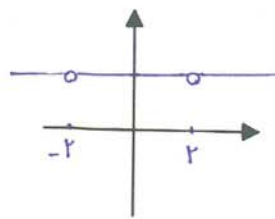
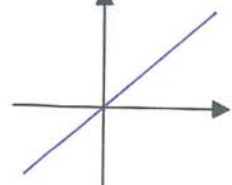
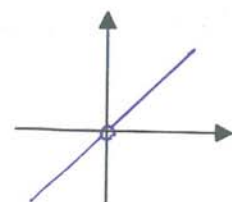
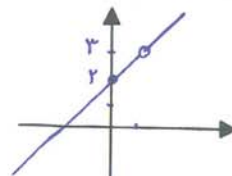
$$f(x) = \frac{x^2 + x}{x^2 + 1} = \frac{x(x^2 + 1)}{x^2 + 1} = x$$

$$f(x) = \frac{2x^2 - 8}{x^2 - 4} = \frac{2(x^2 - 4)}{x^2 - 4} = 2 \quad x \neq \pm 2$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} \rightarrow f(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x+2 \quad x \neq 2$$

x	0	1
y	2	3

$$f(x) = \frac{2x - 2}{2x - 1} = \frac{2(2x - 1)}{2x - 1} = 2 \quad x \neq \frac{1}{2}$$

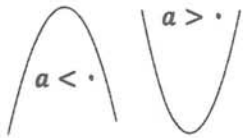


تابع درجه ۲ (سهمی)

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad a \neq 0$$

در فصل قبل با این تابع آشنا شدید.

دامنه این تابع \mathbb{R} و برد این تابع $\left[-\frac{\Delta}{4a}, +\infty\right)$ یا $\left(-\infty, \frac{\Delta}{4a}\right]$ است.

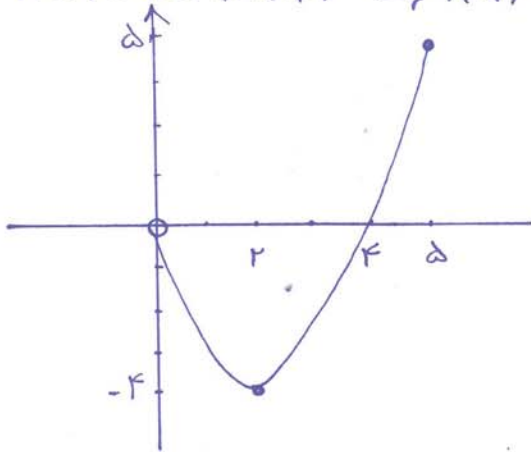


ضابطه یک تابع درجه ۲ را بیابید که از نقاط $(1, 4)$, $(-3, 16)$, $(2, 11)$ عبور کند سپس حاصل $f(-2)$ را بیابید.

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$\begin{aligned} (1, 4) &\rightarrow 4 = a + b + c & 1 & & 2-1 & & v = 2a + b \\ (2, 11) &\rightarrow 11 = 4a + 2b + c & 2 & & & & \\ (-3, 16) &\rightarrow 16 = 9a - 3b + c & 3 & & 3-2 & & \Delta = \Delta a - \Delta b \end{aligned} \rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{cases}$$

$$f(x) = 2x^2 + x + 1 \rightarrow f(-2) = 8 - 2 + 1 = 7$$



برد تابع $f(x) = x^2 - 4x$ را با دامنه $[0, 5]$ بیابید.

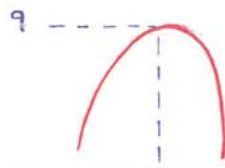
$$R_f = [-4, \Delta]$$

برد تابع $f(x) = \sqrt{8 + 2x - x^2}$ را بیابید.

$$y = -x^2 + 2x + 8 \rightarrow S(1, 9)$$

$$-\infty < -x^2 + 2x + 8 \leq 9 \xrightarrow{\sqrt{\quad}} 0 \leq \sqrt{-x^2 + 2x + 8} \leq 3$$

$$0 \leq R_f \leq 3$$



تابع چند ضابطه‌ای (قطعه‌ای): دامنه این توابع شامل چند بخش است و ورودی هر بخش ضابطه متفاوتی دارد.

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & x \in D_1 \\ f_2(x) & x \in D_2 \\ \vdots & \vdots \\ f_n(x) & x \in D_n \end{cases} \quad D_1 \cap \dots \cap D_n = \emptyset$$

برای محاسبه دامنه و برد توابع چند ضابطه‌ای باید اجتماع بگیریم.

اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 - 8x & x \geq 2 \\ x + 2 & x < 2 \end{cases}$ باشد، حاصل عبارات زیر را بیابید.

$$f(3) = 9 - 24 = -15$$

$$f(2) = 4 - 16 = -12$$

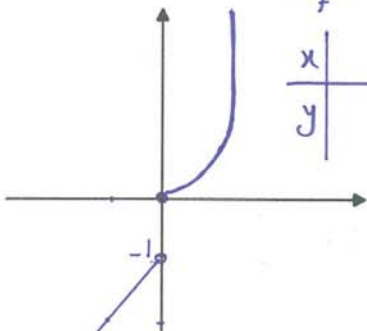
$$f(1) = 1 + 2 = 3$$

$$f(f(1)) = f(3) = -15$$

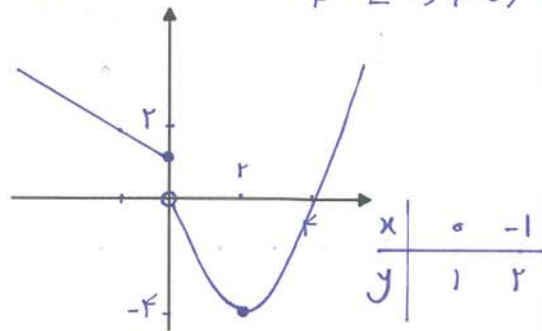
رسم توابع چند ضابطه: ابتدا مرزها تعیین شود و هر تابع در دامنه خودش نصب شود

نمودار توابع زیر را رسم و دامنه و برد را تعیین کنید.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ 2x - 1 & x < 0 \end{cases} \quad D_f = \mathbb{R} \quad R_f = (-\infty, -1) \cup [0, +\infty)$$

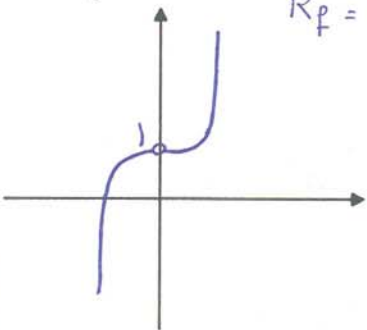


x	0	-1
y	-1	-3

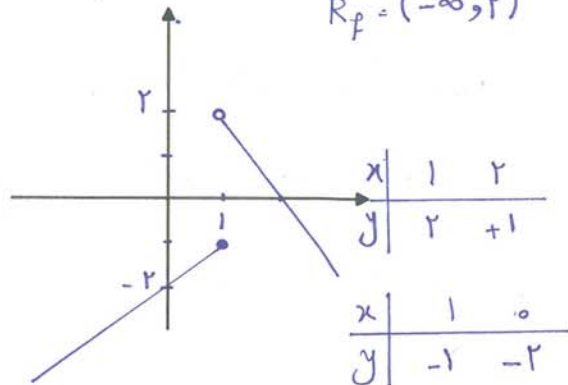


x	0	-1
y	1	2

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x > 0 \\ 1 - x^2 & x < 0 \end{cases} \quad D_f = \mathbb{R} - \{0\} \quad R_f = \mathbb{R} - \{1\}$$



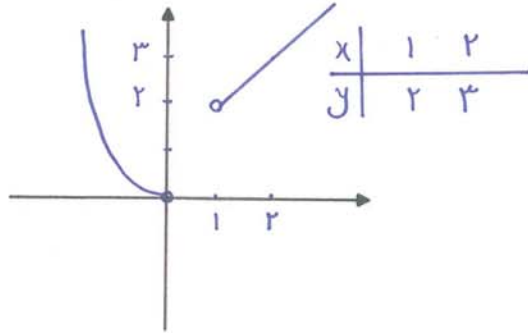
$$f(x) = \begin{cases} -x + 3 & x > 1 \\ x - 2 & x \leq 1 \end{cases} \quad D_f = \mathbb{R} \quad R_f = (-\infty, 2)$$



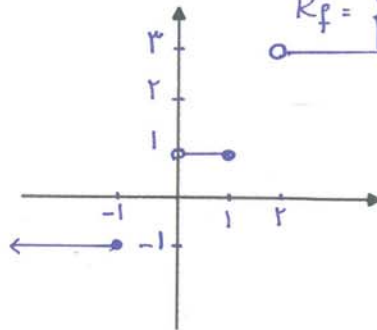
x	1	2
y	2	+1

x	1	0
y	-1	-2

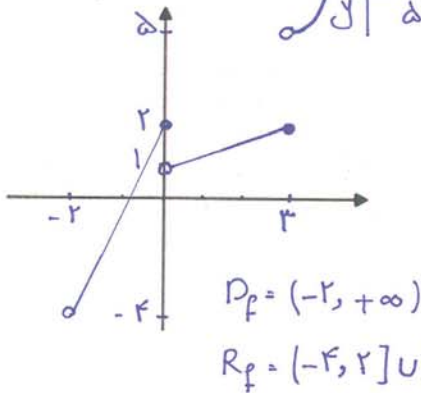
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ x+1 & x > 0 \end{cases} \quad D_f = (-\infty, 0] \cup (0, +\infty) \\ R_f = [0, +\infty)$$



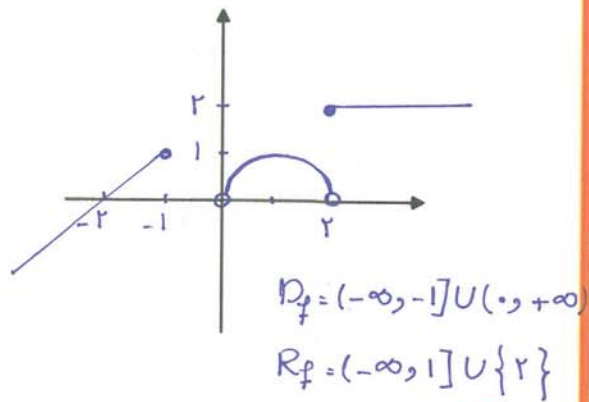
$$f(x) = \begin{cases} 2 & x > 2 \\ 1 & 0 < x \leq 1 \\ -1 & x \leq -1 \end{cases} \quad D_f = (-\infty, -1] \cup (0, 1] \cup (2, +\infty) \\ R_f = \{-1, 1, 2\}$$



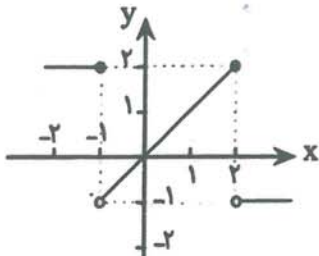
$$f(x) = \begin{cases} 2+3x & -2 < x \leq 0 \\ \frac{1}{3}x+1 & 0 < x \leq 3 \\ x^2-2 & x > 3 \end{cases}$$



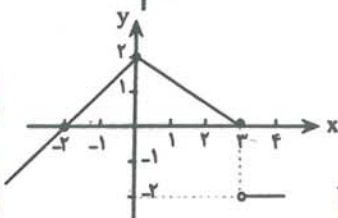
$$f(x) = \begin{cases} 2+x & x \leq -1 \\ 2x-x^2 & 0 < x < 2 \\ 2 & x \geq 2 \end{cases}$$



با توجه به شکل های زیر ضابطه تابع به همراه دامنه برد را مشخص کنید. ?

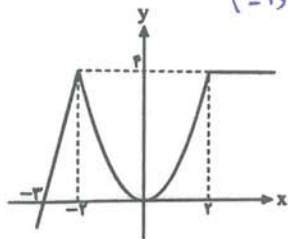


$$f(x) = \begin{cases} 2 & x \leq -1 \\ x & -1 \leq x \leq 2 \\ -1 & x > 2 \end{cases} \quad D_f = \mathbb{R} \\ R_f = [-1, 2]$$



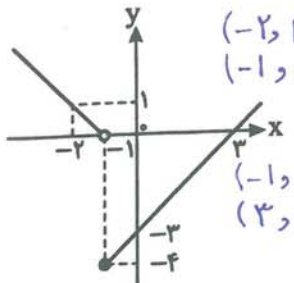
$$f(x) = \begin{cases} x+2 & x \leq 0 \\ -\frac{2}{3}x+2 & 0 \leq x \leq 3 \\ -2 & x > 3 \end{cases} \quad D_f = \mathbb{R} \\ R_f = (-\infty, 2]$$

$(-2, 0) \rightarrow m=1 \quad y=x+2$
 $(0, 2) \rightarrow m = -\frac{2}{3} \quad y = -\frac{2}{3}x+2$



$$\begin{aligned} (-3, 0) &\rightarrow m = \frac{4}{1} = 4 & y = 4x + b & \xrightarrow{(-3, 0)} \\ (-2, 4) & & & \\ & \bullet = -12 + b \rightarrow b = 12 & & y = 4x + 12 \end{aligned}$$

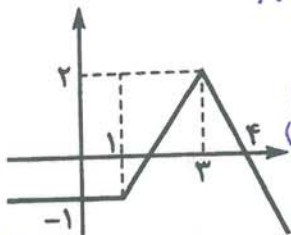
$$f(x) = \begin{cases} 4x + 12 & x \leq -2 \\ x^2 & -2 < x < 2 \\ 4 & x \geq 2 \end{cases} \quad \begin{aligned} D_f &= \mathbb{R} \\ R_f &= (-\infty, 4] \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} (-2, 1) &\rightarrow m = \frac{1}{-1} = -1 & y = -x + h & \xrightarrow{(-1, 0)} \bullet = 1 + h \\ (-1, 0) & & & h = -1 \\ & & & y = -x - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (-1, -4) &\rightarrow m = \frac{-4}{-2} = 2 & & \\ (3, 0) &\rightarrow m = \frac{0}{-2} = 0 & & \\ & & & y = x - 3 \end{aligned}$$

$$f(x) = \begin{cases} -x - 1 & x < -1 \\ x - 3 & x \geq 1 \end{cases} \quad \begin{aligned} D_f &= \mathbb{R} \\ R_f &= [-3, +\infty) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} (3, -1) &\rightarrow m = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2} & y = -\frac{1}{2}x + h \\ (1, 2) & & & \rightarrow (1, 2) \rightarrow h = 1 \end{aligned}$$

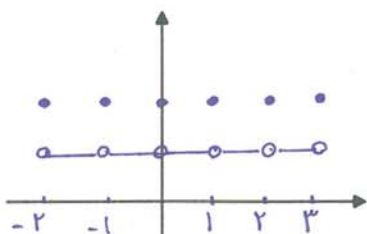
$$f(x) = \begin{cases} 2 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (1, -1) &\rightarrow m = \frac{2}{2} = 1 & y = \frac{2}{2}x + h & \rightarrow -1 = \frac{2}{2} + h \rightarrow h = -\frac{5}{2} \\ (3, 2) & & & \end{aligned}$$

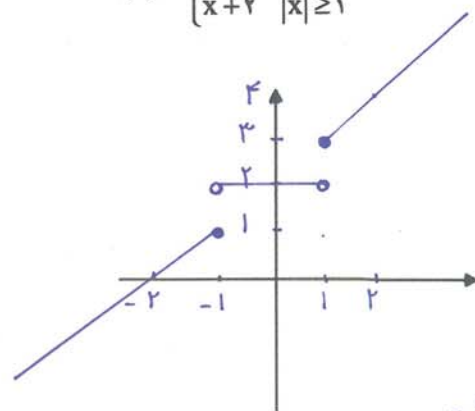
$$f(x) = \begin{cases} -1 & x < 1 \\ \frac{2}{2}x - \frac{5}{2} & 1 \leq x \leq 3 \\ -2x + 1 & x > 3 \end{cases}$$

توابع زیر را رسم کنید و دامنه و بردار را بیابید. ?

$$f(x) = \begin{cases} 2 & |x| < 1 \\ x + 2 & |x| \geq 1 \end{cases}$$



$$\begin{aligned} D_f &= \mathbb{R} \\ R_f &= \{1, 2\} \end{aligned}$$



$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & x \leq -1 \\ 2 & -1 < x < 1 \\ x + 2 & x \geq 1 \end{cases}$$

$$R_f = (-\infty, 1] \cup [3, +\infty) \cup \{2\}$$

$$D_f = \mathbb{R}$$

x	-1	-2
y	1	0
x	1	2
y	3	4

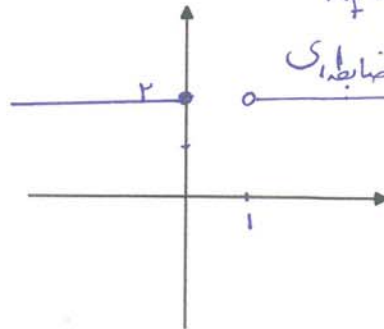
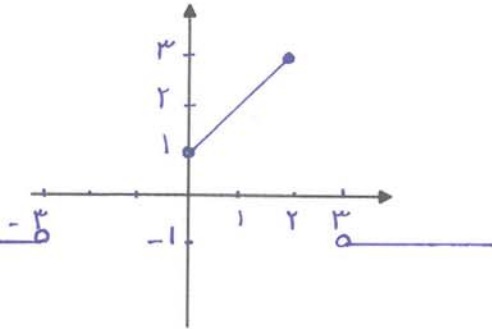


$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x' - 2x \leq 0 \\ -1 & |x| > 2 \end{cases} = \begin{cases} -1 & x < -2 \\ x+1 & -2 \leq x \leq 2 \\ -1 & x > 2 \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} 2 & x > 1 \\ 2 & x \leq 0 \end{cases}$$

$$D_f = (-\infty, 0] \cup (1, +\infty)$$

$$R_f = \{2\}$$

تابع ثابت چندضابطه‌ای



$$D_f = (-\infty, -2) \cup [0, 2] \cup (2, +\infty)$$

$$R_f = [1, 3] \cup \{-1\}$$

اگر $f(x) = \begin{cases} 2x+a & x \geq 1 \\ 3x+2a & x \leq 1 \end{cases}$ یک تابع باشد حاصل $f(5)$ را بیابید.

$$f(1) = f(1) \rightarrow 2+a = 3+2a \rightarrow a = -1$$

$$f(5) = 2(5) - 1 = 9$$

اگر $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} & x > 0 \\ \sqrt{-x} & x \leq 0 \end{cases}$ حاصل $f(f(f(-81)))$ را بیابید.

$$f(-81) = \sqrt{81} = 9$$

$$f(f(-81)) = f(9) = -\frac{1}{9}$$

$$f(f(f(-81))) = f(-\frac{1}{9}) = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$$

اگر $f(x) = \begin{cases} 2x & x \in \mathbb{Z} \\ -3x^2 & x \in \mathbb{Z} \end{cases}$ حاصل $f(2) + f(\frac{1}{3})$ را بیابید.

$$f(2) = -3(2)^2 = -12$$

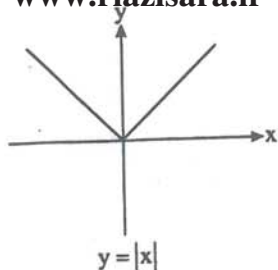
$$f(\frac{1}{3}) = 2(\frac{1}{3}) = \frac{2}{3}$$

$$\rightarrow f(2) + f(\frac{1}{3}) = -12 + \frac{2}{3} = -11\frac{2}{3}$$

اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 - x & x \geq 1 \\ \frac{1}{x} & x < 1 \end{cases}$ جواب‌های معادله $f(x) = 2$ را بیابید.

$$x \geq 1 \rightarrow x^2 - x = 2 \rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \begin{cases} x = -1 \text{ غن} \\ x = 2 \text{ ق} \end{cases}$$

$$x < 1 \rightarrow \frac{1}{x} = 2 \rightarrow x = \frac{1}{2} \text{ ق}$$

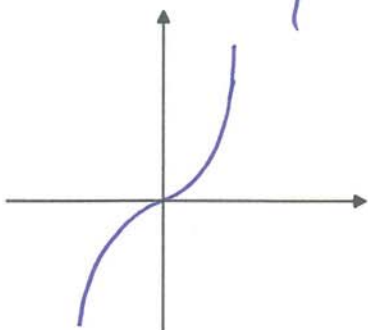


$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

تابع قدر مطلق

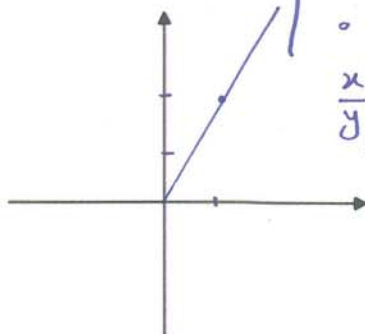
روش کلی برای رسم توابع شامل قدر مطلق تعیین علامت به ازای ریشه‌های داخل قدر مطلق و حذف قدر مطلق

$$y = x|x| = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$$



نمودار توابع زیر را رسم کنید.

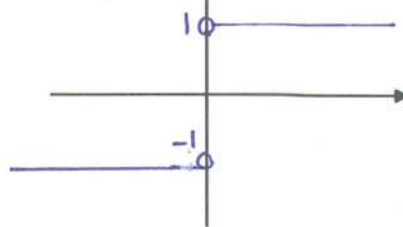
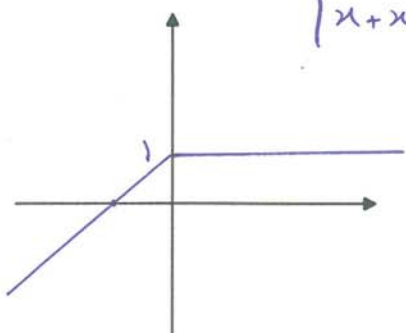
$$y = x + |x| = \begin{cases} 2x & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$



x	0	1
y	0	2

$$y = x - |x| + 1 = \begin{cases} x - x + 1 & x \geq 0 \\ x + x + 1 & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 2x + 1 & x < 0 \end{cases}$$

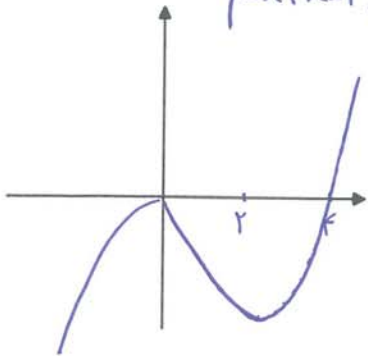
$$y = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} \frac{x}{x} & x > 0 \\ -\frac{x}{x} & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$



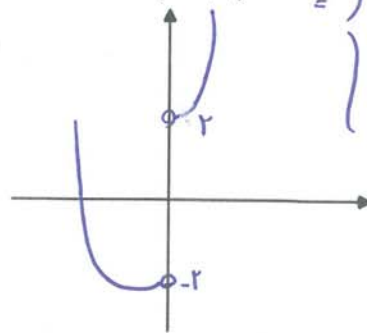
x	0	-1
y	1	-1



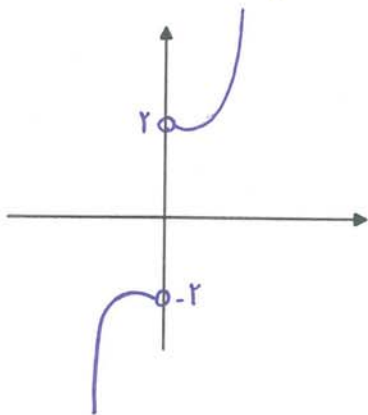
$$y = |x|(x-f) = \begin{cases} x(x-f) & x \geq 0 \\ -x(x-f) & x < 0 \end{cases}$$



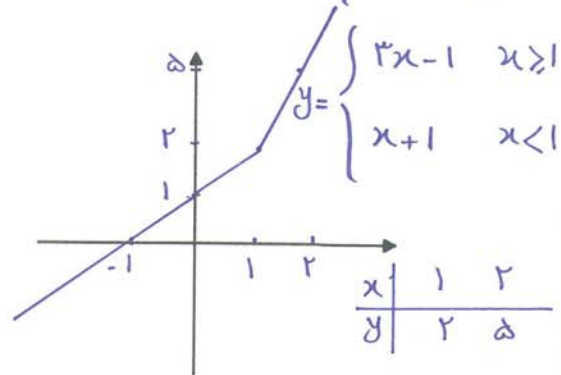
$$y = x \left(x + \frac{r}{|x|} \right) = \begin{cases} x^2 + r & x > 0 \\ x^2 - r & x < 0 \end{cases}$$



$$y = x \left(|x| + \frac{r}{|x|} \right) = \begin{cases} x^2 + r & x > 0 \\ -x^2 - r & x < 0 \end{cases}$$



$$f(x) = |x-1| + 2x = \begin{cases} x-1+2x & x \geq 1 \\ -(x-1)+2x & x < 1 \end{cases}$$

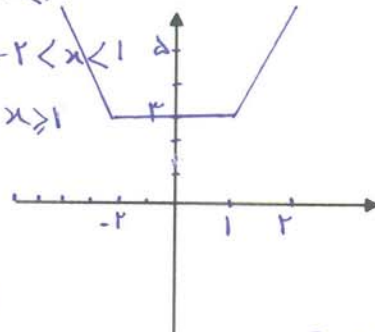


x	1	2
y	2	5

x	1	-1
y	2	0

$$y = |x-1| + |x+2|$$

$$y = \begin{cases} -(x-1) - (x+2) & x \leq -2 \\ -(x-1) + (x+2) & -2 < x < 1 \\ x-1 + x+2 & x \geq 1 \end{cases}$$



x	-2	-3
y	3	5

x	1	2
y	3	5

$$y = \begin{cases} -2x-1 & x \leq -2 \\ 3 & -2 < x < 1 \\ 2x+1 & x \geq 1 \end{cases}$$

این تابع در بازه $[-2, 1]$ ثابت است

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

تبدیل توابع

الف) انتقال توابع

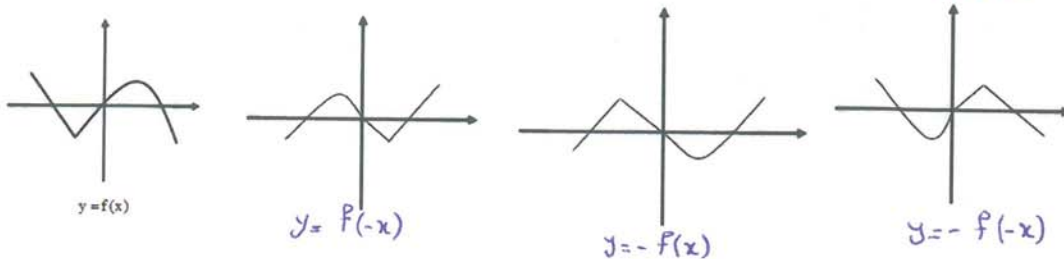
عمودی $y = f(x) \pm k$: نمودار f به اندازه k واحد بالا یا پایین می‌رود.
افقی: $y = f(x \pm k)$: نمودار f به اندازه k واحد به راست یا چپ می‌رود.

ب) انبساط و انقباض

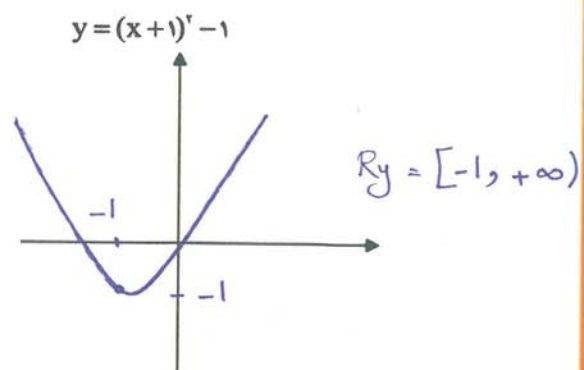
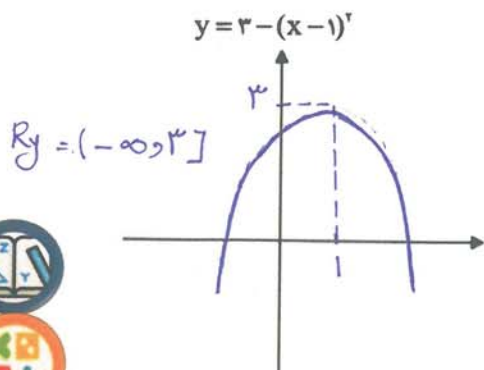
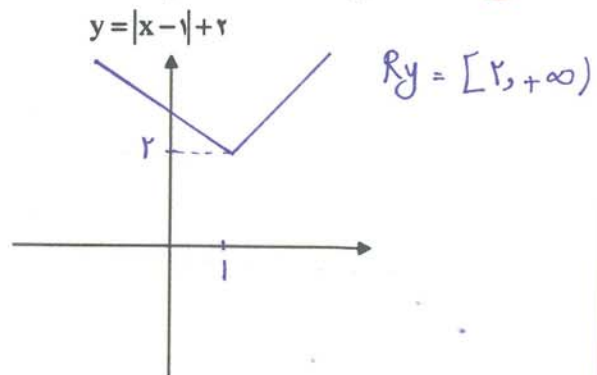
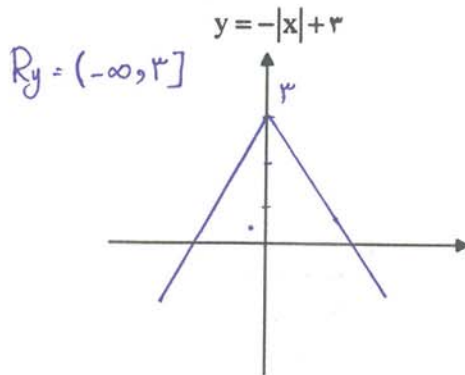
عمودی: $y = kf(x)$: عرض‌ها k برابر می‌شوند.

افقی: $y = f(kx)$: طول‌ها $\frac{1}{k}$ برابر می‌شوند.

انعکاس (قرینه):



نمودار توابع زیر را با انتقال رسم کنید و دامنه و برد را تعیین کنید. ?

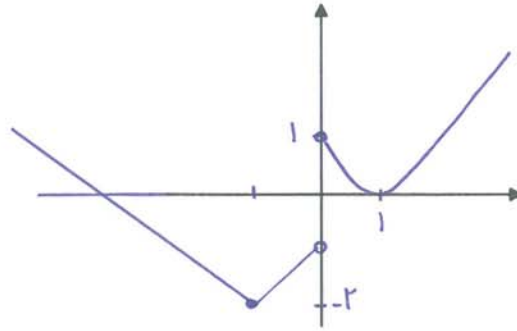


دانلود از سایت ریاضی سرا

www.riazisara.ir

$$y = \begin{cases} (x-1)^2 & x > 0 \\ |x+1| - 2 & x < 0 \end{cases}$$

$$Ry = [-2, +\infty)$$

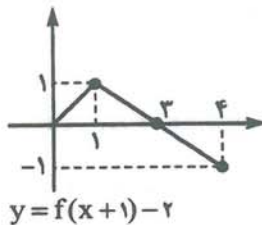


برای رسم تابع $g(x) = x^2 + 4x + 3$ از روی $f(x) = x^2$ کدام مراحل لازم است. **?**

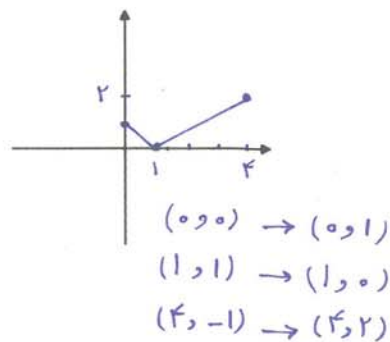
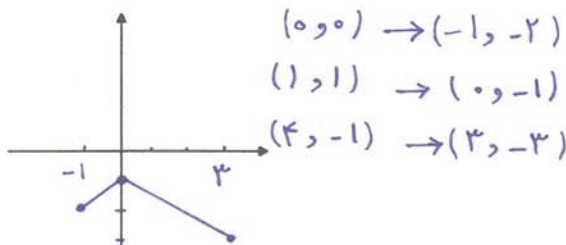
$$g(x) = x^2 + 4x + 4 - 1 = (x+2)^2 - 1$$

$$f(x) = x^2 \xrightarrow[\text{یک واحد پایین}]{\text{دو واحد سمت چپ}} (x+2)^2 - 1$$

نمودار تابع f داده شده نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید. **?**



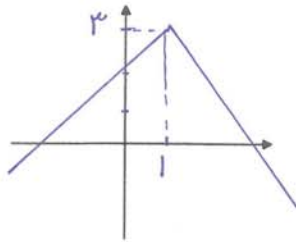
$$y = -f(x) + 1$$



الف) برای رسم نمودار تابع $f(x) = 3 - x^2$ کافیت نمودار $y = x^2$ نسبت به محور y چنانچه قرینه کنیم سپس در امتداد محور x نمودار تابع را ۳ واحد به سمت بالا انتقال دهیم. **?**

ب) برای رسم نمودار $f(x) = x^2 - 4x + 7$ کافیت نمودار $y = x^2$ را در امتداد محور x ... واحد به سمت راست ... و در امتداد محور y ... واحد به سمت بالا ... انتقال دهیم.

$$f(y) = (x-2)^2 + 3$$



نمودار تابع $y = 3 - \sqrt{x^2 - 2x + 1}$ را رسم کنید. ?

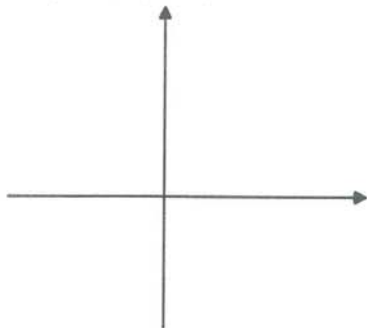
$$y = 3 - \sqrt{(x-1)^2} = 3 - |x-1|$$

$$D_f = \mathbb{R}$$

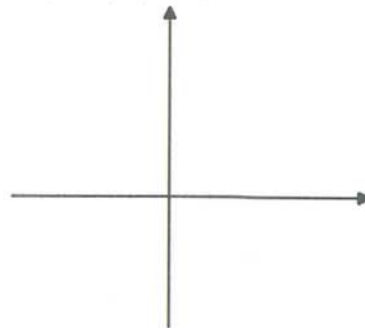
$$R_f = (-\infty, 3]$$

رسم دو تابع مهم

$$y = |x+a| + |x+b|$$

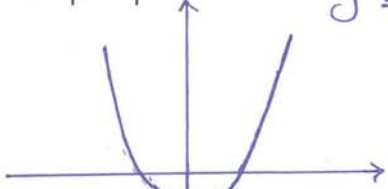


$$y = |x+a| - |x+b|$$



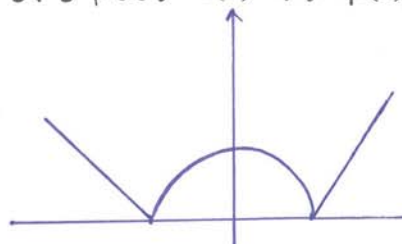
رسم تابع $y = |f(x)|$ ابتدا $y = f(x)$ را رسم کن سپس y های منفی پاک و به بالای محور y ها انتقال پیدا کند. ?

$$y = |x^2 - 1|$$



$$y = x^2 - 1$$

$$y = |x^2 - 1|$$



نمودار تابع $y = -x^2 + 2x + 5$ را 3 واحد به طرف x های مثبت، سپس 2 واحد به طرف y های منفی انتقال می دهیم ?

$$-(x-3)^2 + 2(x-3) + 5 - 2$$

$$= -x^2 + 7x - 9 + 2x - 6 + 3 \Rightarrow y = -x^2 + 9x - 12 \rightarrow -x^2 + 9x - 12 > x$$

$$-x^2 + 7x - 12 > 0 \rightarrow x^2 - 7x + 12 < 0 \rightarrow (x-3)(x-4) < 0$$

x	3	4
y	$+$	$-$

پاسخ $(3, 4)$

مساحت ناحیه محدود به نمودار دو تابع $y = x + |x|$ و $y = 2 - |x|$ را بیابید. ?

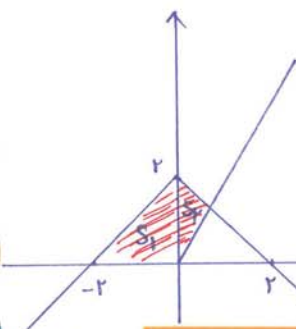
$$y = 2x \quad y = \begin{cases} 2x & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad y = 2 - |x| = \begin{cases} 2-x & x \geq 0 \\ 2+x & x < 0 \end{cases}$$

$$S_1 = \frac{1}{2} (2)(2) = 2 \quad 2x = 2-x \rightarrow x = \frac{2}{3}$$

$$S_2 = \frac{1}{2} (2) \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}$$

$$y = 2+x$$

$$S_1 + S_2 = 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$$





پایه تحصیلی : دهم

نام دبیر : مهندس حسن پور

عنوان آزمون : تابع



۱ اگر $f(x) = \frac{ax^2 + bx^2 - cx - 2}{x^2 + 3x + 1}$ یک تابع ثابت و $g(x) = \frac{dx^2 + ex^2 + fx^2 + gx}{-2x^2 + 3x + 1}$ یک تابع همانی باشد، حاصل

کدام است $\frac{a+b+c}{d+e+f+g}$ ؟

۲ ۴

۳ ۳

۱ ۲

۴ ۱

۲ مساحت بین دو نمودار $y_1 = |x + 1|$ و $y_2 = -|x + 2| + 3$ کدام است؟

۸ ۴

۴ ۳

۶ ۲

۲ ۱

۳ مساحت ناحیه‌ای که به محورهای مختصات و نمودار توابع $f(x) = |x - 2|$ و $g(x) = |x| + 1$ محصور می‌شود، کدام است؟

$\frac{7}{4}$ ۴

$\frac{15}{8}$ ۳

$\frac{9}{8}$ ۲

۲ ۱



۴ اگر f تابع همانی، g تابعی ثابت و h تابعی خطی باشد به طوری که $h(2) = 0$ ، $h(4) = 6$ و $h(x) = -2$ و $\frac{f(2) + g(-2)}{2g(0)}$ آنگاه حاصل

کدام است؟ $\frac{f\left(\frac{1}{5}\right) + g(1)}{h\left(\frac{7}{2}\right)}$

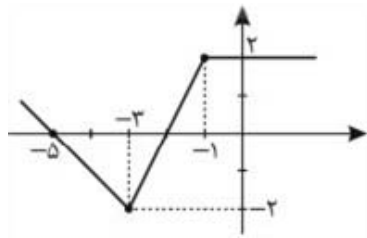
$-\frac{2}{5}$ (۴)

$-\frac{1}{5}$ (۳)

$\frac{2}{5}$ (۲)

$\frac{1}{5}$ (۱)

۵ با توجه به نمودار تابع f ، حاصل $f(-4) + 4f\left(-\frac{3}{2}\right) + f(4)$ کدام است؟



۴ (۴)

۵ (۳)

-۳ (۲)

۷ (۱)

۶ اگر f تابعی همانی و g تابع ثابت باشد، به طوری که $f(\sqrt{a} - 2a) = 9$ و $g(3 - 3\sin^2 x) = 7a - 2$ آنگاه حاصل $f(\sqrt{7a-8}) + g(\sqrt{1-a})$ کدام است؟

-۱ (۴)

۱ (۳)

۸ (۲)

۱۶ (۱)



۷ اگر $f(x) = \begin{cases} 3x + 2 & x > 0 \\ 4x + 5 & x < 0 \end{cases}$ و بدانیم $f(\sqrt{a} - 1) = 13$ آنگاه a کدام است؟

$\frac{9}{196}$ (۴)

$\frac{196}{9}$ (۳)

$\frac{1}{9}$ (۲)

۹ (۱)

۸ اگر رابطه‌ی $f = \{(a, x + y), (b, -y), (a, 1), (b, 2x - y)\}$ تابع باشد، مقدار عبارت $2x + 2y$ کدام است؟ ($a \neq b$)

-۱۲ (۴)

۱ (۳)

۱۲ (۲)

صفر (۱)

۹ اگر $f(x) = 2x + 3$ ، $g(x) = x^2 + 1$ ، $h(x)$ تابع همانی و $k(x) = 2$ تابع ثابت باشند،

مقدار $\frac{h(f(2)) + h(g(2))}{k(f(2)) + g(k(2))}$ کدام است؟

$\frac{4}{7}$ (۴)

$\frac{12}{7}$ (۳)

$\frac{12}{14}$ (۲)

$\frac{2}{5}$ (۱)

۱۰ حداقل چند عضو از مجموعه $f = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{Z}, x = \frac{20}{1 + |y|}\}$ حذف شود تا f یک تابع باشد؟

۴ (۴)

۵ (۳)

۶ (۲)

۷ (۱)



۱۱) اگر تابع f به طوری که $f(x^y - x) = x^y - x^y$ یک تابع همانی باشد، حاصل جمع عضوهای مجموعه دامنه تابع f کدام است؟

$\frac{3}{8}$ (۴)

$\frac{1}{2}$ (۳)

$\frac{3}{2}$ (۲)

۱ (۱)

۱۲) نمودار تابع $f(x) = x^2 - 4x + 3$ را یک واحد در راستای محور x ها به سمت چپ انتقال داده و سپس نسبت به محور y ها قرینه کرده و در نهایت یک واحد در راستای محور y ها به پایین منتقل کرده‌ایم. مجموع طول و عرض رأس سهمی نهایی کدام است؟

-۳ (۴)

-۳/۵ (۳)

-۴ (۲)

-۲/۵ (۱)

۱۳) اگر تابع f ، تابع خطی و $3f(1-x) + f(x+2) = 2x - 3$ باشد، مقدار $2f\left(-\frac{1}{2}\right) + 3f\left(\frac{1}{2}\right)$ کدام است؟

۳ (۴)

۵ (۳)

۲ (۲)

۴ (۱)

۱۴) اگر $f(x) = \begin{cases} mx^2 + 1 & ; x \geq -2 \\ |x| - 17 & ; x \leq -2 \end{cases}$ ضابطه یک تابع باشد، حاصل $f(3+m)$ کدام است؟

-۱۶ (۴)

-۱۵ (۳)

-۴ (۲)

-۳ (۱)

۱۵) تابع خطی $f(x) = ax + 2b$ مفروض است. اگر به ازای هر x داشته باشیم $f(x+1) = f(x) + 1$ و $f(-2) = 8$ باشد مقدار $a + b$ کدام است؟

۵ (۴)

۱ (۳)

۶ (۲)

۸ (۱)



۱۶ نمودار تابع خطی f ، محور طول‌ها را در نقطه‌ای به طول $\frac{-1}{2}$ و محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض $\frac{1}{4}$ قطع می‌کند. نمودار f ، نیمساز ربع دوم و چهارم را در نقطه‌ای با کدام عرض قطع می‌کند؟

- ۱ $\frac{1}{2}$ ۲ $-\frac{1}{2}$ ۳ $\frac{1}{4}$ ۴ $-\frac{1}{4}$

۱۷ رابطه $f = \{(a, x + y), (b, m^2), (a, m^2 - 1), (b, x - y), (a, 4)\}$ یک تابع است. مقدار $x^2 + y^2$ کدام است؟

- ۱ $2/5$ ۲ $20/5$ ۳ 24 ۴ 42

۱۸ نمودار $\frac{1}{f}$ را در امتداد محور x ها، a واحد در جهت مثبت انتقال داده و آن را g می‌نامیم. سپس تابع $|g|$ را در امتداد محور y ها، 2 واحد در جهت

منفی انتقال می‌دهیم. طول نقطه برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع $\frac{1}{|f|}$ برابر $\frac{\sqrt{2}}{2}$ است. اگر f تابع همانی باشد، اختلاف مقادیر در تساوی $f(x + a) = 3$ کدام است؟

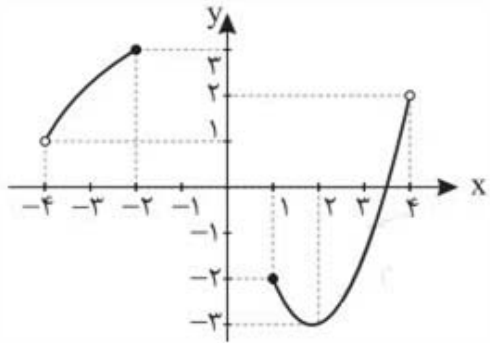
- ۱ $2 + \sqrt{2}$ ۲ 2 ۳ $2 - \sqrt{2}$ ۴ $\sqrt{2}$

۱۹ برد تابع قطعه‌ای $f(x) = \begin{cases} x^2 & ; x < 0 \\ x - 2 & ; x \geq 0 \end{cases}$ به صورت بازه $[a, +\infty)$ است. خط $y = -a$ نمودار $f(x)$ را با کدام طول مثبت قطع می‌کند؟

- ۱ 1 ۲ 2 ۳ $\sqrt{2}$ ۴ 4



۲۰ اشتراک دامنه و برد تابع f که نمودار آن به صورت زیر است، شامل چند عدد صحیح می‌باشد؟



۵ ۴

۳ ۳

۶ ۲

۴ ۱

۲۱ اگر دامنه‌ی تابع $f(x) = x^2 - 4x + 3$ بازه‌ی $(1, 5]$ باشد، برد این تابع کدام است؟

۴ $(-1, 8]$

۳ $(0, 8]$

۲ $[-1, 8]$

۱ $[0, 8]$

۲۲ کدام رابطه قطعاً تابع است؟

۲ رابطه‌ای با دامنه $\{0, 1, 2\}$ و برد $\{1, 2, 3\}$

۱ رابطه‌ای با دامنه $\{0, 1, 2\}$ و برد $\{1, 2, 3, 4\}$

۴ رابطه‌ای با برد فقط $\{a\}$

۳ رابطه‌ای با دامنه فقط $\{a\}$

۲۳ اگر $f = \{(-2, 2), (a^2 + 3, 2), (b - 2, 2), (3a + 1, 2)\}$ تابعی با دامنه دو عضوی باشد، اختلاف حداکثر و حداقل مقدار $a + b$ کدام است؟

۴ ۳

۳ ۴

۲ ۱۲

۱ ۱۰



۲۴ اگر $f = \{(1, b), (-1, 2a + 3), (b + 1, c)\}$ تابع همانی، $g(x) = (1 - x)^2 + ex^2 + cx + b$ تابع ثابت و نیز $h(x) = m - n|2 - x|$ دارای برد $(-\infty, 4]$ بوده و محور y ها را با عرض -6 قطع کند، حاصل $g(mc + n) - h(a - b + e)$ کدام است؟

۱۶

۲۰

۲۴

۲۸

۲۵ اگر رابطه‌ی $f = \{(a^2 - 2a - 4, a), (b, a - 1), (c, b - a)\}$ یک تابع همانی با سه زوج مرتب باشد، حاصل جمع عضوهای مجموعه‌ی دامنه‌ی تابع f کدام است؟

۵

-۳

۶

-۴

۲۶ برد تابع $g(x) = \begin{cases} |x + 2| & -2 \leq x < 0 \\ x^2 - 2x & 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$ کدام است؟

$-1 \leq y < 2$

$-2 < y \leq 2$

$0 < y \leq 2$

$-2 \leq y < 1$

۲۷ اگر $f(x) = \begin{cases} 2ax & x > 0 \\ x + 3b - a & x \leq 0 \end{cases}$ تابع همانی باشد، حاصل $a + b$ کدام است؟

$\frac{1}{6}$

$\frac{1}{2}$

$\frac{1}{3}$

$\frac{2}{3}$



۲۸ کدام رابطه، تابع نیست؟

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & -2 \leq x \leq 1 \\ 3 - x & 0 \leq x < 5 \end{cases} \quad \text{۲}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & -2 \leq x \leq 1 \\ 4 - x & 2 \leq x < 4 \end{cases} \quad \text{۱}$$

$$f(x) = \begin{cases} -x + 3 & -4 \leq x \leq 0 \\ 3 - 3x & 0 \leq x \leq 5 \end{cases} \quad \text{۴}$$

$$f(x) = \begin{cases} x - 4 & -4 \leq x \leq 0 \\ 3 - 2x & 1 \leq x < 5 \end{cases} \quad \text{۳}$$

۲۹ در تابع f ، برد مجموعه‌ی یک عضو $\{k\}$ است و تابع همانی g با دامنه‌ی R تعریف شده و رابطه‌ی

$$\frac{-g(-k) - 3f(k)}{g(2) - 1} = 2(f(-2))^2 + 3g(k)$$

برقرار است، کدام می‌تواند باشد؟

$$-\frac{3}{2} \quad \text{۴}$$

$$-\frac{5}{2} \quad \text{۳}$$

$$\frac{1}{2} \quad \text{۲}$$

$$\frac{3}{2} \quad \text{۱}$$

۳۰ اگر نمودار تابع ثابت f ، از نقطه‌ی $(-2, 3)$ بگذرد، حاصل $(f(4))^2 + 3f(-1)$ کدام است؟

$$18 \quad \text{۴}$$

$$12 \quad \text{۳}$$

$$\text{صفر} \quad \text{۲}$$

$$-2 \quad \text{۱}$$

۳۱ هرگاه تابع $f(x) = \begin{cases} a & ; x = 2 \\ \frac{x^2 + bx + c}{x - 2} & ; x \neq 2 \end{cases}$ یک تابع خطی باشد $f(a)$ برابر است با:

$$1 \quad \text{۴}$$

$$-4 \quad \text{۳}$$

$$2 \quad \text{۲}$$

$$-1 \quad \text{۱}$$



۲۲ اگر f یک تابع همانی و g یک تابع ثابت باشد به نحوی که $g(m) - f(2m + 1) = 3$ و $f(m) = g(4) - 3$ ؛ آنگاه حاصل $f(g(m))$ برابر است با:

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵ (۵)

۲۳ چه تعداد از روابط زیر، یک تابع را مشخص می‌کند؟
 الف) رابطه‌ای که به هر عدد طبیعی، مقسوم‌علیه‌های آن را نسبت می‌دهد.
 ب) رابطه‌ای که به هر عدد طبیعی، ریشه(ها) پنجم آن را نشان می‌دهد.
 پ) رابطه‌ای که به هر فرد، گروه خونی او را نسبت می‌دهد.
 ت) رابطه‌ای که به هر فرد، قد او را نسبت می‌دهد.
 ث) رابطه‌ای که به هر فرد، دوستان او را نسبت می‌دهد.
 ج) رابطه‌ای که به هر عدد طبیعی، ریشه(ها)ی چهارم آن را نسبت می‌دهد.

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵ (۵)

۲۴ بازه‌ی $(2, 4)$ بزرگ‌ترین بازه‌ای است که تابع $f(x) = ax^2 + bx - 2$ در این بازه، بالای نمودار تابع $g(x) = 3x - 1$ قرار دارد. مقدار b کدام است؟

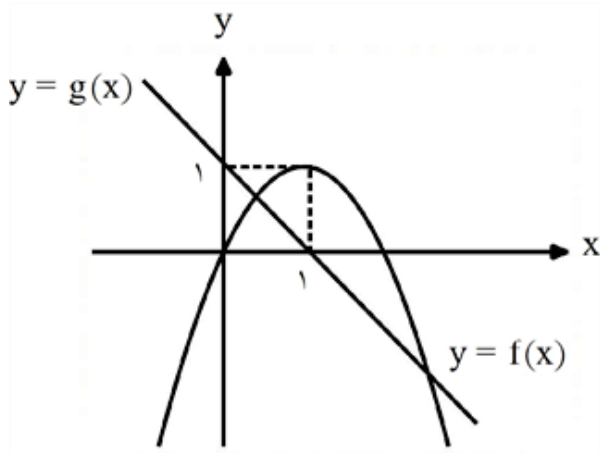
- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵ (۵)

۲۵ فرض کنید تابع f به صورت $f = \{(a, a^2); a = 0, 1, 2\} \cup \{(a, a + b) | a, b \in \{0, 1, 2\}\}$ توصیف شده باشد. تعداد عناصر f ، کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵ (۵)



۲۶ نمودار تابع با ضابطه‌های سهمی $y = f(x)$ و خط راست $y = g(x)$ در صفحه‌ی مختصات مطابق شکل زیر داده شده است. مجموع جواب‌های معادله‌ی $f(x) = g^2(x)$ کدام است؟



۲ (۴)

$\frac{1}{2}$ (۳)

$-\frac{1}{2}$ (۲)

-۲ (۱)

۲۷ در بازه‌ی (a, b) ، نمودار تابع $y = -x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$ ، بالاتر از نمودار تابع $y = 2x + |x|$ است. طول نقطه‌ی وسط این بازه کدام است؟

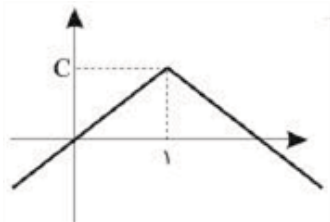
$-\frac{1}{5}$ (۴)

-۱ (۳)

$-\frac{1}{5}$ (۲)

-۲ (۱)

۲۸ نمودار تابع $y = a - |x + 2b|$ به صورت زیر می‌باشد، مقدار $a + b - c$ کدام است؟



صفر (۴)

$\frac{3}{2}$ (۳)

۱ (۲)

$-\frac{1}{2}$ (۱)



۳۹

چند مورد از مطالب زیر، درست هستند؟

تابعی وجود دارد که دامنه و برد آن تهی باشد.

تابعی وجود دارد که دامنه آن غیر تهی و برد آن تهی باشد.

تابعی وجود دارد که تعداد عضو دامنه کمتر از تعداد عضو برد باشد.

دو تابع وجود دارد که دامنه و برد آنها یکی ولی اشتراک آنها تهی باشد.

۱

۲

۳

۴

۴۰

اگر f یک تابع خطی باشد به طوری که $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{2x^2 - 2x + 2}{x}$ مقدار $f(5)$ را حساب کنید.



گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

۱

برای آنکه $f(x)$ یک تابع ثابت باشد، باید صورت ضریبی ثابت (و غیرصفر) از مخرج باشد، پس $a = 0$ است.

$$\frac{b}{1} = \frac{-c}{2} = \frac{-2}{1} \Rightarrow \begin{cases} b = -2 \\ c = 6 \end{cases}$$

حال برای آنکه $g(x)$ یک تابع همانی باشد، باید حاصل عبارت برابر x باشد، پس داریم:

$$\frac{dx^2 + ex^2 + fx^2 + gx}{-2x^2 + 2x + 1} = x$$

$$\Rightarrow dx^2 + ex^2 + fx^2 + gx = -2x^2 + 2x^2 + x \Rightarrow d = 0, e = -2, f = 2, g = 1$$

$$\Rightarrow \frac{0 + (-2) + 6}{0 + (-2) + 2 + 1} = \frac{4}{2} = 2$$

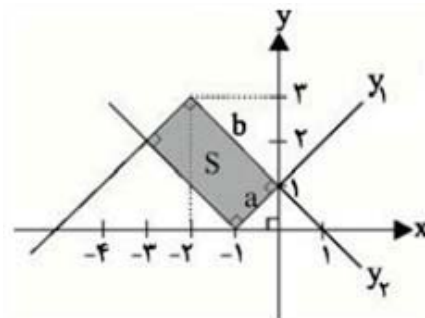
گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا نمودار توابع y_1 و y_2 را رسم می‌کنیم. مساحت بین دو نمودار قسمت سایه زده شده است که به صورت یک

۲

مستطیل با اضلاع a و b است. کافی است طول اضلاع a و b را به دست بیاوریم. مطابق شکل، a و b وترهای مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی

متساوی‌الساقینی به طول ضلع‌های قائمه‌ی به ترتیب ۱ و ۲ هستند، پس:

$$\begin{cases} a^2 = 1^2 + 2^2 \Rightarrow a^2 = 5 \Rightarrow a = \sqrt{5} \\ b^2 = 2^2 + 2^2 \Rightarrow b^2 = 8 \Rightarrow b = 2\sqrt{2} \end{cases}$$

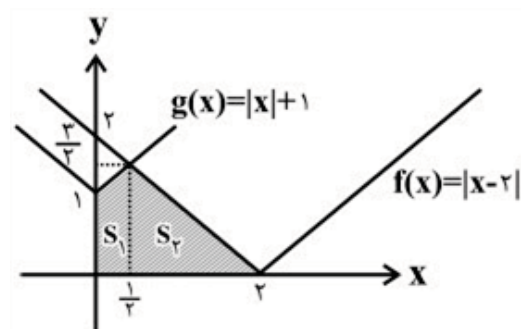


$$\text{مساحت مستطیل} = ab = (\sqrt{5})(2\sqrt{2}) = 2\sqrt{10}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. نمودار تابع f از انتقال دو واحدی نمودار تابع $y = |x|$ به سمت راست به دست می‌آید و نمودار تابع g از انتقال یک

۳

واحدی نمودار تابع $y = |x|$ به بالا به دست می‌آید.



$$0 \leq x \leq 2 \Rightarrow \begin{cases} g(x) = x + 1 \\ f(x) = -x + 2 \end{cases} \Rightarrow x + 1 = -x + 2 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$$

مقدار $S_1 + S_2$ مورد نظر سؤال است.

$$S_2 = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{9}{8} \text{ و } S_1 = \frac{\left(1 + \frac{3}{2}\right) \times \frac{1}{2}}{2} = \frac{5}{8}$$

$$S_1 + S_2 = \frac{14}{8} = \frac{7}{4}$$

۴

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. f تابعی همانی است، بنابراین داریم:

$$f(x) = x$$

$$g(x) = c$$

g تابعی ثابت است بنابراین به ازای هر x حقیقی داریم:

(c عدد ثابت)

h تابعی خطی است و معادله آن عبارت است از:

$$\begin{cases} h(2) = 0 \Rightarrow (2, 0) \in h \\ h(4) = 6 \Rightarrow (4, 6) \in h \end{cases} \xrightarrow{\text{شیب خط}} m = \frac{0 - 6}{2 - 4} = \frac{-6}{-2} = 3$$

$$\text{معادله خط: } y - y_1 = m(x - x_1) \xrightarrow{(2, 0)} y - 0 = 3(x - 2) \Rightarrow y = 3x - 6 \Rightarrow h(x) = 3x - 6$$

همچنین داریم:

$$\frac{f(2) + g(-2)}{2g(0)} = -2 \xrightarrow{\substack{f(x)=x \\ g(x)=c}} \frac{2 + c}{2 \times c} = -2 \Rightarrow -4c = 2 + c \Rightarrow -4c - c = 2 \Rightarrow c = \frac{-2}{5}$$

در نهایت حاصل موردنظر برابر است با:

$$\frac{f\left(\frac{1}{5}\right) + g(1)}{h\left(\frac{7}{5}\right)} = \frac{\frac{1}{5} + \left(-\frac{2}{5}\right)}{3\left(\frac{7}{5}\right) - 6} = \frac{-\frac{1}{5}}{7 - 6} = -\frac{1}{5}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۵

معادله‌ی خط گذرنده از نقاط A و B:

$$A = \begin{bmatrix} -5 \\ . \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\text{شیب} = \frac{0 - (-2)}{-5 - (-3)} = \frac{2}{-2} = -1$$

$$y = -x - 5$$

معادله‌ی خط گذرنده از B و C:

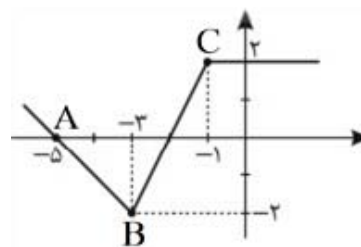
$$B = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{شیب} = \frac{-2 - 2}{-3 - (-1)} = \frac{-4}{-2} = 2 \Rightarrow y = 2x + 4$$

ضابطه‌ی تابع به صورت زیر خواهد بود:

$$f(x) = \begin{cases} -x - 5 & x < -3 \\ 2x + 4 & -3 \leq x \leq -1 \\ 2 & x > -1 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} f(-4) &= -(-4) - 5 = -1 \\ f\left(-\frac{2}{5}\right) &= 2\left(-\frac{2}{5}\right) + 4 = -\frac{4}{5} + 4 = \frac{16}{5} \\ f(4) &= 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(-4) + 4f\left(-\frac{2}{5}\right) + f(4) = -1 + 4\left(\frac{16}{5}\right) + 2 = 5$$



۶

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

چون f همانی است پس داریم:

$$va^2 - 2a = 9 \Rightarrow va^2 - 2a - 9 = 0 \Rightarrow (a+1)(va-9) = 0$$

$$\Rightarrow a = -1 \text{ یا } a = \frac{9}{v}$$

در تابع $f(\sqrt[3]{va-8})$ اگر $a = -1$ باشد زیر رادیکال فرجه‌ی زوج منفی می‌شود پس $a = \frac{9}{v}$ را قبول می‌کنیم. داریم:

$$g(x) = v\left(\frac{9}{v}\right) - 2 = v$$

$$f(\sqrt[3]{va-8}) + g(\sqrt[3]{1-a}) = \sqrt[3]{va-8} + v = \sqrt[3]{9-8} + v = 1 + v = 8$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۷

ابتدا فرض می‌کنیم $\sqrt{a} - 1 > 0$ باشد یعنی $\sqrt{a} > 1$ پس $a > 1$

حال اگر $\sqrt{a} - 1 > 0$ باشد پس باید سرخ ضابطه‌ی بالایی برویم، داریم:

$$f(\sqrt{a}-1) = 3(\sqrt{a}-1) + 2 = 3\sqrt{a} - 1 = 13 \Rightarrow 3\sqrt{a} = 14 \Rightarrow \sqrt{a} = \frac{14}{3}$$

که با فرض $a > 1$ همخوانی دارد.

$$\Rightarrow a = \frac{196}{9}$$

اما اگر $\sqrt{a} - 1 < 0$ باشد یعنی $\sqrt{a} < 1$ پس $0 \leq a < 1$ و در این صورت باید سرخ ضابطه‌ی پایین برویم. داریم:

$$f(\sqrt{a}-1) = 4(\sqrt{a}-1) + 5 = 4\sqrt{a} + 1 = 13 \Rightarrow 4\sqrt{a} = 12 \Rightarrow \sqrt{a} = 3 \Rightarrow a = 9$$

که با فرض $0 \leq a < 1$ همخوانی ندارد.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

۸

$$\begin{cases} (a, x+y) \\ (a, 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ \Rightarrow x=-2, y=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (b, -v) \\ (b, 2x-y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-y=-v \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2x + 2y = 2(-2) + 2(3) = -4 + 6 = 2$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به ضابطه‌های داده شده، داریم:

۹

$$f(2) = 2(2) + 3 = 4 + 3 = 7, g(2) = (2)^2 + 1 = 4 + 1 = 5, f(3) = 2(3) + 3 = 6 + 3 = 9$$

$$, k(2) = 2$$

$$h(f(2)) = h(7) = 7, h(g(2)) = h(5) = 5$$

$$k(f(3)) = k(9) = 2, g(k(2)) = g(2) = 5$$

$$\frac{h(f(2)) + h(g(2))}{k(f(3)) + g(k(2))} = \frac{7 + 5}{2 + 5} = \frac{12}{7}$$



گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱۰

$$1 + |y| \in \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$$

$$|y| \in \{0, 1, 2, 4, 5, 9, 14, 29\} \Rightarrow y \in \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 5, \pm 9, \pm 14, \pm 29\}$$

پس ۷ عضو باید حذف شود تا به ازای هر x فقط یک y وجود داشته باشد.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱۱

$$x^2 - x = x^2 - x^2 \Rightarrow 2x^2 - x^2 - x = 0$$

$$x(2x^2 - x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$f = \left\{ (0, 0), (1, 0), \left(\frac{3}{8}, \frac{3}{8}\right) \right\}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱۲

$$y = f(x) \xrightarrow{\text{یک واحد به چپ افقی}} y = f(x+1) \xrightarrow[\text{قرینه نسبت به محور } y \text{ها}]{x \rightarrow -x} y = f(-x+1)$$

$$\xrightarrow{\text{یک واحد به پایین (قائم)}} y = f(-x+1) - 1$$

$$y = f(-x+1) - 1 = (-x+1)^2 - 4(-x+1) + 3 - 1$$

$$y = x^2 + 2x - 1 \quad \text{ضابطه تابع نهایی حاصل از انتقال ها}$$

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2(1)} = -1, y = -2$$

$$\text{مجموع طول و عرض رأس سهمی نهایی} = (-1) + (-2) = -3$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۳

$$\left. \begin{aligned} x = 0 &\Rightarrow 3f(1) + f(2) = -3 \\ x = -1 &\Rightarrow 3f(2) + f(1) = -5 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} 3f(1) + f(2) = -3 \\ f(1) + 3f(2) = -5 \end{cases}$$

$$-8f(1) = 4 \Rightarrow f(1) = -\frac{1}{2} \Rightarrow f(2) = -\frac{3}{2}$$

$$f(x) = ax + b \Rightarrow \begin{cases} a(1) + b = -\frac{1}{2} \\ a(2) + b = -\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = -\frac{1}{2} \\ 2a + b = -\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow a = -1 \Rightarrow b = \frac{1}{2}$$

$$f(x) = -x + \frac{1}{2} \Rightarrow f\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

$$2f\left(-\frac{1}{2}\right) + 3f\left(\frac{1}{2}\right) = 2(1) + 3(0) = 2$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱۴

$$x = -2 \begin{cases} f(-2) = 4m + 1 \\ f(-2) = -15 \end{cases} \Rightarrow 4m + 1 = -15 \Rightarrow m = -4$$

$$f(3+m) = f(-1) = -4(-1)^2 + 1 = -3$$



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۵

برای پیدا کردن مقدار $f(x+1)$ کافی است در ضابطه‌ی f به جای x عبارت $x+1$ را قرار دهیم. بنابراین:

$$f(x) = ax + 2b \Rightarrow f(x+1) = a(x+1) + 2b \Rightarrow f(x+1) = ax + a + 2b \quad (1)$$

از طرفی $f(x+1) = f(x) + 1$ می‌باشد پس داریم:

$$f(x+1) = f(x) + 1 \xrightarrow{(1)} ax + a + 2b = ax + 2b + 1 \Rightarrow a = 1$$

$$f(x) = ax + 2b \xrightarrow{a=1} f(x) = x + 2b$$

همچنین طبق فرض مسئله $f(-2) = 8$ است، پس در ضابطه f به جای x عدد -2 را قرار می‌دهیم.

$$f(-2) = -2 + 2b \xrightarrow{f(-2)=8} -2 + 2b = 8 \Rightarrow 2b = 10 \Rightarrow b = 5$$

$$a + b = 1 + 5 = 6$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اگر نمایش جبری تابع خطی f را به صورت $f(x) = ax + b$ در نظر بگیریم، طبق صورت سؤال، نقاط ۱۶

$A = \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ و $B = \left(0, \frac{1}{2}\right)$ در آن صدق می‌کنند، پس:

$$\begin{cases} 0 = a \times \left(-\frac{1}{2}\right) + b \\ \frac{1}{2} = a \times (0) + b \end{cases} \Rightarrow b = \frac{1}{2}, a = 1$$

پس نمایش جبری f به صورت $f(x) = x + \frac{1}{2}$ است. اگر x طول نقطه‌ی تقاطع نمودار تابع f با نیمساز ربع دوم و چهارم باشد، داریم:

$$f(x) = -x. \Rightarrow x + \frac{1}{2} = -x. \Rightarrow x = -\frac{1}{4} \Rightarrow \text{عرض نقطه ی تقاطع ی} = \frac{1}{4}$$

$$(a, m^2 - 1) = (a, 4) \Rightarrow m^2 - 1 = 4 \Rightarrow m^2 = 5$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۷

$$(a, x + y) = (a, 4) \Rightarrow x + y = 4$$

$$(b, x - y) = (b, m^2) \Rightarrow x - y = m^2 = 5 \Rightarrow \begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2x = 9 \Rightarrow x = \frac{9}{2}, y = 4 - \frac{9}{2} = \frac{-1}{2} \Rightarrow x^2 + y^2 = \frac{81}{4} + \frac{1}{4} = \frac{82}{4} = 20.5$$

همانی $f \Rightarrow f(x) = x$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۸

$$g(x) = \frac{1}{x-a} \Rightarrow |g(x)| - 2 = \left| \frac{1}{x-a} \right| - 2 = \frac{1}{|x|} \xrightarrow{x=\frac{\sqrt{r}}{2}}$$

$$\frac{1}{\left| \frac{\sqrt{r}}{2} - a \right|} = \frac{1}{\frac{\sqrt{r}}{2}} + 2 = 2 + \sqrt{2} \Rightarrow \left| \frac{\sqrt{r}}{2} - a \right| = \frac{1}{2 + \sqrt{2}} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{r}}{2} - a = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow a_1 = \sqrt{2} - 1 \\ \frac{\sqrt{r}}{2} - a = \frac{\sqrt{r}}{2} - 1 \Rightarrow a_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow a_2 - a_1 = 1 - (\sqrt{2} - 1) = 2 - \sqrt{2}$$

توجه: چون تابع f همانی است پس اختلاف جواب‌های $f(x+a) = 3$ همان اختلاف دو مقداری است که برای a به دست آمده است.



۱۹

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. بهترین راه تعیین برد، رسم نمودار است. پس کفایست نمودار f را رسم کنیم:
همانطور که مشاهده می‌فرمایید $R_f = [-2, +\infty)$ پس حالا باید خط $y = 2$ را با شاخه سمت راست نمودار تابع f یعنی $y = x - 2$ قطع
بدهیم که نقطه‌ی $x = 4$ محل تقاطع دو نمودار است.

۲۰

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.
دامنه‌ی تابع: $(-4, -2) \cup [1, 4)$
برد تابع: $[-3, 3]$
اشتراک دامنه و برد: $[-3, -2) \cup [1, 3]$
که شامل اعداد صحیح $3, 2, 1, -2, -3$ است.

۲۱

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. نمودار این تابع را که به صورت سهمی است در محدوده‌ی $[1, 5]$ برای x ، رسم می‌کنیم.

برد تابع که شامل تصویر تمام نقاط روی نمودار بر روی محور y هاست به صورت بازه‌ی $[-1, 8]$ می‌باشد.

۲۲

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. در گزینه ۴ برد فقط یک عضو دارد. پس از هر عضو دامنه فقط یک پیکان می‌تواند خارج شود لذا همواره تابع است.

۲۳

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. در مؤلفه‌های اول زوج‌های مرتب تابع f ، دو مقدار $3 + a^2$ و $2 - b$ وجود دارد. با توجه به این که $3 + a^2 > 0$ است، این دو مقدار نمی‌توانند با هم برابر باشند و دامنه تابع شامل این دو مقدار است. حال برای $2 - b$ و $3a + 1$ حالت‌های زیر ممکن است رخ دهد:

$$1 \left\{ \begin{array}{l} 3a + 1 = a^2 + 3 \Rightarrow a^2 - 3a + 2 = 0 \Rightarrow (a - 2)(a - 1) = 0 \Rightarrow a = 2 \text{ یا } a = 1 \\ b - 2 = a^2 + 3 \Rightarrow \begin{cases} \text{اگر } a = 2 \Rightarrow b - 2 = 4 + 3 \Rightarrow b = 9 \Rightarrow a + b = 11 \\ \text{اگر } a = 1 \Rightarrow b - 2 = 1 + 3 \Rightarrow b = 6 \Rightarrow a + b = 7 \end{cases} \end{array} \right.$$

$$2 \left\{ \begin{array}{l} 3a + 1 = a^2 + 3 \Rightarrow a = 1 \text{ یا } a = 2 \\ b - 2 = -2 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow \begin{cases} a + b = 1 \\ \text{یا} \\ a + b = 2 \end{cases} \end{array} \right.$$

$$3 \left\{ \begin{array}{l} 3a + 1 = -2 \Rightarrow a = -1 \\ b - 2 = -2 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow a + b = -1 \\ 3a + 1 = -2 \Rightarrow a = -1 \end{array} \right.$$

$$4 \left\{ \begin{array}{l} b - 2 = a^2 + 3 \xrightarrow{a=-1} b - 2 = 1 + 3 \Rightarrow b = 6 \Rightarrow a + b = 5 \end{array} \right.$$

با توجه به حالات فوق، حداکثر مقدار $a + b$ برابر با ۱۱ و حداقل مقدار آن برابر با -۱ است که اختلاف این دو مقدار برابر با ۱۲ است.



گزینه ۱ پاسخ صحیح است. $f(x) = x$ تابع همانی است پس $f(x) = x$

$$b = 1, 2a + 3 = -1 \Rightarrow a = -2$$

$$b + 1 = c \Rightarrow c = 2$$

از طرف دیگر $g(x) = (1 + e)x^2 + (c - 2)x + b + 1$ یک تابع ثابت است، پس:

$$1 + e = 0, c - 2 = 0$$

بیشترین مقدار تابع قدرمطلق $h(x)$ مطابق برد داده شده و با شرط $n > 0$ در $x = 2$ اتفاق می‌افتد که برابر ۴ است:

$$h(2) = 4 \Rightarrow m = 4$$

$$\text{محله برخورد با محور } y \text{ها: } (0, -6) \Rightarrow -6 = 4 - 2n \Rightarrow n = 5 \Rightarrow h(x) = 4 - 5|2 - x|$$

$$g(mc + n) - h(a - b + e) = g(13) - h(-4) = 2 - (-26) = 28$$

تابع همانی $(a^2 - 2a - 4, a) \in f$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$a^2 - 2a - 4 = a \Rightarrow a^2 - 3a - 4 = 0 \Rightarrow (a - 4)(a + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ a = -1 \end{cases}$$

$$a = 4 \Rightarrow a - 1 = 4 - 1 = 3 \Rightarrow b = 3 \Rightarrow b - a = 3 - 4 = -1 \Rightarrow c = -1$$

سه زوج مرتب متمایز دارد. $f = \{(4, 4), (3, 3), (-1, -1)\}$ ق ق

$$a = -1 \Rightarrow a - 1 = -1 - 1 = -2 \Rightarrow b = -2 \Rightarrow b - a = -2 - (-1) = -1 \Rightarrow c = -1$$

غ ق ق: دو زوج مرتب متمایز دارد. $f = \{(-1, -1), (-2, -2), (-1, -1)\}$

$$4 + 3 - 1 = 6$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

برای رسم نمودار تابع $y = x^2 - 2x$ داریم:

$$\begin{cases} x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-2)}{2(1)} = \frac{2}{2} = 1 \\ y = (1)^2 - 2(1) = 1 - 2 = -1 \end{cases} \Rightarrow$$

و شکل تابع $g(x)$ در حالت کلی به صورت زیر است:

و مشاهده می‌شود که برد تابع به صورت $-1 \leq y < 2$ است.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. تابع با ضابطه $f(x) = x$ را تابع همانی می‌نامند. بنابراین هر یک از ضابطه‌های تابع داده شده هم‌ارز با x است.

$$2ax = x \Rightarrow 2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$x + 2b - a \equiv x \Rightarrow 2b - a = 0 \Rightarrow 2b = a \Rightarrow 2b = \frac{1}{2} \Rightarrow b = \frac{1}{4}$$

$$a + b = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

حاصل عبارت موردنظر را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & -2 \leq x \leq 1 \\ 3 - x & 0 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} f(1) = 1 & -2 \leq x \leq 1 \\ f(1) = 2 & 0 \leq x \leq 5 \end{cases} \text{ تابع نیست}$$



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. $f(x) = k$ و $g(x) = x$ است بنابراین:

$$f(k) = k, g(k) = k$$

$$f(-۳) = k, g(-k) = -k, g(۲) = ۲ \Rightarrow \frac{-(-k) - ۳k}{۲-۱} = ۲(k)^۲ + ۳k \Rightarrow \frac{k - ۳k}{۱} = ۲k^۲ + ۳k$$
$$\Rightarrow -۲k = ۲k^۲ + ۳k \Rightarrow ۲k^۲ + ۵k = 0 \Rightarrow \begin{cases} k = 0 \\ k = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. نمودار تابع ثابت f ، از نقطه $(۲, -۲)$ می‌گذرد، بنابراین ضابطه‌ی آن به صورت $f(x) = ۳$ است. حاصل عبارت خواسته شده برابر است با:

$$f(۴) = f(-۱) = ۳ \Rightarrow (f(۴))^۲ + ۳f(-۱) = ۹ + ۳(۳) = ۱۸$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. می‌دانیم ضابطه‌ی هر تابع خطی به صورت $f(x) = ax + b$ می‌باشد، ضابطه‌ی $y = \frac{x^۲ + bx + ۶}{x - ۲}$ زمانی خطی

می‌باشد که عامل $x - ۲$ در صورت کسر نیز موجود باشد. بنابراین:

$$x = ۲ \Rightarrow (۲)^۲ + ۲b + ۶ = 0 \Rightarrow b = -۵$$

$$f(x) = \begin{cases} a & ; x = ۲ \\ x - ۳ & ; x \neq ۲ \end{cases}$$

پس با جایگذاری b و ساده‌سازی ضابطه خواهیم داشت:

با توجه به خطی بودن تابع f بایستی به ازای $x = ۲$ یک مقدار روی خط $y = x - ۳$ حاصل شود. بنابراین:

$$a = ۲ - ۳ \Rightarrow a = -۱$$

$$f(-۱) = -۱ - ۳ = -۴ \quad \text{در نتیجه:}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به این‌که تابع f همانی و g ثابت می‌باشد، داریم:

$$f(x) = x, g(x) = k$$

$$g(m) - f(۲m + ۱) = ۳ \Rightarrow k - ۲m - ۱ = ۳ \Rightarrow k - ۲m = ۴ \quad (۱) \quad \text{آن‌گاه:}$$

$$f(m) = g(۴) - ۳ \Rightarrow m = k - ۳ \Rightarrow m - k = -۳ \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{۱, ۲} \begin{cases} k - ۲m = ۴ \\ m - k = -۳ \end{cases} \Rightarrow m = -۱, k = ۲$$

$$f(g(-۱)) = f(۲) = ۲ \quad \text{در نتیجه داریم:}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. روابط «الف»، «ث»، «ج» و «د» به هر ورودی، ممکن است بیش از یک خروجی را ارتباط دهند:

الف) هر عدد، می‌تواند بیش از یک مقسوم‌علیه داشته باشد. مثلاً برای عدد ۱۲، مقسوم‌علیه‌های ۱، ۲، ۳، ۴ و ۶ وجود دارد.

ب) هر فرد، می‌تواند بیش از یک دوست داشته باشد.

ج) هر عدد مثبت، دو ریشه‌ی چهارم (و کلاً ریشه‌ی زوج) دارد.

د) سه مورد «ب»، «پ» و «ت»، به هر ورودی، یک خروجی نسبت می‌دهند، پس تابع هستند.



۲۴

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. چون نمودار تابع $f(x)$ در بازه $(۲, ۴)$ بالای نمودار تابع g قرار دارد، پس باید بازه $(۲, ۴)$ مجموعه جواب نامعادله‌ی زیر باشد:

$$ax^2 + bx - 2 > 2x - 1 \Rightarrow ax^2 + (b - 2)x - 1 > 0$$

برای این منظور باید عبارت $ax^2 + (b - 2)x - 1$ دارای دو ریشه‌ی ۲ و ۴ باشد و علاوه بر آن a نیز منفی باشد (تا مجموعه جواب این نامعادله، بین

دو ریشه‌ی آن عبارت باشد) پس اگر عبارت $ax^2 + (b - 2)x - 1$ را $P(x)$ بنامیم، خواهیم داشت: $P(x) = ax^2 + (b - 2)x - 1$

$$P(2) = 4a + 2b - 6 - 1 = 4a + 2b - 7 = 0 \Rightarrow 4a + 2b = 7$$

$$P(4) = 16a + 2b - 12 - 1 = 16a + 2b - 13 = 0 \Rightarrow 8a + 2b = \frac{13}{2}$$

$$\Rightarrow 4a = -\frac{1}{2} \Rightarrow a = -\frac{1}{8} \Rightarrow b = \frac{15}{4}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

۲۵

$$(a, a^2) = \{(0, 0), (1, 1), (2, 4)\}$$

$$(a, a + b) = \{(0, 0), (0, 1), (1, 2), (1, 1), (2, 3), (2, 2), (2, 3), (2, 4)\}$$

اجتماع این دو مجموعه ۹ عضو خواهد داشت.

۲۶

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ابتدا ضابطه‌ی هریک از توابع داده شده را به دست می‌آوریم:

$$g(x) = -x + 1$$

$$f(x) = a(x - 1)^2 + 1 \Rightarrow (0, 0) \Rightarrow 0 = a + 1 \Rightarrow a = -1$$

$$\Rightarrow f(x) = -(x - 1)^2 + 1 = -x^2 + 2x \Rightarrow f(x) = g^2(x) \Rightarrow -x^2 + 2x = (-x + 1)^2$$

$$\Rightarrow -x^2 + 2x = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow 2x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow S = -\frac{b}{a} = -\frac{-4}{2} = 2$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. باید نامعادله $|x| + 2x > \frac{9}{2} - \frac{1}{2}x - x^2$ را حل کنیم. برای حل این نامعادله‌ی دو حالت $x \geq 0$ و $x < 0$ را در

نظر می‌گیریم:

۲۷

$$x \geq 0 \Rightarrow -x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{9}{2} > 2x \Rightarrow x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{9}{2} < 0 \Rightarrow 2x^2 + 5x - 9 < 0$$

$$\Rightarrow \Delta = 49 - 4(2)(-9) = 49 + 72 = 121 \Rightarrow x = \frac{-5 \pm 11}{4} \Rightarrow x = 1 \text{ یا } x = -\frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow -\frac{9}{2} < x < 1 \xrightarrow{x \geq 0} 0 \leq x < 1 \quad (I)$$

$$x < 0 \Rightarrow -x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{9}{2} > x \Rightarrow x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{9}{2} < 0$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 3x - 9 < 0 \Rightarrow \Delta = 9 - 4(2)(-9) = 81 \Rightarrow x = \frac{-3 \pm 9}{4} \Rightarrow x = \frac{3}{2} \text{ یا } x = -3$$

$$\Rightarrow -3 < x < \frac{3}{2} \xrightarrow{x < 0} -3 < x < 0 \quad (II)$$

اجتماع موارد (I) و (II) برابر با مجموعه‌ی $(-3, 1)$ است. وسط این بازه -1 است. $\frac{-3+1}{2}$



گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۲۸

$$-2b = 1 \Rightarrow b = -\frac{1}{2} \Rightarrow a = c$$

$$a + b - c = a - \frac{1}{2} - a = -\frac{1}{2}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۳۹

جمله اول و آخر درست هستند. جمله اول تابع تهی و جمله آخر توابع $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$ و $g = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ وجود دارند. نمی‌تواند دامنه غیرتهی و برد تهی باشد، چون طبق تعریف کتاب، می‌بایست هر عضو دامنه دقیقاً، مؤلفه اول یک عضو تابع باشد و به همین دلیل هم نمی‌شود تعداد عضو دامنه کمتر از تعداد عضو برد باشد.

چون f یک تابع خطی است بنابراین: ۴۰

$$f(x) = ax + b \Rightarrow f\left(\frac{1}{x}\right) = a\left(\frac{1}{x}\right) + b$$

$$f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = ax + b + \frac{a}{x} + b = \frac{ax^2 + 2bx + a}{x} = \frac{2x^2 - 2x + 2}{x} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ 2b = -2 \Rightarrow b = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = 2x - 1 \Rightarrow f(5) = 2(5) - 1 = 9$$



پاسخنامه کلیدی

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴
۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴
۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴
۱۶	۱	۲	۳	۴
۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۸	۱	۲	۳	۴
۱۹	۱	۲	۳	۴
۲۰	۱	۲	۳	۴
۲۱	۱	۲	۳	۴
۲۲	۱	۲	۳	۴
۲۳	۱	۲	۳	۴
۲۴	۱	۲	۳	۴
۲۵	۱	۲	۳	۴
۲۶	۱	۲	۳	۴
۲۷	۱	۲	۳	۴
۲۸	۱	۲	۳	۴
۲۹	۱	۲	۳	۴
۳۰	۱	۲	۳	۴
۳۱	۱	۲	۳	۴
۳۲	۱	۲	۳	۴

۳۳	۱	۲	۳	۴
۳۴	۱	۲	۳	۴
۳۵	۱	۲	۳	۴
۳۶	۱	۲	۳	۴
۳۷	۱	۲	۳	۴
۳۸	۱	۲	۳	۴
۳۹	۱	۲	۳	۴